

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

С. В. Рындина

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Учебно-методическое пособие

ПЕНЗА 2018

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)

С. В. Рындина

Исследование систем управления

Учебно-методическое пособие

Пенза
Издательство ПГУ
2018

УДК 005.3(075)

P93

Р е ц е н з е н т

кандидат технических наук, доцент

А. А. Масленников

Рындина, С. В.

P93 Исследование систем управления : учеб.-метод. пособие /
С. В. Рындина. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. – 100 с.

Рассмотрены математические модели задач управления: планирование производства, управление логистикой, персоналом, финансами (поддержка проектов, управление инвестициями), принятие управленческих решений в многокритериальных задачах управления, сетевое планирование и управление. Приведены задания для практических занятий по математическому моделированию задач управления. Материал пособия соответствует программе дисциплины «Исследование систем управления».

Издание подготовлено на кафедре «Экономическая кибернетика» ПГУ и предназначено для обучающихся по специальности 38.05.02 «Таможенное дело».

УДК 005.3(075)

© Пензенский государственный
университет, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	4
1 ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ.....	5
2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА	8
2.1 Управление производством.....	8
2.2 Практическое задание (пример решения)	10
2.3 Варианты для самостоятельного решения	19
3 ТРАНСПОРТНАЯ МОДЕЛЬ	23
3.1 Управление перевозками (распределительная логистика). Управление персоналом	23
3.2 Практическое задание (пример решения)	24
3.3 Варианты для самостоятельного решения	29
4 МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ВИДЕ СУЖДЕНИЙ ДА/НЕТ	36
4.1 Управление финансированием проектов. Управление арендой.....	36
4.2 Практическое задание (пример решения)	36
4.3 Варианты для самостоятельного решения	44
5 ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ	55
5.1 Управление инвестиционным портфелем, замена оборудования	55
5.2 Практическое задание (пример решения)	56
5.3 Варианты для самостоятельного решения	65
6 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ.....	71
6.1 Метод анализа иерархий (АНР), метод ELECTRE.....	71
6.2 Практическое задание (пример решения)	73
6.3 Варианты для самостоятельного решения	82
7 СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ	87
7.1 Метод критического пути.....	87
7.2 Практическое задание (пример решения)	90
7.3 Варианты для самостоятельного решения	93
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК.....	99

ВВЕДЕНИЕ

В соответствии с учебным планом студенты третьего курса специальности 38.05.02 «Таможенное дело» изучают дисциплину «Исследование систем управления».

Целью учебно-методического пособия является формирование знаний об исследовании систем управления и используемых при этом математических моделях, а также умений использовать математический аппарат для определения оптимальных вариантов сочетания параметров систем управления.

В пособии рассмотрены модели управления планом производства, управление распределительной логистикой и назначениями (управление персоналом), управленческие решения на основе одного критерия оптимальности и нахождение компромиссного решения в условиях множества критериев, сетевое планирование и управление для проектной работы.

1 ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Система управления – организационная система, состоящая из двух подсистем: управляющей (субъект управления) и управляемой (объект управления), прямых и обратных связей между ними.

Управление – процесс взаимодействия субъекта и объекта управления для достижения системой поставленной цели.

Основные функции управления:

- предвидение (планирование);
- организация;
- регулирование.

Планирование исследования системы управления включает в себя:

- определение объекта исследования, предмета исследования;
- формулирование цели и задач исследования;
- выдвижение гипотез;
- выбор конкретных методов исследования;
- определение временных рамок, ресурсов и точек контроля за ходом исследования;
- планирование результатов, которые предполагается достичь в ходе исследования.

Методология исследования – это логическая организация исследования, которая включает в себя определение всех составных частей исследования: объекта, предмета, целей, задач и т.д., в том числе и методики исследования.

Объект исследования – система (подсистема управления). Предмет исследования – конкретная проблема, связанная с этой системой.

Цель исследования – конечный результат, которого необходимо достичь в ходе исследования. Постановка цели достаточно общая, а пути ее достижения раскрываются в задачах исследования.

Задачи исследования – это комплекс действий, необходимых для достижения цели.

Методы исследования – это приемы, процедуры и операции эмпирического и теоретического познания и изучения явлений действительности.

Методики исследования – характерные, наиболее употребляемые сочетания методов, типовые исследовательские процедуры.

Например, объект исследования – производство изделий, предмет исследования – эффективность программы производства.

Цель исследования – разработка эффективной производственной программы, которая позволит оптимизировать прибыль и упрочить положение компании на рынке.

Задачи исследования:

- определить номенклатуру изделий (технологические карты), сколько ресурсов требуется для производства: включая сырье, оборудование, труд работников;
- проанализировать данные продаж: какие изделия пользуются спросом, какие изделия формируют лояльность покупателей;
- провести конкурентный анализ: доля рынка, товарное предложение, уровень цен;
- составить и решить задачу оптимизации производственной программы с учетом всех найденных параметров и ограничений.

При решении отдельных задач исследования будут использоваться различные методы. Для разработки технологических карт требуется использование количественных методов для обработки результатов наблюдений на производстве. При анализе данных продаж применяются статистические методы. Для решения оптимизационной задачи используются методы математического программирования. Совокупность применяемых в исследовании методов является методикой проведения исследования.

Обычно необходимость в исследовании системы управления возникает при выявлении проблемы: наличием расхождения между реальным состоянием системы и ее желаемым состоянием. Для определения расхождений требуется опора на измеримые показатели системы: время, денежные средства и другие параметры функционирования производства (или другой составляющей предприятия). Стратегические и тактические цели организации требуют детализации в конкретных значениях (или допустимых интервалах изменения) показателей деятельности: процент брака, объем выпуска и т.п.

Выдвигаются гипотезы о причинах появления проблемы, которые тестируются в ходе исследования. Цель исследования – определить пути решения проблемы. Задачи – выяснить наличие и силу связи между предполагаемыми причинами появления проблемы и самой проблемой. По результатам исследования гипотезы уточняются или отклоняются. Итерационный процесс оптимизации, который позволяет усовершенствовать функционирование системы управления, осуществляется на основе плановых изменений.

Проблемы возникают в различных частях системы, и причины появления нарушений в функционировании системы управления могут быть разными. Не выявив причины, можно принять неверные

решения и только усугубить ситуацию, потратив время и средства на излишние преобразования.

Математические методы, которые используются для исследования систем управления в пособии, – это методы решения оптимизационных задач.

Оптимизация – это улучшение показателя эффективности, который зависит от некоторых параметров системы управления. И на эти параметры накладываются ограничения. Если показатель эффективности один, то задача будет однокритериальной и достаточно простой. Если критериев несколько, то задача многокритериальная и обычно наилучшего по всем показателям решения не существует. С помощью специальных методов решения многокритериальных задач в области компромиссов, где находятся наилучшие по отдельным критериям решения, определяют то, которое по сочетанию значений всех критериев признается лучшим.

2 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПЛАНИРОВАНИЯ ПРОИЗВОДСТВА

2.1 Управление производством

При исследовании систем управления одной из важнейших задач является оптимизация производства. Перечислим факторы, которые могут влиять на масштабирование бизнеса: спрос (приток клиентов), квалифицированный персонал, оборудование, сырье (расходные материалы).

Любая компания существует в условиях ограничений, которые накладываются на эти факторы. Выявить узкое место в процессах производства и реализации товаров (услуг) и постараться выжать из существующих ограничений максимум – это одна из целей исследования систем управления производством.

Компания обычно имеет некоторую номенклатуру изделий, которые отличаются затратами сырья, расходом времени оборудования и персонала, а также платежеспособным спросом. Есть изделия, способные продать себя самостоятельно, а есть такие, которые требуют приличных затрат на продвижение. Все это приводит к тому, что из имеющихся резервов сырья, на оборудовании, которое есть в наличии, имеет смысл производить продукцию, которая принесет большую прибыль (при сложившихся на рынке ценах).

Рассмотрим, например, производство холодильного оборудования (компания «Полаир»). В конце 2005 г. в компании сменился генеральный директор. Им стал Константин Акимов, использующий в управлении теорию ограничений (Theory of Constraints (ТОС)). Основоположником ТОС является израильский физик Элияху Голдратт, который изложил основные принципы придуманной им теории в двух книгах: «Цель» и «Цель-2» [1, 2]. Основная идея ТОС в том, что предприятие имеет производительность, которая равна пропускной способности ее самого слабого участка (ограничения). Это может быть недостаток оборудования, низкий спрос, скудная номенклатура продукции и т.д. Добиваться прироста эффективности не в критических точках – нет смысла. Если узкое место предприятия – низкий спрос, то рост скорости производства продукции приведет к проблемам, а не к увеличению эффективности. Нереализованная продукция – это замороженные деньги, которые не приносят прибыли, зато требуют расходов: излишки продукции нужно будет где-то хранить.

«Если завод делает 1000 корпусов для холодильников, 100 дверей и 10 ручек, то его конечный результат – всего-навсего 10 холодильников. Значит, "узким местом" являются ручки, а на 990 корпусов и 90 дверей только зря были потрачены материалы и усилия. Нарращивать их производство бесполезно – результативность завода повысится только при увеличении выпуска ручек» [6].

Важно не только найти «узкое место», но и эксплуатировать его по максимуму:

- управление номенклатурой изделий;
- управление ресурсами.

Тривиальный подход к повышению отдачи от производства – ранжировать линейку продукции по маржинальности и производить самые прибыльные продукты. Однако не все так однозначно. На низкомаржинальном хлебе пекарня делает больше выручки, чем на высокомаржинальных тортах: здесь узким местом становится спрос. И небольшая прибыль с буханки хлеба, умноженная на большие объемы, дает по валу больший доход, чем несколько тортов.

В компании «Полаир» шкафы-боттлеры для хранения напитков (со стеклянной витриной) приносили вдвое больше прибыли по сравнению с обычными холодильными шкафами. Но узким местом на производстве холодильного оборудования была пробивная машина: время ее использования для боттлеров было в 20 раз больше, чем для обычных холодильных шкафов. Так как купить новую пробивную машину не представлялось возможным, то с учетом «узкого места» соотношение производимых боттлеров к обычным холодильным шкафам 1:20, т.е. в два раза менее прибыльной продукции предприятие может произвести в 20 раз больше. Если изменить номенклатуру производимых изделий в пользу обычных холодильных шкафов, это даст прирост валовой прибыли в 10 раз.

При насыщении рынка определенной продукцией «узким местом» может стать спрос. Может измениться и прибыльность производимой продукции. Поэтому, с учетом новых вводных, та же задача будет иметь иное решение. Это значит, что решение имеет свой срок годности и модель нужно периодически настраивать под текущие параметры рынка и производства.

Так боттлеры невыгодно производить, пока нет дополнительной пробивной машины, или пока прибыльность с единицы изделия не выросла в 10 раз. Прибыль – это разность между ценой реализации и себестоимостью продукции, если изначально процент прибыли в цене был невелик, то повышение прибыльности в 10 раз может поднять цену «всего» на 50 %.

Еще один характерный пример. К середине 2006 г. компания «Косогоров самогон» провела ребрендинг тары для производимого алкоголя [7]. Вместо винтовой пробки под влиянием целого ряда причин перешли на невинтовую пробку из синтетических материалов. Такие пробки делали на тот момент только в Европе. Компания заключила договор с итальянскими поставщиками и была вполне удовлетворена качеством первой партии. Когда первой партии пробок оставалось примерно для полуторамесячной работы производства, был сделан повторный заказ. Возникли проблемы с доставкой. Перед высоким сезоном (пиком оптовых продаж в октябре-ноябре) компания столкнулась с дефицитом ресурсов (невинтовых пробок). Стало невозможно поставлять продукцию по договорам с оптовыми закупщиками, а это штрафы от сетей, разорванные контракты, потеря полугодовой выручки (в высокий сезон делается больше всего продаж). Количество поставляемого алкоголя в этой ситуации совпадает с числом имеющихся пробок. Формально оценка стоимости пробки для компании – это прибыль с бутылки алкоголя (в случае наличия в контрактах пунктов о штрафах и неустойках – гораздо выше). Компания заказала еще пробок в Италии и перевезла их самолетом как обычный багаж (билеты на самолет для курьеров, оплата багажа). Пробки получились золотыми. С завода готовые бутылки забирались каждый день, транспортные издержки выросли в пять раз. Но даже эту цену за дефицитный ресурс можно было заплатить, так как потенциальные потери были просто колоссальными.

«Теория ограничений хороша для развитой экономики, когда менеджеры управляют стабильным производственным потоком и только распределяют существующие ресурсы» [8].

2.2 Практическое задание (пример решения)

Задание

Для изготовления трех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице 2.1.

Таблица 2.1 – Нормы расхода сырья

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	А	В	С	
I	2	3	3	800
II	4	5	2	600
III	0	1	2	420
Прибыль с ед. изделия	17	10	12	

Необходимо:

1) сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум общей прибыли, указать оптимальную производственную программу, пояснить, почему в производственную программу вошли не все виды изделий;

2) сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план;

3) проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане.

Решение

Построим математическую модель прямой задачи.

Пусть x_1 – количество изделий вида А; x_2 – количество изделий вида В; x_3 – количество изделий вида С, тогда функция прибыли имеет вид (2.1):

$$\max F(X) = 17x_1 + 10x_2 + 12x_3, \quad (2.1)$$

ограничения на количество используемых ресурсов:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 800, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 600, \\ x_2 + 2x_3 \leq 420, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}.$$

В левой части неравенств (2.2) объем используемого в производстве ресурса соответствующего вида, в правой части запас. Разность между левой и правой частью – количество ресурса, который остался в производстве.

Математическая модель вида (2.1–2.2) – это задача линейного программирования (программирование в этом случае означает не написание кода, а процесс нахождения решения в виде последовательных шагов – итераций). Линейной задача будет из-за линейности всех функций, которые используются в математической модели: линейная и целевая функция и функции в левой части ограничений.

Подключим инструмент **Поиск решения**: командное меню **Сервис ► Настройки ► Поиск решения**. После этого инструмент Поиск решения должен появиться в командном меню Сервис.

В MS Excel 2007 и более свежих версиях щелчок правой клавишей мыши на кнопке Office в левом верхнем углу  и выберите опцию **Настроить панель быстрого доступа** или в верхней строке раскрывающуюся стрелку для настройки панели быстрого доступа

(рисунок 2.1). В списке выберите опцию **Надстройки**. После щелкните кнопку **Перейти** и в диалоговом окне **Надстройки** подключите **Поиск решения** (рисунок 2.2).

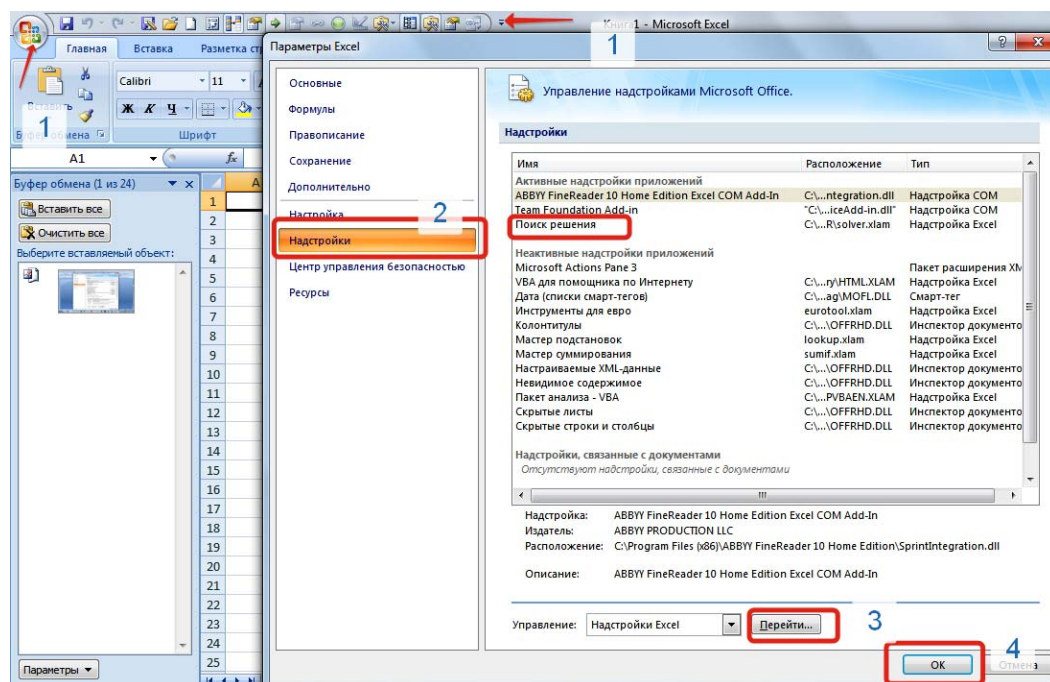


Рисунок 2.1 – Параметры Excel

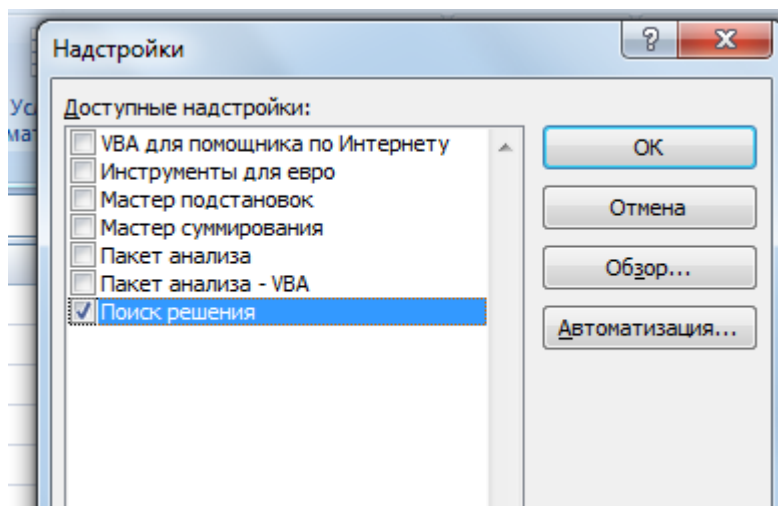


Рисунок 2.2 – Подключение Надстроек

Поиск решения будет доступен в командном меню **Данные** в правом верхнем углу пиктографического меню (MS Excel 2007 и позже). В более ранних версиях MS Excel в командном меню **Сервис**.

В документе MS Excel создадим страничку модели задачи (рисунки 2.3–2.4):

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные					
2	Имя	x1	x2	x3	ЦФ (целевая функция)		
3	Значение	0	0	0	Значение	Направление	
4	Козф. ЦФ	17	10	12	=СУММПРОИЗВ(B3:D3;B4:D4)	max	
5		Ограниче					
6		Коэффициенты левой части			Левая часть	Знак	Правая часть
7	I(x4)	2	3	3	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$D\$3;B7:D7)	<=	800
8	II(x5)	4	5	2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$D\$3;B8:D8)	<=	600
9	III(x6)	0	1	2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$D\$3;B9:D9)	<=	420

Рисунок 2.3 – Страница модели задачи (формулы)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Переменные						
2	Имя	x1	x2	x3	ЦФ (целевая функция)			
3	Значение	0	0	0	Значение	Направление		
4	Козф. ЦФ	17	10	12	0	max		
5		Ограничения						
6		Коэффициенты левой части			Левая часть	Знак	Правая часть	
7	I(x4)	2	3	3	0	<=	800	
8	II(x5)	4	5	2	0	<=	600	
9	III(x6)	0	1	2	0	<=	420	

Рисунок 2.4 – Страница модели задачи (числовые значения)

Значения переменных модели равны нулю – это исходное допустимое решение задачи. Начальное решение, с которого инструмент Поиск решения начнет оптимизацию, соответствует экономическому решению – ничего не производить. Прибыль в этом случае равна нулю (ячейка E4), как впрочем и расходы ресурсов (E7:E9).

Встав на ячейку, сохраняющую значение целевой функции (в примере E4), вызовем инструмент Поиск решения и заполним диалоговое окно исходной информацией (рисунок 2.5).

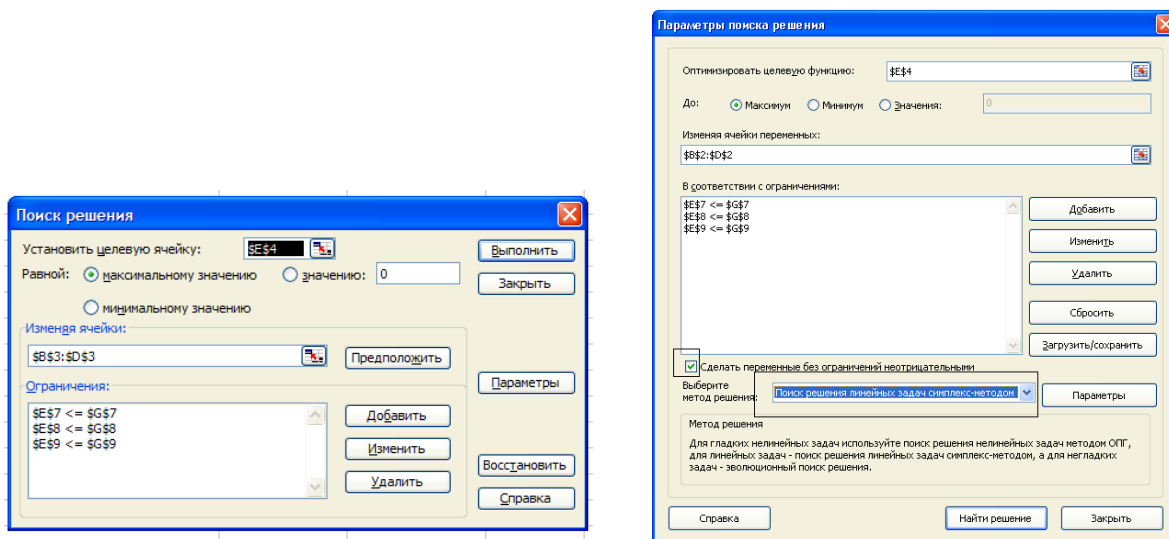


Рисунок 2.5 – Диалоговое окно инструмента Поиск решения (разные версии)

Изменяемые ячейки – те, которые содержат значения переменных (в примере B3:D3). Ограничения вводятся с помощью кнопки **Добавить** (рисунок 2.6).

