

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В. Г. БЕЛИНСКОГО

С. В. РЫНДИНА

**ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Часть первая

Математическое программирование

Учебное пособие
для студентов и магистрантов экономических специальностей

Пенза 2010

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ В. Г. БЕЛИНСКОГО

УДК 519.85

С. В. РЫНДИНА

**ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ
МОДЕЛИРОВАНИЕ**

Часть первая

Математическое программирование

Учебное пособие
для студентов и магистрантов экономических специальностей

Пенза 2010

Печатается по решению редакционно-издательского совета Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г. Белинского

УДК 519.85

Рындина С.В.

Экономико-математическое моделирование. Часть первая. Математическое программирование. Учебное пособие. – Пенза: изд-во ПГПУ им. В.Г. Белинского, 2010. – 168 с.

В учебном пособии рассматриваются различные методы решения экономических задач: линейное и целочисленное программирование; графический метод и симплекс метод решения задач линейного программирования; динамическое программирование; нелинейное программирование, многокритериальные задачи.

Научный редактор – доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой “Вычислительные системы и моделирование” Пензенского государственного педагогического университета В.И. Горбаченко.

Рецензенты: доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой “Высшей математики” Пензенского государственного университета архитектуры и строительства Данилов А.М.; кандидат физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой “Математического анализа” Пензенского государственного педагогического университета Яремко О.Э.

© ПГПУ им. В.Г. Белинского, 2010.

Содержание

ПРЕДИСЛОВИЕ	6
ВВЕДЕНИЕ	8
<i>Теоретическая часть</i>	<i>8</i>
Вопросы.....	14
МЕТОДЫ И МОДЕЛИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.....	15
ТЕМА 1. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ.....	15
<i>Теоретическая часть</i>	<i>15</i>
<i>Практическая часть</i>	<i>18</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	<i>22</i>
ТЕМА 2. СИМПЛЕКС МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗЛП.....	27
<i>Теоретическая часть</i>	<i>27</i>
<i>Практическая часть</i>	<i>31</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	<i>34</i>
ТЕМА 3. ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ.....	34
<i>Теоретическая часть</i>	<i>34</i>
<i>Практическая часть</i>	<i>42</i>
<i>Инструмент Поиск решения программы MS Excel</i>	<i>50</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	<i>58</i>
ТЕМА 4. М МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗЛП (СИМПЛЕКС МЕТОД С ИСКУССТВЕННЫМ БАЗИСОМ)...	64
<i>Теоретическая часть</i>	<i>64</i>
<i>Практическая часть</i>	<i>65</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	<i>68</i>
ТЕМА 5. ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ	69
<i>Теоретическая часть</i>	<i>69</i>
<i>Практическая часть</i>	<i>72</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	<i>81</i>
ТЕМА 6. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА.....	82
<i>Теоретическая часть</i>	<i>82</i>
<i>Практическая часть</i>	<i>89</i>
<i>Инструмент Поиск решения программы MS Excel</i>	<i>100</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	<i>104</i>
МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	111
ТЕМА 7. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ	111
<i>Теоретическая часть</i>	<i>111</i>
<i>Практическая часть</i>	<i>118</i>
<i>Использование программы MS Excel</i>	<i>123</i>
<i>Инструмент Поиск решения программы MS Excel</i>	<i>131</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	<i>134</i>
Вопросы.....	138

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ	139
ТЕМА 8. КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСТРЕМУМОВ МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА	139
<i>Теоретическая часть</i>	<i>139</i>
<i>Практическая часть</i>	<i>144</i>
<i>Инструмент Поиск решения программы MS Excel</i>	<i>145</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	<i>150</i>
Вопросы.....	151
МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	152
ТЕМА 9. МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ.....	152
<i>Теоретическая часть</i>	<i>152</i>
<i>Практическая часть</i>	<i>155</i>
<i>Задачи для самостоятельного решения</i>	<i>163</i>
Вопросы.....	165
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	166

Предисловие

Математическое программирование важный инструментарий для решения экономических оптимизационных задач (от лат. *optimum* — наилучший). Задача оптимизации состоит в нахождении экстремума (максимума или минимума) вещественной функции в некоторой области или выбора наилучшего варианта из множества возможных. Если число альтернатив велико, то вместо сравнительной оценки отдельных вариантов используют специальные методы (в частности методы математического программирования). Первые оптимизационные задачи были поставлены для решения проблем в экономической сфере, поэтому в названии методов решения подобных задач присутствует слово программирование (от английского *programming* – планирование). Целью решения оптимизационных задач является выбор наилучшей программы действий при заданных условиях.

Для использования методов математического программирования необходимо, чтобы экономическая система или процесс были представлены в математической форме:

- задан набор переменных, описывающих модель,
- установлена область возможного изменения переменных,
- определен вид функции, которая задает степень достижения поставленной цели.

В зависимости от вида функций, присутствующих в математической модели, различают задачи линейного и нелинейного программирования. Если математическая модель описывает развитие экономической системы во времени, то используют методы динамического программирования.

Методы линейного программирования обязаны своим появлением американскому математику Джорджу Бернарду Данцигу и советскому математику и экономисту Леониду Витальевичу Канторовичу. Л. В. Канторович в 1939 году описал некоторые задачи линейного программирования в монографии «Математические методы организации и планирования производства» и предложил метод разрешающих множителей для решения этих задач.

Дж. Данциг в 1947 году предложил для решений задач линейного программирования симплекс метод, который несколько отличается от метода Л.В. Канторовича. Различные модификации симплекс метода используются и сегодня при решении задач линейного программирования как наиболее эффективные.

Среди задач линейного программирования особо выделяются транспортные. Математическая модель транспортной задачи описывает не только перемещение грузов, но и, например, задачу о назначениях. Сформулировал условия транспортной задачи в 1941 году американский математик Ф. Л. Хичкок. А в 1949 году Л. В. Канторовичем совместно с М. К. Гавуриным был разработан метод потенциалов, который используется при решении транспортных задач.

Параллельно развивались методы нелинейного программирования, используемые при решении задач, в которых либо критерий оптимальности, либо ограничения, либо и то и другое нелинейно. В 1951 году в работе Гарольда Куна и Альберта Таккера были приведены необходимые и достаточные условия оптимальности для решения задач нелинейного программирования.

ВВЕДЕНИЕ

Вопросы

1. Экономические системы, методы их исследования и моделирования.
2. Классификация экономико-математических методов и моделей.
3. Этапы экономико-математического моделирования.

Теоретическая часть

В экономике существуют устойчивые количественные закономерности, благодаря чему возможно математическое описание экономических процессов.

Модель – образ реального объекта (процесса) в материальной или идеальной форме, который замещает оригинал, отражает наиболее важные для данного исследования свойства объекта (процесса).

Методы моделирования можно разделить на две группы:

- материальное (предметное) моделирование, при котором воспроизводятся геометрические, физические, динамические и функциональные характеристики объекта;
- информационное моделирование, при котором создаваемая модель – это совокупность информации об объекте, о его свойствах, состояниях, его взаимодействии с внешним миром.

Если при информационном моделировании объект описывается с помощью математических соотношений, то в результате имеем математическую модель. Когда добавляют экономико-математическая модель, хотят подчеркнуть предметную область, для которой средствами математики проводится моделирование.

В экономике часто приходится исследовать не отдельные объекты, а системы.

Система – это совокупность взаимосвязанных элементов, совместно реализующих определенные цели.

Множество элементов рассматривается как система, если:

- свойства системы несводимы к сумме свойств ее элементов, то есть целостность системы;
- наличие цели и критерия исследования данного множества элементов;
- наличие более крупной системы, внешней по отношению к данной, то есть надсистемы называемой средой;
- возможность выделения в данной системе взаимосвязанных частей, то есть подсистем.

Экономика состоит из элементов – хозяйственных единиц (предприятий, фирм, банков и т. п.). Надсистема национальной экономики – природа, мировая экономика и общество, две главные подсистемы – производственная и финансовая.

С понятием моделирование экономических систем связаны два класса задач:

- задачи анализа, когда система подвергается глубокому изучению ее свойств, структуры и параметров, то есть исследуется предметная область будущего моделирования;
- задачи, связанные с задачами синтеза (получения экономико-математических моделей данной системы).

При моделировании экономических систем различают входные параметры и показатели на выходе.

Значения *экзогенных* переменных задаются вне модели, это входные параметры модели. Значения *эндогенных* переменных формируются под влиянием связей между ними и экзогенными переменными внутри функционирования модели, это выходные показатели модели.

Классификация моделей.

Признак классификации	Модели делятся на
1. По способам выражения соотношений между внешними условиями и параметрами, определяющими систему	<i>структурные</i>, описывают организацию связей и отношений между подсистемами и элементами системы, также состав подсистем и элементов системы; <i>функциональные</i>, описывают поведение системы безотносительно к ее внутренней структуре, по принципу «черного ящика», то есть ищут некоторый оператор, который описывает связь между входами (экзогенными переменными) и выходами (эндогенными переменными) системы;
2. По целевому назначению	<i>прикладные</i>, применяемые для решения конкретных экономических задач; <i>теоретико-аналитические</i>, используемые при изучении общих свойств и закономерностей экономических процессов;
3. По характеру отражения причинно-следственных связей	<i>детерминированные</i>, в которых все зависимости функциональные, жестко заданные и результат изменения входных параметров однозначен; <i>стохастические</i>, учитывающие случайность, неопределенность, при одинаковых входных параметрах могут получиться разные результаты т. к. присутствует фактор случайности;
4. По фактору времени	<i>статические</i>, в которых все зависимости отнесены к одному моменту времени; <i>динамические</i>, описывающие развитие экономической системы во времени;

5. По форме связи показателей	<i>линейные</i>, в которых все зависимости между показателями линейные; <i>нелинейные</i>, в которых часть зависимостей между показателями (или все) нелинейные;
6. По соотношению экзогенных и эндогенных переменных	<i>открытые</i>, в которых нет эндогенных переменных (полностью открытых моделей не существует); <i>закрытые</i>, в которых нет экзогенных переменных (такие модели чрезвычайно редки; в большинстве случаев соотношение числа эндогенных и экзогенных переменных описывает степень закрытости/открытости модели;
7. По типу переменных	<i>дискретные</i>, в которых переменные принимают определенный конечный набор значений, <i>непрерывные</i>, в которых переменные могут принимать любые значения из некоторых интервалов (в том числе и бесконечных); <i>смешанные</i>, в которых встречаются переменные обоих типов;
8. По степени детализации	<i>агрегированные</i> (макромодели), в которых рассматриваются укрупненные показатели, объединяющие отдельные показатели и связи между ними (которые рассматриваться в модели не будут как несущественные в таком масштабе); <i>детализированные</i> (микромоделю), в которых анализируются отдельные показатели и связи между ними;

9. По типу математического аппарата	<i>балансовые</i>, учитывающие соответствие наличия ресурсов и их использования; статистические, построенные на основе статистических данных по определяющим систему показателям; <i>оптимизационные</i>, определяющие ограничения функционирования системы через ее показатели и критерий наилучшего функционирования системы; <i>имитационные</i>, изучение которых происходит в процессе многократного прогона работы модели системы на случайных входных параметрах; <i>смешанные</i>, которые используют на разных этапах построения модели различных математический аппарат;
10. По типу информации	<i>аналитические</i>, построенные на априорной (то есть имеющейся до проведения исследования) информации; <i>идентифицируемые</i>, построенные на апостериорной (то есть появившейся в процессе исследования) информации;
11. По типу подхода к экономическим системам	<i>дескриптивные</i>, отвечающие на вопрос как это происходит, объясняют наблюдаемые факты; <i>нормативные</i>, отвечающие на вопрос как это должно быть, моделируют управляемые экономические процессы.

Этапы экономико-математического моделирования

1. Анализ экономической системы, ее идентификация и определение достаточной структуры для моделирования. Формулируется сущность проблемы. В моделируемой системе выделяются существенные для решения проблемы свойства. Определяется система показателей и взаимосвязи между ними. Формулируются гипотезы о возможном варианте функционирования объекта.
2. Синтез и построение модели с учетом ее особенностей и математической спецификации. Модель представляется в конкретной форме: переменные и связи между ними.
3. *Верификация и валидация* модели (проверка соответствия теоретической модели эмпирическим данным). Уточнение модели и ее параметров. Используя информацию о входных параметрах модели, получают результаты ее функционирования. Математическими приемами выявляются свойства модели. Обосновывается существование, единственность решения, границы изменения решения.
4. Проверка адекватности модели, то есть соответствия модели реальности. При необходимости возвращение к предыдущему этапу, а иногда в начало процесса, если выявлены важные неучтенные свойства системы, ошибки в структуре и тому подобное.

Вопросы

Литература: [1] стр. 7-19, [4] стр. 10-21, [15] стр. 10-40, [16] стр. 5-13.

1. Что такое математическая модель?
2. Как строится математическая модель объекта или явления?
3. Опишите четыре признака системы.
4. Какие задачи решает экономико-математическое моделирование?
5. Какие переменные называются эндогенными, а какие экзогенными?
6. В чем отличие статических моделей от динамических?
7. Проведите деление моделей по различным классификациям.
8. Этапы экономико-математического моделирования.
9. В чем заключается проверка адекватности модели? Можно ли применять результаты моделирования, если эту проверку модель не прошла?

$$F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max(\min),$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \{\leq, \geq, =\} b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \{\leq, \geq, =\} b_2, \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \{\leq, \geq, =\} b_m, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Каждое из неравенств задачи ЛП определяет на координатной плоскости (x_1, x_2) некоторую полуплоскость, а система неравенств в целом – пересечение соответствующих плоскостей. Множество точек пересечения данных полуплоскостей называется *областью допустимых решений* (ОДР). ОДР задачи линейного программирования всегда представляет собой **выпуклую** фигуру, то есть обладающую следующим свойством: если две точки A и B принадлежат этой фигуре, то и весь отрезок AB принадлежит ей.

ОДР графически может быть представлена выпуклым многоугольником, неограниченной выпуклой многоугольной областью, отрезком, лучом, одной точкой. В случае несовместности системы ограничений задачи ОДР является пустым множеством.

Целевая функция задачи ЛП (1.1) является функцией трех переменных и представляет собой плоскость, которая пересекает координатную плоскость (x_1, x_2) по прямой: $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$. Для целевой функции на плоскости (x_1, x_2) строятся линии уровня.

Линия уровня функции – это линия, вдоль которой значение функции остается постоянным.

Например, для целевой функции задачи (1.1) линии уровня задаются уравнением $c_1x_1 + c_2x_2 = const$. Но наиболее простой вариант для построения – линия нулевого уровня $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$.

Вектор-градиент функции указывает направление её наиболее быстрого возрастания. Он перпендикулярен линии уровня и его координаты – частные производные функции по всем входящим в нее переменным:

$$\nabla = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right).$$

Для целевой функции задачи ЛП вектор-градиент имеет координаты равные коэффициентам при переменных в целевой функции

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = c_1, \quad \frac{\partial F}{\partial x_2} = c_2 \Rightarrow \bar{C} = (c_1, c_2) \text{ вектор-градиент.}$$

Алгоритм решения задачи графическим методом

1. Построить полуплоскости, определяемые каждым из ограничений. Для этого построить прямые, уравнения, которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки равенств. Относительно каждой граничной прямой выбрать полуплоскость, задаваемую соответствующим неравенством. Для этого подставить в неравенство координаты точки, не принадлежащей прямой. Если неравенство превратится в верное, то выбрать полуплоскость с проверочной точкой. Иначе выбрать дополнительную полуплоскость, в которой точки нет.
2. Определить многоугольник допустимых решений. Он является пересечением построенных полуплоскостей.
3. Построить прямую $C_1x_1 + C_2x_2 = \text{const}$ – линию уровня целевой функции. Обычно в качестве значения правой части выбирают 0, то есть строят линию уровня, проходящую через начало координат.
4. Построить вектор-градиент $\bar{C} = (c_1, c_2)$ перпендикулярный линии уровня.
5. Для нахождения координат точки максимума целевой функции передвигать прямую $C_1x_1 + C_2x_2 = \text{const}$ в направлении вектора-градиента, в результате чего либо найти точку (точки), в которой функция принимает максимальное значение, либо установить неограниченность функции сверху на множестве допустимых решений.
6. Для нахождения координат точки минимума целевой функции передвигать прямую $C_1x_1 + C_2x_2 = \text{const}$ в направлении противоположном направлению вектора-градиента, в результате чего либо найти точку (точки), в которой функция принимает минимальное значение, либо установить неограниченность функции снизу на множестве допустимых решений.
7. Определить координаты точки максимума (минимума) из системы уравнений прямых, в пересечении которых она получается. Найти значение целевой функции в точке максимума (минимума).

Практическая часть

1.0. Предприятие изготавливает два вида продукции A и B , которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 90 и 130 единиц соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида A и вида B дан в таблице.

Таблица 1

Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	A	B	
I	2	3	90
II	3	2	130

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию A никогда не превышает спроса на продукцию B более чем на 10 ед. Кроме того, известно, что спрос на продукцию B никогда не превышает 20 ед. в сутки.

Оптовые цены единицы продукции равны: 5 д. е. - для A и 4 д.е. для B .

Решение.

Математическая модель прямой задачи:

$$F(X) = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 90, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 130, \\ x_1 - x_2 \leq 10, \\ x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

На рисунке 1 представлено графическое решение задачи. Многоугольник $ABCDE$ – область допустимых решений. При перемещении линии уровня целевой функции в направлении вектора-градиента получаем, что точка A – точка минимума, точка D – точка максимума.

Координаты точки D находим из системы уравнений прямых, пересечением которых она является:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 90, \\ x_1 - x_2 = 10. \end{cases}$$

Решение системы: $x_1 = 24$, $x_2 = 14$. Значение целевой функции в этой точке: $F(D) = 176$.

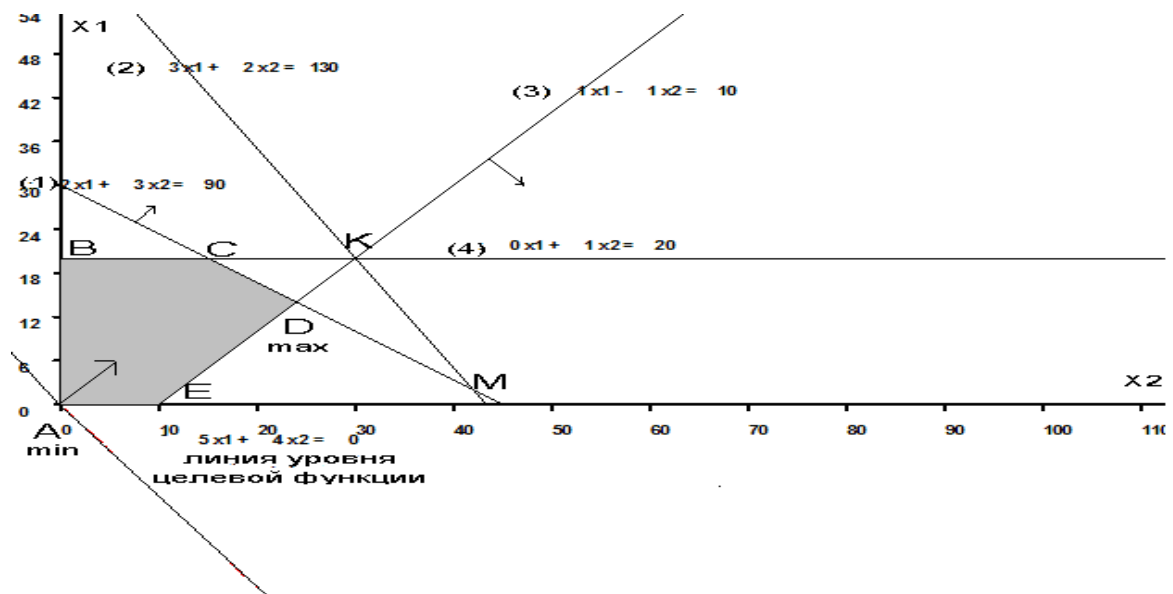


Рисунок 1.1. Графическое решение задачи производственного планирования

Определим статус ресурсов в оптимальном решении задачи. В точке D два ограничения первое и третье выполняются как равенства. Ограничения, в точке оптимума выполняющиеся как равенства, называются связанными и в задаче планирования производства отвечают дефицитным ресурсам. Ограничения, в точке оптимума выполняющиеся как строгие неравенства, называются несвязанными и в задаче планирования производства отвечают избыточным ресурсам.