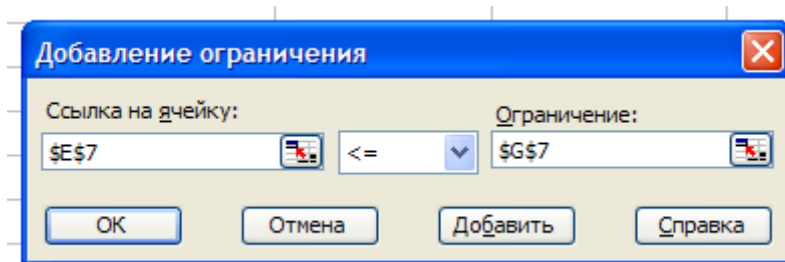


Рисунок 2.6 – Добавление ограничений

После ввода очередного ограничения выбираем команду **Добавить**, ввод последнего ограничения завершаем командой **ОК**.

На вкладке **Параметры** выбираем необходимые характеристики модели (рисунок 2.7).

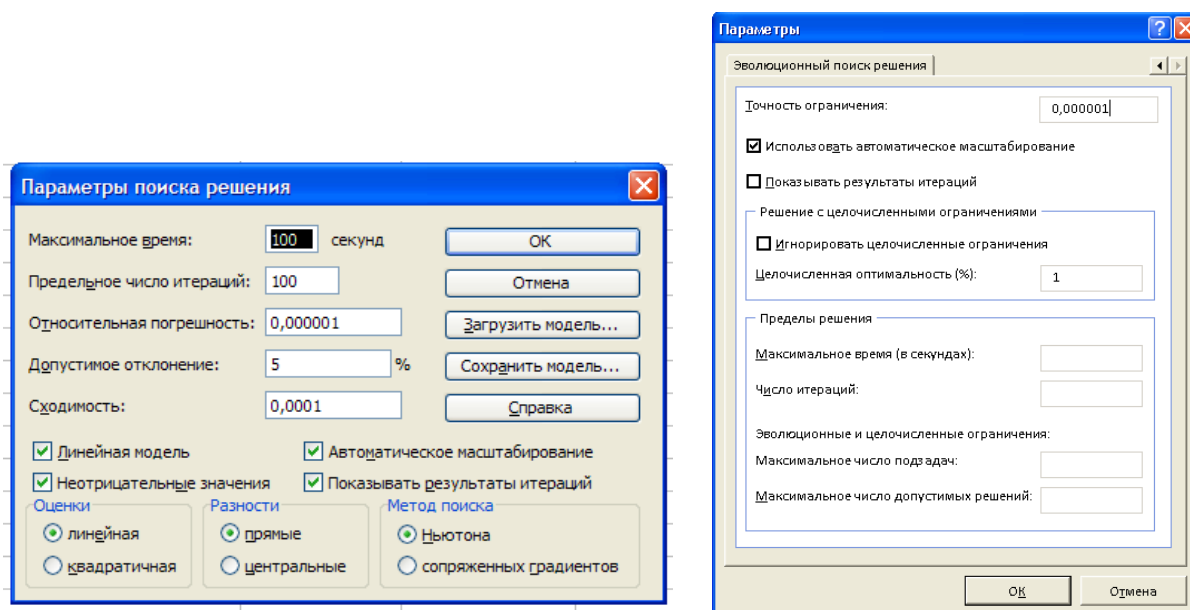


Рисунок 2.7 – Вкладка параметры поиска решения (разные версии)

Возвращаемся к исходному окну (см. рисунок 2.5) и выбираем команду **Выполнить**.

Так как на вкладке **Параметры** диалогового окна **Поиск решения** была выбрана опция **Показывать результаты итераций**, то программа последовательно найдет допустимые решения, улучшающие значения целевой функции (рисунок 2.8).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Переменные							
2	Имя	x1	x2	x3	ЦФ (целевая функция)			
3	Значение	150	0	0	Значение	Направление		
4	Коеф. ЦФ	17	10	12	2550	max		
5	Ограничения							
6		Коэффициенты левой части			Левая часть	Знак	Правая часть	
7	I(x4)	2	3	3	300	<=	800	
8	II(x5)	4	5	2	600	<=	600	
9	III(x6)	0	1	2	0	<=	420	

Рисунок 2.8 – Результат первой итерации

Первоначально в план производства включается самое прибыльное изделие. В задаче это изделие А. Но программа будет искать более прибыльный план производства, включая в производство другие типы изделий. Вторая итерация будет в этой задаче последней (рисунок 2.9).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Переменные							
2	Имя	x1	x2	x3	ЦФ (целевая функция)			
3	Значение	45	0	210	Значение	Направление		
4	Коеф. ЦФ	17	10	12	3285	max		
5	Ограничения							
6		Коэффициенты левой части			Левая часть	Знак	Правая часть	
7	I(x4)	2	3	3	720	<=	800	
8	II(x5)	4	5	2	600	<=	600	
9	III(x6)	0	1	2	420	<=	420	

Рисунок 2.9 – Результат второй итерации

Последняя итерация сопровождается появлением окна **Результаты** (рисунок 2.10). Для загрузки отчетов, необходимо их выбрать в окне **Тип отчета**, щелкнув мышкой на каждом (цвет строк изменится на синий).

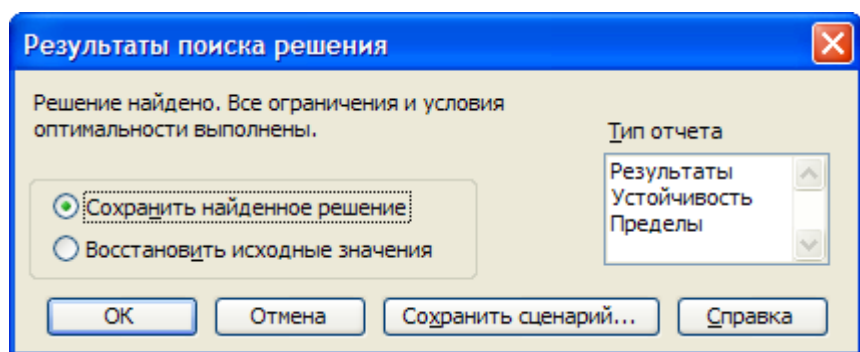


Рисунок 2.10 – Результаты применения инструмента Поиск решения

Если решение не найдено, то, предположительно, были допущены ошибки в настройке **Поиска решения** для конкретной задачи, либо ошибки при наборе формул на странице модели.

Эти отчеты позволяют получить переменные двойственной задачи и провести экономическую интерпретацию решения.

Отчет по результатам (рисунок 2.11) позволяет получить следующую информацию:

– первая таблица отчета по результатам: начальное значение прибыли – 0 (ничего не производилось), оптимальный результат – 3285 д.е.;

– вторая таблица отчета по результатам (план производства изделий): это значение прибыли обеспечивается при производстве 45 изделий вида А и 210 изделий вида С. Изделия вида В не производятся;

– третья таблица отчета по результатам (использование ресурсов для производства): ограничение на первый ресурс не связанное, т.е. ресурс избыточен, он остался в количестве 80 единиц. Второй и третий ресурсы дефицитные, они израсходованы полностью (ограничения связанные, т.е. левая часть равна правой).

Целевая ячейка (Максимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
\$E\$4	Кэф цф Значение	0	3285

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
\$B\$3	Значение x1	0	45
\$C\$3	Значение x2	0	0
\$D\$3	Значение x3	0	210

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
\$E\$7	I (x4) Значение левой части	720	\$E\$7<=\$G\$7	не связан.	80
\$E\$8	II (x5) Значение левой части	600	\$E\$8<=\$G\$8	связанное	0
\$E\$9	III (x6) Значение левой части	420	\$E\$9<=\$G\$9	связанное	0

Рисунок 2.11 – Отчет по результатам

Отчет по устойчивости (рисунок 2.12) позволяет получить двойственные оценки для ресурсов и прибыльности изделий.

Первая таблица отчета по устойчивости определяет производство изделий: изделия вида А – производятся в количестве 45 единиц, их производство останется выгодным и в случае уменьшения прибыли на 13 д.е. (т.е. прибыльность изделия может быть снижена

до 4 д.е., но оптимальный план не изменится, хотя прибыль и снизится). Изделия вида С производятся в количестве 210 единиц, но потенциал снижения прибыльности у них меньше, чем у изделий вида А, только на 3,5 д.е. Изделия типа В производить невыгодно до тех пор, пока прибыльность не увеличится на 13 и более единиц (значение в столбце **Нормированная стоимость**). Каждое изделие типа В в производстве будет сокращать оптимальное значение прибыли на 13 д.е.

Вторая таблица отчета по устойчивости определяет использование ресурсов: первый ресурс избыточен, его потенциальная прибыльность для производства равна нулю (столбец **Теневая Цена**), второй и третий ресурс способны обеспечить прибыль 4,25 и 1,75 с каждой единицы ресурса (если бы они доставались даром). Цену ресурса нужно вычитать из этого значения, чтобы получить реальный рост прибыли, с учетом приобретения ресурсов на рынке. Если ресурс стоит на рынке дороже – нет смысла его приобретать, масштабирование производства будет убыточным. Столбец **Допустимое Увеличение** ресурса для дефицитных ресурсов дает полезную информацию, сколько максимально можно приобрести ресурса, до смещения «узкого места» к другому ресурсу.

Первый ресурс избыточен. И его остаток 80 единиц мог бы быть задействован в производстве, если бы второго и третьего было больше. Максимальный прирост этих ресурсов для использования остатка первого ресурса – это, соответственно, 160 для второго и 80 для третьего. Но что произойдет, если второй ресурс будет докуплен в количестве 170 единиц? Мы израсходуем 160 единиц дополнительных единиц второго, а 10 останутся, превратив второй ресурс в избыточный. Теперь дефицитным ресурсом станет первый, его остаток 80 будет полностью задействован в дополнительном производстве.

Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$3	Значение x1	45	0	17	7	13
\$C\$3	Значение x2	0	-13	10	13	1E+30
\$D\$3	Значение x3	210	0	12	1E+30	3,5

Ограничения						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$E\$7	I (x4) Значение левой части	720	0	800	1E+30	80
\$E\$8	II (x5) Значение левой части	600	4,25	600	160	180
\$E\$9	III (x6) Значение левой части	420	1,75	420	80	420

Рисунок 2.12 – Отчет по устойчивости

Задачу планирования производства можно было решать несколько иначе, поставив во главу угла эффективное расходование ресурсов. Для этого необходимо ввести оценки эффективности использования ресурсов в производстве (так называемые двойственные оценки). Чем менее эффективно производство, тем они выше.

Построим математическую модель двойственной задачи.

Пусть y_1 – двойственная оценка первого ресурса; y_2 – двойственная оценка второго ресурса; y_3 – двойственная оценка третьего ресурса, тогда функция затрат имеет вид:

$$\min G(Y) = 800y_1 + 600y_2 + 420y_3. \quad (2.3)$$

Ограничения на прибыльность:

$$\begin{cases} 2y_1 + 4y_2 & \geq 17, \\ 3y_1 + 5y_2 + y_3 & \geq 10, \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 & \geq 12, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Ограничения на прибыльность означают, что расходы по двойственным оценкам не могут превосходить прибыль с единицы изделия.

Двойственные оценки ресурсов отражают, какую прибыль могли бы принести дополнительные количества соответствующих ресурсов. Если двойственная оценка равна нулю, то ресурс избыточен и потенциалом увеличения прибыли не обладает. А для дефицитных ресурсов двойственные оценки больше нуля. Теперь исходные переменные задачи характеризуют ресурсы, а план производства изделий и оценку их выгодности в формировании прибыли предприятия можно получить из отчетов. Коэффициенты целевой функции – это запасы ресурсов, а коэффициенты ограничений берутся из столбцов, задающих расходы различных ресурсов на единицу изделия соответствующего вида.

Аналогично и эту задачу можно решить с помощью инструмента **Поиск решения**. Так как инструмент настраивается не для конкретного листа модели, а для всего файла в целом рекомендуется для модели двойственной задачи либо создать новый файл, либо копию файла прямой задачи (чтобы сохранить результаты предыдущей модели и при выявлении ошибок иметь возможность исправить и пересчитать модель).

Значения целевых функций на оптимальных решениях совпадают. Также экономическая интерпретация оптимальных решений – одна и та же.

2.3 Варианты для самостоятельного решения

Содержание отчета

Для вашего варианта необходимо записать математическую модель прямой и двойственной задачи. Создать два файла MS Excel отдельно для каждой модели. С помощью инструмента Поиск решения получить отчеты по решению задачи. Привести в отчете задание, математические модели задачи (прямую и двойственную), пояснения основных этапов решения (лист с условием задачи в MS Excel, все отчеты).

Сделать экономическую интерпретацию полученного решения.

Контрольные вопросы по задаче:

1. Какие изделия вошли в оптимальный план производства? Сколько единиц каждого вида изделий производится?

2. Какие изделия не вошли в план производства и почему? На сколько должна увеличиться прибыль с единицы изделий, не входящих в план производства, чтобы их стало выгодно производить?

3. Какие ресурсы избыточные? Сколько единиц таких ресурсов осталось неиспользованными?

4. Какие ресурсы дефицитные? Какова максимальная цена приобретения таких ресурсов на рынке?

Вариант 1

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	A	B	C	
I	4	2	1	180
II	3	1	3	210
III	1	2	5	244
Прибыль с ед. изделия	10	14	12	

Вариант 2

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	A	B	C	D	
I	2	1	3	2	200
II	1	2	4	8	160
III	2	4	1	1	170
Прибыль с ед. изделия	5	7	3	6	

Вариант 3

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Прибыль с ед. изделия	9	10	16	

Вариант 4

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	A	B	C	
I	1	2	1	430
II	3	0	2	460
III	1	4	0	420
Прибыль с ед. изделия	3	2	5	

Вариант 5

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	A	B	C	D	
I	3	4	2	1	200
II	0	2	3	5	250
III	2	1	1	3	300
Прибыль с ед. изделия	12	8	6	15	

Вариант 6

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	A	B	C	D	
I	2	6	4	8	400
II	3	5	1	4	220
III	4	1	1	2	350
Прибыль с ед. изделия	10	9	5	12	

Вариант 7

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	A	B	C	
I	2	8	5	460
II	4	2	1	320
III	3	3	2	250
Прибыль с ед. изделия	20	15	18	

Вариант 8

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	A	B	C	
I	1	2	6	380
II	5	4	2	450
III	3	2	1	300
Прибыль с ед. изделия	3	5	7	

Вариант 9

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	A	B	C	D	
I	0	2	6	4	800
II	3	0	5	4	560
III	2	4	1	2	700
Прибыль с ед. изделия	5	8	7	9	

Вариант 10

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	A	B	C	D	
I	1	6	5	4	590
II	3	2	1	4	510
III	2	3	3	2	840
Прибыль с ед. изделия	15	8	17	14	

Вариант 11

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	A	B	C	D	
I	10	8	12	6	428
II	15	2	6	3	285
III	25	6	8	4	500
Прибыль с ед. изделия	12	8	10	6	

Вариант 12

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	A	B	C	D	
I	10	2	12	2	290
II	15	4	10	1	250
III	25	2	10	2	300
Прибыль с ед. изделия	35	20	45	10	

Вариант 13

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	A	B	C	D	
I	3	2	10	2	180
II	2	4	5	1	100
III	0	2	1	2	150
Прибыль с ед. изделия	10	8	16	14	

3 ТРАНСПОРТНАЯ МОДЕЛЬ

3.1 Управление перевозками (распределительная логистика). Управление персоналом

На основе транспортной модели решается солидный кластер задач: задачи распределительной логистики и задачи о назначениях.

Управление перевозками связано с различными критериями оптимальности: маршруты от поставщиков к потребителям (заказчикам) могут различаться не только стоимостью доставки единицы груза, но и пропускной способностью маршрутов и временем доставки. В зависимости от стратегических и тактических целей компании основой критерия оптимизации транспортной модели может быть как время доставки, так и стоимость перевозок. Целевой критерий может быть и функцией от этих двух параметров с различными весами важности. Рассмотрим простейший случай, когда потребители (заказчики) продукции принадлежат одному юридическому лицу (нет конкуренции и противопоставления интересов), а главный критерий оптимальности – стоимость доставки. В этом случае оптимальное решение задачи связано с доставкой по минимальным из возможных тарифов. Однако просто выбрать маршруты с наименьшими тарифами не лучшее решение, так как распределение перевозок завязано на балансе спроса и предложения: оптимизируется вся сеть распределенных перевозок.

Вторая категория задач, решение которых основано на транспортной модели, – это задачи о назначениях. Это может быть распределение ролей в проекте или заполнение вакансий на предприятии. В исходной формулировке есть предложение работы, и есть спрос на рабочие места. В качестве тарифов выступает степень соответствия конкретного кандидата конкретной роли или должности. Степень соответствия можно представить как интегральную характеристику, объединяющую в себе многочисленные параметры сравнения альтернатив по различным критериям (например, можно использовать метод АНР из темы 6 «Математические модели принятия многокритериальных решений»).

Будем считать, что матрица соответствия кандидатов вакансиям уже имеется в наличии. Задача о назначениях заключается не только в отыскании лучших кандидатов на вакансии, но и попытке заполнить все вакансии подходящими кандидатами. Так, например, если в IT-отдел требуется программист, системный администратор и специалист по информационной безопасности, и в наличии три кандидата, два из которых могут только программировать и заниматься системным

администрированием, а третий компетентен в информационной безопасности и лучший в этой тройке программист, то в оптимальном решении он все равно займет должность специалиста по информационной безопасности, так как на эту вакансию два других просто не пригодны.

Главное в оптимальном решении с использованием транспортной модели – это сбалансированность выигрыша: не лучшее единичное назначение, а лучший вариант всех назначений, не лучший единичный маршрут, а лучшая цепочка связанных поставок.

3.2 Практическое задание (пример решения)

Задание на распределительную логистику. На трех хлебокомбинатах ежедневно производится 160, 130, 170 т муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых равны соответственно 110, 70, 180, 100 т. Тарифы перевозок 1 т муки с хлебокомбинатов к каждому из хлебозаводов задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 9 \\ 9 & 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Необходимо:

- 1) составить оптимальный план перевозок;
- 2) проанализировать убыточность неиспользуемых в оптимальном плане маршрутов.

Решение

Проверяем задачу на сбалансированность:

$$160 + 130 + 170 = 110 + 70 + 180 + 100.$$

При невыполнении этого условия вводятся дополнительная строка (излишек спроса компенсируется несуществующим поставщиком с нулевыми тарифами перевозок) или дополнительный столбец (излишек предложения компенсируется несуществующим потребителем с нулевыми тарифами перевозок).

Построим математическую модель задачи.

Пусть x_{ij} – количество поставляемого груза от i -го поставщика j -му потребителю. Тогда общая стоимость перевозок задается целевой функцией (3.1).

$$F(x) = 8x_{11} + 9x_{12} + x_{13} + 2x_{14} + 3x_{21} + 6x_{22} + 9x_{23} + 9x_{24} + 9x_{31} + 4x_{32} + 4x_{33} + 7x_{34} \rightarrow \min. \quad (3.1)$$

Ограничения на запасы продукции (3.2):

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 160, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 130, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 170. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ограничения на потребности (3.3):

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 110, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 70, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 180, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 100. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Дополнительные ограничения:

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,4} \quad (\text{условия неотрицательности}).$$

В документе MS Excel создадим страничку модели задачи (рисунки 3.1–3.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Переменные					Ограничения		
2	целые	xi1	xi2	xi3	xi4	Левая часть	Знак	Правая часть
3	x1j					=СУММ(B3:E3)	=	160
4	x2j					=СУММ(B4:E4)	=	130
5	x3j					=СУММ(B5:E5)	=	170
6	ограничения	Левая часть	=СУММ(B3:B5)	=СУММ(C3:C5)	=СУММ(D3:D5)	=СУММ(E3:E5)		
7		Знак	=	=	=	=		=СУММ(H3:H5)
8		Правая часть	110	70	180	100	=СУММ(B8:E8)	Баланс
9								
10								
11	Тарифы	xi1	xi2	xi3	xi4			
12	x1j	8	9	1	2			
13	x2j	3	6	9	9			
14	x3j	9	4	4	7			
15						ЦФ		
16						Значение	Направление	
17						=СУММПРОИЗВ(B3:E5;B12:E14)	min	

Рисунок 3.1 – Страница модели задачи (формулы)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Переменные					Ограничения		
2	целые	xi1	xi2	xi3	xi4	Левая часть	Знак	Правая часть
3	x1j					0	=	160
4	x2j					0	=	130
5	x3j					0	=	170
6	ограничения	Левая часть	0	0	0	0		
7		Знак	=	=	=	=		460
8		Правая часть	110	70	180	100	460	Баланс
9								
10								
11	Тарифы	xi1	xi2	xi3	xi4			
12	x1j	8	9	1	2			
13	x2j	3	6	9	9			
14	x3j	9	4	4	7			
15						ЦФ		
16						Значение	Направление	
17						0	min	

Рисунок 3.2 – Страница модели задачи (числовые значения)

Встав на ячейку, хранящую значение целевой функции (в примере F16), вызовем инструмент Поиск решения и заполним диалоговое окно исходной информацией (рисунок 3.3).

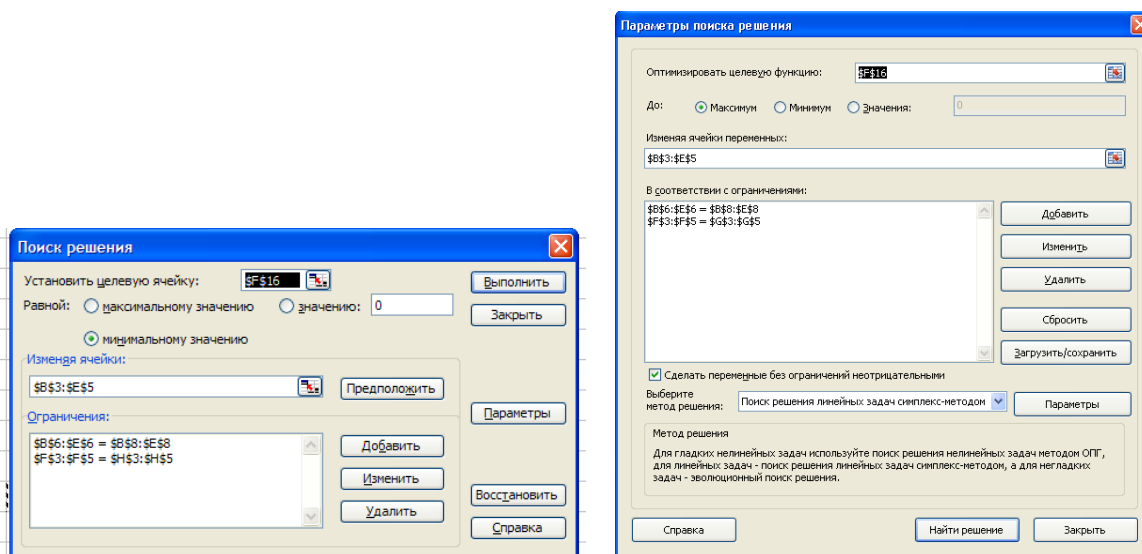


Рисунок 3.3 – Диалоговое окно инструмента Поиск решения (разные версии MS Excel)

На вкладке Параметры выбираем необходимые характеристики модели (рисунок 3.4).

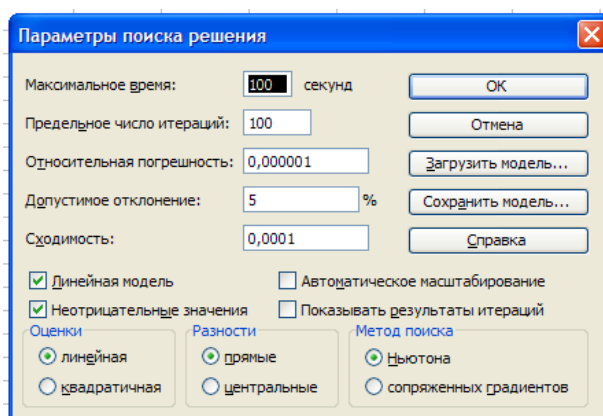


Рисунок 3.4 – Вкладка Параметры инструмента Поиск решения

Возвращаемся к исходному окну и выбираем команду Выполнить.

Программа найдет оптимальное решение (рисунок 3.6) и предложит выбрать вариант отчета (рисунок 3.5), в окне Тип отчета щелчком мыши выбираем нужные.

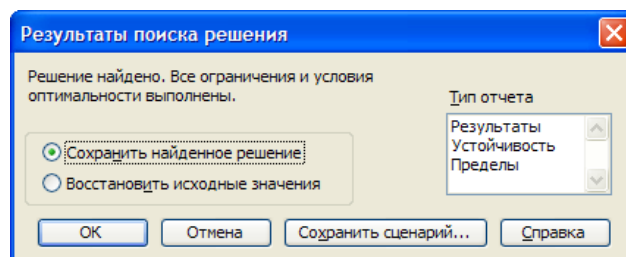


Рисунок 3.5 – Результаты использования инструмента Поиск решения

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Переменные					Ограничения		
2	целые	xi1	xi2	xi3	xi4	Левая часть	Знак	Правая часть
3	x1j	0	0	60	100	160	=	160
4	x2j	110	20	0	0	130	=	130
5	x3j	0	50	120	0	170	=	170
6	ограничения Левая часть	110	70	180	100			
7	Знак	=	=	=	=			460
8	Правая часть	110	70	180	100		460	Баланс
9								
10								
11	Тарифы	xi1	xi2	xi3	xi4			
12	x1j	8	9	1	2			
13	x2j	3	6	9	9			
14	x3j	9	4	4	7			
15						ЦФ	Направление	
16						Значение	min	
						1390		

Рисунок 3.6 – Оптимальный план перевозок для транспортной задачи

Перенесем полученные значения (рисунок 3.7) в оптимальную транспортную таблицу (рисунок 3.8).

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$3	x1j xi1	0	10	8	1E+30	10
\$C\$3	x1j xi2	0	8	9	1E+30	8
\$D\$3	x1j xi3	60	0	1	8	2
\$E\$3	x1j xi4	100	0	2	2	1E+30
\$B\$4	x2j xi1	110	0	3	8	1E+30
\$C\$4	x2j xi2	20	0	6	2	8
\$D\$4	x2j xi3	0	3	9	1E+30	3
\$E\$4	x2j xi4	0	2	9	1E+30	2
\$B\$5	x3j xi1	0	8	9	1E+30	8
\$C\$5	x3j xi2	50	0	4	8	2
\$D\$5	x3j xi3	120	0	4	2	8
\$E\$5	x3j xi4	0	2	7	1E+30	2

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$6	ограничения Левая часть xi1	110	-3	110	20	0
\$C\$6	ограничения Левая часть xi2	70	0	70	120	0
\$D\$6	ограничения Левая часть xi3	180	0	180	0	1E+30
\$E\$6	ограничения Левая часть xi4	100	1	100	60	0
\$F\$3	x1j Левая часть	160	1	160	0	60
\$F\$4	x2j Левая часть	130	6	130	0	20
\$F\$5	x3j Левая часть	170	4	170	0	120

Рисунок 3.7 – Отчет по устойчивости

$a_i \backslash b_j$	110	70	180	100
160	8 10	9 8	1 60	2 100
130	3 110	6 20	9 3	9 2
170	9 8	4 50	4 120	7 2

Рисунок 3.8 – Транспортная таблица, соответствующая оптимальному плану перевозок

В столбце *результатирующее значение* ненулевые значения соответствуют перевозкам по соответствующим маршрутам. В столбце *нормированная стоимость* значения косвенных тарифов или оценки невыгодности маршрутов (положительные значения показывают, насколько больше с каждой единицы груза будет стоить перевозка, переданная на этот маршрут). Косвенные тарифы в транспортной таблице обведены рамкой.

Маршрут от первого поставщика к первому потребителю не используется, так как за каждую единицу груза пришлось бы дополнительно платить по 10 д.е.

Маршрут от первого поставщика ко второму потребителю не используется, так как за каждую единицу груза пришлось бы дополнительно платить по 8 д.е.

Маршрут от первого поставщика третьему потребителю – действующий, перевозится груз объемом 60 единиц. Далее аналогично.

Так как отрицательных значений двойственных оценок маршрутов нет, то план перевозок имеет наименьшую стоимость 1390.

На основе транспортной модели решается и задача о назначениях.

В строках вакансии – предложение работодателей, в столбцах – претенденты на рабочие места (кандидаты на вакансию) – спрос на рабочие места. В матрице C представлены баллы соответствия кандидата вакансии: 10 – максимальное соответствие, 0 – минимальное соответствие.

Один кандидат закрывает одну вакансию. Если кандидатов больше, чем вакансий, вводим дополнительные вакансии, которых нет и баллы для этих вакансий у всех кандидатов равны нулю.

Если в оптимальном решении кандидат трудоустраивается на несуществующую вакансию, то он не получает работу.

Если вакансий больше, чем кандидатов, то вводятся несуществующие претенденты на рабочие места с нулевыми баллами соответствия всем вакансиям. В оптимальном решении несуществующим кандидатам будут соответствовать вакансии, которые останутся незакрытыми.

3.3 Варианты для самостоятельного решения

Задача распределительной логистики

Вариант 1. Для строительства четырех объектов используется кирпич, изготавливаемый на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготавливать 150, 190 и 100 усл. ед. кирпича. Ежедневные потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов соответственно равны 160, 130, 80 и 70 усл. ед. Известны также тарифы перевозок 1 усл. ед. кирпича с каждого с заводов к каждому из строящихся объектов:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок кирпича к строящимся объектам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Вариант 2. На трех хлебокомбинатах ежедневно производится 120, 150 и 70 т муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых равны соответственно 90, 80, 110 и 60 т. Тарифы перевозок 1 т муки с хлебокомбинатов к каждому из хлебозаводов задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план доставки муки, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Вариант 3. В трех хранилищах горючего ежедневно хранится 120, 50 и 130 т бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 80, 90, 70 и 60 т. Стоимости перевозок 1 т бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Вариант 4. На трех железнодорожных станциях A_1 , A_2 и A_3 скопилось 30, 56 и 29 незагруженных вагонов. Эти вагоны необходимо перегнать на железнодорожные станции B_1 , B_2 , B_3 , B_4 . На каждой из этих станций потребность в вагонах соответственно равна 37, 18, 47, 13. Тарифы перегонки одного вагона определяются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Составьте такой план перегонок вагонов, чтобы общая стоимость была минимальной.

Вариант 5. Для строительства четырех дорог используется гравий из четырех карьеров. Запасы гравия в каждом из карьеров соответственно равны 10, 50, 40 и 80 усл. ед. Потребности в гравии для строительства каждой из дорог соответственно равны 70, 35, 20 и 55 усл. ед. Известны также тарифы перевозок 1 усл. ед. гравия из каждого из карьеров к каждой из строящихся дорог, которые задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 8 \\ 8 & 4 & 6 & 9 \\ 7 & 3 & 7 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок гравия, при котором потребности в нем каждой из строящихся дорог были бы удовлетворены при наименьшей общей стоимости перевозок.

Вариант 6. Четыре предприятия данного экономического района могут производить некоторую однородную продукцию в количествах, соответственно равных 10, 40, 35 и 35 ед. Эта продукция должна быть поставлена четырем потребителям в количествах, соответственно

равных 30, 20, 45 и 25 ед. Затраты, связанные с производством и доставкой единицы продукции, задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план прикрепления получателей продукции ее поставщикам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Вариант 7. Производственное объединение имеет в своем составе четыре филиала, которые производят однородную продукцию в количествах соответственно равных 95, 85, 130 и 70 ед. Эту продукцию получают четыре потребителя, расположенные в разных местах. Их потребности соответственно равны 110, 80, 100 и 90 ед. Тарифы перевозок единицы продукции от каждого из филиалов соответствующим потребителям задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 4 & 6 \\ 8 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план прикрепления получателей продукции к ее поставщикам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Вариант 8. На четырех складах оптовой базы сосредоточен однородный груз в количествах 40, 25, 105 и 90 ед. Этот груз необходимо перевезти в четыре магазина. Каждый из магазинов должен получить соответственно 80, 70, 50 и 60 ед. груза. Тарифы перевозок единицы груза из каждого из складов во все магазины задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 9 \\ 4 & 3 & 7 & 8 \\ 6 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Вариант 9. Для строительства четырех объектов используется кирпич, изготавливаемый на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготавливать 130, 200 и 120 усл. ед. кирпича. Ежедневные потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов соответственно равны 170, 130, 80 и 70 усл. ед. Известны также тарифы перевозок 1 усл. ед. кирпича с каждого с заводов к каждому из строящихся объектов:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок кирпича к строящимся объектам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Вариант 10. Для строительства четырех дорог используется гравий из четырех карьеров. Запасы гравия в каждом из карьеров соответственно равны 120, 50, 90 и 100 усл. ед. Потребности в гравии для строительства каждой из дорог соответственно равны 70, 135, 80 и 75 усл. ед. Известны также тарифы перевозок 1 усл. ед. гравия из каждого из карьеров к каждой из строящихся дорог, которые задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 8 \\ 8 & 4 & 6 & 9 \\ 9 & 7 & 7 & 4 \\ 7 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок гравия, при котором потребности в нем каждой из строящихся дорог были бы удовлетворены при наименьшей общей стоимости перевозок.

Вариант 11. Четыре предприятия данного экономического района могут производить некоторую однородную продукцию в количествах, соответственно равных 25, 40, 35 и 30 ед. Эта продукция должна быть поставлена четырем потребителям в количествах, соответственно равных 40, 20, 45 и 25 ед. Затраты, связанные с производством и доставкой единицы продукции, задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & 7 \\ 3 & 8 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план прикрепления получателей продукции ее поставщикам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Вариант 12. На четырех складах оптовой базы сосредоточен однородный груз в количествах 50, 25, 125 и 80 ед. Этот груз необходимо перевезти в четыре магазина. Каждый из магазинов должен получить соответственно 80, 90, 50 и 60 ед. груза. Тарифы перевозок единицы груза из каждого из складов во все магазины задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & 6 \\ 5 & 8 & 1 & 9 \\ 4 & 3 & 6 & 8 \\ 6 & 9 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Задача о назначениях

Отдел кадров устроил конкурсный отбор специалистов на вакантные должности и оценил по десятибалльной шкале компетенции сотрудников необходимые для замещения указанной вакансии (матрица C).

Запишите математическую модель задачи о назначениях. Каким образом в модели задачи о назначениях можно запретить конкретное назначение? В чем особенности процесса приведения задачи о назначениях к сбалансированному виду?

Вариант 1

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 5 & 4 \\ 7 & 9 & 8 & 6 & 7 \\ 10 & 5 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 5 & 9 \\ 7 & 4 & 8 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Вариант 2

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 8 & 9 & 7 & 6 \\ 7 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 3 \\ 3 & 4 & 8 & 5 & 2 & 8 \\ 5 & 6 & 9 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 3

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 & 4 & 7 & 9 & 10 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 8 & 6 & 7 \\ 1 & 9 & 8 & 5 & 4 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 7 & 8 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

Вариант 4

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 3 & 7 & 5 \\ 7 & 5 & 10 & 7 & 8 & 9 \\ 8 & 4 & 6 & 7 & 8 & 3 \\ 7 & 4 & 1 & 5 & 2 & 7 \\ 4 & 6 & 9 & 8 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 5

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 & 6 & 7 & 6 \\ 7 & 8 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 8 & 3 \\ 8 & 4 & 8 & 6 & 2 & 8 \\ 5 & 6 & 5 & 1 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Вариант 6

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 9 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 9 & 4 \\ 6 & 9 & 8 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 5 & 5 & 9 \\ 7 & 4 & 8 & 6 & 8 \\ 10 & 3 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Вариант 7

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 & 8 \\ 5 & 8 & 7 & 5 & 4 \\ 7 & 9 & 8 & 6 & 7 \\ 1 & 5 & 7 & 7 & 8 \\ 10 & 2 & 5 & 5 & 9 \\ 7 & 4 & 8 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Вариант 8

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 & 7 & 8 & 4 \\ 3 & 8 & 3 & 4 & 5 & 2 \\ 6 & 5 & 1 & 5 & 6 & 4 \\ 10 & 4 & 7 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 2 & 5 & 9 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 8 & 4 & 9 \\ 5 & 8 & 5 & 4 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 6 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 9

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 9 & 7 & 8 & 4 \\ 6 & 8 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 6 & 5 & 1 & 5 & 6 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 2 & 5 & 9 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 3 & 8 & 4 & 9 \\ 5 & 8 & 5 & 4 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 6 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Вариант 10

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 1 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 5 & 4 \\ 7 & 9 & 8 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 5 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 5 & 9 \\ 7 & 4 & 8 & 5 & 8 \\ 1 & 3 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Вариант 11

$$C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 & 7 & 8 \\ 9 & 8 & 7 & 5 & 4 \\ 4 & 9 & 8 & 6 & 7 \\ 10 & 5 & 7 & 7 & 8 \\ 1 & 2 & 5 & 5 & 9 \\ 7 & 4 & 8 & 5 & 8 \\ 9 & 3 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Вариант 12

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 9 & 7 & 8 & 4 \\ 5 & 8 & 3 & 4 & 5 & 8 \\ 6 & 9 & 1 & 5 & 6 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 3 & 2 & 4 \\ 9 & 2 & 5 & 9 & 7 & 8 \\ 6 & 7 & 10 & 8 & 4 & 9 \\ 4 & 8 & 5 & 4 & 9 & 8 \\ 7 & 6 & 6 & 5 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

4 МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ В ВИДЕ СУЖДЕНИЙ ДА/НЕТ

4.1 Управление финансированием проектов. Управление арендой

В задачах принятия решений с использованием суждения вида да/нет переменные принимают только два значения 0 и 1. Эти значения выступают маркерами конкретных решений: 0 – нет, 1 – да. В пятой теме мы столкнемся с такими переменными при решении задачи замены оборудования.

Переменные, принимающие только два значения, называются двоичными или бинарными. При условии линейности целевой функции и функций в ограничениях – соответствующая задача оптимизации будет задачей целочисленного линейного программирования.

В задачах управления финансированием проектов на предприятии обычно рассматривается несколько конкурирующих вариантов, при ограниченном финансировании. Выбранные для реализации проекты приходится финансировать от начала и до конца. При замораживании финансирования проект не сможет выйти на самоокупаемость и начать приносить прибыль. Поэтому при выборе проектов одним из критериев становится реализация самых прибыльных из тех проектов, на которые хватит финансирования.

Задача аренды складов – это усложнение транспортной модели дополнительным выбором арендуемых складов. Целевая функция формируется из двух составляющих: стоимости аренды и стоимости перевозок из арендованных складов до потребителей. Дешевый в аренде склад может быть слишком дорогим в распределительной логистике (высокие тарифы доставки) и, наоборот, дорогая аренда может компенсироваться низкой стоимостью перевозок.

4.2 Практическое задание (пример решения)

Принятие решения об инвестировании

Рассматривается пять проектов для инвестирования. Каждый год реализации проекта требует определенной суммы инвестиций. Вложения по годам представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1

	Вложения по годам					Прибыль
	1	2	3	4	5	
Проект 1	100	200	0	100	100	800
Проект 2	200	300	200	200	100	1200
Проект 3	200	200	100	100	100	800
Проект 4	300	100	300	100	200	900
Проект 5	100	100	100	100	100	700
Располагаемые средства	650	550	700	400	500	

Проект может быть реализован только самой компанией, без привлечения сторонних участников. Отдача от проекта возможна только, если он реализован на 100 %.

Необходимо:

- 1) принять решение, какие проекты можно реализовать с наилучшим финансовым результатом;
- 2) проанализировать остатки денежных средств от вложений;
- 3) предложить усовершенствованное решение с учетом переноса неизрасходованных денежных средств на следующий период.

Решение

Переменные этой задачи могут принимать только два значения: 0 – отказ от проекта, 1 – реализация проекта. Такие переменные называются двоичными или бинарными.

Построим математическую модель задачи.

Пусть x_i – переменная принятия решения о реализации i -го проекта. Тогда целевая функция прибыльности реализованных проектов находится по формуле (4.1):

$$F(x) = 800x_1 + 1200x_2 + 800x_3 + 900x_4 + 700x_5 \rightarrow \max, \quad (4.1)$$

при ограничениях на располагаемые средства (4.2):

$$\begin{cases} 100x_1 + 200x_2 + 200x_3 + 300x_4 + 100x_5 \leq 650, \\ 200x_1 + 300x_2 + 200x_3 + 100x_4 + 100x_5 \leq 550, \\ \quad 200x_2 + 100x_3 + 300x_4 + 100x_5 \leq 700, \\ 100x_1 + 200x_2 + 100x_3 + 100x_4 + 100x_5 \leq 400 \\ 100x_1 + 100x_2 + 100x_3 + 200x_4 + 100x_5 \leq 500 \end{cases} \quad (4.2)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,5}.$$

В документе MS Excel создадим страничку модели задачи (рисунки 4.1–4.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	имя переменной	x1	x2	x3	x4	x5			
2	значение								
3	коэффициенты ЦФ	800	1200	800	900	700		значение ЦФ	=СУММПРОИЗВ(B2:F2;B3:F3)
4									
5	Ограничения	коэффициенты ограничений				левая часть		знак	правая часть
6	I	100	200	200	300	100	=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$F\$2;B6:F6)	<=	650
7	II	200	300	200	100	100	=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$F\$2;B7:F7)	<=	550
8	III	0	200	100	300	100	=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$F\$2;B8:F8)	<=	700
9	IV	100	200	100	100	100	=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$F\$2;B9:F9)	<=	400
10	V	100	100	100	200	100	=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$F\$2;B10:F10)	<=	500
11									

Рисунок 4.1 – Страница модели задачи (формулы)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	имя переменной	x1	x2	x3	x4	x5			
2	значение								
3	коэффициенты ЦФ	800	1200	800	900	700		значение	0
4									
5	Ограничения	коэффициенты ограничений				левая часть		знак	правая часть
6	I	100	200	200	300	100	0	<=	650
7	II	200	300	200	100	100	0	<=	550
8	III	0	200	100	300	100	0	<=	700
9	IV	100	200	100	100	100	0	<=	400
10	V	100	100	100	200	100	0	<=	500
11									

Рисунок 4.2 – Страница модели задачи (числовые значения)

Встав на ячейку, сохраняющую значение целевой функции (в примере I3), вызовем инструмент Поиск решения и заполним диалоговое окно исходной информацией (рисунок 4.3).

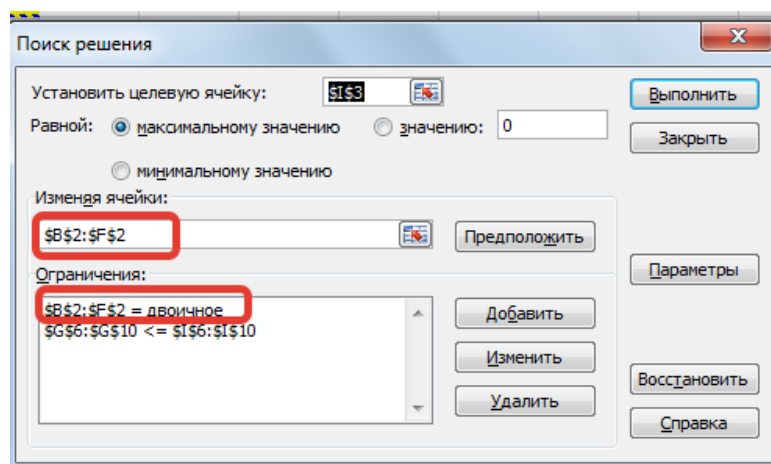


Рисунок 4.3 – Диалоговое окно инструмента Поиск решения (разные версии MS Excel)

На вкладке **Параметры** выбираем необходимые характеристики модели (рисунок 4.4).