*Анализ задачи на чувствительность оптимального решения
к изменению входных параметров модели*

Запасы ресурсов являются входными параметрами модели в задаче планирования производства. Для ресурсов находятся двойственные оценки, которые характеризуют ценность ресурса для производства. Эта ценность не связана с ценой ресурса, а характеризует его дефицитность в рамках конкретного производства.

(1) $2x_1 + 3x_2 = 90$ - связанное ограничение. Следовательно, первый ресурс дефицитный. Найдем максимальную величину прироста ресурса при условии, что он сохранит статус дефицитного. Смещаем линию ресурса в направлении вектора-градиента $\bar{d}(2,3)$ ограничения для этого ресурса до точки K . В этой точке связанными станут ограничения других ресурсов, и дальнейший прирост первого ресурса сделает его избыточным. Новый многоугольник допустимых решений $ABKE$ (рисунок 1.2).

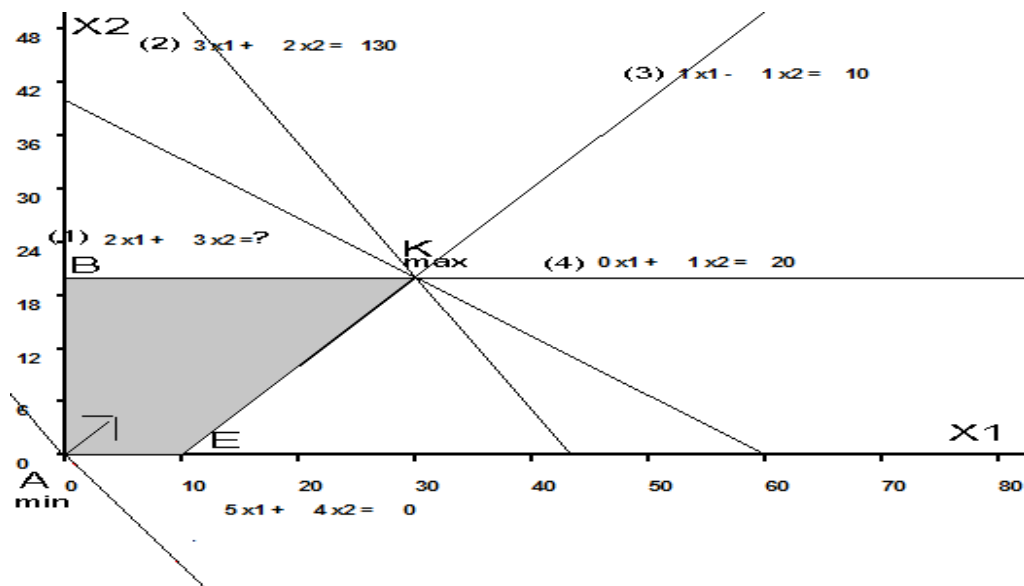


Рисунок 1.2. Изменение запасов первого ресурса

Координаты точки K находим из системы уравнений прямых, пересечением которых она является:

$$\begin{cases} x_2 = 20, \\ x_1 - x_2 = 10. \end{cases}$$

Решение системы: $x_1 = 30$, $x_2 = 20$. Значение целевой функции в этой точке: $F(K) = 230$.

Запас первого ресурса в точке K : $2 \cdot 30 + 3 \cdot 20 = 120$. Прирост значения целевой функции и запаса ресурса: $\Delta F = 230 - 176 = 54$, $\Delta b_1 = 120 - 90 = 30$.

Двойственная оценка первого ресурса:

$$y_1 = \frac{\Delta F}{\Delta b_1} = \frac{54}{30} = 1,8.$$

Двойственная оценка показывает приращение целевой функции с увеличением ресурса на единицу.

(2) $3x_1 + 2x_2 < 130$ - несвязанное ограничение. Следовательно, второй ресурс избыточный. В точке оптимума D его используется $3 \cdot 24 + 2 \cdot 14 = 100$ единиц. Неиспользуемый остаток ресурса составляет 30 единиц. Значение целевой функции при росте ресурса не изменяется, то есть $\Delta F = 0$ для $\forall \Delta b_i > 0$.

Двойственная оценка второго ресурса:

$$y_2 = \frac{\Delta F}{\Delta b_2} = 0.$$

Аналогично анализируем (3) и (4) ограничения.

Для (3) ограничения получаем новый многоугольник допустимых решений $ABCMG$ (рисунок 1.3).

Координаты точки M : $x_1 = 42$, $x_2 = 2$. Значение целевой функции в этой точке: $F(M) = 218$. Запас третьего ресурса (этот ресурс не сырьевой, а спрос, который также можно считать ресурсом) в точке M : $42 - 2 = 40$. Прирост значения целевой функции и запаса ресурса: $\Delta F = 218 - 176 = 42$, $\Delta b_3 = 40 - 10 = 30$.

Двойственная оценка третьего ресурса:

$$y_3 = \frac{\Delta F}{\Delta b_3} = \frac{42}{30} = 1,4.$$

Неиспользуемый остаток четвертого ресурса составляет 6 единиц, его двойственная оценка $y_4 = 0$.

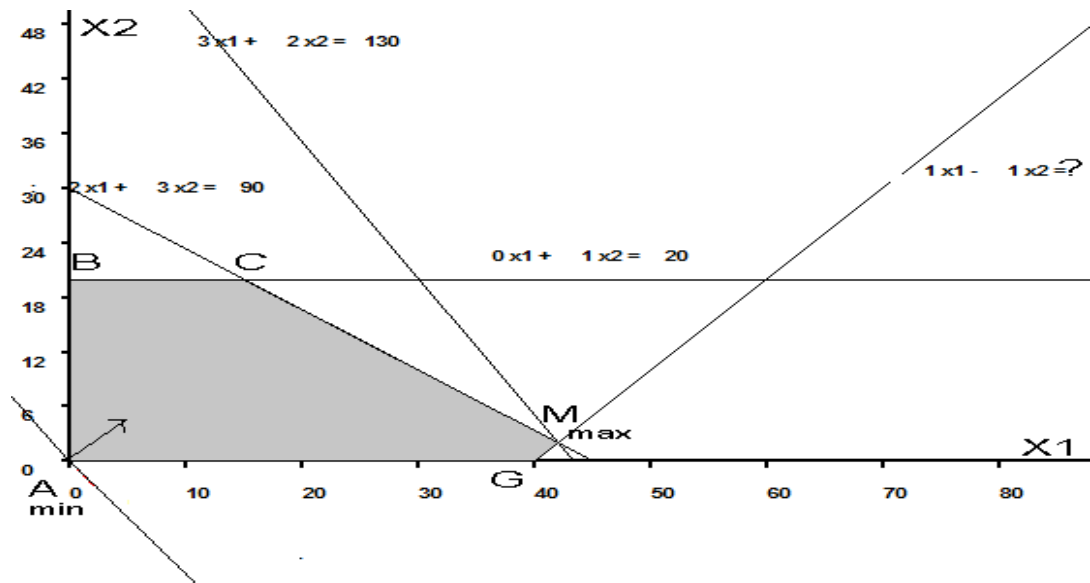


Рисунок 1.3. Изменение третьего ресурса (спрос)

Двойственная оценка ресурса показывает не только ценность ресурса для производства, но и максимальную цену привлечения ресурса на рынке. Если рыночная цена ресурса выше, то его приобретение не компенсируется прибылью от дополнительного выпуска. Спрос можно рассматривать как ресурс, рыночной ценой которого является стоимость привлечения одного нового клиента с помощью различных рекламных акций.

Задачи для самостоятельного решения

Задание общее: Решить задачу графическим методом. Проанализировать чувствительность решения к изменению запасов ресурсов.

1.1. Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует три вида сырья. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых

на изготовление единицы продукции, прибыль, получаемая от единицы продукции, приведены в таблице:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие		Запас ресурса
	А	В	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибыль с 1 ед. продукции	30	40	

Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации продукции будет максимальной при условии, что изделий В надо выпустить не менее чем изделий А.

1.2. Для изготовления двух видов продукции А и В используют три вида ресурсов. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, прибыль, получаемая от единицы продукции, приведены в таблице:

Вид ресурса	Нормы расхода сырья на одно изделие		Запас ресурса
	А	В	
I	2	3	180
II	4	1	240
III	6	7	426
Прибыль с 1 ед. продукции	16	12	

Необходимо составить такой план производства продукции, при котором прибыль от ее реализации будет максимальной.

1.3. Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует три вида сырья. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, прибыль, получаемая от единицы продукции, приведены в таблице:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие		Запас ресурса
	А	В	
I	1	-	95
II	2	1	120
III	1	5	195
Прибыль с 1 ед. продукции	10	10	

Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации продукции будет максимальной при условии, что пятикратный выпуск изделий А превосходит двукратный выпуск изделий В не менее чем на тридцать единиц.

1.4. Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует два вида сырья. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, прибыль, получаемая от единицы продукции, приведены в таблице:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие		Запас ресурса
	А	В	
I	1	3	175
II	3	2	280
Прибыль с 1 ед. продукции	30	40	

Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации продукции будет максимальной при условии, что дву-

кратный выпуск изделий А превосходит выпуск изделий В не более чем на сто сорок единиц.

1.5. Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует три вида сырья. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, прибыль, получаемая от единицы продукции, приведены в таблице:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие		Запас ресурса
	А	В	
I	1	3	170
II	1	1	80
III	1	-	50
Прибыль с 1 ед. продукции	30	10	

Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации продукции будет максимальной.

1.6. Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует два вида сырья. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, прибыль, получаемая от единицы продукции, приведены в таблице:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие		Запас ресурса
	А	В	
I	2	7	280
II	-	1	30
Прибыль с 1 ед. продукции	10	70	

Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации продукции будет максимальной при условии, что дву-

кратный выпуск изделий А превосходит трехкратного выпуск изделий В не более чем на восемьдесят единиц.

1.7. Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует два вида сырья. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, прибыль, получаемая от единицы продукции, приведены в таблице:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие		Запас ресурса
	А	В	
I	2	5	200
II	2	1	120
Прибыль с 1 ед. продукции	40	30	

Составить такой план выпуска продукции, при котором прибыль предприятия от реализации продукции будет максимальной при условии, что двукратный выпуск изделий А превосходит выпуск изделий В не менее чем на двадцать единиц.

1.8. Для производства двух видов изделий А и В предприятие использует два вида сырья. Запасы ресурсов, число единиц ресурсов, затрачиваемых на изготовление единицы продукции, прибыль, получаемая от единицы продукции, приведены в таблице:

Вид сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие		Запас ресурса
	А	В	
I	1	1	40
II	1	4	100
Прибыль с 1 ед. продукции	10	20	

[illegible]

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, n+m}.$$

Если в ограничении КЗЛП есть переменная с коэффициентом, равным единице, отсутствующая в других ограничениях, то она является *базисной* для этого ограничения. Для использования симплекс метода при решении ЗЛП необходимо, чтобы каждое ограничение содержало базисную переменную. Все остальные переменные модели являются *свободными*.

Если базисные переменные есть во всех ограничениях, то такая форма ЗЛП называется *канонической с естественным базисом*.

Симплекс метод – итерационный метод, который состоит в направленном переборе допустимых решений, при котором новое решение не хуже предыдущего. Обычно множество допустимых решений – бесконечно (кроме тривиальных случаев, когда допустимых решений нет или такое решение единственное). Но перебирать все возможные решения нет необходимости. Целевая функция – линейная, монотонная и непрерывная, своего оптимума она достигает на границе множества допустимых решений. А так как множество допустимых решений определяется линейными ограничениями, то не просто на границе, а в вершинах многогранника (при двух переменных – многоугольника).

Симплекс метод заключается в последовательном переходе от одной симплекс таблицы к другой по некоторому алгоритму до тех пор, пока не будет найдено оптимальное решение или не будет доказано, что его не существует.

Допустимым планом (решением) называется любой вектор $X(x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий условиям КЗЛП и имеющий не более чем m ненулевых компонент (по числу ограничений системы).

Если в канонической форме все $b_i \geq 0$, то КЗЛП имеет допустимый план, в котором базисные переменные равны b_i , а остальные (свободные) переменные равны 0. Такой план называется *начальным допустимым реше-*

нием. Целевая функция должна быть выражена только через свободные переменные.

Пусть все $b_i \geq 0$, построим начальную симплекс таблицу для модели (2.1).

Таблица 2.1. Начальная симплекс таблица

СП БП	x_1		x_n	Свободный член
x_{n+1}	a_{11}	...	a_{1n}	b_1
...	...	...	...	...
x_{n+m}	a_{m1}	...	a_{mn}	b_m
Z	$-c_1$	...	$-c_n$	$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Алгоритм перехода к новой симплекс-таблице

1. Определить разрешающий столбец. Он соответствует свободной переменной, которая на следующем шаге войдет в базис. Для этого в Z строке находят максимальный по абсолютной величине отрицательный элемент. Если все элементы Z строки неотрицательные, то симплекс таблица соответствует оптимальному решению.
2. Определить разрешающую строку. Она соответствует базисной переменной, которая на следующем шаге станет свободной. Для этого элементы столбца свободных членов делят на соответствующие элементы разрешающего столбца (если знаменатель нуль или отрицательное число, то отношение заменяется на бесконечность). Минимальное из отношений соответствует разрешающей строке. Если среди элементов разрешающего столбца нет положительных, то задача решений не имеет.
3. На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находится разрешающий элемент. В новой симплекс таблице переменные разрешающей строки и разрешающего столбца меняются местами, остальные переменные переносятся без изменений.

4. Элементы новой симплекс таблицы получаются по одному из четырех правил.

4.1. На месте разрешающего элемента элемент ему обратный.

4.2. Элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент.

4.3. Элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и берутся с противоположным знаком.

4.4. Все остальные элементы находят по правилу прямоугольника:

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{kj} \cdot a_{it}}{a_{kt}}.$$

Таблица 2.2. Фрагмент симплекс таблицы

старое значение элемента	a_{ij}	...	a_{it}	элемент разрешающего столбца
	...	...	...	
элемент разрешающей строки	a_{kj}	...	a_{kt}	разрешающий элемент

Для элементов столбца свободных членов также используется правило прямоугольника:

$$b'_i = b_i - \frac{b_k \cdot a_{it}}{a_{kt}}.$$

5. Для новой симплекс таблицы алгоритм повторяется.

Если среди элементов b_i есть отрицательные, то используют дополнительный алгоритм нахождения начального допустимого решения.

Алгоритм нахождения начального допустимого решения

1. Определить разрешающий столбец. Он соответствует свободной переменной, которая на следующем шаге войдет в базис. Для этого в строке, со-

державшей максимальный по абсолютной величине отрицательный свободный член, находят максимальный по абсолютной величине отрицательный элемент. Если все элементы строки (кроме свободного члена) неотрицательные, то система ограничений задачи несовместна и задача решений не имеет.

2. Определить разрешающую строку. Она соответствует базисной переменной, которая на следующем шаге станет свободной. Для этого элементы столбца свободных членов делят на соответствующие элементы разрешающего столбца (из отношений рассматриваются только те, в которых и числитель, и знаменатель – отрицательные числа). Минимальное из отношений соответствует разрешающей строке.
3. На пересечении разрешающего столбца и разрешающей строки находится разрешающий элемент. В новой симплекс таблице переменные разрешающей строки и разрешающего столбца меняются местами, остальные переменные переносятся без изменений.
4. Элементы новой симплекс таблицы получаются аналогично стандартному симплекс методу.
5. Если в новой симплекс таблице столбец свободных членов отрицательных элементов не содержит, то полученное решение – допустимое и может использоваться как начальное для обычного симплекс метода. Иначе возвращаемся к пункту 1. этого алгоритма.

Практическая часть

Решим задачу **1.0.** симплекс методом.

Решение.

Математическая модель задачи:

$$F(X) = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 90, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 130, \\ x_1 - x_2 \leq 10, \\ x_2 \leq 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Приведем задачу к каноническому виду:

$$F(X) = 5x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 90, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 130, \\ x_1 - x_2 + x_5 = 10, \\ x_2 + x_6 = 20, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Матрица коэффициентов КЗЛП содержит единичную матрицу:

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а это значит, что в КЗЛП есть естественный базис: x_3, x_4, x_5, x_6 .

Таблица 2.3. Начальная симплекс таблица для задачи (1.0)

СП БП	x_1	x_2	Свободный член	
x_3	2	3	90	$90/2$
x_4	3	2	130	$130/3$
x_5	1	-1	10	$10/1$
x_6	0	1	20	∞
Z	-5	-4	0	

Составляем начальную симплекс таблицу (таблица 2.3). Находим в ней разрешающий столбец и разрешающую строку.

Переходим к следующей симплекс таблице, используя четыре правила для нахождения ее элементов.

Таблица 2.4. Первая итерация симплекс метода

СП БП	x_5	x_2	Свободный член	
x_3	-2	5	70	$70/5$
x_4	-3	5	100	$100/5$
x_1	1	-1	10	∞
x_6	0	1	20	$20/1$
Z	5	-9	50	

Так как в Z строке есть отрицательные элементы, то симплекс алгоритм повторяется.

Таблица 2.5. Вторая итерация симплекс метода

СП БП	x_5	x_3	Свободный член
x_2	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	14
x_4	-1	-1	30
x_1	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	24
x_6	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6
Z	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{5}$	176

Таблица 2.5 соответствует оптимальному решению. Оптимальное решение задачи 1.0.: $x_1 = 24$, $x_2 = 14$, остаток первого ресурса $x_3 = 0$ – ресурс дефицитный, его двойственная оценка $y_1 = \frac{9}{5}$ (пересечение Z строки и столбца x_3), остаток второго ресурса $x_4 = 30$ – ресурс избыточный, его двойственная оценка $y_2 = 0$, остаток третьего ресурса $x_5 = 0$ – ресурс дефицитный, его двойственная оценка $y_3 = \frac{7}{5}$ (пересечение Z строки и столбца x_5), остаток четвертого ресурса $x_6 = 6$ – ресурс избыточный, его двойственная оценка $y_4 = 0$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание общее: Решить задачи 1.1. -1.8. симплекс методом.

ТЕМА 3.

ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Вопросы

1. Построение двойственной задачи линейного программирования.
2. Теоремы двойственности. Анализ ценности ресурсов для производства.
3. Анализ чувствительности решения к изменению запасов ресурсов.
4. Принятие решения о включении нового изделия в план производства.

Теоретическая часть

Каждой задаче линейного программирования соответствует двойственная задача. Математические модели пары двойственных задач могут быть симметричными и несимметричными. В несимметричных двойственных задачах система ограничений исходной задачи задается в виде равенств, а

двойственной в виде неравенств. В симметричных задачах система ограничений, как исходной задачи, так и двойственной задается в виде неравенств.

Двойственная задача по отношению к исходной задаче строится по следующим правилам:

1. Если исходная задача ставится на максимум, то двойственная ставится на минимум и наоборот.
2. Коэффициенты целевой функции прямой задачи становятся правыми частями ограничений двойственной задачи. Правые части ограничений исходной задачи становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи.
3. Если A – матрица коэффициентов исходной задачи, то транспонированная матрица A^T будет матрицей коэффициентов двойственной задачи.
4. В задаче на максимум все ограничения имеют знак $\leq (=)$, а в задаче на минимум все ограничения имеют знак $\geq$.
5. Число переменных в двойственной задаче равно числу ограничений в исходной задаче. Каждому ограничению исходной задачи соответствует переменная двойственной задачи.

Прямая задача очень часто используется для моделирования процесса планирования производства. В этом случае ее экономическая интерпретация следующая: задача на определение плана производства, обеспечивающего максимальную прибыль от выпускаемой продукции при заданных ценах реализации (прибыли с единицы каждого вида изделий) и ограничениях на ресурсы. Тогда двойственная задача – определение таких оценок ресурсов, при которых стоимость имеющихся ресурсов минимальна, а затраты на производство единицы продукции не меньше цен реализации продукции. Вектор x – это вектор выпускаемой продукции, y – двойственные оценки ресурсов прямой задачи. Левая часть ограничений двойственной задачи представляет

собой оценку затрат на единицу выпускаемой продукции в двойственных ценах.

Прямая задача линейного программирования:

[illegible]

Двойственная задача линейного программирования:

[illegible]

Теоремы двойственности

Теорема 1. (о минимаксе). *Если одна из пары двойственных задач имеет оптимальное решение, то оптимальное решение существует и у другой задачи. Значения целевых функций прямой и двойственной задачи на оптимальных решениях совпадают. Если одна из пары двойственных задач неразрешима, то неразрешима и другая.*

Теорема о минимаксе определяет достаточное условие существования оптимального решения.

Пусть X^* – оптимальное решение прямой задачи, Y^* – оптимальное решение двойственной задачи, тогда согласно теореме о минимаксе:

$$F(X^*) = G(Y^*).$$

Экономическая интерпретация первой теоремы двойственности для задачи планирования производства: план производства X и набор двойственных оценок ресурсов Y оптимальные тогда и только тогда, когда прибыль от реализации продукции при известных заранее прибылях с единицы продукции $c_1, c_2, \dots, c_n$ равна затратам на ресурсы по двойственным оценкам. Для других допустимых решений прямой и двойственной задач прибыль от продукции всегда меньше стоимости затраченных ресурсов по двойственным оценкам: $F(X) \leq G(Y)$.

Теорема 2. (о дополняющей нежесткости). *Для того чтобы допустимые решения X и Y прямой и двойственной задач соответственно были оптимальными необходимо и достаточно, чтобы выполнялись соотношения:*

$$y_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.3)$$

$$x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i - c_j \right) = 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (3.4)$$

Экономическая интерпретация второй теоремы двойственности для задачи планирования производства. Введенные показатели:

y_i – двойственная оценка i -го вида ресурса,

b_i – запас i -го вида ресурса,

a_{ij} – технологические коэффициенты, которые определяют затраты i -го вида ресурса на единицу j -го вида изделия,

x_j – количество произведенных изделий j -го вида,

c_j – прибыль с единицы j -го вида изделия.

Соотношения (3.3) характеризуют ресурсы. Если ресурс i -го вида в оптимальном плане недефицитный (избыточный), то есть ограничение этого ресурса выполняется как строгое неравенство: $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j < b_i$ и, следовательно, остаток ресурса отличен от нуля, то двойственная оценка этого ресурса нуле-

вая: $y_i = 0$. Если ресурс i -го вида в оптимальном плане дефицитный, то есть ограничение этого ресурса выполняется как равенство: $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i$ и, следовательно, остаток ресурса равен нулю, то двойственная оценка этого ресурса положительная: $y_i > 0$. При любом i соотношение (3.3) для оптимальных планов прямой и двойственной задач выполняется.

Каждому из ограничений прямой задачи $\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$ соответствует балансовая переменная: x_{n+i} . Поэтому из соотношения (3.3) следует, что если в оптимальном плане $y_i = 0$ (свободная переменная), то дополнительная переменная прямой задачи $x_{n+i} > 0$ (базисная переменная) и наоборот, если $y_i > 0$ (базисная переменная), то дополнительная переменная прямой задачи $x_{n+i} = 0$ (свободная переменная).

Соотношения (3.4) характеризуют изделия. Если изделие j -го вида в оптимальном плане производить невыгодно, то есть ограничение на прибыльность этого изделия выполняется как строгое неравенство: $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i > c_j$ и, следовательно, превышение двойственных затрат над прибылью отлично от нуля, то количество произведенных изделий этого вида равно нулю: $x_j = 0$. Если изделие j -го вида в оптимальном плане производить выгодно, то есть ограничение на прибыльность этого изделия выполняется как равенство: $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i = c_j$ и, следовательно, превышение двойственных затрат над прибылью равно нулю, то количество произведенных изделий этого вида положительно: $x_j > 0$. При любом j соотношение (3.4) для оптимальных планов прямой и двойственной задач выполняется.

Каждому из ограничений двойственной задачи $\sum_{i=1}^m a_{ij}y_i \geq c_j$ соответствует балансовая переменная: y_{m+j} . Поэтому из соотношения (3.4) следует, что если в оптимальном плане $x_j = 0$ (свободная переменная), то дополнительная переменная двойственной задачи $y_{m+j} > 0$ (базисная переменная) и наоборот, если $x_j > 0$ (базисная переменная), то дополнительная переменная прямой задачи $y_{m+j} = 0$ (свободная переменная).

Теорема 3. (об оценках). *Значения переменных y_i в оптимальном решении двойственной задачи представляют собой оценки влияния свободных членов b_i системы ограничений прямой задачи на значение целевой функции.*

$$\Delta F(X) = y_i \Delta b_i. \quad (3.5)$$

Экономическая интерпретация третьей теоремы двойственности для задачи планирования производства следующая: двойственная переменная y_i определяет насколько изменится целевая функция прибыли от изменения запаса i -го ресурса на единицу.

Однако, использование соотношения (3.5) ограничивается интервалами изменения параметров модели b_i , внутри которых двойственные оценки y_i сохраняются неизменными. Двойственные оценки y_i сохраняют свои значения, если состав базисных переменных оптимального решения прямой задачи не меняется.

Анализ чувствительности решения задачи к изменению запасов ресурсов.

Ограничения исходной задачи в матрично-векторной форме можно записать как:

$$AX \leq B,$$

где $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, $X' = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B' = (b_1, b_2, \dots, b_m)$.

Ограничения прямой задачи в каноническом виде

$$A^* X = B, \quad (3.6)$$

где $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ – расширенная матрица коэффици-

ентов ограничений, а вектор X включает дополнительные переменные: $X' = (x_1, x_2, \dots, x_{n+m})$, $B' = (b_1, b_2, \dots, b_m)$.

Пусть известно оптимальное решение прямой задачи. Составим вектор $\tilde{X} = (x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m})$, включающий только базисные переменные в оптимальном решении, упорядоченные по возрастанию индексов. В матрице A^* оставим только столбцы соответствующие коэффициентам при базисных переменных в оптимальном решении, получим матрицу $\tilde{A}_m$ (m – размерность квадратной матрицы). Тогда для оптимального решения система ограничений примет вид:

$$\tilde{A} \tilde{X} = B. \quad (3.7)$$

Из уравнения (3.7) получим соотношение, определяющее влияние изменения элементов вектора B на значения элементов вектора X :

$$\tilde{X} = DB, \quad (3.8)$$

где $D = \tilde{A}^{-1}$, $D = \begin{pmatrix} d_{11} & \dots & d_{1m} \\ \dots & \dots & \dots \\ d_{m1} & \dots & d_{mm} \end{pmatrix}$.

Уравнение (3.8) определяет систему:

$$\begin{cases} x_{k_1} = d_{11}b_1 + d_{12}b_2 + \dots + d_{1m}b_m, \\ x_{k_2} = d_{21}b_1 + d_{22}b_2 + \dots + d_{2m}b_m, \\ \dots\dots\dots \\ x_{k_m} = d_{m1}b_1 + d_{m2}b_2 + \dots + d_{mm}b_m. \end{cases} \quad (3.9)$$

Изменение элементов вектора B возможно в интервалах, для которых элементы вектора $\tilde{X}$ остаются неотрицательными.

Проанализируем изменение свободного члена первого ограничения b_1 . Преобразуем систему (3.9) к следующему виду:

$$\begin{cases} 0 = d_{11}\left(b_1 - \frac{x_{k_1}}{d_{11}}\right) + d_{12}b_2 + \dots + d_{1m}b_m, \\ 0 = d_{21}\left(b_1 - \frac{x_{k_2}}{d_{21}}\right) + d_{22}b_2 + \dots + d_{2m}b_m, \\ \dots\dots\dots \\ 0 = d_{m1}\left(b_1 - \frac{x_{k_m}}{d_{m1}}\right) + d_{m2}b_2 + \dots + d_{mm}b_m. \end{cases} \quad (3.10)$$

Из (3.10) следует что, если $d_{i1} > 0$, то величина $\frac{x_{k_i}}{d_{i1}}$ определяет уменьшение b_1 , если $d_{i1} < 0$, то величина $\frac{x_{k_i}}{|d_{i1}|}$ определяет увеличение b_1 . В качестве x_{k_i} берут значение соответствующей переменной в оптимальном решении.

Пределы уменьшения b_j определяются по тем элементам матрицы D , для которых $d_{ij} > 0$:

$$\Delta b_j^{(-)} = \min \left\{ \frac{x_{k_i}}{d_{ij}} \right\}.$$

Пределы увеличения b_j определяются по тем элементам матрицы D , для которых $d_{ij} < 0$:

$$\Delta b_j^{(+)} = \min \left\{ \frac{x_{k_i}}{|d_{ij}|} \right\}.$$

В полученных интервалах изменения величин b_j двойственные оценки устойчивые.

Целесообразность включения в план производства новых изделий

В план производства имеет смысл включать только те изделия, для которых затраты на производство единицы изделия по двойственным оценкам в оптимальном плане не превышают прибыль.

Пусть изделие вида $n+1$ рассматривается на предмет включения в производственный план. Технологические коэффициенты затрат ресурсов на изделие этого вида определяются вектором $(a_{1n+1}, a_{2n+1}, \dots, a_{mn+1})$, прибыль с единицы изделия – c_{n+1} .

Если $\sum_{i=1}^m a_{in+1} y_i > c_{n+1}$, то изделие вида $n+1$ производить невыгодно.

При включении этого изделия в план производства (с условием обязательного выпуска некоторого количества изделий) оптимальное значение прибыли будет меньше ранее определенного. Если условие обязательного выпуска этих изделий в систему ограничений не включить, то в план производства этот вид изделий не войдет.

Если $\sum_{i=1}^m a_{in+1} y_i = c_{n+1}$, то производство изделия вида $n+1$ не изменит оптимальное значение прибыли.

Если $\sum_{i=1}^m a_{in+1} y_i < c_{n+1}$, то изделие вида $n+1$ производить выгодно.

Применение симплекс метода к расширенной по номенклатуре изделий задаче определит новый оптимальный план производства, в который указанный вид изделия войдет, а прибыль увеличится.

Практическая часть

3.0. Для изготовления трех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	А	В	С	
I	2	3	3	800
II	4	5	2	600

III	0	1	2	420
Прибыль с ед. изделия	17	10	12	

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум общей стоимости, указать оптимальную производственную программу, пояснить, почему в производственную программу вошли не все виды изделий.
2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план
3. Определить, как изменится стоимость продукции и план выпуска при увеличении запасов сырья I и III вида на 40 ед. каждого.
4. Определить целесообразность включения в план изделия «Г», на изготовление которого расходуется соответственно 1, 3 и 2 ед. каждого вида сырья (цена изделия 13 д.ед.), и изделия «Д», на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида сырья (цена изделия 12 д. ед.).

Решение.

Математическая модель прямой задачи:

$$\begin{aligned}
 \max F(X) &= 17x_1 + 10x_2 + 12x_3, \\
 \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \leq 800, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \leq 600, \\ x_2 + 2x_3 \leq 420, \end{cases} & \\
 x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. &
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Каноническая форма прямой задачи:

$$\max F(X) = 17x_1 + 10x_2 + 12x_3,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 800, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_5 = 600, \\ x_2 + 2x_3 + x_6 = 420, \end{cases} \quad (3.12)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1, 6}.$$

Математическая модель двойственной задачи:

$$\begin{aligned} \min G(Y) &= 800y_1 + 600y_2 + 420y_3, \\ \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 & \geq 17, \\ 3y_1 + 5y_2 + y_3 & \geq 10, \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 & \geq 12, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 3}.$$

Каноническая форма двойственной задачи:

$$\begin{aligned} \min G(Y) &= 800y_1 + 600y_2 + 420y_3, \\ \begin{cases} 2y_1 + 4y_2 - y_4 = 17, \\ 3y_1 + 5y_2 + y_3 - y_5 = 10, \\ 3y_1 + 2y_2 + 2y_3 - y_6 = 12, \end{cases} \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$y_i \geq 0, \quad i = \overline{1, 6}.$$

Решим прямую задачу симплекс методом:

Таблица 3.1. Начальная симплекс таблица для задачи 3.0

СП БП	x_1	x_2	x_3	Свободный член
x_4	2	3	3	800
x_5	4	5	1	600
x_6	0	1	2	420
Z	-17	-10	-12	0

Таблица 3.2. Первая итерация задачи 3.0

СП БП	x_5	x_2	x_3	Свободный член
x_4	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	500
x_1	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{1}{2}$	150
x_6	0	1	2	420
Z	$\frac{17}{4}$	$\frac{45}{4}$	$-\frac{7}{2}$	2550

Таблица 3.3. Вторая итерация задачи 3.0

СП БП	x_5	x_2	x_6	Свободный член
x_4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	80
x_1	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	45
x_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	210
Z	$\frac{17}{4}$	13	$\frac{7}{4}$	3285

Последняя симплекс таблица соответствует также оптимальному решению двойственной задачи.

Установим соответствие между переменными.

Таблица 3.4. Соответствие между переменными прямой и двойственной задач

--прямая задача					
изделия			ресурсы		
A	B	C	I	II	III
x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
количество произведенных изделий			остатки ресурсов		
превышение затрат по двойственным оценкам над прибылью			двойственные оценки ресурсов		
y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3
A	B	C	I	II	III
изделия			ресурсы		
двойственная задача					

Таблица 3.5. Симплекс таблица оптимального решения задачи 3.0

СП \ БП	БП	y_2	y_5	y_3	$T = G(Y)$
	СП	x_5	x_2	x_6	Свободный член
y_1	x_4	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	80
y_4	x_1	$\frac{1}{4}$	1	$-\frac{1}{4}$	45
y_6	x_3	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	210
Свободный член	$Z = F(X)$	$\frac{17}{4}$	13	$\frac{7}{4}$	3285

Таблица 3.6. Оптимальное решение задачи 3.0

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
45	0	210	80	0	0
y_4	y_5	y_6	y_1	y_2	y_3
0	13	0	0	$\frac{17}{4}$	$\frac{7}{4}$

Согласно таблице 3.6 выгодно производить изделия вида А и С, невыгодно изделия вида В – затраты превышают прибыль, дефицитные ресурсы II и III, избыточный ресурс I, его остаток 80 единиц.

Определим границы изменения ресурсов. Для этого найдем матрицы и вектора соотношений (3.7) и (3.8):

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 210 \\ 80 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 800 \\ 600 \\ 420 \end{pmatrix}.$$

Определим матрицу обратную к $\tilde{A}$:

$$D = \frac{1}{|\tilde{A}|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}, \quad A_{ij} = (-1)^{i+j} a_{ij}$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение, находится как определитель исходной матрицы, в которой исключены i -ая строка и j -ый столбец и берется с противоположным знаком, если сумма индексов строки и столбца – нечетное число,

$$|\tilde{A}| = 2 \cdot 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \cdot 1 - (1 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot 4 \cdot 3) = 8,$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 12 = -8,$$

$$D = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \\ 8 & -4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Определим интервалы изменения ресурсов, в которых двойственные оценки устойчивы. Оптимальное базисное решение $\tilde{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 45 \\ 210 \\ 80 \end{pmatrix}$.

Тогда границы увеличения и уменьшения:

$$\Delta b_1^{(-)} = \min \left\{ \frac{x_4}{d_{31}} \right\} = 80,$$

$$\Delta b_2^{(-)} = \min \left\{ \frac{x_1}{d_{12}} \right\} = 45 \cdot 4 = 180,$$

$$\Delta b_2^{(+)} = \min \left\{ \frac{x_4}{|d_{32}|} \right\} = 80 \cdot 2 = 160,$$

$$\Delta b_3^{(-)} = \min \left\{ \frac{x_3}{d_{23}} \right\} = 210 \cdot 2 = 420,$$

$$\Delta b_3^{(+)} = \min \left\{ \frac{x_1}{|d_{13}|}; \frac{x_4}{|d_{33}|} \right\} = \min \{45 \cdot 4; 80\} = 80.$$

Определим, как изменится стоимость продукции и план выпуска при увеличении запасов сырья I и III вида на 40 ед. каждого.

Первый ресурс избыточный и его увеличение на сорок единиц не изменит ни прибыль, ни план выпуска. Третий ресурс дефицитный, увеличение его на сорок единиц сохраняет двойственные оценки, так как максимально возможное увеличение (80) больше планируемого (40). Значит, можно воспользоваться третьей теоремой двойственности:

$$\Delta F = 40 \cdot \frac{7}{4} = 70,$$

то есть новое значение прибыли 3355 д.е. (3285+70).

Новый план выпуска определим, воспользовавшись формулой (3.8):

$$X^* = DB^*,$$

где X^* - новый план выпуска, B^* – вектор измененных запасов ресурсов, $B^* = (840, 600, 460)^T$. Это можно сделать, так как изменение ресурсов в допустимых границах не приводит к изменению набора базисных переменных.

Тогда

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 \cdot 840 + \frac{1}{4} \cdot 600 - \frac{1}{4} \cdot 460 \\ 0 \cdot 840 + 0 \cdot 600 + \frac{1}{2} \cdot 460 \\ 1 \cdot 840 - \frac{1}{2} \cdot 600 - 1 \cdot 460 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 230 \\ 80 \end{pmatrix}.$$

Можно убедиться, что $F(X^*) = 17 \cdot 35 + 10 \cdot 230 + 12 \cdot 80 = 3355$.

Проанализируем целесообразность включения в план производства изделий вида D и E.

Для изделия вида D затраты по двойственным оценкам превышают прибыль:

$$1 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{17}{4} + 1 \cdot \frac{7}{4} = 14,5 > 13,$$

следовательно, производство невыгодно.

Для изделия вида E затраты по двойственным оценкам меньше прибыли:

$$2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{17}{4} + 2 \cdot \frac{7}{4} = 12 < 11,$$

следовательно, производство выгодно.

Инструмент Поиск решения программы MS Excel

Использование инструмента Поиск решения программы MS Excel для получения оптимального решения задачи линейного программирования.

Подключим инструмент Поиск решения: командное меню Сервис ►Надстройки►Поиск решения. После этого инструмент Поиск решения должен появиться в командном меню Сервис.