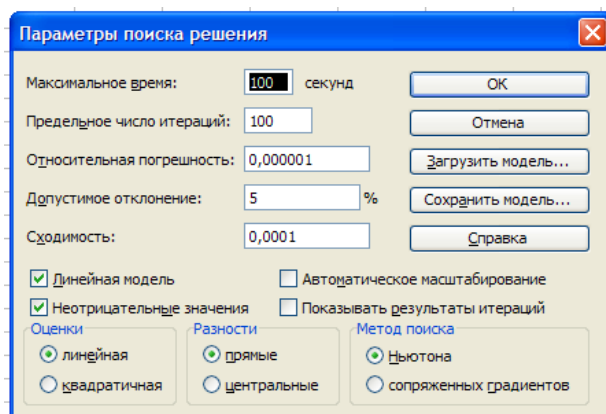


Рисунок 4.4 – Вкладка **Параметры** поиска решения

Возвращаемся к исходному окну и выбираем команду **Выполнить**.

Программа найдет оптимальное решение (рисунок 4.6) и предложит выбрать вариант отчета (рисунок 4.5).

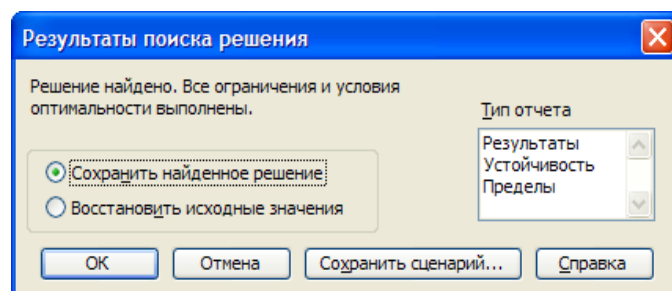


Рисунок 4.5 – Результаты поиска решения
(доступен только тип отчета – **Результаты**)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	имя переменной	x1	x2	x3	x4	x5			
2	значение	0	1	0	1	1			
3	коэффициенты ЦФ	800	1200	800	900	700		значен	2800
4									
5	Ограничения	коэффициенты ограничений					левая часть	знак	правая часть
6	I	100	200	200	300	100	600	<=	650
7	II	200	300	200	100	100	500	<=	550
8	III	0	200	100	300	100	600	<=	700
9	IV	100	200	100	100	100	400	<=	400
10	V	100	100	100	200	100	400	<=	500

Рисунок 4.6 – Оптимальный план инвестирования

Реализовывать стоит второй, четвертый и пятый проекты. Они принесут максимальную прибыль при ограничениях на располагаемые средства.

Однако на протяжении всех пяти лет (за исключением четвертого года) после финансирования выбранных проектов остаются свободные средства. Их можно было бы учитывать в следующем временном периоде как дополнительные средства для реализации проектов.

Для этого необходимо изменить правую часть всех неравенств, кроме первого (рисунок 4.7) столбец I.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	имя переменной	x1	x2	x3	x4	x5			
2	значение								
3	коэффициенты ЦФ	800	1200	800	900	700		значение ЦФ	=СУММПРОИЗВ(B2:F2;B3:F3)
4									
5	Ограничения	коэффициенты ограничений					левая часть	знак	правая часть
6	I	100	200	200	300	100	=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$F\$2;B6:F6)	<=	650
7	II	200	300	200	100	100	=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$F\$2;B7:F7)	<=	=550+(I6-G6)
8	III	0	200	100	300	100	=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$F\$2;B8:F8)	<=	=700+(I7-G7)
9	IV	100	200	100	100	100	=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$F\$2;B9:F9)	<=	=400+(I8-G8)
10	V	100	100	100	200	100	=СУММПРОИЗВ(\$B\$2:\$F\$2;B10:F10)	<=	=500+(I9-G9)

Рисунок 4.7 – Страница модели задачи (формулы), учитывающая перенос свободных денежных средств на следующий период

В этом случае Поиск решения приводит к другому результату. И значение целевой функции возрастает на 100 единиц (рисунок 4.8). Теперь выгодно поддержать первый второй и четвертый проекты.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	имя переменной	x1	x2	x3	x4	x5			
2	значение	1	1	0	1	0,00			
3	коэффициенты ЦФ	800	1200	800	900	700		значение ЦФ	2900
4									
5	Ограничения	коэффициенты ограничений					левая часть	знак	правая часть
6	I	100	200	200	300	100	600	<=	650
7	II	200	300	200	100	100	600	<=	600
8	III	0	200	100	300	100	500	<=	700
9	IV	100	200	100	100	100	400	<=	600
10	V	100	100	100	200	100	400	<=	700

Рисунок 4.8 – Оптимальное решение задачи инвестирования с учетом переноса свободных денежных средств на следующий период

Принятие решения об аренде

Торговое предприятие принимает решение об аренде складских помещений. Трейлеры должны доставлять груз в пять супермаркетов. Годовые потребности в грузах у магазина выражены в числе трейлеров, направляемых к нему в год:

Тарифы перевозки грузов одним трейлером	Торговые точки					Пропускная способность	Стоимость аренды
	1	2	3	4	5		
Склад 1	150	140	170	150	120	300	6000
Склад 2	150	195	100	20	200	350	6000
Склад 3	180	240	140	40	150	300	8500
Склад 4	200	100	60	90	180	350	9000
Потребность магазина в трейлерах	100	300	110	120	100		

Необходимо принять решение об аренде максимально выгодным для компании образом.

Решение

Для ранее рассмотренной транспортной модели (задача распределительной логистики в разделе 3) требуется учесть дополнительное условие – аренду складских помещений.

Построим математическую модель задачи.

Переменных в задаче будет две группы: x_{ij} – переменные перевозки грузов и z_i – переменные принятия решения об аренде склада (они принимают только два значения 0 – не арендовать, 1 – арендовать). Тогда целевая функция определяется как сумма стоимости перевозок, зависящей от переменных x_{ij} , и стоимости аренды, зависящей от переменных z_i (4.3).

$$\begin{aligned}
 F(x) = & 150x_{11} + 140x_{12} + 170x_{13} + 150x_{14} + 120x_{15} + \\
 & + 150x_{21} + 195x_{22} + 100x_{23} + 20x_{24} + 200x_{25} + \\
 & + 180x_{31} + 240x_{32} + 140x_{33} + 40x_{34} + 150x_{35} + \\
 & + 200x_{41} + 100x_{42} + 60x_{43} + 90x_{44} + 180x_{45} + \\
 & + 6000z_1 + 6000z_2 + 8500z_3 + 9000z_4 \rightarrow \min
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

при ограничениях (4.4–4.5):

ограничения по запасам продукции

$$\begin{aligned}
 x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} & \leq 300z_1, \\
 x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} & \leq 350z_2, \\
 x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} & \leq 300z_3, \\
 x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} & \leq 350z_4
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

ограничения по потребностям

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 100, \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 300, \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 110, \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 120, \\
x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} &= 100
\end{aligned}
\tag{4.5}$$

$x_{ij} \geq 0$, $i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,5}$ (условия неотрицательности).

В документе MS Excel создадим страничку модели задачи (рисунки 4.9–4.10):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Переменные решения об аренде	Переменные перевозки	1	2	3	4	5	левая часть	знак	правая часть
2		1						=СУММ(C2:G2)	<=	=300*A2
3		2						=СУММ(C3:G3)	<=	=350*A3
4		3						=СУММ(C4:G4)	<=	=300*A4
5		4						=СУММ(C5:G5)	<=	=350*A5
6		лев часть	=СУММ(C2:C5)	=СУММ(D2:D5)	=СУММ(E2:E5)	=СУММ(F2:F5)	=СУММ(G2:G5)			
7		знак	=	=	=	=	=			
8		правая часть	100	300	110	120	100			
9		Тарифы	1	2	3	4	5	стоимость аренды		
10		1	150	140	170	150	120	6000		
11		2	150	195	100	20	200	6000		
12		3	180	240	140	40	150	8500		
13		4	200	100	60	90	180	9000		
14		стоимость перевозок	=СУММПРОИЗВ(C2:G5;C10:G13)					=СУММПРОИЗВ(A2:A5;H10:H13)		
15		Целевая функция	=C14+H14							
16										

Рисунок 4.9 – Страница модели задачи (формулы)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Переменные решения об аренде	Переменные перевозки	1	2	3	4	5	левая часть	знак	правая часть
2		1						0	<=	0
3		2						0	<=	0
4		3						0	<=	0
5		4						0	<=	0
6		лев часть	0	0	0	0	0	0		
7		знак	=	=	=	=	=			
8		правая часть	100	300	110	120	100			
9		Тарифы	1	2	3	4	5	стоимость аренды		
10		1	150	140	170	150	120	6000		
11		2	150	195	100	20	200	6000		
12		3	180	240	140	40	150	8500		
13		4	200	100	60	90	180	9000		
14		стоимость перевозок	0					0		
15		Целевая функция	0							

Рисунок 4.10 – Страница модели задачи (числовые значения)

Встав на ячейку, сохраняющую значение целевой функции (в примере C15), вызовем инструмент Поиск решения и заполним диалоговое окно исходной информацией (рисунок 4.11).

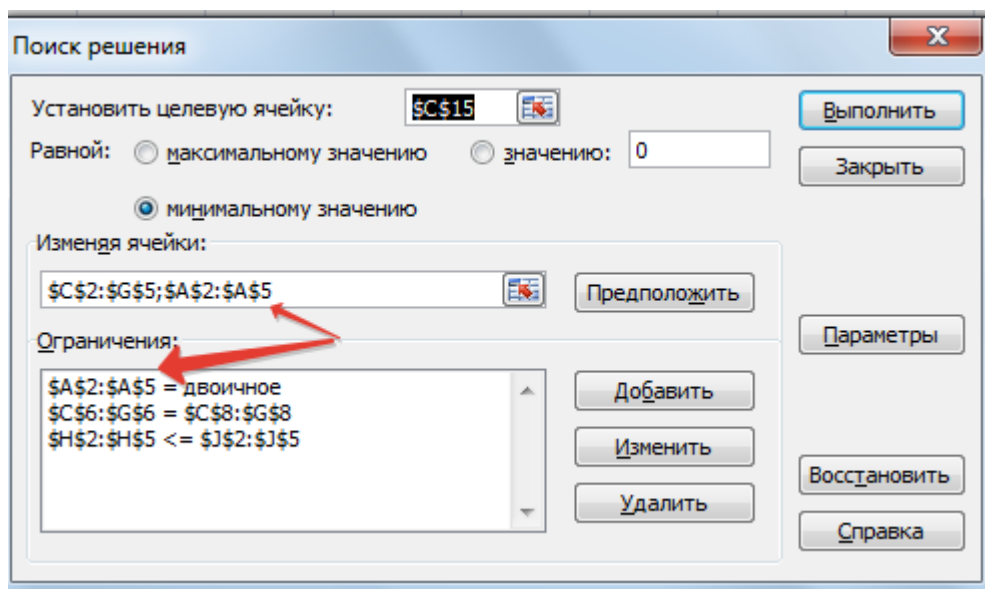


Рисунок 4.11 – Диалоговое окно инструмента Поиск решения

На вкладке **Параметры** выбираем необходимые характеристики модели (рисунок 4.12).

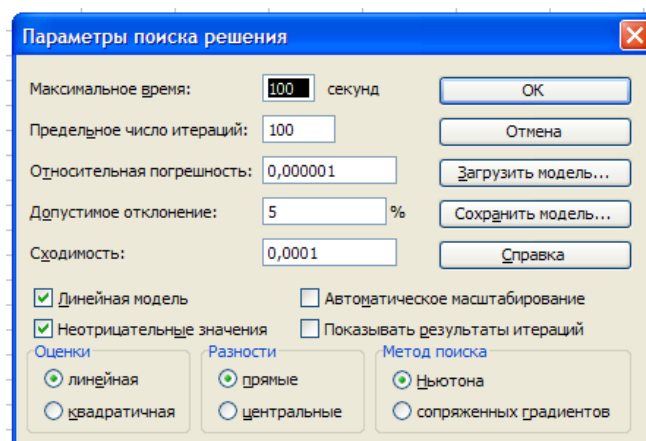


Рисунок 4.12 – Вкладка Параметры поиска решения

Возвращаемся к исходному окну и выбираем команду **Выполнить**. Программа найдет оптимальное решение (рисунок 4.14) и предложит выбрать вариант отчета (4.13).

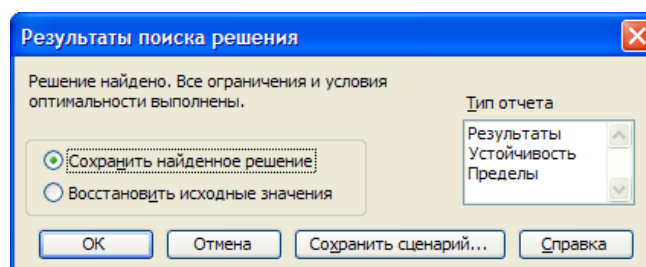


Рисунок 4.13 – Результаты Поиска решения
(доступен только тип отчета – Результаты)

Переменные решения об аренде	Переменные перевозки	1	2	3	4	5	левая часть	знак	правая часть
1	1	0	0	0	0	100	100	<=	300
1	2	100	0	60	120	0	280	<=	350
0	3	0	0	0	0	0	0	<=	0
1	4	0	300	50	0	0	350	<=	350
	лев часть	100	300	110	120	100			
	знак	=	=	=	=	=			
	правая часть	100	300	110	120	100			
	Тарифы	1	2	3	4	5	стоимость аренды		
	1	150	140	170	150	120	6000		
	2	150	195	100	20	200	6000		
	3	180	240	140	40	150	8500		
	4	200	100	60	90	180	9000		
	стоимость перевозок	68400					21000		
	Целевая функция	89400							

Рисунок 4.14 – Оптимальный план эксплуатации арендуемых складов

Арендовать стоит первый, второй и четвертый склады. Третий склад арендовать не стоит. Первый склад будет очень недогружен (его загрузка составляет только 33 %).

4.3 Варианты для самостоятельного решения

Вариант 1

Принятие решения об инвестировании. Варианты капиталовложений на пять лет:

	Вложения по годам					Прибыль
	1	2	3	4	5	
Проект 1	100	50	200	100	0	400
Проект 2	300	200	100	100	100	700
Проект 3	100	200	270	200	100	800
Проект 4	200	100	400	200	200	1000
Располагаемые средства	500	450	700	400	300	

Проект может быть реализован только самой компанией, без привлечения сторонних участников. Отдача от проекта возможна только, если он реализован на сто процентов. Какие инвестиции выгодны компании?

Принятие решения об аренде. Торговое предприятие принимает решение об аренде складских помещений. Трейлеры должны доставлять груз в четыре супермаркета. Годовые потребности в грузах у магазина выражены в числе трейлеров, направляемых к нему в год:

Тарифы перевозки грузов одним трейлером	Торговые точки				Пропускная способность	Стоимость аренды
	1	2	3	4		
Склад 1	170	40	70	160	200	7750
Склад 2	150	195	100	10	250	4000
Склад 3	100	240	140	60	300	5500
Потребность магазина в трейлерах	100	90	110	60		

Принять решение об аренде максимально выгодным для компании образом.

Вариант 2

Принятие решения об инвестировании. Варианты капиталовложений на шесть лет:

	Вложения по годам						Прибыль
	1	2	3	4	5	6	
Проект 1	100	50	50	100	100	50	600
Проект 2	200	100	40	100	100	80	400
Проект 3	100	200	270	200	100	100	800
Проект 4	100	300	400	100	200	200	1000
Располагаемые средства	500	450	700	400	300	350	

Проект может быть реализован только самой компанией, без привлечения сторонних участников. Отдача от проекта возможна только, если он реализован на 100 %. Какие инвестиции выгодны компании?

Принятие решения об аренде. Торговое предприятие принимает решение об аренде складских помещений. Трейлеры должны доставлять груз в четыре супермаркета. Годовые потребности в грузах у магазина выражены в числе трейлеров направляемых к нему в год:

Тарифы перевозки грузов одним трейлером	Торговые точки				Пропускная способность	Стоимость аренды
	1	2	3	4		
Склад 1	150	140	70	160	200	6000
Склад 2	150	95	100	10	250	4000
Склад 3	120	240	140	60	300	5500
Потребность магазина в трейлерах	100	100	110	40		

Принять решение об аренде максимально выгодным для компании образом.

Вариант 3

Принятие решения об инвестировании. Варианты капиталовложений на пять лет:

	Вложения по годам					Прибыль
	1	2	3	4	5	
Проект 1	100	50	200	100	0	400
Проект 2	300	200	100	100	100	700
Проект 3	100	150	270	200	100	800
Проект 4	200	100	400	200	200	800
Проект 5	100	100	200	100	100	700
Располагаемые средства	500	450	700	400	300	

Проект может быть реализован только самой компанией, без привлечения сторонних участников. Отдача от проекта возможна только, если он реализован на 100 %. Какие инвестиции выгодны компании?

Принятие решения об аренде. Торговое предприятие принимает решение об аренде складских помещений. Трейлеры должны доставлять груз в четыре супермаркета. Годовые потребности в грузах у магазина выражены в числе трейлеров, направляемых к нему в год:

Тарифы перевозки грузов одним трейлером	Торговые точки				Пропускная способность	Стоимость аренды
	1	2	3	4		
Склад 1	150	140	70	160	300	6000
Склад 2	150	195	100	10	250	5000
Склад 3	120	240	140	60	300	5500
Потребность магазина в трейлерах	100	100	110	140		

Принять решение об аренде максимально выгодным для компании образом.

Вариант 4

Принятие решения об инвестировании. Варианты капиталовложений на пять лет:

	Вложения по годам					Прибыль
	1	2	3	4	5	
Проект 1	100	200	200	100	300	1400
Проект 2	300	200	100	200	100	700
Проект 3	100	200	270	200	100	800
Проект 4	200	100	400	200	200	900
Располагаемые средства	500	450	700	400	400	

Проект может быть реализован только самой компанией, без привлечения сторонних участников. Отдача от проекта возможна только, если он реализован на сто процентов. Какие инвестиции выгодны компании?

Принятие решения об аренде. Торговое предприятие принимает решение об аренде складских помещений. Трейлеры должны доставлять груз в четыре супермаркета. Годовые потребности в грузах у магазина выражены в числе трейлеров, направляемых к нему в год:

Тарифы перевозки грузов одним трейлером	Торговые точки				Пропускная способность	Стоимость аренды
	1	2	3	4		
Склад 1	150	140	70	160	300	6000
Склад 2	150	195	100	10	350	3000
Склад 3	180	240	140	60	300	5500
Потребность магазина в трейлерах	100	200	110	140		

Принять решение об аренде максимально выгодным для компании образом.

Вариант 5

Принятие решения об инвестировании. Варианты капиталовложений на шесть лет:

	Вложения по годам						Прибыль
	1	2	3	4	5	6	
Проект 1	100	150	150	100	100	50	700
Проект 2	200	100	140	100	100	180	800
Проект 3	100	200	270	200	100	100	800
Проект 4	100	300	400	100	200	200	900
Располагаемые средства	400	500	700	300	500	350	

Проект может быть реализован только самой компанией, без привлечения сторонних участников. Отдача от проекта возможна только, если он реализован на сто процентов. Какие инвестиции выгодны компании?

Принятие решения об аренде. Торговое предприятие принимает решение об аренде складских помещений. Трейлеры должны доставлять груз в пять супермаркетов. Годовые потребности в грузах у магазина выражены в числе трейлеров, направляемых к нему в год:

Тарифы перевозки грузов одним трейлером	Торговые точки					Пропускная способность	Стоимость аренды
	1	2	3	4	5		
Склад 1	150	140	170	150	120	300	6000
Склад 2	150	195	100	20	200	350	6000
Склад 3	180	240	140	40	150	300	8500
Потребность магазина в трейлерах	100	100	110	120	100		

Принять решение об аренде максимально выгодным для компании образом.

Вариант 6

Принятие решения об инвестировании. Варианты капиталовложений на пять лет:

	Вложения по годам					Прибыль
	1	2	3	4	5	
Проект 1	100	50	200	100	200	800
Проект 2	300	200	100	100	100	700
Проект 3	100	150	150	200	100	800
Проект 4	200	100	400	200	200	900
Проект 5	100	100	200	100	100	700
Располагаемые средства	600	550	700	400	400	

Проект может быть реализован только самой компанией, без привлечения сторонних участников. Отдача от проекта возможна только, если он реализован на сто процентов. Какие инвестиции выгодны компании?

Принятие решения об аренде. Торговое предприятие принимает решение об аренде складских помещений. Трейлеры должны доставлять груз в пять супермаркетов. Годовые потребности в грузах у магазина выражены в числе трейлеров, направляемых к нему в год:

Тарифы перевозки грузов одним трейлером	Торговые точки					Пропускная способность	Стоимость аренды
	1	2	3	4	5		
Склад 1	150	140	170	150	120	300	6000
Склад 2	50	195	100	20	200	350	6000
Склад 3	80	240	140	40	150	300	8500
Потребность магазина в трейлерах	100	100	150	70	100		

Принять решение об аренде максимально выгодным для компании образом.