В документе MS Excel создадим страничку модели задачи:

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные					
2	Имя	x1	x2	x3	Целевая функция		
3	Значение	0	0	0	Значение	Направление	
4	Кэф цф	17	10	12	=СУММПРОИЗВ(B\$3:D\$3;B4:D4)	max	
5		Ограничения					
6		Коэффициенты левой части			Значение левой части	Знак	Правая часть
7	I (x4)	2	3	3	=СУММПРОИЗВ(B\$3:D\$3;B7:D7)	<=	800
8	II (x5)	4	5	2	=СУММПРОИЗВ(B\$3:D\$3;B8:D8)	<=	600
9	III (x6)	0	1	2	=СУММПРОИЗВ(B\$3:D\$3;B9:D9)	<=	420

Рисунок 3.1. Страница модели задачи (формулы)

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные					
2	Имя	x1	x2	x3	Целевая функция		
3	Значение	0	0	0	Значение	Направление	
4	Кэф цф	17	10	12	0	max	
5		Ограничения					
6		Коэффициенты левой части			Значение левой части	Знак	Правая часть
7	I (x4)	2	3	3	0	<=	800
8	II (x5)	4	5	2	0	<=	600
9	III (x6)	0	1	2	0	<=	420

Рисунок 3.2. Страница модели задачи (числовые значения)

Встав на ячейку, сохраняющую значение целевой функции (в примере E4) вызовем инструмент Поиск решения и заполним диалоговое окно исходной информацией.

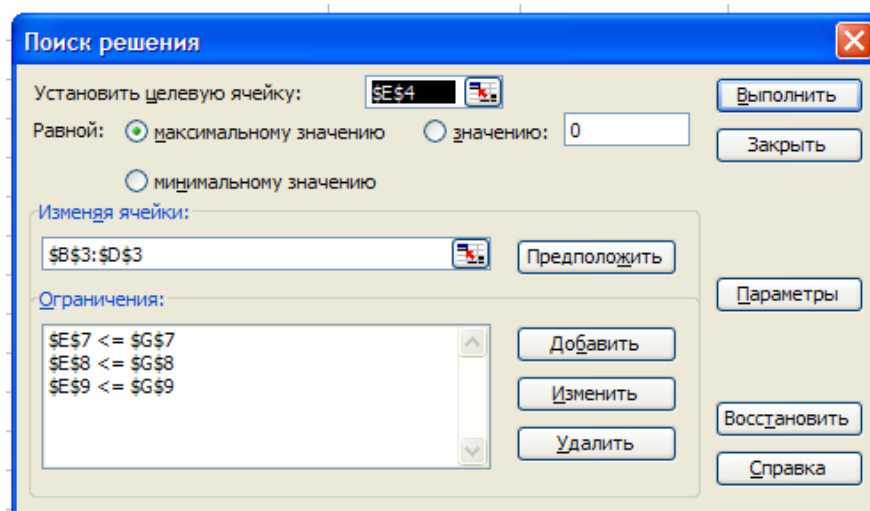


Рисунок 3.3. Диалоговое окно инструмента Поиск решения

Изменяемые ячейки те, которые содержат значения переменных. Ограничения вводятся с помощью кнопки **Добавить**.

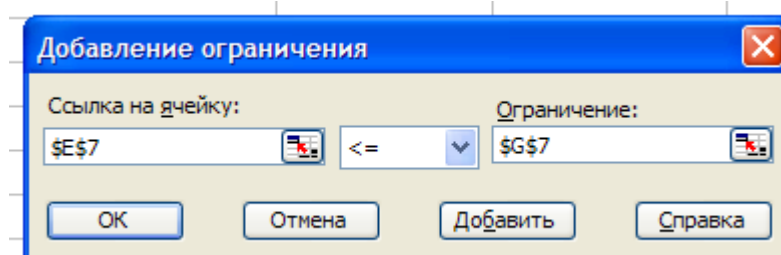


Рисунок 3.4. Дополнительное окно ввода ограничений

После ввода очередного ограничения выбираем команду **Добавить**, ввод последнего ограничения завершаем командой **ОК**. На вкладке параметры выбираем необходимые характеристики модели.

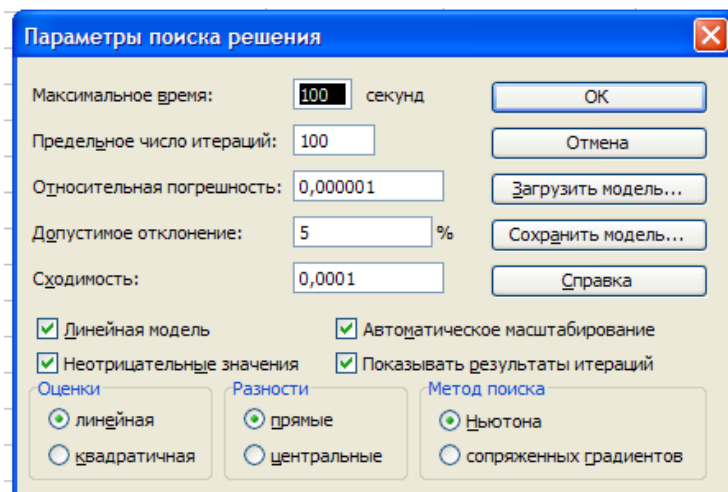


Рисунок 3.5. Вкладка параметры поиска решения

Возвращаемся к исходному окну и выбираем команду **Выполнить**.

Так как на вкладке параметры диалогового окна **Поиск решения** выбрана опция: показывать результаты итераций, то программа последовательно найдет допустимые решения, улучшающие значения целевой функции:

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные					
2	Имя	x1	x2	x3	Целевая функция		
3	Значение	150	0	0	Значение	Направление	
4	Коэф цф	17	10	12	2550	max	
5		Ограничения					
6		Коэффициенты левой части			Значение левой части	Знак	Правая часть
7	I (x4)	2	3	3	300	<=	800
8	II (x5)	4	5	2	600	<=	600
9	III (x6)	0	1	2	0	<=	420

Рисунок 3.6. Результат первой итерации

Значения дополнительных переменных x_4 , x_5 , x_6 находятся как разность между правой и левой частью ограничений.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные					
2	Имя	x1	x2	x3	Целевая функция		
3	Значение	45	0	210	Значение	Направление	
4	Коэф цф	17	10	12	3285	max	
5		Ограничения					
6		Коэффициенты левой части			Значение левой части	Знак	Правая часть
7	I (x4)	2	3	3	720	<=	800
8	II (x5)	4	5	2	600	<=	600
9	III (x6)	0	1	2	420	<=	420

Рисунок 3.7. Результат второй итерации
(соответствует оптимальному решению)

Без выбора опции показывать результаты итераций программа сразу найдет оптимальное решение (рисунок 3.7).

Для оптимального решения можно выбрать различные отчеты (щелчком мыши выделяют нужные).

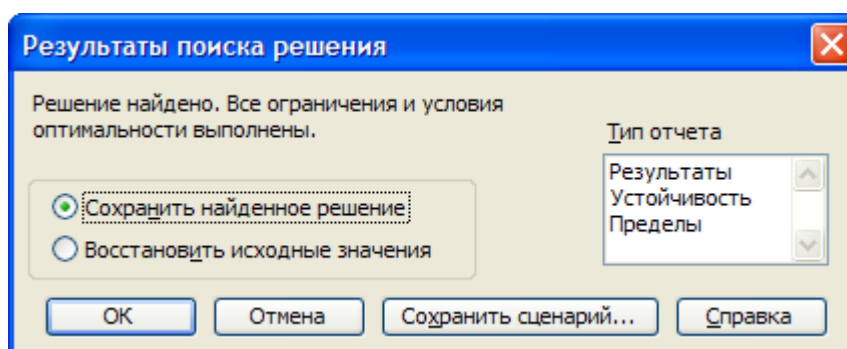


Рисунок 3.8. Результаты поиска решения.

Эти отчеты позволяют получить переменные двойственной задачи и провести экономическую интерпретацию решения.

Отчет по результатам позволяет определить статус ограничений.

Целевая ячейка (Максимум)				
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат	
\$E\$4	Козф цф	Значение	0	3285

Изменяемые ячейки				
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат	
\$B\$3	Значение x1	0	45	
\$C\$3	Значение x2	0	0	
\$D\$3	Значение x3	0	210	

Ограничения					
Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
\$E\$7	I (x4)	Значение левой части	720	\$E\$7<=\$G\$7	не связан. 80
\$E\$8	II (x5)	Значение левой части	600	\$E\$8<=\$G\$8	связанное 0
\$E\$9	III (x6)	Значение левой части	420	\$E\$9<=\$G\$9	связанное 0

Рисунок 3.9. Отчет по результатам

Отчет по устойчивости позволяет получить двойственные оценки.

Изменяемые ячейки						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$3	Значение x1	45	0	17	7	13
\$C\$3	Значение x2	0	-13	10	13	1E+30
\$D\$3	Значение x3	210	0	12	1E+30	3,5

Ограничения						
Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$E\$7	I (x4) Значение левой части	720	0	800	1E+30	80
\$E\$8	II (x5) Значение левой части	600	4,25	600	160	180
\$E\$9	III (x6) Значение левой части	420	1,75	420	80	420

Рисунок 3.10. Отчет по устойчивости

Столбец нормированная стоимость позволяет получить значения дополнительных переменных двойственной задачи, соответствующих переменным исходной задачи: $y_4 = 0$, $y_5 = 13$, $y_6 = 0$.

Столбец теневая цена позволяет получить значения переменных двойственной задачи, соответствующих дополнительным переменным исходной задачи: $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{17}{4} = 4,25$, $y_3 = \frac{7}{4} = 1,75$.

Границы изменения запасов ресурсов находятся в столбцах допустимое увеличение и допустимое уменьшение. Запись 1E+30 означает 10^{30} , то есть очень большое число.

Можно решить с помощью инструмента Поиск решения двойственную задачу (3.14).

В документе MS Excel создадим страничку модели задачи:

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные					
2	Имя	y1	y2	y3	целевая функция		
3	Значение				Значение	Направление	
4	Козф цф	800	600	420	=СУММПРОИЗВ(B\$4:D\$4;B3:D3)	min	
5							
6		Ограничения					
7		Козффициенты левой части			Значение левой части	Знак	Правая часть
8	A (y4)	2	4	0	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$D\$3;B8:D8)	>=	17
9	B (y5)	3	5	1	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$D\$3;B9:D9)	>=	10
10	C (y6)	3	2	2	=СУММПРОИЗВ(\$B\$3:\$D\$3;B10:D10)	>=	12
11							

Рисунок 3.11. Страница модели задачи (формулы)

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные					
2	Имя	y1	y2	y3	целевая функция		
3	Значение				Значение	Направление	
4	Козф цф	800	600	420		0 min	
5							
6		Ограничения					
7		Козффициенты левой части			Значение левой ча	Знак	Правая часть
8	A (y4)	2	4	0		0 >=	17
9	B (y5)	3	5	1		0 >=	10
10	C (y6)	3	2	2		0 >=	12
11							

Рисунок 3.12. Страница модели задачи (числовые значения)

Встав на ячейку, сохраняющую значение целевой функции (в примере E4) вызовем инструмент Поиск решения и заполним диалоговое окно исходной информацией.

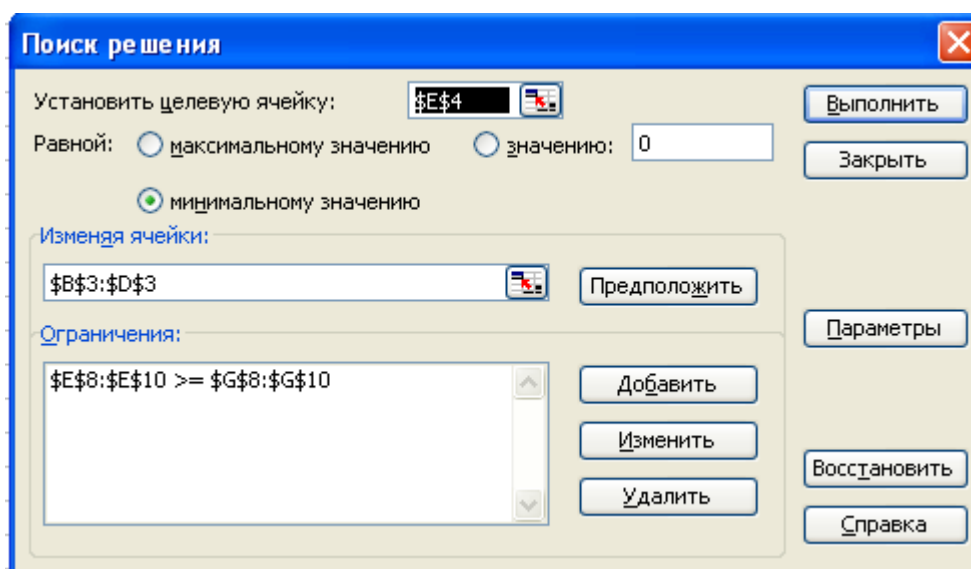


Рисунок 3.13. Диалоговое окно инструмента Поиск решения

Основное отличие в процессе заполнения в направлении оптимизации: целевая ячейка устанавливается равной минимальному значению и знак ограничений $\geq$.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Переменные					
2	Имя	y1	y2	y3	целевая функция		
3	Значение	0	4,25	1,75	Значение	Направление	
4	Козф цф	800	600	420	3285	min	
5							
6		Ограничения					
7		Козфициенты левой части			Значение левой части	Знак	Правая часть
8	A (y4)	2	4	0	17	$\geq$	17
9	B (y5)	3	5	1	23	$\geq$	10
10	C (y6)	3	2	2	12	$\geq$	12
11							

Рисунок 3.13. Результат использования инструмента Поиск решения

Загрузим отчеты по устойчивости, пределам и результатам. Теперь эти отчеты содержат информацию о решении прямой задачи.

Отчет по результатам позволяет определить статус ограничений.

Целевая ячейка (Минимум)

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
\$E\$4	Козф цф	Значение	0
			3285

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат
\$B\$3	Значение y1	0	0
\$C\$3	Значение y2	0	4,25
\$D\$3	Значение y3	0	1,75

Ограничения

Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница	
\$E\$8	A (y4)	Значение левой части	17	\$E\$8>=\$G\$8	связанное	0
\$E\$9	B (y5)	Значение левой части	23	\$E\$9>=\$G\$9	не связан.	13
\$E\$10	C (y6)	Значение левой части	12	\$E\$10>=\$G\$10	связанное	0

Рисунок 3.14. Отчет по результатам

Отчет по устойчивости позволяет получить значения переменных исходной задачи.

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$3	Значение y1	0	80	800	1E+30	80
\$C\$3	Значение y2	4,25	0	600	160	180
\$D\$3	Значение y3	1,75	0	420	80	420

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$E\$8	A (y4)	Значение левой части	17	45	17	7
\$E\$9	B (y5)	Значение левой части	23	0	10	13
\$E\$10	C (y6)	Значение левой части	12	210	12	1E+30

Рисунок 3.15. Отчет по устойчивости

Столбец нормированная стоимость позволяет получить значения дополнительных переменных прямой задачи, соответствующих переменным исходной задачи: $x_4 = 80$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$.

Столбец теневая цена позволяет получить значения переменных прямой задачи, соответствующих дополнительным переменным исходной задачи: $x_1 = 45$, $x_2 = 0$, $x_3 = 210$.

Границы изменения прибыли с единицы изделия находятся в столбцах допустимое увеличение и допустимое уменьшение.

Задачи для самостоятельного решения

Задание общее:

1. Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум прибыли, указать оптимальную производственную программу, пояснить, почему в производственную программу вошли не все виды изделий.
2. Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план.
3. Проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане.

3.1. Для изготовления трех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	А	В	С	
I	4	2	1	180
II	3	1	3	210
III	1	2	5	244
Прибыль с ед. изделия	10	14	12	

1. Определить, как изменится прибыль и план выпуска при увеличении запасов сырья I и III вида на 4 ед. каждого.

2. Определить целесообразность включения в план изделия «D», на изготовление которого расходуется соответственно 1, 3 и 2 ед. каждого вида сырья (цена изделия 13 д.ед.).

3.2. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	A	B	C	D	
I	2	1	3	2	200
II	1	2	4	8	160
III	2	4	1	1	170
Прибыль с ед. изделия	5	7	3	6	

1. Определить, как изменится прибыль и план выпуска при увеличении запасов сырья I вида на 8 ед.
2. Определить целесообразность включения в план изделия «E», на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида сырья (цена изделия 10 д. ед.).

3.3. Для изготовления трех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	A	B	C	
I	18	15	12	360

II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Прибыль с ед. изделия	9	10	16	

1. Определить, как изменится прибыль и план выпуска при увеличении запасов сырья I вида на 45 ед. и одновременном уменьшении запасов сырья II вида на 9 ед.
2. Определить целесообразность включения в план изделия «D», на изготовление которого расходуется соответственно 9, 4 и 6 ед. каждого вида сырья (цена изделия 11 д.ед.).

3.4. Для изготовления трех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	A	B	C	
I	1	2	1	430
II	3	0	2	460
III	1	4	0	420
Прибыль с ед. изделия	3	2	5	

1. Определить, как изменится прибыль и план выпуска при увеличении запасов сырья I вида на 80 ед. и одновременном уменьшении запасов сырья II вида на 10 ед.
2. Определить целесообразность включения в план изделия «D», на изготовление которого расходуется соответственно 2, 4 и 3 ед. каждого вида сырья (цена изделия 7 д.ед.)

3.5. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	A	B	C	D	
I	3	4	2	1	200
II	0	2	3	5	250
III	2	1	1	3	300
Прибыль с ед. изделия	12	8	6	15	

1. Определить, как изменится прибыль и план выпуска при увеличении запасов сырья II вида на 50 ед. и одновременном уменьшении на 10 ед. запасов сырья III вида.
2. Определить целесообразность включения в план изделия «Е», на изготовление которого расходуется по две единицы каждого вида сырья (цена изделия 16 д. ед.).

3.6. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	A	B	C	D	
I	2	6	4	8	400
II	3	5	1	4	220
III	4	1	1	2	350
Прибыль с ед. изделия	10	9	5	12	

1. Определить, как изменится прибыль и план выпуска при увеличении запасов сырья I вида на 100 ед.
2. Определить целесообразность включения в план изделия «Е», на изготовление которого расходуется соответственно 3, 5, 4 каждого вида сырья (цена изделия 13 д. ед.).

3.7. Для изготовления трех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	А	В	С	
I	2	8	5	460
II	4	2	1	320
III	3	3	2	250
Прибыль с ед. изделия	20	15	18	

1. Определить, как изменится стоимость продукции и план выпуска при увеличении запасов сырья II вида на 40 ед.
2. Определить целесообразность включения в план изделия «D», на изготовление которого расходуется соответственно 6, 3 и 2 ед. каждого вида сырья (цена изделия 10 д.ед.).

3.8. Для изготовления трех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	A	B	C	
I	1	2	6	380
II	5	4	2	450
III	3	2	1	300
Прибыль с ед. изделия	3	5	7	

1. Определить, как изменится прибыль и план выпуска при увеличении запасов сырья I вида на 60 ед.
2. Определить целесообразность включения в план изделия «D», на изготовление которого расходуется соответственно 3, 2 и 8 ед. каждого вида сырья (цена изделия 6 д.ед.).

3.9. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	A	B	C	D	
I	0	2	6	4	800
II	3	0	5	4	560
III	2	4	1	2	700
Прибыль с ед. изделия	5	8	7	9	

1. Определить, как изменится прибыль и план выпуска при увеличении запасов сырья II вида на 30 ед.

2. Определить целесообразность включения в план изделия «Е», на изготовление которого расходуется соответственно 5, 3, 2 и 6 ед. каждого вида сырья (цена изделия 10 д. ед.).

3.10. Для изготовления четырех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие				Запасы сырья
	A	B	C	D	
I	1	6	5	4	590
II	3	2	1	4	510
III	2	3	3	2	840
Прибыль с ед. изделия	15	8	17	14	

1. Определить, как изменится прибыль и план выпуска при увеличении запасов сырья I вида на 120 ед.
2. Определить целесообразность включения в план изделия «Е», на изготовление которого расходуется по три единицы каждого вида сырья (цена изделия 16 д. ед.).

ТЕМА 4.

М МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗЛП (СИМПЛЕКС МЕТОД С ИСКУССТВЕННЫМ БАЗИСОМ)

Теоретическая часть

Если в задаче линейного программирования в канонической форме есть уравнения, в которых отсутствует базисная переменная, то в левые части таких ограничений включается дополнительная искусственная переменная,

выполняющая роль базисной. Так как введенные переменные не имеют отношения к существу задачи, то необходимо добиться, чтобы в процессе решения они обращались в нуль. Для этого искусственные переменные включаются в целевую функцию:

- если целевая функция на максимум, то из нее вычитается M умноженное на сумму искусственных переменных;
- если целевая функция на минимум, то к ней прибавляется M умноженное на сумму искусственных переменных (где M – очень большое положительное число).

Симплекс метод с искусственным базисом называется M -методом. Его отличие от обычного симплекс метода заключается в том, что искусственная переменная при выходе из числа базисных не переходит в разряд свободных, а исключается из задачи. Алгоритм перехода к новой симплекс таблице для M -метода сохраняется, однако при выборе разрешающей строки необходимо учитывать, что M – очень большое положительное число.

Если все искусственные переменные вышли из базиса, то получаем допустимое решение исходной задачи. Если оптимальное решение содержит искусственные переменные или задача неразрешима (независимо от того остались в базисе искусственные переменные или нет) – исходная задача неразрешима.

Практическая часть

4.0. Математическая модель задачи имеет вид:

$$F(X) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 28, \\ x_2 + x_3 = 9, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

Решение.

Задача дана в каноническом виде. Проверим, в каких уравнениях отсутствует базисная переменная, для этого построим матрицу коэффициентов:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Переменная x_3 – базисная переменная для третьего уравнения, x_4 – базисная переменная для второго уравнения. В первое уравнение включим искусственную переменную x_5 и изменим целевую функцию, включив в нее $-Mx_5$:

$$F(X) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - Mx_5 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_5 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_4 = 28, \\ x_2 + x_3 = 9, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{cases}$$

Для симплекс-метода необходимо выразить целевую функцию только через свободные переменные, поэтому в системе ограничений преобразуем уравнения к следующему виду:

$$\begin{cases} x_5 = 12 - 2x_1 - 3x_2, \\ x_4 = 28 - 3x_1 - 4x_2, \\ x_3 = 9 - x_2, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 5}. \end{cases} \quad (4.1)$$

Каждая базисная переменная в системе (4.1) выражена через свободные. Подставим эти выражения в целевую функцию:

$$\begin{aligned} F(X) &= 5x_1 + 2x_2 + 3(9 - x_2) + (28 - 3x_1 - 4x_2) - M(12 - 2x_1 - 3x_2) = \\ &= (2 + 2M)x_1 + (-5 + 3M)x_2 + 55 - 12M \rightarrow \max. \end{aligned}$$

Составляем начальную симплекс таблицу. Находим в ней разрешающий столбец и разрешающую строку.

Таблица 4.1. Начальная симплекс таблица для задачи (4.0)

СП БП	x_1	x_2	Свободный член
x_5	2	3	12
x_4	3	4	28
x_3	0	1	9
Z	$-2 - 2M$	$5 - 3M$	$55 - 12M$

Переходим к следующей симплекс таблице, исключив переменную x_5 из рассмотрения. Переменная x_5 – искусственная и став свободной покидает задачу.

Таблица 4.2. Первая итерация М метода

СП БП	x_1	Свободный член
x_2	$\frac{2}{3}$	4
x_4	$\frac{1}{3}$	12
x_3	$-\frac{2}{3}$	5
Z	$-\frac{16}{3}$	35

Так как в Z строке есть отрицательные элементы, то симплекс алгоритм повторяется. Таблица 4.3 соответствует допустимому решению задачи 4.0.

Таблица 4.3. Вторая итерация М метода

СП БП	x_2	Свободный член
x_1	$\frac{3}{2}$	6
x_4	$-\frac{1}{2}$	10
x_3	1	9
Z	8	67

Оптимальное решение задачи 4.0: $x_1 = 6$, $x_2 = 0$, $x_3 = 9$, $x_4 = 10$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание общее: Решить задачу М методом.

4.1. $F(X) = 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 10, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 20, \\ 3x_2 + x_4 = 15, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

4.2. $F(X) = x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + x_4 = 25, \\ 2x_2 + x_3 = 18, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 24, \\ x_j \geq 0, j = \overline{1, 4}. \end{cases}$$

ТЕМА 5.

ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Вопросы

1. Задачи целочисленного программирования.
2. Метод ветвей и границ, метод Гомори.

Теоретическая часть

Общий термин целочисленное программирование применяется к созданию оптимизационных моделей с условиями целочисленности (условия, требующие, чтобы некоторые или все переменные решения принимали целочисленные значения).

Различают:

- модель полностью целочисленного линейного программирования, если все переменные исходной модели должны принимать только целые значения;
- модель частично целочисленного линейного программирования, если в модели наряду с переменными, принимающими только целые значения, есть переменные, принимающие любые значения;
- модели двоичного целочисленного программирования, обычно являются представлением дихотомических решений типа «да/нет».

В случае если масштаб оптимального решения (нецелочисленного) очень велик и отбрасывание дробной части (или как альтернатива – округление) дает допустимое решение, то полученное решение обычно весьма близко к оптимальному, а в большинстве случаев с ним совпадает. Если масштаб оптимального решения мал (яхты, самолеты, машины и т. п.), то округление может привести к далекому от оптимального целочисленному решению.

Для решения задач целочисленного линейного программирования используются следующие методы:

- отсечения;

- комбинаторные;
- приближенные.

Подробно рассмотрим два метода: метод Гомори (метод отсечения) и метод ветвей и границ (комбинаторный метод).

Методы отсечения предполагают на первом этапе решение исходной задачи без условия целочисленности. Если полученное оптимальное решение оказывается целочисленным, то задача решена. Иначе к ограничениям задачи добавляется дополнительное, которое удовлетворяет следующим условиям:

- оно должно быть линейным;
- должно отсекал найденный оптимальный нецелочисленный план;
- не должно отсекал ни одного целочисленного плана.

Ограничение, обладающее указанными свойствами, называется правильным отсечением.

Алгоритм метода Гомори:

1. Симплекс методом решаем задачу без условия целочисленности.
 - Если все значения переменных оптимального решения – целые, то полученное решение является оптимальным решением исходной задачи.
 - Если задача без условия целочисленности неразрешима, то исходная задача также неразрешима.
 - Если в полученном оптимальном решении часть переменных принимает нецелые значения, то необходимо сформировать дополнительное ограничение.
2. Составляем дополнительное ограничение, используя строку оптимальной симплекс таблицы, для которой свободный член имеет наибольшую дробную часть. Для этой строки сформировать дополнительное ограничение по следующему правилу:

$$\gamma_1 = \{b_i\}, \gamma_{11} = \{a_{i1}\}, \gamma_{12} = \{a_{i2}\}, \dots, \gamma_{1n} = \{a_{in}\},$$

где i – номер строки симплекс таблицы, свободный член b_i которой имеет наибольшую дробную часть, $\{ \}$ – дробная часть, a_{ij} элементы i -ой строки симплекс таблицы (j столбец соответствует свободной переменной x_{k_j} , где k_j – индекс свободной переменной в j -ом столбце, k_j неупорядоченные числа из множества $\overline{1, n+m}$).

Дополнительное ограничение имеет вид:

$$\gamma_{11}x_{k_1} + \gamma_{12}x_{k_2} + \dots + \gamma_{1n}x_{k_n} \geq \gamma_1, \quad (5.1)$$

Оно позволяет отсеять дробное решение, связанное с нецелым значением базисной переменной, соответствующей i -ой строке симплекс таблицы.

Для включения ограничения в оптимальную симплекс таблицу заменим неравенство (5.1) уравнением, имеющим базисную переменную:

$$-\gamma_{11}x_{k_1} - \gamma_{12}x_{k_2} - \dots - \gamma_{1n}x_{k_n} + x_{n+m+1} = -\gamma_1. \quad (5.2)$$

В оптимальную симплекс таблицу включаем дополнительное ограничение, соответствующее базисной переменной x_{n+m+1} . Возобновим процесс преобразования симплекс таблиц для получения в столбце свободных членов неотрицательных элементов.

3. Новое оптимальное решение может оказаться с целочисленными компонентами – задача решена. Иначе возвращаемся к п.2. Процесс присоединения дополнительных ограничений продолжается до тех пор, пока либо не будет найдено целочисленное оптимальное решение, либо будет доказано, что такого решения не существует.

Замечание: целой частью любого числа называется наибольшее целое число, не превосходящее данного числа. Пусть $x = [x] + \{x\}$, где $[x]$ – целая часть числа, $\{x\}$ дробная часть числа, которая всегда представляет собой правильную неотрицательную дробь. Например, для положительного числа представление: $2,3 = 2 + 0,3$, для отрицательного числа $-3,4 = -4 + 0,6$.

Основная идея метода ветвей и границ состоит в разбиении множества всех допустимых решений задачи ЦЛП на непересекающиеся подмножества

меньшего размера, таким образом, чтобы одна из координат предположительно приняла целочисленные значения. Далее вычисляются границы значения наилучшего решения для каждого подмножества решений. Алгоритм позволяет производить частичный перебор всех допустимых решений.

Практическая часть

5.0. Для изготовления трех видов продукции используют три вида сырья. Запасы сырья, нормы его расхода и прибыль от реализации каждого продукта приведены в таблице.

Тип сырья	Нормы расхода сырья на одно изделие			Запасы сырья
	А	В	С	
I	3	2	0	10
II	1	4	0	11
III	3	3	1	13
Прибыль с ед. изделия	4	5	1	

Найти целочисленный план выпуска, для которого прибыль будет максимальной.

Решение.

Решим задачу методом Гомори. Рассмотрим задачу **5.0** в каноническом виде без условия целочисленности:

$$\begin{aligned}
 \max F(X) &= 4x_1 + 5x_2 + x_3, \\
 \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 10, \\ x_1 + 4x_2 + x_5 = 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_6 = 13, \end{cases} & \\
 x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,6}. &
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Построим симплекс таблицу 5.1 и через три итерации получим оптимальное, но нецелочисленное решение.

Таблица 5.1. Начальная симплекс таблица для модели (5.3)

СП БП	x_1	x_2	x_3	Свободный член
x_4	3	2	0	10
x_5	1	4	0	11
x_6	3	3	1	13
Z	-4	-5	-1	0

Таблица 5.2. Первая итерация

СП БП	x_1	x_5	x_3	Свободный член
x_4	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{9}{2}$
x_2	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{11}{4}$
x_6	$\frac{9}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1	$\frac{19}{4}$
Z	$-\frac{11}{4}$	$\frac{5}{4}$	-1	$\frac{55}{4}$

Таблица 5.3. Вторая итерация

СП БП	x_4	x_5	x_3	Свободный член
x_1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_2	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{23}{10}$
x_6	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	$\frac{7}{10}$
Z	$\frac{11}{10}$	$\frac{7}{10}$	-1	$\frac{187}{10}$

Таблица 5.4. Третья итерация

СП БП	x_4	x_5	x_6	Свободный член
x_1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_2	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{23}{10}$
x_3	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	$\frac{7}{10}$
Z	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{194}{10}$

Оптимальное решение: $x_1 = \frac{9}{5}$, $x_2 = \frac{23}{10}$, $x_3 = \frac{7}{10}$.

Для составления дополнительного ограничения оптимальной симплекс таблицы 5.4 найдем строку, в которой свободный член имеет максимальную дробную часть:

$$\gamma_1 = \frac{4}{5} = \frac{8}{10}, \gamma_2 = \frac{3}{10}, \gamma_3 = \frac{7}{10}.$$

Следовательно, составляем ограничение для первой строки. Находим дробные части элементов первой строки:

$$\gamma_{11} = \frac{2}{5}, \gamma_{12} = \frac{4}{5} \left(-\frac{1}{5} = -1 + \frac{4}{5} \right), \gamma_{13} = 0.$$

Включаем эти элементы с противоположным знаком в новую строку симплекс таблицы 5.4., которая соответствует дополнительной переменной x_7 .

Таблица 5.5. Симплекс таблица с дополнительным ограничением

СП БП	x_4	x_5	x_6	Свободный член
x_1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	$\frac{9}{5}$
x_2	$-\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$\frac{23}{10}$
x_3	$-\frac{9}{10}$	$-\frac{3}{10}$	1	$\frac{7}{10}$
x_7	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$
Z	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	1	$\frac{194}{10}$

Таблица 5.6. Симплекс таблица оптимального решения задачи 5.0

СП БП	x_4	x_7	x_6	Свободный член
x_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	2
x_2	$-\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	0	2
x_3	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{3}{8}$	1	1
x_5	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{4}$	0	1
Z	0	$\frac{1}{2}$	1	19

Оптимальное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

5.0*. Производство может закупить станки двух видов А и В. Другие условия задачи приведены в таблице.

Вид ресурса	Нормы расхода ресурса на одно изделие		Запас ресурса
	А	В	
I (занимаемая площадь м ²)	1	4	36
II (денежные средства тыс. руб.)	5	3	50
Количество произведенных изделий за смену (тыс. ед.)	2	3	

Составить такой план приобретения станков, при котором прибыль предприятия от реализации, произведенной на них продукции, будет максимальной.

Решим задачу методом ветвей и границ. Рассмотрим задачу без условия целочисленности:

$$1. F(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\ \begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 36, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 50, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (5.3)$$

Решим задачу графическим методом (для наглядности процедуры метода ветвей и границ). Координату точки максимума найдем из системы:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 36, \\ 5x_1 + 3x_2 = 50. \end{cases} \quad (5.4)$$

Решение системы: $x_1 = 5\frac{7}{17}$, $x_2 = 7\frac{11}{17}$. Значение целевой функции $F(C) = 33\frac{13}{17}$. Точка с целочисленными координатами ближайшая к полученному оптимальному решению: $Q(5, 7)$, значение целевой функции в этой точке $F(Q) = 31$ - это значение нижняя граница оптимума целевой функции. Задачи, в которых оптимальное значение целевой функции меньше чем 31, рассматривать дальше для получения целочисленного решения – не имеет смысла. Точка с координатами $(5, 8)$, полученная в результате округления до

целых значений – недопустимое решение (в ней не выполняется первое ограничение).

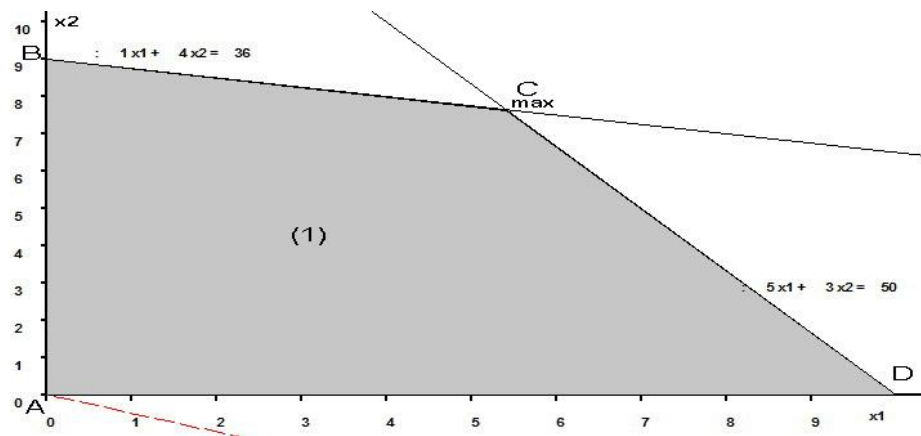


Рисунок 5.1. Графическое решение модели (5.3)

Разбиваем модель (5.3) на две по координате x_1 , чтобы исключить полученное нецелочисленное оптимальное решение:

2. $F(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 36, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 50, \\ x_1 \leq 5, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

3. $F(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 36, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 50, \\ x_1 \geq 6, \\ x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Четырехугольник $ABKL$ – множество допустимых решений модели (5.4), точка K – точка максимума, координаты которой решение системы:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 36, \\ x_1 = 5. \end{cases}$$

Получим $x_1 = 5, x_2 = 7\frac{3}{4}$, значение целевой функции $F(K) = 32\frac{3}{4}$. По-

лученное значение больше нижней границы значений целевой функции (31)

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \leq 36, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 50, \\ x_1 \leq 5, \\ x_2 \geq 8, \\ x_1 \geq 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Четырехугольник $ARQL$ – множество допустимых решений модели (5.6), точка Q – точка максимума, координаты которой решение системы:

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 7. \end{cases}$$

Полученное решение целочисленное, $F(Q) = 31$. В случае если для других моделей найденные целочисленные решения не дадут большее значение целевой функции – это решение будет оптимальным.

Треугольник BNM – множество допустимых решений модели (5.7), точка M – точка максимума, координаты которой решение системы:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 36, \\ x_2 = 8. \end{cases}$$

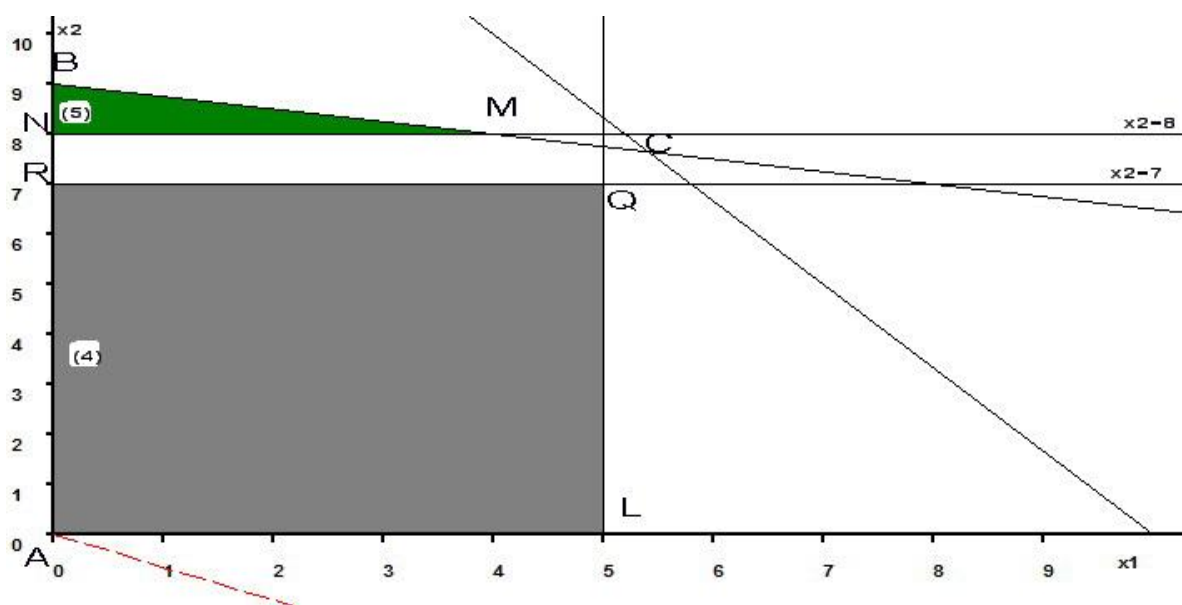


Рисунок 5.3. Графическое решение моделей (5.6) и (5.7)

Получим $x_1 = 4$, $x_2 = 8$, значение целевой функции $F(M) = 32$. Полученное решение целочисленное, а значение целевой функции больше чем в точке Q . Следовательно, рассматриваем точку M как возможный максимум исходной задачи.