Вариант 7

Принятие решения об инвестировании. Варианты капиталовложений на пять лет:

	Вложения по годам					Прибыль
	1	2	3	4	5	
Проект 1	300	200	200	100	300	1300
Проект 2	100	200	100	200	100	700
Проект 3	100	200	270	200	100	800
Проект 4	200	100	400	200	200	900
Располагаемые средства	500	450	700	400	400	

Проект может быть реализован только самой компанией, без привлечения сторонних участников. Отдача от проекта возможна только, если он реализован на сто процентов. Какие инвестиции выгодны компании?

Принятие решения об аренде. Торговое предприятие принимает решение об аренде складских помещений. Трейлеры должны доставлять груз в пять супермаркетов. Годовые потребности в грузах у магазина выражены в числе трейлеров, направляемых к нему в год:

Тарифы перевозки грузов одним трейлером	Торговые точки					Пропускная способность	Стоимость аренды
	1	2	3	4	5		
Склад 1	150	140	170	150	120	300	5000
Склад 2	50	195	100	20	200	350	6000
Склад 3	80	140	140	40	150	350	8500
Потребность магазина в трейлерах	100	100	250	70	100		

Принять решение об аренде максимально выгодным для компании образом.

Вариант 8

Принятие решения об инвестировании. Варианты капиталовложений на шесть лет:

	Вложения по годам						Прибыль
	1	2	3	4	5	6	
Проект 1	100	150	150	100	100	50	700
Проект 2	200	150	150	100	100	180	900
Проект 3	100	200	350	150	100	100	800
Проект 4	100	300	400	100	200	200	900
Располагаемые средства	500	500	800	400	500	350	

Проект может быть реализован только самой компанией, без привлечения сторонних участников. Отдача от проекта возможна только, если он реализован на сто процентов. Какие инвестиции выгодны компании?

Принятие решения об аренде. Торговое предприятие принимает решение об аренде складских помещений. Трейлеры должны доставлять груз в четыре супермаркета. Годовые потребности в грузах у магазина выражены в числе трейлеров, направляемых к нему в год:

Тарифы перевозки грузов одним трейлером	Торговые точки				Пропускная способность	Стоимость аренды
	1	2	3	4		
Склад 1	150	140	70	160	300	6000
Склад 2	150	195	100	10	250	5000
Склад 3	120	240	140	60	300	5500
Склад 4	100	180	120	120	260	6500
Потребность магазина в трейлерах	100	100	110	140		

Принять решение об аренде максимально выгодным для компании образом.

Вариант 9

Принятие решения об инвестировании. Варианты капиталовложений на пять лет:

	Вложения по годам					Прибыль
	1	2	3	4	5	
Проект 1	100	50	200	100	200	800
Проект 2	300	200	100	100	100	700
Проект 3	100	150	150	200	100	800
Проект 4	200	100	400	200	200	900
Проект 5	400	100	300	100	100	1700
Располагаемые средства	800	550	700	400	400	

Проект может быть реализован только самой компанией, без привлечения сторонних участников. Отдача от проекта возможна только, если он реализован на сто процентов. Какие инвестиции выгодны компании?

Принятие решения об аренде. Торговое предприятие принимает решение об аренде складских помещений. Трейлеры должны доставлять груз в четыре супермаркета. Годовые потребности в грузах у магазина выражены в числе трейлеров, направляемых к нему в год:

Тарифы перевозки грузов одним трейлером	Торговые точки				Пропускная способность	Стоимость аренды
	1	2	3	4		
Склад 1	150	140	70	160	300	6000
Склад 2	150	95	100	110	250	8000
Склад 3	120	240	140	60	300	5500
Склад 4	100	180	120	120	260	6500
Потребность магазина в трейлерах	100	100	150	100		

Принять решение об аренде максимально выгодным для компании образом.

Вариант 10

Принятие решения об инвестировании. Варианты капиталовложений на пять лет:

	Вложения по годам					Прибыль
	1	2	3	4	5	
Проект 1	50	200	200	100	300	1000
Проект 2	250	200	100	200	100	700
Проект 3	100	200	300	100	100	800
Проект 4	200	100	400	200	200	1200
Проект 5	100	100	100	50	50	600
Располагаемые средства	600	550	800	400	450	

Проект может быть реализован только самой компанией, без привлечения сторонних участников. Отдача от проекта возможна только, если он реализован на сто процентов. Какие инвестиции выгодны компании?

Принятие решения об аренде. Торговое предприятие принимает решение об аренде складских помещений. Трейлеры должны доставлять груз в четыре супермаркета. Годовые потребности в грузах у магазина выражены в числе трейлеров, направляемых к нему в год:

Тарифы перевозки грузов одним трейлером	Торговые точки				Пропускная способность	Стоимость аренды
	1	2	3	4		
Склад 1	150	140	70	160	300	6000
Склад 2	150	95	100	110	250	8000
Склад 3	120	240	140	60	300	5500
Склад 4	100	180	120	120	260	6500
Склад 5	150	200	90	100	280	5000
Потребность магазина в трейлерах	100	100	150	100		

Принять решение об аренде максимально выгодным для компании образом.

Вариант 11

Принятие решения об инвестировании. Варианты капиталовложений на шесть лет:

	Вложения по годам						Прибыль
	1	2	3	4	5	6	
Проект 1	100	150	150	100	100	50	700
Проект 2	200	100	140	100	100	180	800
Проект 3	100	200	350	200	100	100	1000
Проект 4	100	300	400	100	200	200	900
Проект 5	50	150	100	100	50	0	500
Располагаемые средства	500	500	800	300	500	350	

Проект может быть реализован только самой компанией, без привлечения сторонних участников. Отдача от проекта возможна только, если он реализован на сто процентов. Какие инвестиции выгодны компании?

Принятие решения об аренде. Торговое предприятие принимает решение об аренде складских помещений. Трейлеры должны доставлять груз в пять супермаркетов. Годовые потребности в грузах у магазина выражены в числе трейлеров, направляемых к нему в год:

Тарифы перевозки грузов одним трейлером	Торговые точки					Пропускная способность	Стоимость аренды
	1	2	3	4	5		
Склад 1	150	140	170	150	120	300	6000
Склад 2	150	195	100	20	200	350	6000
Склад 3	180	240	140	40	150	300	8500
Склад 4	200	100	60	90	180	350	9000
Потребность магазина в трейлерах	100	100	110	120	100		

Принять решение об аренде максимально выгодным для компании образом.

Вариант 12

Принятие решения об инвестировании. Варианты капиталовложений на шесть лет:

	Вложения по годам						Прибыль
	1	2	3	4	5	6	
Проект 1	100	150	150	100	100	50	1700
Проект 2	200	100	140	100	100	180	1500
Проект 3	100	200	270	200	100	100	2500
Проект 4	100	300	400	100	200	200	1900
Располагаемые средства	500	600	600	300	400	450	

Проект может быть реализован только самой компанией, без привлечения сторонних участников. Отдача от проекта возможна только, если он реализован на сто процентов. Какие инвестиции выгодны компании?

Принятие решения об аренде. Торговое предприятие принимает решение об аренде складских помещений. Трейлеры должны доставлять груз в пять супермаркетов. Годовые потребности в грузах у магазина выражены в числе трейлеров, направляемых к нему в год:

Тарифы перевозки грузов одним трейлером	Торговые точки					Пропускная способность	Стоимость аренды
	1	2	3	4	5		
Склад 1	150	140	130	170	120	200	7000
Склад 2	100	150	120	60	200	350	6000
Склад 3	180	110	140	80	100	300	8500
Потребность магазина в трейлерах	80	70	100	100	100		

Принять решение об аренде максимально выгодным для компании образом.

5 ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

5.1 Управление инвестиционным портфелем, замена оборудования

Управление инвестиционным портфелем можно рассматривать как многошаговый процесс. Эффективность предприятия можно анализировать с точки зрения отдачи от вложений дискретных сумм с некоторым шагом. Например, если для инвестиций располагаемая сумма рана миллиону, то можно разбить ее на суммы кратные ста тысячам. Эффект от инвестируемых сумм обычно нелинейный: эффект от вложения трехсот тысяч не равен трехкратному эффекту от вложения ста тысяч. На предприятии первая сотня тысяч инвестиций может дать очень большой эффект, а может дать незначительный. На это влияют многие факторы: масштаб предприятия, какие проекты будут поддержаны этими деньгами.

Для одного предприятия максимальная отдача от выделенных средств будет при небольших инвестициях, для другого эффект возможен только от солидных сумм, которые позволяют перейти на новый уровень производства или продаж.

Рассматриваемая задача предварительно раскладывается на m шагов. Например, планирование деятельности предприятия на несколько лет – каждый шаг один год, планирование инвестиций в несколько объектов – каждый шаг один объект.

Далее рассматриваются возможные варианты инвестирования при условии, что суммарная сумма не превосходит имеющуюся в наличии.

Выбирается последовательность управляющих решений: распределение денежных средств между предприятиями с наибольшим суммарным эффектом от инвестиций.

При выборе управления на каждом шаге мы учитываем его влияние на выигрыши во всех последующих шагах.

По той же схеме можно рассматривать и управление заменой оборудования. Только управляющие решения – не суммы денежных средств, а распоряжения менять или не менять оборудование. Такое решение принимается в начале каждого года, а количество лет, на которые составляется перспективный план управления оборудованием, и есть число шагов.

В основе метода решения многошаговых задач лежит *принцип оптимальности Беллмана*: управление на каждом шаге необходимо выбирать таким образом, чтобы оптимальной была сумма выигрышей

на всех оставшихся до конца процесса шагах, включая выигрыш на данном шаге. Этот метод называется динамическим программированием.

Рассмотрим телекоммуникационную компанию, предоставляющую услуги связи. Новое оборудование в телекоме стоит очень дорого. Да, от него есть большой эффект: можно повысить надежность соединения, качество связи, себестоимость предоставления услуг, расширить спектр предоставляемых услуг. Но оборудование нужно окупать, поэтому прибыльность компании при таких инвестициях в оборудование сразу снизится. Однако все преимущества, которые дает новое оборудование являются конкурентными: клиентская база при старом оборудовании будет неуклонно сокращаться, т.е. прибыль при эксплуатации старого оборудования будет снижаться. И в один прекрасный момент репутация компании и качество ее услуг не позволят остаться на конкурентном рынке.

Для компаний других отраслей эксплуатация старого оборудования всегда связана с сокращением прибыли: качество производимых товаров или оказываемых услуг снижается, а эксплуатационные издержки на оборудование растут.

Поэтому требуется определить цепочку управлений, дающую производству максимальный эффект: вовремя менять оборудование, чтобы не терять прибыль, но и не тратить деньги на новое оборудование, если имеющееся вполне способно обеспечить хорошую прибыль.

5.2 Практическое задание (пример решения)

Управление инвестициями

Возможный прирост прибыли в зависимости от выделенной на модернизацию производства суммы x для четырех фирм в таблице 5.1. Для упрощения вычислений значения x будем выбирать кратными 1 млн руб.

Таблица 5.1 – Значения прироста прибыли

Средства млн руб.	Прибыль $\varphi_i(x)$			
	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$
1	0,5	0,8	0,3	0,4
2	1,2	1	0,7	0,9
3	1,5	1,3	1,2	1,4
4	1,8	1,5	1,9	1,7
5	2	1,9	2,3	2,4

Необходимо распределить между фирмами 5 млн руб., чтобы общий прирост прибыли был максимальным.

Решение

Переменные этой задачи могут принимать только два значения: 0 – отказ от вложения в предприятие соответствующей суммы, 1 – решение вложить указанную сумму.

Построим математическую модель задачи.

Пусть x_{ij} – решение о вложении i -й суммы в j -е предприятие. Тогда общая прибыль от вложений задается целевой функцией (5.1).

$$F(x) = 0,5x_{11} + 0,8x_{12} + 0,3x_{13} + 0,4x_{14} + 1,2x_{21} + x_{22} + 0,7x_{23} + 0,9x_{24} + 1,5x_{31} + 1,3x_{32} + 1,2x_{33} + 1,4x_{34} + 1,8x_{41} + 1,5x_{42} + 1,9x_{43} + 1,7x_{44} + 2x_{51} + 1,9x_{52} + 1,3x_{53} + 2,4x_{54}. \quad (5.1)$$

Ограничение на денежные средства (5.2):

$$(x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}) + 2(x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}) + 3(x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}) + 4(x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44}) + 5(x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54}) = 5. \quad (5.2)$$

В документе MS Excel создадим страничку модели задачи (рисунки 5.1–5.2):

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
	Инвестируемая сумма	1 предприятие	2 предприятие	3 предприятие	4 предприятие				
1	1	0	0	0	0	=СУММ(B2:E2)	=F2*A2		
2	2	0	0	0	0	=СУММ(B3:E3)	=F3*A3		
3	3	0	0	0	0	=СУММ(B4:E4)	=F4*A4		
4	4	0	0	0	0	=СУММ(B5:E5)	=F5*A5		
5	5	0	0	0	0	=СУММ(B6:E6)	=F6*A6		
7		=СУММ(B2:B6)	=СУММ(C2:C6)	=СУММ(D2:D6)	=СУММ(E2:E6)		=СУММ(G2:G6)	<=	5
8		1	1	1	1	ограничение на общую сумму средств к инвестированию			
9									
10		$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$				
11		0,5	0,8	0,3	0,4				
12		1,2	1	0,7	0,9				
13		1,5	1,3	1,2	1,4	целевая функция			
14		1,8	1,5	1,9	1,7	=СУММПРОИЗВ(B2:E6;B11:E15)			
15		2	1,9	2,3	2,4				
16									
17									

Рисунок 5.1 – Страница модели задачи (формулы)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Инвестируемая сумма	1 предприятие	2 предприятие	3 предприятие	4 предприятие				
2	1	0	0	0	0	0	0	0	
3	2	0	0	0	0	0	0	0	
4	3	0	0	0	0	0	0	0	
5	4	0	0	0	0	0	0	0	
6	5	0	0	0	0	0	0	0	
7		0	0	0	0			0 <=	5
8		1	1	1	1	ограничение на общую сумму средств			
9									
10		$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$				
11		0,5	0,8	0,3	0,4				
12		1,2	1,0	0,7	0,9				
13		1,5	1,3	1,2	1,4	целевая функция			
14		1,8	1,5	1,9	1,7	0,0			
15		2,0	1,9	2,3	2,4				

Рисунок 5.2 – Страница модели задачи (числовые значения)

В ячейках B2:E6 находятся значения переменных, описывающих управляющие решения. Значение, равное единице, означает, что в предприятие (название столбца) инвестируется сумма (значение в строке для инвестируемой суммы).

Ограничение вводится на сумму инвестируемых средств (суммарные вложения в предприятия не должны превосходить имеющейся суммы). Ограничение на переменные решения: все переменные могут принимать только два значения: 0 или 1. Сумма элементов в столбце управляющих решений не превосходит единицу: в предприятие может быть невыгодно вкладывать деньги, и тогда все значения в столбце равны нулю. Но если вкладывается некоторая сумма, то только одно значение в столбце может быть равным единице.

Целевая функция представляет собой сумму произведений управляющих решений на соответствующие этим решениям выигрыши.

Встав на ячейку, сохраняющую значение целевой функции, (в примере F14) вызовем инструмент Поиск решения и заполним диалоговое окно исходной информацией.

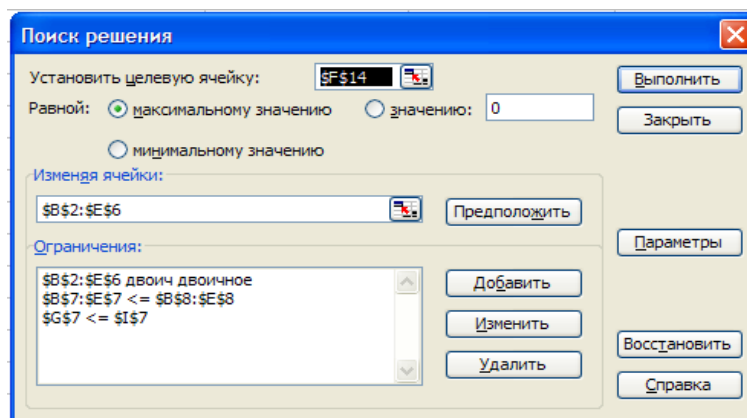


Рисунок 5.3 – Диалоговое окно инструмента Поиск решения

На вкладке **Параметры** выбираем необходимые характеристики модели (рисунок 5.4).

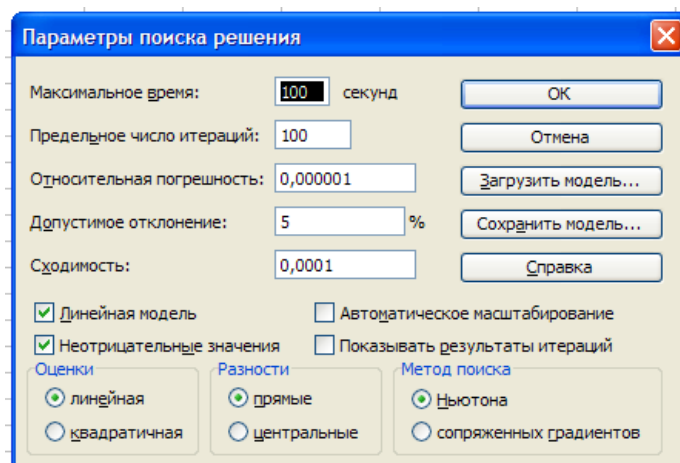


Рисунок 5.4 – Вкладка параметры поиска решения

Возвращаемся к исходному окну и выбираем команду **Выполнить** (рисунок 5.5).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Инвестируемая сумма	1 предприятие	2 предприятие	3 предприятие	4 предприятие				
2	1	0	1	0	0	1	1		
3	2	1	0	0	1	2	4		
4	3	0	0	0	0	0	0		
5	4	0	0	0	0	0	0		
6	5	0	0	0	0	0	0		
7		1	1	0	1		5 <=	5	
8		1	1	1	1	ограничение на общую сумму средств к инвестированию			
9									
10		$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$				
11		0,5	0,8	0,3	0,4				
12		1,2	1,0	0,7	0,9				
13		1,5	1,3	1,2	1,4	целевая функция			
14		1,8	1,5	1,9	1,7	2,9			
15		2,0	1,9	2,3	2,4				

Рисунок 5.5 – Оптимальный план распределения инвестиций

Как видно из таблицы на рисунке 5.5 в первое предприятие следует вложить 2 млн, во второе – 1 млн, в четвертое также 2 млн, а в третье предприятие инвестировать невыгодно.

Управление заменой оборудования

Для оборудования известны (таблица 5.2): стоимость $r(t)$ продукции, производимой в течение года с использованием данного оборудования; ежегодные расходы $l(t)$, связанные с эксплуатацией оборудования; его остаточная стоимость $c(t)$; стоимость p нового

оборудования (с расходами, связанными с установкой, накладкой и запуском оборудования).

Таблица 5.2

	Возраст оборудования t						Продолжительность периода m	5
	0	1	2	3	4	5	Возраст t оборудования	4
$r(t)$	80	75	65	60	60	55	Остаточная стоимость $c(t)$	0
$l(t)$	20	25	30	35	45	55	Стоимость p нового оборудования	40

Необходимо разработать оптимальную политику замены оборудования возраста t на период m лет.

Решение

Для решения задачи о замене оборудования можно воспользоваться таблицами программы MS Excel. Специального инструмента для решения подобной задачи нет, но анализ с помощью таблиц упрощает однообразные вычисления.

Необходимо построить таблицу условной оптимизации в MS Excel. Она строится с конца периода m к его началу. На каждом шаге (в начале каждого года) из множества возможных решений выбирается то, которое позволит выстроить лучшее решение от конца до этого шага. Строим таблицу условной оптимизации.

Введем исходные данные и рассчитаем функцию выигрыша для каждого возраста оборудования (для $t = 0$ дополнительно учитываем, что новое оборудование нужно купить). На рисунке 5.6 представлены формулы и результат функции прибыльности от возраста оборудования.

	A	B	C	D
1				
2	p	=40		
3	t	r(t)	l(t)	$\phi(t)$
4	0	80	20	=B4-C4-40
5	1	75	25	=B5-C5
6	2	65	30	=B6-C6
7	3	60	35	=B7-C7
8	4	60	45	=B8-C8
9	5	55	55	=B9-C9

	A	B	C	D
1				
2	p	40		
3	t	r(t)	l(t)	$\phi(t)$
4	0	80	20	20
5	1	75	25	50
6	2	65	30	35
7	3	60	35	25
8	4	60	45	15
9	5	55	55	0

Рисунок 5.6 – Формулы и результат (для годовой прибыли от эксплуатации оборудования в зависимости от его возраста)

Найдем шаговые управления и показатели эффективности для последнего шага (рисунки 5.7–5.8).