Разбиваем модель (5.5) на две по координате x_2 , чтобы исключить полученное нецелочисленное оптимальное решение:

$$\begin{array}{ll}
 6. F(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, & 7. F(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \\
 \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 \leq 36, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 50, \\ x_1 \geq 6, \\ x_2 \leq 6, \\ x_2 \geq 0. \end{array} \right. & \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 \leq 36, \\ 3x_1 + 5x_2 \leq 50, \\ x_1 \geq 6, \\ x_2 \geq 7. \end{array} \right. \quad (5.9)
 \end{array} \quad (5.8)$$

Четырехугольник $GFHD$ – множество допустимых решений модели (5.8), точка H – точка максимума, координаты которой решение системы:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 50, \\ x_2 = 6. \end{cases}$$

Получим $x_1 = 6,4$, $x_2 = 6$, значение целевой функции $F(H) = 30,8$. Полученное решение нецелочисленное, а значение целевой функции меньше чем в точке M : $F(M) > F(H)$. Это означает, что модели полученные разбиением модели (5.8) дать лучшего решения не смогут. Получить целочисленное решение с лучшим значением целевой функции для этой ветви задачи невозможно и дальнейшее ее рассмотрение нецелесообразно. Однако, решение модели (5.8) демонстрирует сложность получения целочисленного решения. Добиваясь целочисленности переменной x_2 , утратили целочисленность переменной x_1 . От дальнейшего расширения числа моделей спасло то, что оптимум на допустимом множестве решений модели (5.8) оказался ниже границы отсечения.

Множество допустимых решений модели (5.9) – пустое. Система ограничений несовместна.

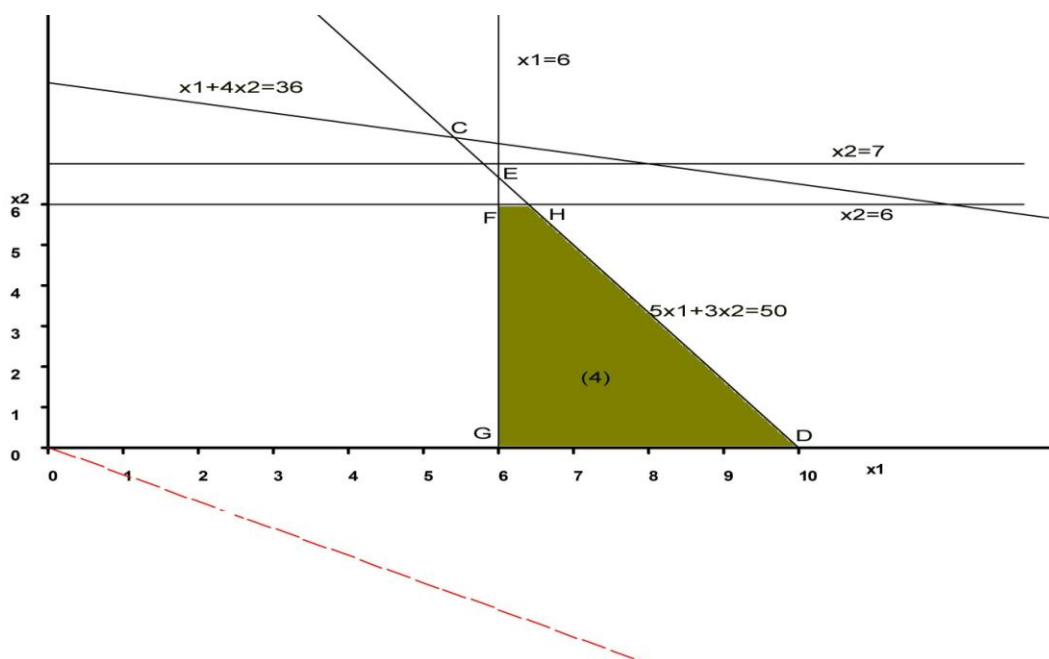


Рисунок 5.4. Графическое решение моделей (5.8) и (5.9)

Окончательно получаем, что целочисленный максимум задачи 5.1 – точка M с координатами $x_1 = 4$, $x_2 = 8$.

Задачи для самостоятельного решения

Задание общее: Методом Гомори (или методом ветвей и границ) найти оптимальное решение.

5.1. $F(X) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 13, \\ x_1 - x_2 \leq 6, \\ -3x_1 + x_2 \leq 9, \\ x_j \geq 0, \quad x_j \in Z, \quad j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

5.2. $F(X) = 2x_1 + x_2 \rightarrow \max,$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 \geq 24, \\ -3x_1 + 3x_2 \leq 9, \\ -x_1 + 3x_2 \geq 3, \\ x_j \geq 0, \quad x_j \in Z, \quad j = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

ТЕМА 6.

ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Вопросы

1. Транспортная задача.
2. Построение начального опорного плана методом Данцига, методом минимального элемента, методом Фогеля.
3. Использование метода потенциалов для определения оптимального плана перевозок.
4. Двойственные переменные транспортной задачи.
5. Решение транспортной задачи открытого типа.

Теоретическая часть

Транспортная задача является специальным типом задач линейного программирования. Экономическая постановка этой задачи следующая. Имеется m поставщиков и n потребителей некоторой продукции. Заданы тарифы (стоимость) перевозок единицы продукции от поставщиков к потребителям (c_{ij} – стоимость перевозки единицы груза от i -го поставщика j -му потребителю), известны объемы запасов продукции у поставщиков (a_i) и потребности каждого потребителя в продукции (b_j). Требуется составить план поставок продукции от поставщиков к потребителям так, чтобы суммарная стоимость перевозок была минимальной.

Транспортные задачи бывают двух типов: сбалансированные (закрытые) и несбалансированные (открытые).

Транспортная задача называется *сбалансированной (закрытой)*, если суммарный объем запасов продукции равен суммарному спросу на нее:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j.$$

Для закрытых моделей разработаны специальные методы решения.

Открытую модель преобразуют в закрытую с помощью фиктивного поставщика или потребителя, в пользу которого перераспределяется избыток на противоположной стороне:

- если $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$, то вводят фиктивного потребителя $n+1$ со спросом $b_{n+1} = \sum_{i=1}^m a_i - \sum_{j=1}^n b_j$, тарифы перевозок в направлении этого потребителя $c_{1n+1} = c_{2n+1} = \dots = c_{mn+1} = 0$ (реально ничего не перевозится).
- если $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, то вводят фиктивного поставщика $m+1$ с предложением $a_{m+1} = \sum_{j=1}^n b_j - \sum_{i=1}^m a_i$, тарифы перевозок от этого поставщика $c_{m+1,1} = c_{m+1,2} = \dots = c_{m+1,n} = 0$.

Математическая постановка сбалансированной транспортной задачи имеет вид

$$F(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \rightarrow \min ,$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad (\text{ограничения по запасам продукции}),$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (\text{ограничения по потребностям}),$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}, \quad (\text{условия неотрицательности}).$$

Здесь x_{ij} – объем перевозимой продукции, c_{ij} – тариф поставки продукции от i -го поставщика к j -му потребителю, b_j – потребности потребителей в продукции, a_i – запасы продукции у поставщиков.

Транспортная задача является задачей линейного программирования со специальной матрицей. В ней имеется mn неизвестных x_{ij} и $m+n$ уравнений.

Решение транспортной задачи называется *оптимальным планом перевозок (поставок) продукции*.

$a_i \backslash b_j$	b_1	b_2		b_n
a_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}		c_{1n} x_{1n}
a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2n} x_{2n}
...				
a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mn} x_{mn}

Рисунок 6.1. Транспортная таблица для сбалансированной модели

Начальный план перевозок по методу Данцига (северо-западного угла) строится по следующему алгоритму.

1. Заполнение транспортной таблицы начинается от левого верхнего угла ($i = 1, j = 1$).
2. В заполняемую клетку размещается $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$. Соответствующие значения спроса и предложения уменьшаются на величину размещенного груза: $a'_i = a_i - x_{ij}$, $b'_j = b_j - x_{ij}$, то из значений, которое стало равным нулю, соответствует выходящему из рассмотрения элементу, то есть исключается из рассмотрения соответствующий j -ый столбец или i -ая строка.

3. Если исключили строку, то следующей заполняется клетка в том же столбце на строку ниже: $x_{i+1,j}$. Если исключили столбец, то следующей заполняется клетка в той же строке на столбец правее: $x_{i,j+1}$. Правила заполнения п.2.
4. Для последней заполняемой клетки предложение и спрос совпадают, так как модель закрытая.

Замечание (общее для всех методов заполнения транспортной таблицы): если для заполняемой клетки (не последней) совпали соответствующие значения a_i и b_j , то исключению подлежит только один элемент транспортной таблицы: либо поставщик, либо потребитель. На стороне оставшегося в рассмотрении записывают нулевое значение, которое будет размещено в дальнейшем в одну из заполняемых клеток. В таком случае хотя бы одна из базисных переменных будет равна нулю, а план перевозок будет вырожденным.

Начальный план перевозок по методу минимального элемента (корректнее сказать минимального тарифа) строится по следующему алгоритму.

1. Заполнение транспортной таблицы начинается с клетки, для которой тариф равен $\min\{c_{ij}\}$.
2. В заполняемую клетку размещается $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$. Соответствующие значения спроса и предложения уменьшаются на величину размещенного груза: $a'_i = a_i - x_{ij}$, $b'_j = b_j - x_{ij}$, то из значений, которое стало равным нулю, соответствует выходящему из рассмотрения элементу, то есть исключается из рассмотрения соответствующий j -ый столбец или i -ая строка.
3. Следующей заполняется клетка транспортной таблицы, для которой тариф равен $\min\{c_{ij}\}$ из оставшихся в рассмотрении клеток. Правила заполнения п.2.

4. Для последней заполняемой клетки предложение и спрос совпадают, так как модель закрытая.

Замечание: если на очередном шаге минимальный тариф соответствует нескольким клеткам, то для заполнения выбирается любая.

Начальный план перевозок по методу Фогеля (с использованием штрафных функций) строится по следующему алгоритму.

1. Заполнение транспортной таблицы начинается с нахождения значений штрафных функций для каждой строки γ_{ik} (i – номер строки, k – номер шага заполнения транспортной таблицы) и каждого столбца δ_{kj} (j – номер столбца). Значение штрафной функции для столбца находится как разность между двумя ближайшими по значению минимальными тарифами в столбце ($\delta_{kj} \geq 0$). Значение штрафной функции для строки находится как разность между двумя ближайшими по значению минимальными тарифами в строке ($\gamma_{ik} \geq 0$). Для значений штрафной функции определяют $\max\{\gamma_{ik}, \delta_{kj}\}$, если это значение соответствует столбцу, то в этом столбце находят клетку с минимальным тарифом, если это значение соответствует строке, то в этой строке находят клетку с минимальным тарифом. Это и будет заполняемая клетка.
2. В заполняемую клетку размещается $x_{ij} = \min\{a_i, b_j\}$. Соответствующие значения спроса и предложения уменьшаются на величину размещенного груза: $a'_i = a_i - x_{ij}$, $b'_j = b_j - x_{ij}$, то из значений, которое стало равным нулю, соответствует выходящему из рассмотрения элементу, то есть исключается из рассмотрения соответствующий столбец или строка.
3. Согласно правилу п.1 рассчитываются значения штрафных функций для оставшихся в рассмотрении столбцов и строк без

исключенных на предыдущих шагах клеток. И алгоритм повторяется.

4. Для последней заполняемой клетки предложение и спрос совпадают, так как модель закрытая.

Замечание: Если на очередном шаге наибольшее значение штрафной функции встречается более одного раза, то можно использовать любой столбец или строку, соответствующие максимальному значению штрафной функции.

Для определения оптимальности транспортной таблицы и последующего улучшения плана транспортировок используют метод потенциалов.

Обозначим двойственные оценки маршрутов – y_{ij} . Двойственная оценка также называется косвенным тарифом, она показывает насколько дороже ($y_{ij} > 0$) или дешевле ($y_{ij} < 0$) перевозка единицы груза по соответствующему маршруту (от i -го поставщика к j -му потребителю).

При нахождении двойственных оценок каждого маршрута воспользуемся тем, что если x_{ij} – свободная переменная, то соответствующая ей двойственная переменная y_{ij} – базисная переменная и наоборот если x_{ij} базисная переменная, то y_{ij} – свободная переменная.

Найдем вспомогательные элементы для вычисления значений базисных переменных y_{ij} – это потенциалы строк и столбцов.

Соотношение между двойственными оценками и потенциалами устанавливается следующее:

$$y_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j). \quad (6.1)$$

Через базисные переменные x_{ij} , для которых соответствующие $y_{ij} = 0$ находим значения потенциалов по формуле (6.1)

$$u_i = c_{ij} - v_j, \quad (6.2)$$

$$v_j = c_{ij} - u_i. \quad (6.3)$$

Однако потенциалов – $n + m$, а базисных переменных в исходной задаче – $n + m - 1$. Поэтому для однозначного определения $n + m - 1$ потенциала один из потенциалов приравнивают к некоторому значению (например, для определенности $u_1 = 0$). Если изменить это значение, или зафиксировать значение другого потенциала, то все остальные потенциалы также меняют свои значения. Однако, величина $u_i + v_j$ остается неизменной для конкретной транспортной таблицы при любом выборе начального потенциала и любом присваиваемом ему значении.

Вычислив значения всех потенциалов, по формуле (6.1) находят значения y_{ij} для свободных переменных x_{ij} . Если все значения базисных переменных $y_{ij} \geq 0$, то транспортная таблица соответствует оптимальному плану перевозок, если среди базисных переменных y_{ij} есть равные нулю, то такой план не единственный, так как передача перевозки на этот маршрут не меняет значения целевой функции.

Если среди базисных переменных y_{ij} есть отрицательные, то план перевозок может быть улучшен. Для этого свободная переменная x_{ij} , которой соответствует максимальное по модулю отрицательное значение двойственной переменной y_{ij} , должна стать базисной (если таких y_{ij} несколько - выбирают любое). Если одна из свободных переменных станет базисной, то одна из базисных должна стать свободной. Составляем цикл пересчета. Одна вершина этого цикла соответствует той свободной переменной x_{ij} , которая должна войти в базис, все остальные вершины соответствуют только базисным переменным x_{ij} . Ребра цикла – вертикальные или горизонтальные отрезки, то есть у вершин соединенных ребром совпадает либо номер строки, либо номер столбца. Каждому ребру соответствует только две вершины – начальная и конечная, цикл – это замкнутая ломанная. Такой цикл единственный. Необязательно чтобы цикл пересчета включал в себя все базисные пе-

ременные исходной задачи, но свободная переменная в таком цикле может быть только одна.

Каждая вершина цикла получает знак плюс или минус по следующему правилу: вершина, соответствующая свободной переменной, всегда со знаком плюс, далее знаки чередуются. Так как количество вершин цикла – четное, то вернуться в вершину, соответствующую свободной переменной, должны со знаком плюс.

Величина размещаемой перевозки определяется по тем базисным переменным x_{ij} , для которых вершины имеют знак минус, среди них выбирают минимальную по значению, эту величину груза обозначим через r и будем перемещать. В вершинах со знаком «+» к значению переменной x_{ij} прибавляем r , в вершинах со знаком «-» от значения переменной x_{ij} отнимаем r .

В новой транспортной таблице должно быть тоже количество базисных переменных. Транспортная таблица с помощью потенциалов проверяется на оптимальность. Если таблица не соответствует оптимальному плану перевозок, то процесс оптимизации повторяется.

Замечание: в случае если несколько базисных переменных в вершинах со знаком минус имеют одно и то же минимальное значение, то свободной переменной становится только одна из них, все остальные остаются базисными с нулевыми перевозками. Такой план перевозок будет вырожденным.

Практическая часть

6.0. На трех хлебокомбинатах ежедневно производится 160, 130, 170 тонн муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых равны соответственно 110, 70, 180, 100 тонн. Тарифы перевозок 1 тонны муки с хлебокомбинатов к каждому из хлебозаводов задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 9 \\ 9 & 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Необходимо составить оптимальный план перевозок.

Решение.

Составим начальный план транспортировок с помощью метода северо-западного угла. Проверим транспортную задачу на сбалансированность:

$$\sum_{i=1}^3 a_i = 160 + 130 + 170 = 460, \quad \sum_{j=1}^4 b_j = 110 + 70 + 180 + 100 = 460.$$

Первая заполняемая клетка:

$$x_{11} = \min\{a_1, b_1\} = \min\{160, 110\} = 110, \quad a'_1 = 50, \quad b'_1 = 0,$$

первый столбец исключается из рассмотрения (можно провести вертикальную линию по тарифам клеток первого столбца, показывая, что эти клетки дальше не рассматриваются).

Вторая заполняемая клетка:

$$x_{12} = \min\{a'_1, b_2\} = \min\{50, 70\} = 50, \quad a''_1 = 0, \quad b'_2 = 20,$$

первая строка исключается из рассмотрения (можно провести горизонтальную линию по тарифам клеток первой строки, показывая, что эти клетки дальше не рассматриваются).

Третья заполняемая клетка:

$$x_{22} = \min\{a_2, b'_2\} = \min\{130, 20\} = 20, \quad a'_2 = 110, \quad b''_2 = 0,$$

второй столбец исключается из рассмотрения.

Четвертая заполняемая клетка:

$$x_{23} = \min\{a'_2, b_3\} = \min\{110, 180\} = 110, \quad a''_2 = 0, \quad b'_3 = 70,$$

вторая строка исключается из рассмотрения.

Пятая заполняемая клетка:

$$x_{33} = \min\{a_3, b'_3\} = \min\{170, 70\} = 70, \quad a'_3 = 100, \quad b''_3 = 0,$$

третий столбец исключается из рассмотрения.

$a_i \backslash b_j$	110	70 (20)	180 (70)	100
160 (50)	8 110	9 50	1	2
130 (110)	3	6 20	9 110	9
170 (100)	9	4	4 70	7 100

Рисунок 6.2. Транспортная таблица с начальным планом перевозок, составленным по методу северо-западного угла

Шестая заполняемая клетка:

$$x_{34} = \min \{a'_3, b_4\} = \min \{100, 100\} = 100, a'_3 = 0, b'_4 = 0,$$

для последней заполняемой клетки значение предложения и спроса совпадает.

Значение целевой функции для плана перевозок транспортной таблицы на рисунке 6.2.:

$$F(X) = 8 \cdot 110 + 9 \cdot 50 + 6 \cdot 20 + 9 \cdot 110 + 4 \cdot 70 + 7 \cdot 100 = 3420.$$

Составим начальный план транспортировок по методу минимального элемента.

Первая заполняемая клетка с минимальным тарифом $c_{13} = 1$:

$$x_{13} = \min \{a_1, b_3\} = \min \{160, 180\} = 160, a'_1 = 0, b'_3 = 20,$$

первая строка исключается из рассмотрения (можно провести вертикальную линию по тарифам клеток первой строки, показывая, что эти клетки дальше не рассматриваются).

$a_i \backslash b_j$	110	70	180 (20)	100 (20)
160	8	9	1	2
130	3	6	9	9
170 (100) ((80))	9	4	4	7
		70	20	80

Рисунок 6.3. Транспортная таблица с начальным планом перевозок, составленным по методу минимального элемента

Вторая заполняемая клетка соответствует минимальному из оставшихся в рассмотрении тарифов $c_{21} = 3$ (тариф $c_{14} = 2$ вычеркнут вместе с первой строкой):

$$x_{21} = \min\{a_2, b_1\} = \min\{130, 110\} = 110, a'_2 = 20, b'_1 = 0,$$

первый столбец исключается из рассмотрения.

Третья заполняемая клетка соответствует минимальному из оставшихся в рассмотрении тарифов $c_{32} = 4$ (может быть другой вариант заполнения x_{33} , так как тариф $c_{33} = 4$):

$$x_{32} = \min\{a_3, b_2\} = \min\{170, 70\} = 70, a'_3 = 100, b'_2 = 0,$$

второй столбец исключается из рассмотрения. Третья заполняемая клетка проиллюстрировала ситуацию, когда на очередном шаге заполнения оказалось несколько клеток с одинаковым наименьшим на этом шаге тарифом. Заполняется в этом случае любая клетка, соответствующая наименьшему тарифу. Однако это означает, что возможен не один начальный план перевозок, составленный по методу минимального элемента. Причем стоимость перевозок по этим планам может различаться.

Четвертая заполняемая клетка:

$$x_{33} = \min\{a'_3, b'_3\} = \min\{100, 20\} = 20, a''_3 = 80, b''_3 = 0,$$

третий столбец исключается из рассмотрения.

Пятая заполняемая клетка:

$$x_{34} = \min\{a''_3, b_4\} = \min\{80, 100\} = 80, a'''_3 = 0, b'_4 = 20,$$

третья строка исключается из рассмотрения.

Шестая заполняемая клетка:

$$x_{24} = \min\{a'_2, b'_4\} = \min\{20, 20\} = 20, a''_2 = 0, b''_4 = 0,$$

для последней заполняемой клетки значение предложения и спроса совпадает.

Значение целевой функции для плана перевозок транспортной таблицы на рисунке 6.3.:

$$F(X) = 1 \cdot 160 + 3 \cdot 110 + 9 \cdot 20 + 4 \cdot 70 + 4 \cdot 20 + 7 \cdot 80 = 1590.$$

Значение целевой функции для начального плана перевозок, построенного по методу минимального элемента, оказалось существенно лучше.

Составим начальный план перевозок по методу Фогеля.

Для нахождения первой заполняемой клетки вычисляем значения штрафных функций для строк: $\gamma_{11} = c_{14} - c_{13} = 2 - 1 = 1$, $\gamma_{21} = c_{22} - c_{21} = 6 - 3 = 3$, $\gamma_{31} = c_{32} - c_{33} = 4 - 4 = 0$, и для столбцов $\delta_{11} = c_{11} - c_{21} = 8 - 3 = 5$, $\delta_{12} = c_{22} - c_{32} = 6 - 4 = 2$, $\delta_{13} = c_{33} - c_{13} = 4 - 1 = 3$, $\delta_{14} = c_{34} - c_{14} = 7 - 2 = 5$. Выбираем наибольшее значение штрафных функций, это значение 5 ему соответствует два столбца первый и четвертый. Для определенности выберем первый, в нем найдем клетку с минимальным тарифом:

$$x_{21} = \min\{a_2, b_1\} = \min\{130, 110\} = 110, a'_2 = 20, b'_1 = 0,$$

первый столбец исключаем из рассмотрения.

На втором шаге рассчитываем значения штрафных функций для строк и столбцов, исключая первый. Так как из рассмотрения исключен столбец, то значения штрафных функций для столбцов, оставшихся в рассмотрении, не

изменяться. Для строк $\gamma_{12} = c_{14} - c_{13} = 2 - 1 = 1$, $\gamma_{22} = c_{23} - c_{22} = 9 - 6 = 3$, $\gamma_{32} = c_{32} - c_{33} = 4 - 4 = 0$. Наибольшее значение штрафной функции соответствует четвертому столбцу, в нем найдем клетку с наименьшим тарифом:

$$x_{14} = \min \{a_1, b_4\} = \min \{160, 100\} = 100, a'_1 = 60, b'_4 = 0,$$

четвертый столбец исключается из рассмотрения.

$b_j \backslash a_i$	110	70 (20)	180 (120)	100	1 шаг	2 шаг	3 шаг	4 шаг
160 (60)	8	9	1 60	2 100	1	1	8	
130 (20)	3 110	6 20	9	9	3	3	3	3
170 (50)	9	4 50	4 120	7	0	0	0	0
1 шаг	5	2	3	5				
2 шаг		2	3	5				
3 шаг		2	3					
4 шаг		2	5					

Рисунок 6.4. Транспортная таблица с начальным планом перевозок, составленным по методу Фогеля

На третьем шаге рассчитываем значения штрафных функций для строк и столбцов, исключая первый и четвертый столбцы. Так как был исключен столбец, то значения штрафных функций для столбцов сохраняют свои значения. Для строк $\gamma_{13} = c_{12} - c_{13} = 9 - 1 = 8$, $\gamma_{23} = c_{23} - c_{22} = 9 - 6 = 3$, $\gamma_{33} = c_{32} - c_{33} = 4 - 4 = 0$. Наибольшее значение штрафной функции соответствует первой строке, из оставшихся в первой строке клеток выбираем ту, тариф которой минимален:

$$x_{13} = \min \{a'_1, b_3\} = \min \{60, 180\} = 60, a''_1 = 0, b'_3 = 120,$$

первую строку исключаем из рассмотрения.

На четвертом шаге рассчитываем значения штрафных функций для строк и столбцов, исключая первую строку, первый и четвертый столбцы. Так как была исключена строка, то значения штрафных функций для оставшихся в рассмотрении строк не изменились. Для столбцов: $\delta_{42} = c_{22} - c_{32} = 6 - 4 = 2$, $\delta_{43} = c_{23} - c_{33} = 9 - 4 = 5$. Наибольшее значение штрафной функции соответствует третьему столбцу, в нем найдем клетку с минимальным тарифом:

$$x_{33} = \min \{a_3, b'_3\} = \min \{170, 120\} = 120, a'_3 = 50, b''_3 = 0,$$

третий столбец исключаем из рассмотрения.

Так как в рассмотрении остался один столбец, то вычислять значения штрафных функций невозможно. Заполняем в оставшемся столбце клетки в порядке возрастания тарифов:

$$x_{32} = \min \{a'_3, b_2\} = \min \{50, 70\} = 50, a''_3 = 0, b'_2 = 20.$$

Последняя заполняемая клетка

$$x_{22} = \min \{a'_2, b'_2\} = \min \{20, 20\} = 20, a''_2 = 0, b''_2 = 0.$$

Значение целевой функции для транспортной таблицы на рисунке 6.4.:

$$F(X) = 1 \cdot 60 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 110 + 6 \cdot 20 + 4 \cdot 50 + 4 \cdot 120 = 1390.$$

Для транспортной таблицы, построенной по методу минимального элемента, проведем оптимизацию с помощью метода потенциалов.

Значение целевой функции для плана перевозок в транспортной таблице на рисунке 6.5: $F(X) = 1590$. Метод Фогеля, давший лучшее начальное решение показал, что эта таблица оптимальному решению не соответствует, то есть для метода потенциалов есть работа.

$b_j \backslash a_i$	110	70	180	100	u_i
160	8 $\boxed{10}$	9 $\boxed{8}$	1 160	2 $\boxed{-2}$	0
130	3 110	6 $\boxed{0}$	9 $\boxed{3}$	9 20	5
170	9 $\boxed{8}$	4 70	4 20	7 80	3
v_j	-2	1	1	4	

Рисунок 6.5. Транспортная таблица с начальным планом перевозок, составленным по методу минимального элемента

Рассчитаем значения потенциалов для строк и столбцов транспортной таблицы на рисунке 6.5 по формулам (6.2)-(6.3) для базисных переменных исходной задачи: $u_1 = 0$ (первое значение для одного из потенциалов выбираем произвольно),

$$v_3 = c_{13} - u_1 = 1 - 0 = 1, \quad u_3 = c_{33} - v_3 = 4 - 1 = 3,$$

$$v_2 = c_{32} - u_3 = 4 - 3 = 1, \quad v_4 = c_{34} - u_3 = 7 - 3 = 4,$$

$$u_2 = c_{24} - v_4 = 9 - 4 = 5, \quad v_1 = c_{21} - u_2 = 3 - 5 = -2.$$

Рассчитаем значения двойственных переменных, соответствующих базисным переменным исходной задачи:

$$y_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 8 - (0 - 2) = 10,$$

$$y_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 9 - (0 + 1) = 8,$$

$$y_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) = 2 - (0 + 4) = -2,$$

$$y_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 6 - (5 + 1) = 0,$$

$$y_{23} = c_{23} - (u_2 + v_3) = 9 - (5 + 1) = 3,$$

$$y_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 9 - (3 - 2) = 8.$$

Значения двойственных оценок отобразим в той же таблице, но в рамке, чтобы отличать от значений переменных исходной задачи.

Составим цикл пересчета перевозок, начиная с вершины, в которой значение u_{ij} наибольшее по модулю из отрицательных.

$a_i \backslash b_j$	110	70	180	100	u_i
160	8 [10]	9 [8]	1 160 --	2 [2]	0
130	3 110	6 [0]	9 [3]	9 20	5
170	9 [8]	4 70	4 20 +	7 80 -	3
v_j	-2	1	1	4	

Рисунок 6.6. Транспортная таблица с циклом пересчета перевозок

Находим $r = \min \{160, 80\}$ величину перемещаемого груза (используя только те значения x_{ij} , которые находятся в вершинах со знаком «-»).

Составляем новую транспортную таблицу:

$a_i \backslash b_j$	110	70	180	100
160	8	9	1 80	2 80
130	3 110	6	9	9 20
170	9	4 70	4 100	7

Рисунок 6.7. Первая итерация. Транспортная таблица с новым планом перевозок грузов

Значение целевой функции для транспортной таблицы 6.7:

$$F(X) = 1 \cdot 80 + 2 \cdot 80 + 3 \cdot 110 + 9 \cdot 20 + 4 \cdot 70 + 4 \cdot 100 = 1430,$$

тот же результат можно получить, используя косвенный тариф и значение целевой функции, соответствующее предыдущей транспортной таблице:

$$F(X) = 1590 + y_{14} \cdot r = 1590 - 2 \cdot 80 = 1430.$$

Для новой транспортной таблицы рассчитаем потенциалы строк и столбцов, значения двойственных оценок, соответствующие свободным переменным исходной задачи.

$a_i \backslash b_j$	110	70	180	100	u_i
160	8 [12]	9 [8]	1 80	2 80	0
130	3 110	6 [-2]	9 [2]	9 20	7
170	9 [10]	4 70	4 100	7 [2]	3
v_j	-4	1	1	2	

Рисунок 6.8. Транспортная таблица с циклом пересчета перевозок

В новой транспортной таблице, также есть отрицательный косвенный тариф y_{22} . Составим новый цикл пересчета. Находим $r = \min\{20, 80, 70\}$ величину перемещаемого груза (используя только те значения x_{ij} , которые находятся в вершинах со знаком «-»).

Результат пересчета по циклу представлен на рисунке 6.9. Значение целевой функции для плана перевозок транспортной таблицы на рисунке 6.9:

$$F(X) = 1 \cdot 60 + 2 \cdot 100 + 3 \cdot 110 + 6 \cdot 20 + 4 \cdot 50 + 4 \cdot 120 = 1390,$$

$$\text{или } F(X) = 1430 + y_{22} \cdot r = 1430 - 2 \cdot 20 = 1390.$$

$a_i \backslash b_j$	110	70	180	100
160	8	9	1 60	2 100
130	3 110	6 20	9	9
170	9	4 50	4 120	7

Рисунок 6.9. Вторая итерация. Транспортная таблица с новым планом перевозок.

Проверим оптимальность транспортной таблицы на рисунке 6.9. с помощью метода потенциалов.

$a_i \backslash b_j$	110	70	180	100	u_i
160	8 10	9 8	1 60	2 100	0
130	3 110	6 20	9 3	9 2	5
170	9 8	4 50	4 120	7 2	3
v_j	-2	1	1	2	

Рисунок 6.10. Транспортная таблица, соответствующая оптимальному плану перевозок.

Инструмент Поиск решения программы MS Excel

Использование инструмента Поиск решения программы MS Excel для получения оптимального решения транспортной задачи.

В документе MS Excel создадим страничку модели задачи **6.0**:

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Переменные					Ограничения		
2	целые	xi1	xi2	xi3	xi4	Левая часть	Знак	Правая часть
3	x1j					=СУММ(B3:E3)	=	160
4	x2j					=СУММ(B4:E4)	=	130
5	x3j					=СУММ(B5:E5)	=	170
6	ограничения	Левая часть	=СУММ(B3:B5)	=СУММ(C3:C5)	=СУММ(D3:D5)	=СУММ(E3:E5)		
7		Знак	=	=	=			=СУММ(H3:H5)
8		Правая часть	110	70	180	100	=СУММ(B8:E8)	Баланс
9								
10								
11	Тарифы	xi1	xi2	xi3	xi4			
12	x1j	8	9	1	2			
13	x2j	3	6	9	9			
14	x3j	9	4	4	7			
15						ЦФ		
16						Значение	Направление	
17						=СУММПРОИЗВ(B3:E5:B12:E14)	min	

Рисунок 6.11. Страница модели задачи (формулы)

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Переменные					Ограничения		
2	целые	xi1	xi2	xi3	xi4	Левая часть	Знак	Правая часть
3	x1j					0	=	160
4	x2j					0	=	130
5	x3j					0	=	170
6	ограничения	Левая часть	0	0	0	0		
7		Знак	=	=	=	=		460
8		Правая часть	110	70	180	100	460	Баланс
9								
10								
11	Тарифы	xi1	xi2	xi3	xi4			
12	x1j	8	9	1	2			
13	x2j	3	6	9	9			
14	x3j	9	4	4	7			
15						ЦФ		
16						Значение	Направление	
17						0	min	

Рисунок 6.12. Страница модели задачи (числовые значения)

Встав на ячейку, сохраняющую значение целевой функции (в примере F16) вызовем инструмент **Поиск решения** и заполним диалоговое окно исходной информацией.

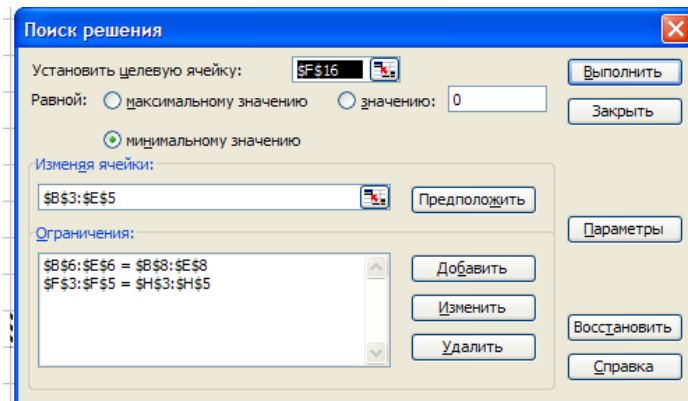


Рисунок 6.13. Диалоговое окно инструмента Поиск решения

На вкладке параметры выбираем необходимые характеристики модели.

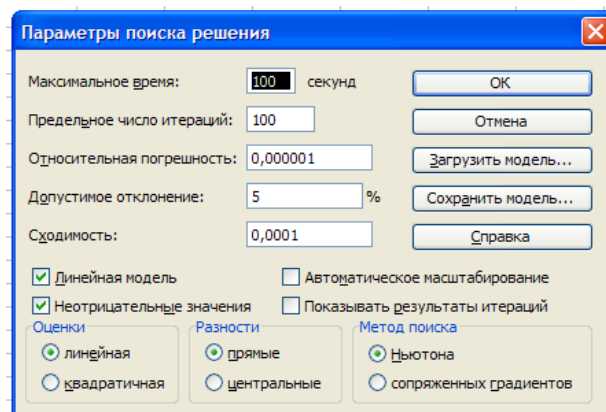


Рисунок 6.14. Вкладка параметры поиска решения

Возвращаемся к исходному окну и выбираем команду Выполнить.

Программа найдет оптимальное решение и предложит выбрать вариант отчета.

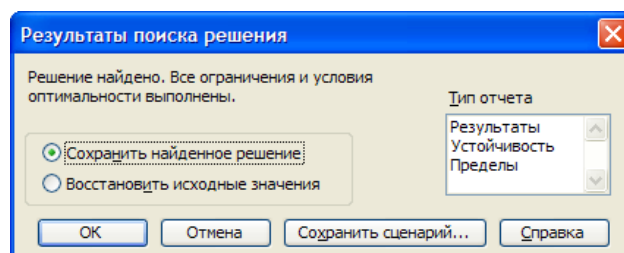


Рисунок 6.15. Результаты поиска решения

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Переменные					Ограничения		
2	целые	xi1	xi2	xi3	xi4	Левая часть	Знак	Правая часть
3	x1j	0	0	60	100	160	=	160
4	x2j	110	20	0	0	130	=	130
5	x3j	0	50	120	0	170	=	170
6	ограничения Левая часть	110	70	180	100			
7	Знак	=	=	=	=			460
8	Правая часть	110	70	180	100		460	Баланс
9								
10								
11	Тарифы	xi1	xi2	xi3	xi4			
12	x1j	8	9	1	2			
13	x2j	3	6	9	9			
14	x3j	9	4	4	7	ЦФ		
15						Значение	Направление	
16						1390	min	

Рисунок 6.16. Оптимальный план перевозок для транспортной задачи 6.0

Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. стоимость	Целевой Коэффициент	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$3 x1j xi1		0	10	8	1E+30	10
\$C\$3 x1j xi2		0	8	9	1E+30	8
\$D\$3 x1j xi3		60	0	1	8	2
\$E\$3 x1j xi4		100	0	2	2	1E+30
\$B\$4 x2j xi1		110	0	3	8	1E+30
\$C\$4 x2j xi2		20	0	6	2	8
\$D\$4 x2j xi3		0	3	9	1E+30	3
\$E\$4 x2j xi4		0	2	9	1E+30	2
\$B\$5 x3j xi1		0	8	9	1E+30	8
\$C\$5 x3j xi2		50	0	4	8	2
\$D\$5 x3j xi3		120	0	4	2	8
\$E\$5 x3j xi4		0	2	7	1E+30	2

Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Теневая Цена	Ограничение Правая часть	Допустимое Увеличение	Допустимое Уменьшение
\$B\$6 ограничения Левая часть xi1		110	-3	110	20	0
\$C\$6 ограничения Левая часть xi2		70	0	70	120	0
\$D\$6 ограничения Левая часть xi3		180	0	180	0	1E+30
\$E\$6 ограничения Левая часть xi4		100	1	100	60	0
\$F\$3 x1j Левая часть		160	1	160	0	60
\$F\$4 x2j Левая часть		130	6	130	0	20
\$F\$5 x3j Левая часть		170	4	170	0	120

Рисунок 6.17. Отчет по результатам (первая часть)

Из всех отчетов наибольший интерес представляет отчет по устойчивости. Сравним полученные значения с оптимальной транспортной таблицей. В столбце *результатирующее значение* таблицы *изменяемые ячейки* отчета по результатам представлен план перевозок по строкам. В столбце *нормированная стоимость* значения двойственных переменных (в транспортной таблице на

рисунке 6.18 эти значения в рамке). В таблице *ограничения* рассмотрим столбец *теневая цена*. В нем представлены значения потенциалов строк и столбцов (то есть поставщиков и потребителей). Как видим, они отличаются от рассчитанных нами значений. Но эти различия объясняются неодинаковым выбором начального значения. Если пересчитать потенциалы с $u_1 = 1$, то полученные значения совпадут со значениями столбца *теневая цена*.