	A	B	C	D	E	F
1						
2	p	=40				
3	t	r(t)	l(t)	$\phi(t)$	x5	W5
4	0	80	20	=B4-C4-40		
5	1	75	25	=B5-C5	=ЕСЛИ(D5>\$D\$4;0;1)	=ЕСЛИ(D5>\$D\$4;D5;\$D\$4)
6	2	65	30	=B6-C6	=ЕСЛИ(D6>\$D\$4;0;1)	=ЕСЛИ(D6>\$D\$4;D6;\$D\$4)
7	3	60	35	=B7-C7	=ЕСЛИ(D7>\$D\$4;0;1)	=ЕСЛИ(D7>\$D\$4;D7;\$D\$4)
8	4	60	45	=B8-C8	=ЕСЛИ(D8>\$D\$4;0;1)	=ЕСЛИ(D8>\$D\$4;D8;\$D\$4)
9	5	55	55	=B9-C9	=ЕСЛИ(D9>\$D\$4;0;1)	=ЕСЛИ(D9>\$D\$4;D9;\$D\$4)

Рисунок 5.7 – Формулы для последнего шага процесса

	A	B	C	D	E	
1						
2	p	=40				
3	t	r(t)	l(t)	$\phi(t)$	x5	W5
4	0	80	20	20		
5	1	75	25	50	0	50
6	2	65	30	35	0	35
7	3	60	35	25	0	25
8	4	60	45	15	1	20
9	5	55	55	0	0	20

Рисунок 5.8 – Результат вычислений

Найдем шаговые управления и показатели эффективности для четвертого шага (рисунки 5.9–5.10).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	p	=40						
3	t	r(t)	l(t)	$\phi(t)$	x5	W5	x4	W4
4	0	80	20	20				
5	1	75	25	50	0	50	=ЕСЛИ(D5+F6>\$D\$4+\$F\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D5+F6>\$D\$4+\$F\$5;D5+F6;\$D\$4+\$F\$5)
6	2	65	30	35	0	35	=ЕСЛИ(D6+F7>\$D\$4+\$F\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D6+F7>\$D\$4+\$F\$5;D6+F7;\$D\$4+\$F\$5)
7	3	60	35	25	0	25	=ЕСЛИ(D7+F8>\$D\$4+\$F\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D7+F8>\$D\$4+\$F\$5;D7+F8;\$D\$4+\$F\$5)
8	4	60	45	15	1	20	=ЕСЛИ(D8+F9>\$D\$4+\$F\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D8+F9>\$D\$4+\$F\$5;D8+F9;\$D\$4+\$F\$5)
9	5	55	55	0	0	20	=ЕСЛИ(D9+F10>\$D\$4+\$F\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D9+F10>\$D\$4+\$F\$5;D9+F10;\$D\$4+\$F\$5)

Рисунок 5.9 – Формулы для четвертого шага

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2	p	=40						
3	t	r(t)	l(t)	$\phi(t)$	x5	W5	x4	W4
4	0	80	20	20				
5	1	75	25	50	0	50	0	85
6	2	65	30	35	0	35	1	70
7	3	60	35	25	0	25	1	70
8	4	60	45	15	1	20	1	70
9	5	55	55	0	0	20	1	70

Рисунок 5.10 – Результат для четвертого шага

Найдем шаговые управления и показатели эффективности для третьего шага (рисунки 5.11–5.12).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	p	=40								
3	t	r(t)	l(t)	$\phi(t)$	x5	W5	x4	W4	x3	W3
4	0	80	20	20						
5	1	75	25	50	0	50	0	85	=ЕСЛИ(D5+H6>\$D\$4+\$H\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D5+H6>\$D\$4+\$H\$5;D5+H6;\$D\$4+\$H\$5)
6	2	65	30	35	0	35	1	70	=ЕСЛИ(D6+H7>\$D\$4+\$H\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D6+H7>\$D\$4+\$H\$5;D6+H7;\$D\$4+\$H\$5)
7	3	60	35	25	0	25	1	70	=ЕСЛИ(D7+H8>\$D\$4+\$H\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D7+H8>\$D\$4+\$H\$5;D7+H8;\$D\$4+\$H\$5)
8	4	60	45	15	1	20	1	70	=ЕСЛИ(D8+H9>\$D\$4+\$H\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D8+H9>\$D\$4+\$H\$5;D8+H9;\$D\$4+\$H\$5)
9	5	55	55	0	0	20	1	70	=ЕСЛИ(D9+H10>\$D\$4+\$H\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D9+H10>\$D\$4+\$H\$5;D9+H10;\$D\$4+\$H\$5)

Рисунок 5.11 – Формулы для третьего шага

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2	p	=40								
3	t	r(t)	l(t)	$\phi(t)$	x5	W5	x4	W4	x3	W3
4	0	80	20	20						
5	1	75	25	50	0	50	0	85	0	120
6	2	65	30	35	0	35	1	70	1	105
7	3	60	35	25	0	25	1	70	1	105
8	4	60	45	15	1	20	1	70	1	105
9	5	55	55	0	0	20	1	70	1	105

Рисунок 5.12 – Результат для третьего шага

Найдем шаговые управления и показатели эффективности для второго шага (рисунки 5.13–5.14).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	p	=40										
3	t	r(t)	l(t)	φ(t)	x5	W5	x4	W4	x3	W3	x2	W2
4	0	80	20	20								
5	1	75	25	50	0	50	0	85	0	120	=ЕСЛИ(D5+J6>\$D\$4+\$J\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D5+J6>\$D\$4+\$J\$5;D5+J6;\$D\$4+\$J\$5)
6	2	65	30	35	0	35	1	70	1	105	=ЕСЛИ(D6+J7>\$D\$4+\$J\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D6+J7>\$D\$4+\$J\$5;D6+J7;\$D\$4+\$J\$5)
7	3	60	35	25	0	25	1	70	1	105	=ЕСЛИ(D7+J8>\$D\$4+\$J\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D7+J8>\$D\$4+\$J\$5;D7+J8;\$D\$4+\$J\$5)
8	4	60	45	15	1	20	1	70	1	105	=ЕСЛИ(D8+J9>\$D\$4+\$J\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D8+J9>\$D\$4+\$J\$5;D8+J9;\$D\$4+\$J\$5)
9	5	55	55	0	0	20	1	70	1	105	=ЕСЛИ(D9+J10>\$D\$4+\$J\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D9+J10>\$D\$4+\$J\$5;D9+J10;\$D\$4+\$J\$5)

Рисунок 5.13 – Формулы для второго шага

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2	p	=40										
3	t	r(t)	l(t)	φ(t)	x5	W5	x4	W4	x3	W3	x2	W2
4	0	80	20	20								
5	1	75	25	50	0	50	0	85	0	120	0	155
6	2	65	30	35	0	35	1	70	1	105	1	140
7	3	60	35	25	0	25	1	70	1	105	1	140
8	4	60	45	15	1	20	1	70	1	105	1	140
9	5	55	55	0	0	20	1	70	1	105	1	140

Рисунок 5.14 – Результат для второго шага

Найдем шаговые управления и показатели эффективности для первого шага (рисунки 5.15–5.16).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	p	=40												
3	t	r(t)	l(t)	φ(t)	x5	W5	x4	W4	x3	W3	x2	W2	x1	W1
4	0	80	20	20										
5	1	75	25	50	0	50	0	85	0	120	0	155	=ЕСЛИ(D5+L6>\$D\$4+\$L\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D5+L6>\$D\$4+\$L\$5;D5+L6;\$D\$4+\$L\$5)
6	2	65	30	35	0	35	1	70	1	105	1	140	=ЕСЛИ(D6+L7>\$D\$4+\$L\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D6+L7>\$D\$4+\$L\$5;D6+L7;\$D\$4+\$L\$5)
7	3	60	35	25	0	25	1	70	1	105	1	140	=ЕСЛИ(D7+L8>\$D\$4+\$L\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D7+L8>\$D\$4+\$L\$5;D7+L8;\$D\$4+\$L\$5)
8	4	60	45	15	1	20	1	70	1	105	1	140	=ЕСЛИ(D8+L9>\$D\$4+\$L\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D8+L9>\$D\$4+\$L\$5;D8+L9;\$D\$4+\$L\$5)
9	5	55	55	0	0	20	1	70	1	105	1	140	=ЕСЛИ(D9+L10>\$D\$4+\$L\$5;0;1)	=ЕСЛИ(D9+L10>\$D\$4+\$L\$5;D9+L10;\$D\$4+\$L\$5)

Рисунок 5.15 – Формулы для первого шага

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	p		40											
3	t	r(t)	l(t)	φ(t)	x5	W5	x4	W4	x3	W3	x2	W2	x1	W1
4	0	80	20	20										
5	1	75	25	50	0	50	0	85	0	120	0	155	0	190
6	2	65	30	35	0	35	1	70	1	105	1	140	1	175
7	3	60	35	25	0	25	1	70	1	105	1	140	1	175
8	4	60	45	15	1	20	1	70	1	105	1	140	1	175
9	5	55	55	0	0	20	1	70	1	105	1	140	1	175
10														

Рисунок 5.16 – Таблица условной оптимизации для задачи замены оборудования

Этап безусловной оптимизации начинается с первого шага. Определяем начальное состояние системы. Возраст оборудования $t_1 = 4$ (рисунок 5.17).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1														
2	p	40												
3	t	r(t)	l(t)	$\phi(t)$	x5	W5	x4	W4	x3	W3	x2	W2	x1	W1
4	0	80	20	20										
5	1	75	25	50	0	50	0	85	0	120	0	155	0	190
6	2	65	30	35	0	35	1	70	1	105	1	140	1	175
7	3	60	35	25	0	25	1	70	1	105	1	140	1	175
8	4	60	45	15	1	20	1	70	1	105	1	140	1	175
9	5	55	55	0	1	20	1	70	1	105	1	140	1	175

Рисунок 5.17 – Безусловная оптимизация

На первом шаге управляющее решение – оборудование менять. Следовательно, оборудование в начале первого года после замены имеет возраст, равный нулю. На втором шаге (через год) новое оборудование будет иметь возраст один год: $t_2 = 1$. Управляющее решение на втором шаге – оборудование не менять. Через год оборудованию уже два года ($t_3 = t_2 + 1 = 2$). При этом управляющее решение – оборудование нужно менять. Через год $t_4 = 1$ управляющее решение – оборудование не менять. Тогда через год эксплуатации возраст оборудования $t_5 = 2$, и управляющее решение – оборудование не менять.

Таким образом, последовательность выбора управлений:

$$t_1 = 4, x_1(4) = 1, \text{ следовательно, } t_1 = 0,$$

$$t_2 = 1, x_2(1) = 0,$$

$$t_3 = t_2 + 1 = 2, x_3(2) = 1, \text{ следовательно, } t_3 = 0,$$

$$t_4 = 1, x_4(1) = 0,$$

$$t_5 = t_4 + 1 = 2, x_5(1) = 0.$$

Для оптимального управления $X^* = (1, 0, 1, 0, 0)$ показатель эффективности – $W^* = 175$.

Для оптимального управления $X^* = (1, 0, 1, 0, 0)$ показатель эффективности – $W^* = 175$.

5.3 Варианты для самостоятельного решения

Управление инвестиционным портфелем

В таблицах приведены значения возможного прироста выпуска продукции на четырех фирмах в зависимости от выделенной на модернизацию производства суммы x . Распределить между фирмами 1 млн руб., чтобы общий прирост прибыли был максимальным. Для упрощения вычислений значения x будем выбирать кратными 200 тыс. руб.

Вариант 1

Средства, тыс. руб.	Прибыль $\varphi_i(x)$			
	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$
200	95	114	164	133
400	183	191	321	273
600	241	302	402	442
800	383	442	571	692
1000	501	591	701	733

Вариант 2

Средства, тыс. руб.	Прибыль $\varphi_i(x)$			
	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$
200	97	116	135	126
400	172	343	283	354
600	292	463	374	403
800	382	533	492	542
1000	472	752	612	734

Вариант 3

Средства, тыс. руб.	Прибыль $\varphi_i(x)$			
	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$
200	73	98	172	168
400	297	194	274	302
600	371	284	373	423
800	411	373	483	651
1000	593	463	661	815

Вариант 4

Средства, тыс. руб.	Прибыль $\varphi_i(x)$			
	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$
200	94	124	118	144
400	205	252	206	233
600	352	341	322	404
800	443	464	482	503
1000	574	574	613	583

Вариант 5

Средства, тыс. руб.	Прибыль $\varphi_i(x)$			
	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$
200	98	82	125	72
400	183	194	253	155
600	293	303	513	522
800	414	472	581	594
1000	602	585	694	602

Вариант 6

Средства, тыс. руб.	Прибыль $\varphi_i(x)$			
	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$
200	110	133	123	104
400	214	203	227	273
600	404	424	344	333
800	542	451	552	573
1000	623	612	603	691

Вариант 7

Средства, тыс. руб.	Прибыль $\varphi_i(x)$			
	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$
200	123	164	99	155
400	267	212	174	252
600	402	365	355	512
800	604	491	512	622
1000	721	633	652	762

Вариант 8

Средства, тыс. руб.	Прибыль $\varphi_i(x)$			
	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$
200	145	125	134	77
400	244	305	252	334
600	373	422	453	463
800	455	583	621	602
1000	582	714	701	683

Вариант 9

Средства, тыс. руб.	Прибыль $\varphi_i(x)$			
	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$
200	100	120	80	130
400	200	180	150	200
600	250	240	220	240
800	300	400	320	280
1000	320	450	380	350

Вариант 10

Средства, тыс. руб.	Прибыль $\varphi_i(x)$			
	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$
200	147	152	119	80
400	203	180	158	180
600	228	280	215	250
800	253	352	265	325
1000	287	400	300	415

Вариант 11

Средства, тыс. руб.	Прибыль $\varphi_i(x)$			
	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$
200	195	124	165	135
400	230	191	321	273
600	241	302	402	442
800	350	442	571	550
1000	450	491	680	633

Вариант 12

Средства, тыс. руб.	Прибыль $\varphi_i(x)$			
	$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$
200	128	124	164	119
400	163	192	321	273
600	248	268	402	442
800	300	358	571	692
1000	380	591	701	733

Замена оборудования

Разработать оптимальную политику замены оборудования (не старше 10 лет), если известны: стоимость $r(t)$ продукции, производимой в течение года с использованием данного оборудования; ежегодные расходы $l(t)$, связанные с эксплуатацией оборудования; его остаточная стоимость $c(t)$; стоимость p нового оборудования (с расходами, связанными с установкой, накладкой и запуском оборудования). После составления матрицы максимальных прибылей сформировать оптимальные политики в отношении оборудования данного возраста t в плановом периоде данной продолжительности m .

Вариант 1

	Возраст оборудования t										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	20	20	20	19	19	18	18	17	17	16	15
$l(t)$	10	11	12	12	13	13	14	14	15	15	20
Продолжительность периода m			Возраст t оборудования			Остаточная стоимость $c(t)$			Стоимость p нового оборудования		
5			3			0			20		

Вариант 2

	Возраст оборудования t										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	22	22	21	21	21	20	20	19	19	19	18
$l(t)$	12	13	13	14	15	15	16	16	17	18	18
Продолжительность периода m			Возраст t оборудования			Остаточная стоимость $c(t)$			Стоимость p нового оборудования		
5			3			0			30		

Вариант 3

	Возраст оборудования t										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	25	24	24	23	22	22	21	21	21	20	20
$l(t)$	13	13	14	15	15	16	16	17	18	19	20
Продолжительность периода m			Возраст t оборудования			Остаточная стоимость $c(t)$			Стоимость p нового оборудования		
5			3			0			25		

Вариант 4

	Возраст оборудования t										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	28	27	27	26	25	25	24	23	23	22	21
$l(t)$	16	16	17	17	17	18	18	19	20	20	21
Продолжительность периода m			Возраст t оборудования			Остаточная стоимость $c(t)$			Стоимость p нового оборудования		
5			3			0			28		

Вариант 5

	Возраст оборудования t										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	21	20	19	19	18	18	17	16	16	15	15
$l(t)$	11	11	11	12	12	13	13	13	14	14	15
Продолжительность периода m			Возраст t оборудования			Остаточная стоимость $c(t)$			Стоимость p нового оборудования		
5			3			0			26		

Вариант 6

	Возраст оборудования t										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	24	24	24	23	23	22	21	21	21	20	20
$l(t)$	13	14	15	16	17	17	17	18	19	19	20
Продолжительность периода m			Возраст t оборудования			Остаточная стоимость $c(t)$			Стоимость p нового оборудования		
5			3			0			35		

Вариант 7

	Возраст оборудования t										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	28	27	26	25	24	24	23	22	22	22	21
$l(t)$	15	15	16	17	17	18	19	20	20	21	21
Продолжительность периода m			Возраст t оборудования			Остаточная стоимость $c(t)$			Стоимость p нового оборудования		
5			3			0			28		

Вариант 8

	Возраст оборудования t										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	20	20	19	18	17	16	16	15	15	14	13
$l(t)$	8	9	9	10	10	10	11	11	12	13	13
Продолжительность периода m			Возраст t оборудования			Остаточная стоимость $c(t)$			Стоимость p нового оборудования		
5			3			0			25		

Вариант 9

	Возраст оборудования t										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	26	25	25	24	24	23	23	23	22	21	21
$l(t)$	15	15	16	16	17	17	18	19	19	20	21
Продолжительность периода m			Возраст t оборудования			Остаточная стоимость $c(t)$			Стоимость p нового оборудования		
5			3			0			22		

Вариант 10

	Возраст оборудования t										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	20	20	19	19	18	18	17	17	16	15	15
$l(t)$	11	11	12	13	13	13	13	14	14	14	15
Продолжительность периода m			Возраст t оборудования			Остаточная стоимость $c(t)$			Стоимость p нового оборудования		
5			3			0			23		

Вариант 11

	Возраст оборудования t										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	26	25	25	24	24	23	23	23	22	21	21
$l(t)$	11	11	12	13	13	13	13	14	14	14	15
Продолжительность периода m			Возраст t оборудования			Остаточная стоимость $c(t)$			Стоимость p нового оборудования		
5			3			0			24		

Вариант 12

	Возраст оборудования t										
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r(t)$	30	30	29	29	28	28	27	27	26	25	25
$l(t)$	11	11	12	13	13	13	13	14	14	14	15
Продолжительность периода m			Возраст t оборудования			Остаточная стоимость $c(t)$			Стоимость p нового оборудования		
5			3			0			25		

6 МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРИНЯТИЯ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ

6.1 Метод анализа иерархий (АНР), метод ELECTRE

В управленческой практике часто возникает ситуация, когда необходимо выбрать некоторый вариант действий или альтернативу в условиях, когда критериев оптимальности несколько. При этом альтернативы с лучшими значениями по всем критериям не существует. Для решения задач выбора при многих критериях можно использовать метод АНР (Analytic Hierarchy Process – обработка аналитической иерархии). Этот метод используется для определения компромиссного решения, которое удовлетворяет требованиям, предъявляемым ЛПР (лицом, принимающим решение, или группой лиц, уполномоченных это сделать).

Русскоязычная аббревиатура этого метода – МАИ (Метод Анализа Иерархий).

Структура метода трехэтапная. Вначале определяется цель, которую планируется достичь с помощью наилучшего выбора.

Затем определяются критерии, которые позволяют оценить, насколько возможные альтернативы удовлетворяют цели. Критерии ранжируются по важности на основе оценочных суждений: предпочтительность одного критерия другому.

Критерии сравниваются попарно, на основании оценок формируется матрица приоритетов критериев. Каждому критерию в результате процедуры оценки важности присваивается определенный вес.

Затем рассматриваются альтернативы, которые попарно сравниваются по каждому критерию в отдельности. На основании сравнений формируются матрицы приоритетов альтернатив по каждому критерию.

Интегральные оценки альтернатив складываются из оценок критериев и оценок альтернатив по критериям.

Каждый элемент иерархии может представлять различные аспекты решаемой задачи, причем во внимание могут быть приняты как материальные, так и нематериальные факторы, измеряемые количественные параметры и качественные характеристики, объективные данные и субъективные экспертные оценки

При сравнении критериев и альтернатив используется шкала, которая переводит качественные и количественные значения показателей альтернатив в оценки сравнения:

- 1 – равнозначность сравниваемых объектов (равный приоритет);
- 3 – один из объектов сравнения имеет несколько большую значимость нежели другой (слабый приоритет);

5 – один из объектов сравнения имеет существенно большую значимость нежели другой (сильный приоритет);

7 – один из объектов сравнения имеет, бесспорно, большую значимость нежели другой (очень сильный приоритет);

9 – один из объектов сравнения имеет абсолютно большую значимость нежели другой (абсолютный приоритет).

Например, цель – снять хорошую квартиру. Критерии для сравнения альтернатив: цена аренды, удаленность от места работы, площадь, наличие ремонта, наличие в шаговой доступности магазинов или возможностей заняться спортом и т.д. Каждое лицо, принимающее решение, обозначает свои критерии для сравнения вариантов. Для критериев проводится приоритизация: важность критерия быстро добраться до работы может быть выше, чем у цены и т.д. И эта важность и превосходство оцениваются при сравнении критериев по приведенной шкале. Такие оценки обладают известной долей субъективности, но они последовательно помогают лицу, принимающему решение, выработать правила выбора альтернатив согласно своим предпочтениям.

Далее сравниваются между собой конкретные альтернативы: например, квартира с ценой аренды 10 тыс., ее удаленность от работы 5 мин, площадь 35 м² и квартира с ценой аренды 7 тыс., ее удаленность от работы 1 ч в пути и площадь 40 м². При наличии на рынке арендного жилья великолепного варианта по наименьшей цене, близко от работы и большой площади – анализ иерархий не требуется. Но обычно сравниваются варианты с лучшими значениями по одним критериям и худшими по другим. И в этом случае алгоритм решения позволяет если не найти решение, то лучше структурировать выбор и оценить альтернативы пусть и с субъективной точки зрения.

Рассмотрим задачу выбора поставщика. При выборе поставщика предприятием целью является найти на рынке лучшего в данном сегменте.

Критериями выбора являются: цена поставки, размер партии (партионность), быстрота доставки (удаленность), надежность поставки (выполнение сроков), качество поставки (соблюдение требований к упаковке, комплектности, соответствию накладной и т.п.).

Далее по каждому поставщику (альтернативы) собирается информация о значениях критериев: какие партии поставляются, по какой цене, насколько удален поставщик от предприятия и т.п.

Если на рынке есть лучший по всем критериям поставщик, то на этапе сбора информации получено наилучшее решение. Если нет,

то необходимо сравнить альтернативы по всем критериям и найти их интегральную оценку, чтобы определиться с наилучшей альтернативой.

Метод ELECTRE (limination Et Choix Traduisant la Realite – исключение и выбор, отражающие реальность) также позволяет определиться с лучшими альтернативами в условиях многих критериев сравнения.

Метод ELECTRE основан на индексах согласия и несогласия. Процедура определения индексов отличается для разных версий. Алгоритм же метода следующий:

- определяются значения попарного сравнения альтернатив для матриц индексов согласия и несогласия;

- выбирается уровень согласия (максимальный для матрицы индексов согласия) и уровень несогласия (минимальный для матрицы индексов несогласия).

Если для пары альтернатив индекс согласия больше или равен уровню согласия, а индекс несогласия меньше или равен уровню несогласия, то альтернатива в строке доминирует над альтернативой в столбце. Доминируемая альтернатива исключается из рассмотрения, и матрицы согласия и несогласия корректируются на исключенную альтернативу.

Если таких пар не оказалось, то уровень согласия снижают, а уровень несогласия повышают. И так до тех пор, пока не осталась одна альтернатива, доминирующая над всеми, или несравнимые альтернативы, которые составляют ядро лучших альтернатив.

6.2 Практическое задание (пример решения)

Предприятию необходимо заключить договор о поставке товара с одним из четырех посредников. Критерии сравнения альтернатив цена товара (руб.); партионность (шт.); месторасположение поставщика (км); сбой поставок (кол.). По поставщикам собраны данные (таблица 6.1).

Таблица 6.1 – Исходные данные

	Цена товара	Партионность	Место-расположение поставщика	Сбой поставок
Посредник 1	1000	500	1000	1
Посредник 2	1800	200	500	2
Посредник 3	800	1000	1500	0
Посредник 4	2000	500	100	0

При сравнении критериев учитывается следующая информация от лица, принимающего решения:

- цена – самый приоритетный критерий;
- цена очень сильно превосходит партионность;
- цена слабо превосходит сбой поставок;
- цена сильно превосходит месторасположение поставщика.

Необходимо выбрать наилучшего поставщика.

Решение

В документе MS Excel создадим матрицу попарных сравнений критериев (рисунок 6.1). Матрица приоритетов составлена с учетом, что самый важный критерий – цена, далее – сбой поставок, месторасположение поставщика и на последнем месте по важности находится партионность.

	A	B	C	D	E
1		Цена товара	Партионность	Месторасположение	Сбой поставок
2	Цена товара	1	7	3	5
3	Партионность	1/7	1	1/5	1/3
4	Месторасположение	1/3	5	1	3
5	Сбой поставок	1/5	3	1/3	1

Рисунок 6.1 – Матрица критериев

Если критерий в строке превосходит критерий в столбце, то в ячейке на пересечении строки и столбца размещают число $k > 1$, показывающее силу превосходства. На симметричной позиции (номера строки и столбца меняются местами) размещают обратную величину $1/k$. Для корректного отображения дробей в ячейках необходимо изменить формат ячеек на дробный (иначе возможно распознавание записи дроби как даты).

Оценим важность критериев. Для этого на основе матрицы приоритетов критериев найдем вес каждого критерия по следующему правилу:

- находим произведение элементов строки;
- извлекаем из произведения корень той степени, какое число элементов в строке;

– нормируем полученные значения (делим каждое значение на сумму всех значений в столбце).

Полученные веса меньше единицы, и самое большое значение веса у наиболее приоритетного критерия (рисунок 6.2–6.3).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Цена товара	Партионность	Месторасположение	Сбой поставок	Производство	$\sqrt[4]{}$	Вес
2	Цена товара	1	7	3	5	105	3,201086	0,563813
3	Партионность	1/7	1	1/5	1/3	1/105	0,312394	0,055022
4	Месторасположение	1/3	5	1	3	5	1,495349	0,263378
5	Сбой поставок	1/5	3	1/3	1	1/5	0,668740	0,117786
6							5,677569	

Рисунок 6.2 – Вычисление весов критериев (значения)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Цена товара	Партионность	Месторасположение	Сбой поставок	Производство	$\sqrt[4]{}$	Вес
2	Цена товара	1	7	3	5	=ПРОИЗВЕД(B2:E2)	=F2^(1/4)	=G2/\$G\$6
3	Партионность	0,14285	1	0,2	0,333333	=ПРОИЗВЕД(B3:E3)	=F3^(1/4)	=G3/\$G\$6
4	Месторасположение	0,33333	5	1	3	=ПРОИЗВЕД(B4:E4)	=F4^(1/4)	=G4/\$G\$6
5	Сбой поставок	0,2	3	0,333333	1	=ПРОИЗВЕД(B5:E5)	=F5^(1/4)	=G5/\$G\$6
6							=СУММ(G2:G5)	

Рисунок 6.3 – Вычисление весов критериев (формулы)

Далее сравним альтернативы по предложенной шкале по каждому критерию. Цена нужна как можно ниже, партионность тоже должна быть небольшой – так проще заказать нужное количество и не закупать излишки, которые нужно где-то хранить. Например, при минимальной партии в 1000, даже если требуется 150 единиц, нужно выкупить всю партию. Месторасположение тоже должно быть близким, а сбои поставок – редкими.

Лучшим был бы поставщик с ценой – 800, партионностью – 200, месторасположением – 100 и сбоем поставок – 0. Но такой альтернативы нет в рассмотрении.

По критерию цена – лучшая альтернатива Посредник 3. С этой строки начинаем заполнять матрицу приоритетов: Посредник 3 слабо превосходит Посредника 1 по цене, очень сильно превосходит Посредника 2 и абсолютно превосходит Посредника 4. В столбце Посредник 3 заполняем ячейки обратными значениями для заполненной

строки. Затем переходим к заполнению следующего по привлекательности цены Посредника 1, потом заполняем оставшиеся пустыми ячейки в строке Посредника 2. А затем аналогично предыдущей таблице находим вес каждой альтернативы по критерию цена (рисунок 6.4).

7								
8	Цена	П1	П2	П3	П4	Произведение	$\sqrt[4]{}$	Вес
9	П1	1	6	1/3	7	14	1,934336	0,301875
10	П2	1/6	1	1/7	2	1/21	0,467138	0,072902
11	П3	3	7	1	9	189	3,707793	0,578643
12	П4	1/7	1/2	1/9	1	1/126	0,298475	0,046580
13							6,407742	

Рисунок 6.4 – Вес каждой альтернативы по критерию цена

По критерию партионность – лучшая альтернатива Посредник 2. С этой строки начинаем заполнять матрицу приоритетов: Посредник 2 одинаково сильно превосходит Посредника 1 и Посредника 4, и абсолютно превосходит Посредника 3. В столбце Посредник 2 заполняем ячейки обратными значениями для заполненной строки. Затем переходим к заполнению следующих по привлекательности партионности Посредника 1 и Посредника 4 (это одинаковые строки). И находим вес каждой альтернативы по критерию партионность (рисунок 6.5).

16	Партионность	П1	П2	П3	П4	Произведение	$\sqrt{}$	Вес
17	П1	1	1/5	7	1	1 2/5	1,087757	0,173577
18	П2	5	1	9	5	225	3,872983	0,618024
19	П3	1/7	1/9	1	1/7	1/441	0,218218	0,034822
20	П4	1	1/5	7	1	1 2/5	1,087757	0,173577
21							6,266716	

Рисунок 6.5 – Вес каждой альтернативы по критерию партионность

По критерию месторасположение лучшая альтернатива – Посредник 4. С этой строки начинаем заполнять матрицу приоритетов: Посредник 4 сильно превосходит Посредника 2, очень сильно Посредника 1, и абсолютно превосходит Посредника 3. В столбце Посредник 4 заполняем ячейки обратными значениями для заполненной строки. Затем переходим к заполнению следующего по привлекательности месторасположения Посредника 2. Потом заполняем оставшиеся пустыми ячейки в строке Посредника 1. И находим вес каждой альтернативы по критерию месторасположение (рисунок 6.6).

	Месторасположение	П1	П2	П3	П4	Произведение	$\sqrt[4]{}$	Вес
24	П1	1	1/6	4	1/7	2/21	0,555524	0,083009
25	П2	6	1	9	1/4	13 1/2	1,916829	0,286421
26	П3	1/4	1/9	1	1/9	1/324	0,235702	0,035220
27	П4	7	4	9	1	252	3,984283	0,595350
28							6,692338	
29								

Рисунок 6.6 – Вес каждой альтернативы по критерию месторасположение

По критерию сбоя поставок лучшие альтернативы – Посредник 3 и Посредник 4. С этих строк начинаем заполнять матрицу приоритетов: Посредник 4 (аналогично и Посредник 3) слабо превосходит Посредника 1, сильно Посредника 2. В столбцах Посредник 3 и Посредник 4 заполняем ячейки обратными значениями для заполненной строки. Затем переходим к заполнению следующего по привлекательности сбоя поставок Посредника 2. И находим вес каждой альтернативы по критерию сбоя поставок (рисунок 6.7).

	Сбой поставок	П1	П2	П3	П4	Произведение	$\sqrt[4]{}$	Вес
32	П1	1	3	1/3	1/3	1/3	0,759836	0,150892
33	П2	1/3	1	1/5	1/5	1/75	0,339809	0,067481
34	П3	3	5	1	1	15	1,967990	0,390813
35	П4	3	5	1	1	15	1,967990	0,390813
36							5,035624	1
37								

Рисунок 6.7 – Вес каждой альтернативы по критерию сбоя поставок

Чтобы принять окончательное решение по выбору Посредника, необходимо значения векторов приоритета из всех таблиц по каждому фактору перенести в итоговую таблицу и рассчитать глобальный приоритет.

Глобальный приоритет определяется путем суммирования произведений значимости критерия (см. рисунок 6.2) на вектор приоритета критерия по каждому посреднику (см. рисунки 6.3–6.6). Итоговый расчет на рисунках 6.8–6.9.

	Цена товара	Партионность	Месторасположение поставщика	Сбой поставок	Глобальный приоритет
	0,563813	0,055022	0,263378	0,117786	
Посредник 1	0,3018749	0,173577	0,083008929	0,150892	0,219387
Посредник 2	0,07290212	0,618024	0,286421474	0,067481	0,158494
Посредник 3	0,57864266	0,034822	0,035219719	0,390813	0,383471
Посредник 4	0,04658031	0,173577	0,595349878	0,390813	0,238648

Рисунок 6.8 – Глобальный приоритет (значения)

	Цена товара	Партионность	Месторасположение поставщика	Сбой поставок	Глобальный приоритет
	0,563813	0,055022	0,263378	0,117786	
Посредник 1	0,3018749036959	0,173576931245293	0,083008928741	0,15089206505	=СУММПРОИЗВ(\$B\$41:\$E\$41;B42:E42)
Посредник 2	0,0729021232097	0,618024407034022	0,286421474440	0,06748098294	=СУММПРОИЗВ(\$B\$41:\$E\$41;B43:E43)
Посредник 3	0,5786426641845	0,0348217304753915	0,035219718575	0,39081347600	=СУММПРОИЗВ(\$B\$41:\$E\$41;B44:E44)
Посредник 4	0,0465803089097	0,173576931245293	0,595349878241	0,39081347600	=СУММПРОИЗВ(\$B\$41:\$E\$41;B45:E45)

Рисунок 6.9 – Глобальный приоритет (формулы)

Сравнивая полученные значения, определяем рейтинг всех Посредников. Высокий рейтинг будет соответствовать наибольшему значению глобального вектора приоритета. В приведенном примере согласно исходным данным наибольший приоритет оказался у Посредника 3.

Достоинством этого метода (в отличие от других экспертных) является возможность оценивать сразу и качественные, и количественные характеристики посредством перехода к безразмерным показателям.

С помощью этого метода можно осуществлять поиск оптимального решения в любой ситуации, так как он позволяет сравнивать все факторы одновременно, определяя значимость путем сравнения каждого с каждым.

Другие же методы одновременно позволяют сравнивать только по два фактора.

Рассмотрим для выбора Посредников метод ELECTRE.

Этот метод требует изначального ранжирования критериев за счет присвоения им весов. Так как в методе АНР уже найдены веса критериев на основе описательных оценок, то воспользуемся ими. Для облегчения вычислений пропорционально увеличим веса на 20 и отбросим дробную часть (рисунки 6.10–6.11). Это не изменит суть метода, но вычисления станут проще.

	Вес	
Цена товара	0,56381276908072	11
Партионность	0,05502249224752	1
Месторасположение	0,26337835676570	5
Сбой поставок	0,11778638190606	2
		19

Рисунок 6.10 – Расчет веса альтернатив (значения)

	Вес	
Цена товара	0,56381276908071	=ОКРУГЛВНИЗ(В3*20; 0)
Партионность	0,05502249224751	=ОКРУГЛВНИЗ(В4*20; 0)
Месторасположение	0,26337835676570	=ОКРУГЛВНИЗ(В5*20; 0)
Сбой поставок	0,11778638190600	=ОКРУГЛВНИЗ(В6*20; 0)
		=СУММ(С3:С6)

Рисунок 6.11 – Расчет веса альтернатив (формулы)

Вычислим индексы согласия (рисунок 6.12).

Индексы согласия				
	п1	п2	п3	п4
п1	*	13/19	6/19	12/19
п2	6/19	*	6/19	12/19
п3	13/19	13/19	*	13/19
п4	8/19	7/19	8/19	*

Рисунок 6.12 – Индексы согласия

В знаменателе индекса – сумма всех весов, в числителе сумма весов критериев по которым первая из сравниваемых альтернатив лучше второй. Сравним Посредника 1 и Посредника 2: первый лучше второго по цене и сбою поставок, следовательно, сумма весов в числителе равна 13. Сравним Посредника 1 и Посредника 3: первый лучше по месторасположению и партионности, следовательно, сумма весов в числителе равна 6. Сравним Посредника 1 и Посредника 4: первый лучше по цене и равный по партионности, значит, сумма весов в числителе равна 12. Аналогично вычисляем индексы согласия при парных сравнениях других альтернатив.

Индексы несогласия вычисляются иначе. Предварительно найдем длину шкалы по каждому критерию. Это разность между наибольшим и наименьшим значениями этого критерия. Длина шкалы для критерия цена – 1200, для критерия партионность – 800, для критерия месторасположение – 1400 и для критерия сбой поставок – 2. Далее будем сравнивать пары альтернатив и выбирать для вычисления те критерии, по которым первая из сравниваемых альтернатив

хуже второй: из большего значения такого критерия вычитают меньшее и разницу делят на длину шкалы критерия.

Например, Посредник 1 хуже Посредника 2 по партионности и месторасположению. По партионности разность значений по критерию равна 800 и делим на длину шкалы – $800/1200$ или $2/3$. По месторасположению разность значений равна 300 и делим на длину шкалы – $300/800$ или $3/8$. Из двух значений выбираем наибольшее. Аналогично вычисляем и другие значения индексов. Так, сравниваем Посредника 1 и Посредника 2. Первый хуже по критериям цена и сбой поставок. По цене значение $1/6$ ($200/1200$) по сбою поставок $1/2$, выбираем наибольшее. Матрица индексов несогласия приведена на рисунке 6.13.

Индексы несогласия				
	п1	п2	п3	п4
п1	*	$3/8$	$1/2$	$9/14$
п2	$2/3$	*	1	1
п3	$5/8$	1	*	1
п4	$5/6$	$3/8$	1	*

Рисунок 6.13 – Индексы несогласия

Далее выбираем уровень согласия – это достаточно большое число из матрицы индексов согласия. Выбор его произволен. Все значения в матрице согласия большие или равные этому числу закрасим.

Выберем уровень несогласия – достаточно маленькое число из матрицы индексов несогласия. Все значения в матрице индексов несогласия меньшие или равные этому числу закрасим.

Если в двух матрицах на одинаковых позициях оказались закрашенные ячейки, то альтернатива в строке для такой ячейки доминирует над альтернативой в столбце. И менее приоритетную альтернативу исключают из рассмотрения.

Исключая такую альтернативу из строки и столбца, делаем матрицы меньше.

Если осталось много альтернатив, то уменьшают уровень согласия и увеличивают уровень несогласия. Закрашенных ячеек становится больше, возможно, в матрицах индексов согласия и несогласия появятся совпадения закрашенных ячеек, и опять соответствующую альтернативу столбца можно будет исключить.

Выберем уровень согласия $13/19$ и уровень несогласия $3/8$. Закрасим ячейки в матрицах индексов согласия и несогласия. Среди

закрашенных ячеек есть совпадающие: Посредник 1 в строке и Посредник 2 в столбце (рисунок 6.14). В строке – лучшая альтернатива. В столбце – худшая. Худшую альтернативу исключаем из рассмотрения (рисунок 6.14).

Индексы согласия						
	п1	п2	п3	п4		
п1	*	13/19	6/19	12/19	с	
п2	6/19	*	6/19	12/19		13/19
п3	13/19	13/19	*	13/19		
п4	8/19	7/19	8/19	*		
Индексы несогласия						
	п1	п2	п3	п4		
п1	*	3/8	1/2	9/14	д	
п2	2/3	*	1	1		3/8
п3	5/8	1	*	1		
п4	5/6	3/8	1	*		

Рисунок 6.14 – Исключение худших альтернатив

Индексы согласия			
	п1	п3	п4
п1	*	6/19	12/19
п3	13/19	*	13/19
п4	8/19	8/19	*
Индексы несогласия			
	п1	п3	п4
п1	*	1/2	9/14
п3	5/8	*	1
п4	5/6	1	*

Рисунок 6.15 – Оставшиеся в рассмотрении альтернативы

Далее понижаем уровень согласия до 12/19 и повышаем уровень несогласия до 9/14. Совпадающих ячеек в матрицах теперь несколько. Посредник 1 лучше Посредника 4, Посредник 3 лучше Посредника 1 (рисунок 6.16).

Индексы согласия					
	п1	п3	п4		с
п1	*	6/19	12/19		12/19
п3	13/19	*	13/19		
п4	8/19	8/19	*		
Индексы несогласия					
	п1	п3	п4		d
п1	*	1/2	9/14		9/14
п3	5/8	*	1		
п4	5/6	1	*		

Рисунок 6.16 – Исключение худших альтернатив (следующий шаг)

Окончательно победил Посредник 3. Это лучшее решение.

Метод ELECTRE может не привести к получению единственной лучшей альтернативы. В некоторых случаях альтернативы настолько несравнимы между собой, что предпочесть одну из них не получится.

6.3 Варианты для самостоятельного решения

Выбрать поставщика из четырех возможных.

Предприятию необходимо заключить договор о поставке товара либо с Посредником 1, либо с Посредником 2, либо с Посредником 3, либо с Посредником 4. Выбор необходимо осуществить, оценив следующие факторы (таблица):

- 1) цена товара (руб.);
- 2) партионность (шт.);
- 3) расстояние до поставщика (км).

Вариант 1

Поставщик	Цена товара	Партионность	Расстояние до поставщика
Посредник 1	350	500	80
Посредник 2	400	200	400
Посредник 3	280	1500	200
Посредник 4	650	100	10

Цена – самый приоритетный критерий. Цена очень сильно превосходит партионность. Цена слабо превосходит расстояние до поставщика.

Вариант 2

Поставщик	Цена товара	Партионность	Расстояние до поставщика
Посредник 1	400	500	80
Посредник 2	380	400	300
Посредник 3	300	1000	100
Посредник 4	450	100	50

Партионность – самый приоритетный критерий. Партионность слабо превосходит цену. Партионность сильно превосходит расстояние до поставщика.

Вариант 3

Поставщик	Цена товара	Партионность	Расстояние до поставщика
Посредник 1	50	1000	20
Посредник 2	40	2000	300
Посредник 3	25	5000	100
Посредник 4	60	3000	100

Расстояние до поставщика – самый приоритетный критерий. Расстояние до поставщика сильно превосходит цену. Расстояние до поставщика очень сильно превосходит партионность.

Вариант 4

Поставщик	Цена товара	Партионность	Расстояние до поставщика
Посредник 1	150	500	10
Посредник 2	100	300	200
Посредник 3	80	1500	100
Посредник 4	120	100	70

Цена – самый приоритетный критерий. Цена очень сильно превосходит партионность. Цена слабо превосходит расстояние до поставщика.

Вариант 5

Поставщик	Цена товара	Партионность	Расстояние до поставщика
Посредник 1	35	500	80
Посредник 2	45	200	200
Посредник 3	30	1500	100
Посредник 4	40	200	30

Расстояние до поставщика – самый приоритетный критерий. Расстояние до поставщика сильно превосходит цену. Расстояние до поставщика очень сильно превосходит партионность.

Вариант 6

Поставщик	Цена товара	Партионность	Расстояние до поставщика
Посредник 1	40	500	80
Посредник 2	65	100	40
Посредник 3	30	1000	200
Посредник 4	50	200	100

Партионность – самый приоритетный критерий. Партионность слабо превосходит цену. Партионность сильно превосходит расстояние до поставщика.

Вариант 7

Поставщик	Цена товара	Партионность	Расстояние до поставщика
Посредник 1	80	500	150
Посредник 2	90	200	100
Посредник 3	60	1500	300
Посредник 4	65	1000	250

Расстояние до поставщика – самый приоритетный критерий. Расстояние до поставщика сильно превосходит цену. Расстояние до поставщика очень сильно превосходит партионность.

Вариант 8

Поставщик	Цена товара	Партионность	Расстояние до поставщика
Посредник 1	55	300	10
Посредник 2	45	200	200
Посредник 3	30	1500	100
Посредник 4	40	200	500

Партионность – самый приоритетный критерий. Партионность слабо превосходит цену. Партионность сильно превосходит расстояние до поставщика.

Вариант 9

Поставщик	Цена товара	Партионность	Расстояние до поставщика
Посредник 1	45	500	50
Посредник 2	55	100	10
Посредник 3	35	1000	200
Посредник 4	50	200	100

Цена – самый приоритетный критерий. Цена очень сильно превосходит партионность. Цена слабо превосходит расстояние до поставщика.

Вариант 10

Поставщик	Цена товара	Партионность	Расстояние до поставщика
Посредник 1	80	500	150
Посредник 2	100	200	10
Посредник 3	60	1500	300
Посредник 4	70	1000	250

Расстояние до поставщика – самый приоритетный критерий. Расстояние до поставщика сильно превосходит цену. Расстояние до поставщика очень сильно превосходит партионность.

Вариант 11

Поставщик	Цена товара	Партионность	Расстояние до поставщика
Посредник 1	350	500	80
Посредник 2	400	200	400
Посредник 3	300	1600	200
Посредник 4	650	100	10

Партионность – самый приоритетный критерий. Партионность слабо превосходит цену. Партионность сильно превосходит расстояние до поставщика.

Вариант 12

Поставщик	Цена товара	Партионность	Расстояние до поставщика
Посредник 1	400	500	80
Посредник 2	380	300	300
Посредник 3	250	1000	100
Посредник 4	450	100	50

Цена – самый приоритетный критерий. Цена очень сильно превосходит партионность. Цена слабо превосходит расстояние до поставщика.

7 СЕТЕВОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

7.1 Метод критического пути

Для различных проектов огромное значение имеет планирование. Важно установить последовательность работ, определить сроки выполнения, какие работы могут выполняться параллельно, какие последовательно (одновременно).

Работа – это действие, направленное на достижение результата, требует затрат ресурсов и имеет протяженность во времени.

Событие – это момент времени, когда заканчиваются одни работы и начинаются другие, не требует затрат ресурсов и не имеет продолжительности.

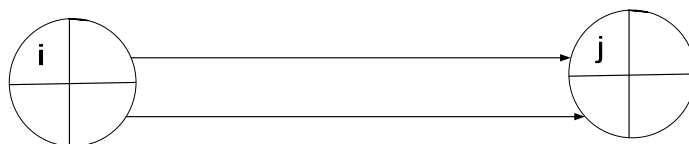
Взаимосвязь работ и событий определяется с помощью оргграфа типа сеть. Вершины – события, дуги – работы. Каждое ребро получает вес – продолжительность соответствующей работы. События нумеруются таким образом, чтобы работа начиналась в событии, номер которого меньше номера события, в котором работа заканчивается. Код работы (ее идентификатор) определяется как упорядоченная последовательность двух номеров: номера события, в котором работа начинается, и номера события, в котором работа заканчивается.

Сетевая модель строится по следующим правилам:

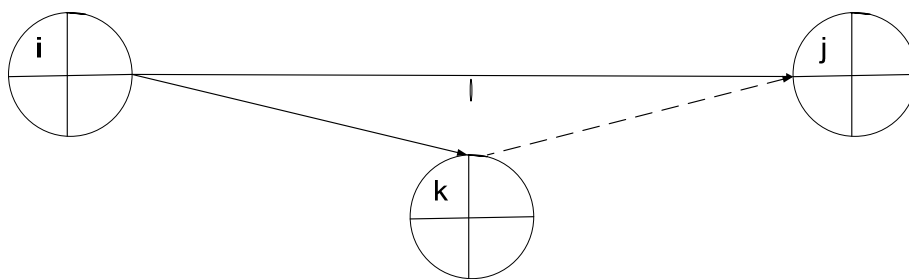
1. Исходное событие, т.е. не имеющее предшествующих событий, в модели только одно. В графе типа сеть это источник. В этом событии работы могут начинаться, но не заканчиваться. Есть, по крайней мере, одна работа, начинающаяся в этом событии.

2. Завершающее событие, т.е. не имеющее последующих событий, в модели только одно. В графе типа сеть это сток. В этом событии работы могут заканчиваться, но не начинаться. Есть, по крайней мере, одна работа, заканчивающаяся в этом событии.

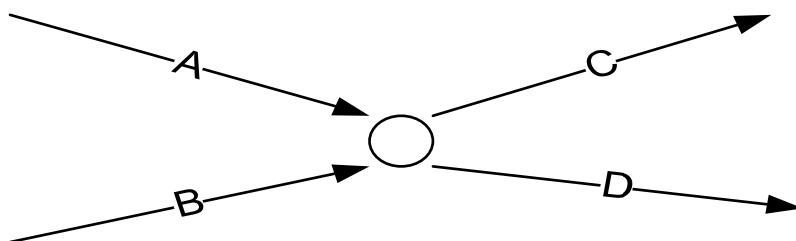
3. В модели нет работ, у которых одновременно совпадают номер начального события и номер завершающего события.



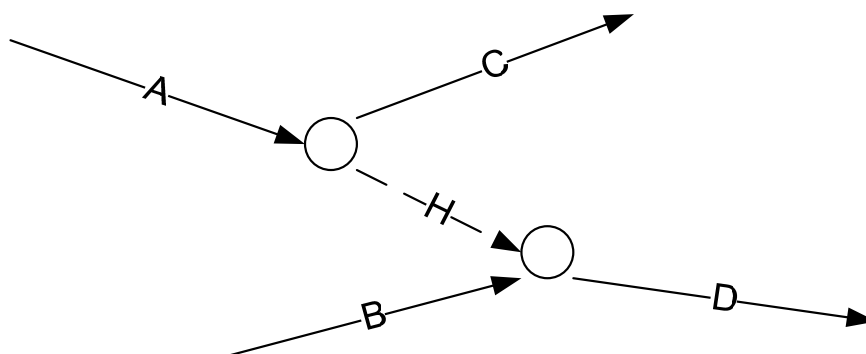
В этом случае вводится фиктивная работа (на графе она изображается пунктиром), которая не имеет продолжительности, не нуждается в исполнителях и служит для грамотного отражения последовательности работ и их однозначной идентификации:



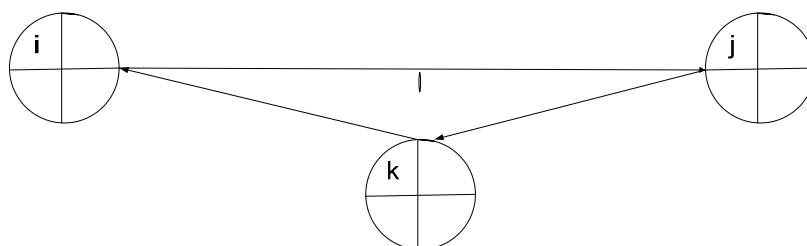
4. Фиктивные работы используются также на этапе структурного планирования взаимосвязи работ проекта. Пусть, например, работа D начинается после завершения работ A и B, а работа C после завершения работы A. Неправильный вариант фрагмента сетевого графика:



Так как начало работы C не связано с окончанием работы B, то отразим правильную взаимосвязь работ с помощью фиктивной работы H:



5. В сетевой модели нет циклов:



Так как в графе не предусмотрено условие выхода из цикла, такая последовательность работ может выполняться бесконечно.

Событие наступает в момент времени, когда завершаются все работы, для которых это событие конечное. Работы начинаются в момент времени, когда наступает событие, начальное для этих работ.

Путь состоит из работ, для которых соблюдается последовательность наступления событий: начальное событие следующей работы совпадает с конечным событием предыдущей работы. Продолжительность пути – суммарная продолжительность работ этого пути.

Источник в графе сеть – исходное событие (номер которого 1), *сток* – завершающее событие (номер которого N).

CPM (Critical Path Method – метод критического пути)

Полный путь – это путь от исходного до завершающего события. *Критический путь* – максимальный по продолжительности полный путь. Продолжительность критического пути – $t_{кр}$. Работы, лежащие на критическом пути, называют *критическими*. *Подкритический путь* – полный путь, ближайший по длительности к критическому пути.

Временные характеристики событий.

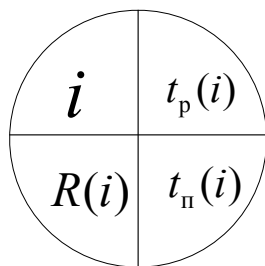
Для события рассчитываются следующие временные характеристики:

$t_p(i)$ – раннее время наступления события i ;

$t_n(i)$ – позднее время наступления события i ;

$R(i)$ – резерв времени для наступления события i .

Для сетевой модели они представляются следующим образом:



Расчет временных параметров событий:

$$t_p(1) = 0, \quad t_p(N) = t_{кр}, \quad t_n(1) = 0, \quad t_n(N) = t_{кр}.$$

Раннее время наступления событий:

$$t_p(j) = \max_i \{t_p(i) + t(i, j)\},$$

где $i < j$, i номера всех событий, для которых существуют работы, заканчивающиеся в событии j . Таким образом, расчет раннего

времени наступления событий производится последовательно от исходного события к завершающему.

Позднее время наступления событий:

$$t_{\pi}(i) = \min_j \{t_n(j) - t(i, j)\},$$

где $i < j$, j номера всех событий, для которых существуют работы, начинающиеся в событии i . Таким образом, расчет позднего времени наступления событий производится последовательно от завершающего события к исходному.

Резерв времени для наступления события:

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i).$$

События с нулевым резервом времени принадлежат критическому пути.

7.2 Практическое задание (пример решения)

Дано описание последовательности выполнения работ и их временные характеристики (таблица 7.1).

Таблица 7.1 – Продолжительность работ

Название работы	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Длительность	3	2	4	6	1	3	5	4	7	3

Упорядочение работ

– А и I – исходные работы проекта, могут начинаться одновременно;

- работа F следует за A;
- работа B следует за I;
- работы D и G следуют за F;
- работа H следует за D;
- работы J и E следуют за B;
- работа C начинается после завершения G, H, и E.

Необходимо:

- 1) составить сетевую модель;
- 2) вычислить продолжительность выполнения проекта по методу критического пути.

Решение

Построим сетевой график, упорядочивающий работы. Работы С и J – завершающие работы проекта, они заканчиваются в последнем событии (рисунок 7.1).

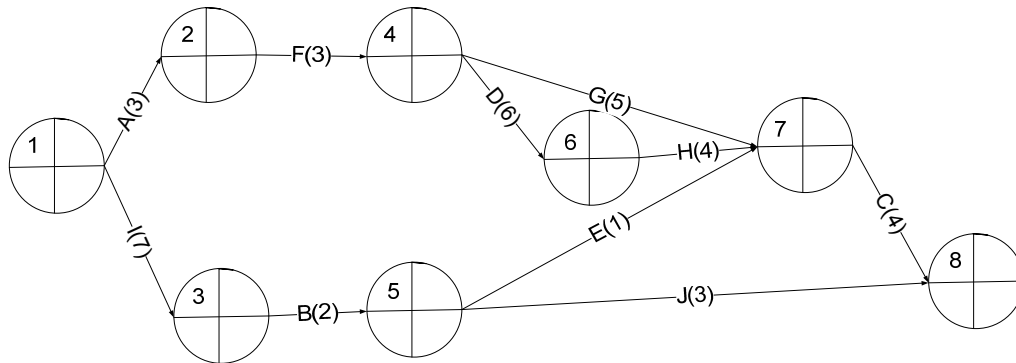


Рисунок 7.1 – Сетевая модель, упорядочение работ проекта

Рассчитаем временные характеристики событий. Найдем время раннего наступления событий:

$$t_p(1) = 0,$$

$$t_p(2) = t_p(1) + t(1,2) = 3,$$

.....,

$$t_p(7) = \max \begin{Bmatrix} t_p(4) + t(4,7) \\ t_p(5) + t(5,7) \\ t_p(6) + t(6,7) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 6 + 5 \\ 9 + 1 \\ 12 + 4 \end{Bmatrix} = 16,$$

$$t_p(8) = \max \begin{Bmatrix} t_p(5) + t(5,8) \\ t_p(7) + t(7,8) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 9 + 3 \\ 16 + 4 \end{Bmatrix} = 20.$$

Найдем позднее время наступления событий:

$$t_{\Pi}(8) = 20,$$

$$t_{\Pi}(7) = t_{\Pi}(8) - t(7,8) = 20 - 4 = 16,$$

.....,

$$t_{\Pi}(5) = \min \begin{Bmatrix} t_{\Pi}(8) - t(5,8) \\ t_{\Pi}(7) - t(5,7) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 20 - 3 \\ 16 - 1 \end{Bmatrix} = 15,$$

$$t_{\Pi}(4) = \min \begin{Bmatrix} t_{\Pi}(7) - t(4,7) \\ t_{\Pi}(6) - t(4,6) \end{Bmatrix} = \min \begin{Bmatrix} 16 - 5 \\ 12 - 6 \end{Bmatrix} = 6,$$

.....,

$$t_{\Pi}(1) = 0.$$

Найдем также резерв времени для наступления каждого события (рисунок 7.2).

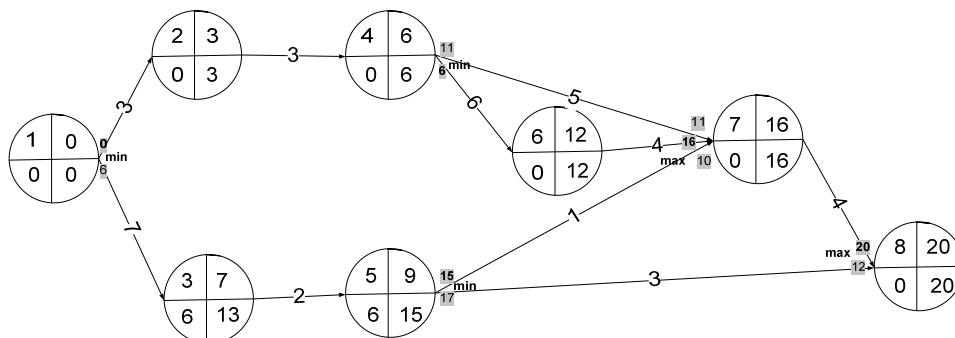


Рисунок 7.2 – Сетевая модель, временные характеристики событий

Выделим события, имеющие нулевой резерв, они принадлежат критическому пути (рисунок 7.3).

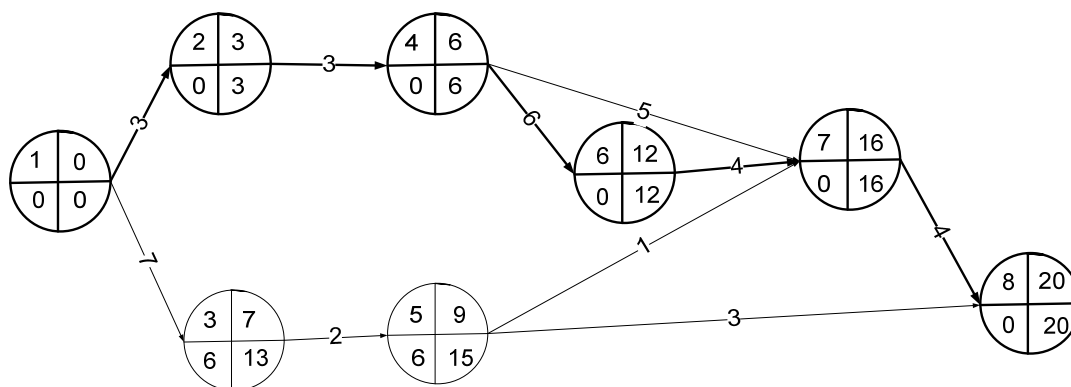


Рисунок 7.3 – Сетевая модель, критический путь

Работа, соединяющая события критического пути будет критической только при условии, что для нее выполняется:

$$t(i, j) = t(j) - t(i).$$

Так, работа (4,7) не является критической, хотя соединяет события критического пути, так как

$$t(4,7) \neq t(7) - t(4).$$

Продолжительность проекта – 20 дней. Критические работы (1, 2), (2, 4), (4, 6), (6, 7), (7,8). Именно для этих работ нужно изыскивать финансовую возможность сократить продолжительность, если необходимо закончить проект раньше. Сокращать продолжительность работ некритического пути нет смысла – проект закончится через 20 дней, даже если, например, работу (3, 5) сделать в два раза быстрее.

7.3 Варианты для самостоятельного решения

Составить сетевую модель. Найти временные характеристики событий и работ.

Вариант 1

Название работы	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Длительность	4	3	10	6	12	5	6	8	8	7

Упорядочение работ

- C, F и B – исходные работы проекта, могут начинаться одновременно;
- работа A следует за F;
- работа H следует за C;
- работы J и E следуют за H;
- работа G следует за A;
- работа I начинается после завершения J и G;
- работа D следует за B.

Вариант 2

Название работы	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Длительность	3	5	8	6	6	8	7	4	2	12	7

Упорядочение работ

- B – исходная работа проекта;
- работы F, E, H следуют за B;
- работа G следует за E;
- работа I следует за G;
- работа J следует за H;
- работы K и C следуют за J;
- работа A следует за I и K;
- работа D следует за C.

Вариант 3

Название работы	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Длительность	2	4	4	5	9	3	7	8	5	7

Упорядочение работ

- G, H и I – исходные работы проекта, могут начинаться одновременно;
- работа A следует за G;
- работа C следует за A;
- работа B следует за I;
- работы F и D следуют за B;
- работа J начинается после завершения C, H, и F;
- работа E следует за D.

Вариант 4

Название работы	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Длительность	5	8	3	7	2	8	4	8	5	3	7

Упорядочение работ

- H – исходная работы проекта;
- работы K и A следуют за H;
- работа C следует за K;
- работы B и E следуют за A;
- работа F начинается после завершения C и B;
- работы D и G следуют за E;
- работа J следует за D;
- работа I начинается после завершения F и G.

Вариант 5

Название работы	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Длительность	4	2	5	12	5	7	6	4	8	7	3

Упорядочение работ

- К и Е – исходные работы проекта, могут начинаться одновременно;
- работы J и H следуют за К;
- работа I следует за Е;
- работа D следует за J;
- работа А следует за H;
- работы С и F следуют за I;
- работа G следует за А и С;
- работа В следует за F.

Вариант 6

Название работы	А	В	С	D	Е	F	G	Н	I	J
Длительность	6	8	5	4	5	3	6	9	10	3

Упорядочение работ

- В и D – исходные работы проекта, могут начинаться одновременно;
- работа Е следует за В;
- работы I и С следуют за D;
- работы G и H следуют за Е;
- работа А начинается после завершения H и I;
- работа J следует за G;
- работа F следует за J.

Вариант 7

Название работы	А	В	С	D	Е	F	G	Н	I	J	К	L
Длительность	6	4	9	3	5	3	4	7	5	1	8	5

Упорядочение работ

- D, А, К и L – исходные работы проекта, могут начинаться одновременно;
- работа Е следует за D;

- работа I следует за A;
- работа G следует за K;
- работы J и F следуют за E и I;
- работа C следует за F и G;
- работа B следует за J;
- работа H следует за L.

Вариант 8

Название работы	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Длительность	5	3	8	4	7	6	3	9	2	6	7

Упорядочение работ

- A, C и D – исходные работы проекта, могут начинаться одновременно;
- работа K следует за A;
- работа G следует за D;
- работы B, I и H следуют за C и K;
- работа E следует за I;
- работа F следует за G и H;
- работа J следует за F.

Вариант 9

Название работы	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
Длительность	8	3	6	5	6	9	1	4	7	3	4

Упорядочение работ

- B и D – исходные работы проекта, могут начинаться одновременно;
- работы A и E следуют за B;
- работа K следует за A;
- работы C и F следуют за K, E и D;
- работы G и J следуют за C;
- работа H следует за G;
- работа I следует за F.

Вариант 10

Название работы	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Длительность	5	2	4	6	2	3	5	4	7	3	2	4

Упорядочение работ

– В, D и E – исходные работы проекта, могут начинаться одновременно;

- работа C следует за B;
- работы K и L следуют за B;
- работа I следует за E;
- работа H следует за L и I;
- работа J следует за C и K;
- работы A и G следуют за J;
- работа F следует за A.

Вариант 11

Название работы	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
Длительность	5	6	4	7	3	3	5	4	7	3	2	4

Упорядочение работ

– D, A, K и L – исходные работы проекта, могут начинаться одновременно;

- работа E следует за D;
- работа I следует за A;
- работа G следует за K;
- работы J и F следуют за E и I;
- работа C следует за F и G;
- работа B следует за J;
- работа H следует за L.

Вариант 6

Название работы	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Длительность	6	8	5	4	5	3	6	9	10	3

Упорядочение работ

- G, H и I – исходные работы проекта, могут начинаться одновременно;
- работа A следует за G;
- работа C следует за A;
- работа B следует за I;
- работы F и D следуют за B;
- работа J начинается после завершения C, H, и F;
- работа E следует за F.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Голдратт, Э. М. Цель. Процесс непрерывного улучшения / Э. М. Голдратт, Д. Кокс. – М. : Поппури, 2018. – 400 с.
2. Голдратт, Э. М. Цель-2. Дело не в везении / Э. М. Голдратт. – М. : Альпина Паблишер, 2018. – 230 с.
3. Жуков, Б. М. Исследование систем управления : учебник / Б. М. Жуков, Е. Н. Ткачева. – М. : Дашков и К°, 2012. – 208 с. – URL: <http://znanium.com/bookread2.php?book=337801>
4. Титаренко, Б. П. Исследование систем управления : учеб. пособие / В. В. Мыльник, Б. П. Титаренко. – 2-е изд. – М. : РИОР : ИНФРА-М, 2014. – 238 с. – URL: <http://znanium.com/bookread2.php?book=446802>
5. Фомичев, А. Н. Исследование систем управления / А. Н. Фомичев. – 2-е изд. – М. : Дашков и К°, 2017. – 348 с. – URL: <http://znanium.com/bookread2.php?book=415195>
6. Петрова, Ю. Холодильник по Голдрату / Ю. Петрова // Коммерсантъ Секрет Фирмы. – 2008. – № 4. – URL: <https://www.kommersant.ru/doc/857567>
7. Записки перегонного клуба // Коммерсантъ Деньги. – 2007. – № 37. – URL: <https://www.kommersant.ru/doc/806716>
8. Краснова, В. В. Европу со своим холодильником / В. В. Краснова // Эксперт. – 2010. – № 43 (727). – URL: http://expert.ru/expert/2010/43/so_sviom_holodilnikom/

Учебное издание

Рындина Светлана Валентиновна

**Исследование
систем управления**

Редактор *Е. Г. Акимова*
Технический редактор *Н. В. Иванова*
Компьютерная верстка *Н. В. Ивановой*

Подписано в печать 03.09.2018.
Формат 60×84¹/₁₆. Усл. печ. л. 5,81.
Тираж 10. Заказ № 542.

Издательство ПГУ
440026, Пенза, Красная, 40.
Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: iic@pnzgu.ru