$a_i \backslash b_j$	110	70	180	100	u_i
160	8 10	9 8	1 60	2 100	0 (1)
130	3 110	6 20	9 3	9 2	5 (6)
170	9 8	4 50	4 120	7 2	3 (4)
v_j	-2 (-3)	1 (0)	1 (0)	2 (1)	

Рисунок 6.18. (6.10) Транспортная таблица, соответствующая оптимальному плану перевозок

Замечание. Кроме метода потенциалов, для расчета двойственных оценок может быть использован, например, распределительный метод. По этому методу для каждой базисной переменной u_{ij} (соответствующей свободной x_{ij}) составляется цикл пересчета аналогично методу потенциалов. Значение двойственной переменной рассчитывается по формуле:

$$u_{ij} = c_{ij} + \sum \text{тарифов, соответствующих вершинам со знаком "+"} - \sum \text{тарифов, соответствующих вершинам со знаком "-"}$$

Например, рассчитаем с помощью распределительного метода значение y_{11} . Составим цикл пересчета и вычислим двойственный тариф:

$$y_{11} = c_{11} - c_{21} + c_{22} - c_{32} + c_{33} - c_{13} = 8 - 3 + 6 - 4 + 4 - 1 = 10.$$

Проведем аналогию с методом потенциалов:

$$y_{11} = c_{11} - (u_2 + v_1) + (u_2 + v_2) - (u_3 + v_2) + (u_3 + v_3) - (u_1 + v_3) = c_{11} - u_1 - v_1.$$

Как видим метод потенциалов упрощает использование распределительного метода для вычисления двойственных оценок.

$a_i \backslash b_j$	110	70	180	100
160	+ 8 60	9	- 1 100	2
130	- 3 110	+ 6 20	9	9
170	9	- 4 50	+ 4 120	7

Рисунок 6.19. Транспортная таблица с циклом пересчета по распределительному методу

Задачи для самостоятельного решения.

Задание общее:

Составить начальный план транспортировок тремя методами: методом Данцига, методом минимального элемента и методом Фогеля. Проверить оптимальность начального плана транспортировок, составленного методом Данцига, методом потенциалов. При необходимости оптимизировать начальный план транспортировок.

6.1. Для строительства четырех объектов используется кирпич, изготавливаемый на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготавливать 150, 190 и 100 усл. ед. кирпича. Ежедневные потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов соответственно равны 160, 130, 80 и 70 усл. ед.

Известны также тарифы перевозок 1 усл. ед. кирпича с каждого с заводов к каждому из строящихся объектов:

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 5 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 8 & 7 & 9 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок кирпича к строящимся объектам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

6.2. На трех хлебокомбинатах ежедневно производится 120, 150 и 70 тонн муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых равны соответственно 90, 80, 110 и 60 тонн. Тарифы перевозок 1 тонны муки с хлебокомбинатов к каждому из хлебозаводов задаются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 & 7 \\ 4 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план доставки муки, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

6.3. В трех хранилищах горючего ежедневно хранится 120, 50 и 130 тонн бензина. Этот бензин ежедневно получают четыре заправочные станции в количествах, равных соответственно 80, 90, 70 и 60 тонн. Стоимости перевозок 1 тонны бензина с хранилищ к заправочным станциям задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 7 \\ 6 & 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок бензина, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

6.4. На трех железнодорожных станциях A_1 , A_2 и A_3 скопилось 30, 56 и 29 незагруженных вагонов. Эти вагоны необходимо перегнать на железнодорожные станции B_1 , B_2 , B_3 , B_4 . На каждой из этих станций потребность в вагонах соответственно равна 37, 18, 47, 13. Тарифы перегонки одного вагона определяются матрицей:

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 9 & 6 \\ 6 & 4 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

Составьте такой план перегонок вагонов, чтобы общая стоимость была минимальной.

6.5. Для строительства четырех дорог используется гравий из четырех карьеров. Запасы гравия в каждом из карьеров соответственно равны 10, 50, 40 и 80 усл. ед. Потребности в гравии для строительства каждой из дорог соответственно равны 70, 35, 20 и 65 усл. ед. Известны также тарифы перевозок 1 усл. ед. гравия из каждого из карьеров к каждой из строящихся дорог, которые задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 8 \\ 8 & 4 & 6 & 9 \\ 7 & 3 & 7 & 5 \\ 6 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план перевозок гравия, при котором потребности в нем каждой из строящихся дорог были бы удовлетворены при наименьшей общей стоимости перевозок.

6.6. Четыре предприятия данного экономического района могут производить некоторую однородную продукцию в количествах, соответственно равных 10, 40, 35 и 35 ед. Эта продукция должна быть поставлена четырем потребителям в количествах, соответственно равных 30, 20, 45 и 25 ед. Затраты, связанные с производством и доставкой единицы продукции, задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 4 \\ 4 & 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план прикрепления получателей продукции ее поставщикам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

6.7. Производственное объединение имеет в своем составе четыре филиала, которые производят однородную продукцию в количествах соответственно равных 95, 85, 130 и 70 ед. Эту продукцию получают четыре потребителя, расположенные в разных местах. Их потребности соответственно равны 110, 80, 100 и 90 ед. Тарифы перевозок единицы продукции от каждого из филиалов соответствующим потребителям задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 4 & 6 \\ 8 & 2 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Составить такой план прикрепления получателей продукции к ее поставщикам, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

6.8. На четырех складах оптовой базы сосредоточен однородный груз в количествах 40, 25, 105 и 90 ед. Этот груз необходимо перевезти в четыре магазина. Каждый из магазинов должен получить соответственно 80, 70, 50 и 60 ед. груза. Тарифы перевозок единицы груза из каждого из складов во все магазины задаются матрицей

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 & 6 \\ 5 & 2 & 1 & 9 \\ 4 & 3 & 7 & 8 \\ 6 & 9 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

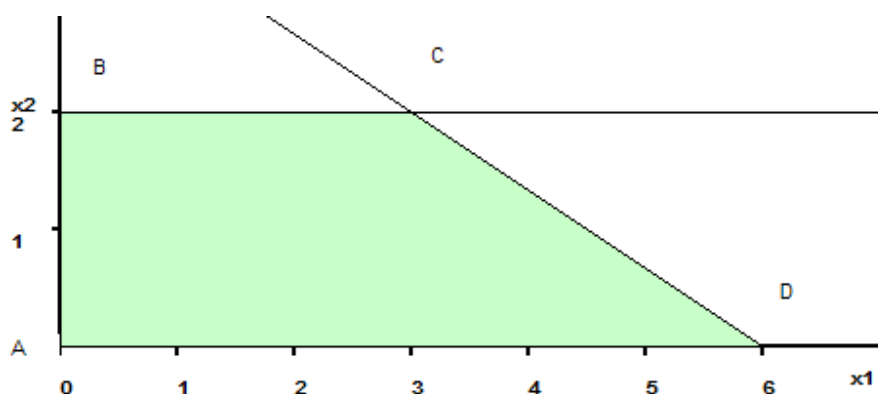
Составить такой план перевозок, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

Вопросы

Литература: [1] стр. 20-107, [3] стр. 50-80, [5] стр. 44-172, [9] стр. 55-190.

Задачи: [1] стр. 65-66, 141-143, [3] стр. 106-108, [5] стр. 62-63, 97-98, 121-122, 150-152, 172, [9] стр. 77-80, 90-95, 123-129, 144, 152, 166-170, 189-190.

1. Какие задачи линейного программирования можно решать графическим методом?
2. Что называется линией уровня целевой функции?
3. Что называется вектор-градиентом целевой функции? Как он определяется?
4. Как определяется область допустимых решений?
5. Найдите координаты точки максимума для целевой функции $F(x) = 5x_1 - 3x_2$.



6. Какие задачи линейного программирования можно решать симплекс-методом?
7. Как осуществляется переход к канонической задаче линейного программирования?
8. Каков признак оптимальности в симплекс-методе?
9. Как строится начальная симплекс-таблица?
10. Чему равны базисные переменные в симплекс-таблице?
11. Чему равны свободные переменные в симплекс-таблице?

12. Чему равно число базисных переменных в задаче линейного программирования?
13. Какая переменная считается базисной?
14. Какие решения для задачи линейного программирования являются допустимыми?
15. Как осуществляется пересчет элементов симплекс-таблицы?
16. Как определяется решение по симплекс таблице?
17. В каких вариантах постановки задач следует пользоваться для их решения методом искусственного базиса (М-методом)?
18. Какие задачи следует решать методом Гомори? В чем его суть?
19. Как используется метод ветвей и границ при решении задач целочисленного программирования?
20. Как составить двойственную задачу?
21. Сформулируйте теоремы двойственности.
22. Как интерпретировать экономический смысл двойственной задачи?
23. Как определить решение двойственной задачи из решения прямой?
24. Какова экономическая интерпретация двойственных оценок?
25. Как определяются интервалы устойчивости двойственных оценок?
26. Как формулируется транспортная задача?
27. Как решаются транспортные задачи с нарушенным балансом между спросом и предложением?
28. Как разрешается проблема вырождения в транспортной задаче?
29. Какая транспортная задача является сбалансированной?
30. Чему равны косвенные тарифы для базисных клеток транспортной таблицы?
31. Как рассчитываются косвенные тарифы для свободных клеток транспортной таблицы?
32. Как рассчитываются потенциалы строк и столбцов?
33. Как определить, что построенная транспортная таблица – не оптимальная?

34. Как заполняется транспортная таблица по методу минимального элемента?
35. Как заполняется транспортная таблица по методу северо-западного угла?
36. Сколько базисных переменных в транспортной задаче и почему?
37. В чем сущность метода потенциалов? Как с его помощью проверяется опорный план транспортной задачи на оптимальность?
38. При каком значении переменной x транспортная задача будет сбалансированной (составить начальный план транспортировок методом минимального элемента)?

$a_i \downarrow$	$b_j \rightarrow$	x	80	10
20		4	3	4
60		3	6	1
30		7	5	3
50		2	3	6

МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ТЕМА 7.

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Вопросы

1. Постановка задачи. Этапы решения задачи динамического программирования. Математическая модель.
2. Динамическое программирование. Решение задачи о замене оборудования.
3. Динамическое программирование. Решение задачи об оптимальном вложении инвестиций.

Теоретическая часть

Динамическое программирование особый метод оптимизации решений, применяемый к многошаговым экономическим процессам. Он характеризует методы нахождения отдельных классов задач математического программирования, которые могут также относиться к задачам линейного программирования.

Рассматриваемая задача предварительно раскладывается на m шагов. Например, планирование деятельности предприятия на несколько лет – каждый шаг один год, планирование инвестиций в несколько объектов – каждый шаг один объект.

Для создания математической модели такой задачи необходимо ввести следующие показатели:

S – состояние экономической системы (процесса), S_i – состояние экономической системы перед i -ым шагом;

W – показатель эффективности функционирования системы в целом за m шагов, W_i – показатель эффективности функционирования системы с i -го шага до конца процесса,

X – управление процесса в целом, $X = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ – набор шаговых управлений, x_i – управляющее решение, принимаемое на i -ом шаге, под влиянием которого система переходит из состояния S_i в состояние S_{i+1} , $x_i \in D$, где D – конечное множество допустимых управлений,

$\varphi_i(S_i, x_i)$ – выигрыш на i -ом шаге, который можно получить под влиянием шагового управления x_i , если система находилась в состоянии S_i .

Оптимальное управление X^* – последовательность шаговых управлений, для которой выполняется условие: $W(X^*) = \max(\min)\{W(X)\}$. Направление оптимизации выбирается в соответствии с экономическим содержанием критерия.

В основе метода динамического программирования лежит *принцип оптимальности Беллмана*: управление на каждом шаге необходимо выбирать таким образом, чтобы оптимальной была сумма выигрышей на всех оставшихся до конца процесса шагах, включая выигрыш на данном шаге.

Основное требование, при выполнении которого принцип верен: процесс управления должен быть без обратной связи, то есть управление на данном шаге не должно оказывать влияния на предшествующие шаги.

Этот принцип позволяет проводить оптимизацию процесса в направлении обратном его функционированию, то есть от последнего шага к первому. Такая оптимизация называется условной.

Условия, при выполнении которых принцип оптимальности Беллмана верен:

1. Условие «отсутствия последействия». Состояние, в которое перешла система, определяется предыдущим состоянием и принятым на предыдущем шаге управлением, и не зависит от всех других предшествующих состояний и управлений. То есть состояние S_i определяется состоянием S_{i-1} и шаговым управлением x_{i-1} , все более ранние состояния и управления на этом шаге значения не имеют.

2. Условие аддитивности целевой функции. Показатель эффективности всего процесса в целом определяется как сумма выигрышей на отдельных шагах:

$$W = \sum_{i=1}^m \varphi_i(S_i, x_i).$$

При выборе управления на каждом шаге мы учитываем его влияние на выигрыши во всех последующих шагах.

Так, например, для компании сотовой связи N^* управляющее решение не устанавливать новое дорогостоящее оборудование, благодаря которому скорость обслуживания повысится, стоимость минуты связи уменьшится, а спектр предоставляемых услуг расширится – самое выгодное на этом шаге, так как экономит денежные средства. Но это решение губительно для всего оставшегося процесса. Так как компании, позаботившиеся об установке такого оборудования, получают конкурентное преимущество и могут в будущем свести прибыль компании N^* к нулю. Однако если смена оборудования производится на заемные средства, а стоимость кредитования в момент принятия решения о замене оборудования очень высока, то модернизация может привести к банкротству компании из-за невозможности обслуживать долг из текущей прибыли. Поэтому и используют методы динамического программирования, чтобы определить, какая последовательность шаговых управлений доставит наилучшее состояние процесса в итоге.

Алгоритм решения задачи динамического программирования

1. Разобьем задачу на m шагов. Определим, что понимается под отдельным шагом в экономическом процессе.
2. Выберем переменные, характеризующие состояние S_i системы перед каждым шагом.
3. Определим множество D возможных шаговых управлений x_i .
4. Определим функцию выигрыша $\varphi_i(S_i, x_i)$, который принесет на i -ом шаге управление x_i , если система находилась в состоянии S_i .

5. Определим функцию перехода системы из одного состояния в другое под влиянием шагового управления:

$$S_{i+1} = f(S_i, x_i), \quad (7.1)$$

6. Составим уравнение, определяющее условный оптимальный выигрыш на последнем шаге, для состояния процесса S_m :

$$W_m(S_m) = \max(\min) \{ \varphi_m(S_m, x_m) \} \quad (7.2)$$

7. Составим функциональное уравнение динамического программирования, определяющее условный оптимальный выигрыш для данного состояния S_i с i -го шага до конца процесса через известный оптимальный выигрыш с $(i+1)$ -го шага до конца процесса:

$$W_i(S_i) = \max(\min) \{ \varphi_i(S_i, x_i) + W_{i+1}(S_{i+1}) \}. \quad (7.3)$$

В уравнении (7.3) функция W_{i+1} определяется на предыдущем шаге оптимизации, новое состояние системы S_{i+1} определяется по формуле (7.1).

8. Проводим безусловную оптимизацию, определяя для начального состояния системы S_1 наилучшую последовательность шаговых управлений.

Замечание. Пункты 6-7 определяют процесс условной оптимизации, которая проводится от конца процесса к его началу. Пункт 8 определяет безусловную оптимизацию, которая проводится от начала процесса к его концу.

Задача о замене оборудования

Планируется эксплуатация оборудования на t лет. Каждый год принимается одно из двух управляющих решений: купить новое оборудование или продолжить эксплуатировать старое. С каждым годом эксплуатации падает эффективность использования оборудования: оно чаще ломается, больше простаивает, требует более дорогого обслуживания. При этом продукции выпускается не только меньше, но и возможно худшего качества. Менять дорогое оборудование каждый год слишком накладно. Не менять долгое время

– однажды исчерпать его ресурс до конца и обанкротиться. Требуется составить оптимальную схему замены оборудования.

Пусть стратегия замены оборудования разрабатывается на m лет. Известно, что оборудование возраста t лет позволяет за год произвести продукцию стоимостью $r(t)$. Годовые затраты на обслуживание единицы оборудования возраста t лет составляют величину $l(t)$. Остаточная стоимость оборудования определяется $c(t)$, стоимость нового оборудования p . Начальный возраст оборудования перед разработкой стратегии t_1 .

Математическая модель задачи замены оборудования определяется следующим алгоритмом

1. Разобьем задачу на m шагов. Под шагом понимается один год, в течение которого эксплуатируется оборудование.
2. Состояние системы S_i перед каждым шагом характеризуется возрастом оборудования ($t = 0, \overline{t_1 + m}$).
3. Определим множество D возможных шаговых управлений x_i . В начале каждого года $i = \overline{1, m}$ может быть выбрано одно из двух управлений: заменять или не заменять оборудование. Введем бинарную переменную, описывающую эти решения:
4. Определим функцию выигрыша $\varphi_i(t, x_i)$, который принесет на i -ом шаге управление x_i - прибыль от эксплуатации оборудования возраста t лет в течении года:

$$x_i = \begin{cases} 0, & \text{если оборудование на } i\text{-ом шаге не заменяется,} \\ 1, & \text{если оборудование на } i\text{-ом шаге заменяется.} \end{cases} \quad (7.4)$$

$$\varphi_i(t) = \begin{cases} r(t) - l(t), & x_i = 0, \\ c(t) - p + r(0) - l(0), & x_i = 1. \end{cases} \quad (7.5)$$

Если принято решение оборудование не менять, то выигрыш определяется как разность между выручкой и стоимостью обслуживания оборудования возраста t лет.

Если принято решение оборудование заменить, то эксплуатируется в течение года новое оборудование, возраст которого в начале периода использования $t = 0$. Однако, в этом случае учитываются расходы на новое оборудование и возможная прибыль от реализации заменяемого оборудования.

5. Определим функцию перехода системы из одного состояния в другое под влиянием шагового управления:

$$f_i(t) = \begin{cases} t+1, & x_i = 0, \\ 1, & x_i = 1. \end{cases} \quad (7.6)$$

6. Составим уравнение, определяющее условный оптимальный выигрыш на последнем шаге, для состояния процесса t :

$$W_m(t) = \max \left\{ \begin{aligned} &r(t) - l(t), (x_m = 0), \\ &c(t) - p + r(0) - l(0), (x_m = 1) \end{aligned} \right\}. \quad (7.7)$$

7. Составим функциональное уравнение динамического программирования, определяющее условный оптимальный выигрыш для данного состояния t с i -го шага до конца процесса через известный оптимальный выигрыш с $(i+1)$ -го шага до конца процесса:

$$W_i(t) = \max \left\{ \begin{aligned} &r(t) - l(t) + W_{i+1}(t+1), (x_i = 0), \\ &c(t) - p + r(0) - l(0) + W_{i+1}(1), (x_i = 1) \end{aligned} \right\}. \quad (7.8)$$

8. Проводим безусловную оптимизацию, определяя для начального состояния системы t_1 наилучшую последовательность шаговых управлений.

Задача об оптимальном распределении инвестиций

Имеется некоторая сумма D , которую необходимо инвестировать. Рассматривается m объектов инвестирования. Функция выигрыша $\varphi_i(x)$ – прибыль, которую обеспечивает i -е предприятие инвестору при вложении в него x средств. Состояние системы перед i -ым шагом – количество средств, оставшихся от предыдущих вложений. Необходимо выбрать оптимальное

распределение инвестиций между предприятиями, обеспечивающее максимальную прибыль.

*Математическая модель задачи планирования инвестиций
определяется следующим алгоритмом*

1. Разобьем задачу на m шагов. Под шагом понимается один из объектов инвестирования.
2. Состояние системы характеризуется суммой денежных средств S_i , имеющихся в наличии перед каждым шагом ($0 \leq S_i \leq D$).
3. Управление x_i является количеством средств, инвестируемых в i -е предприятие.
4. Функцию выигрыша $\varphi_i(S_i, x_i)$ - прибыль, которую приносит i -е предприятие от инвестирования в него x_i денежных средств при условии, что перед этим шагом в наличии имелось S_i денежных средств ($0 \leq x_i \leq S_i$).
5. Определим функцию перехода системы из одного состояния в другое под влиянием шагового управления:

$$S_{i+1} = S_i - x_i, \quad (7.9)$$

6. Составим уравнение, определяющее условный оптимальный выигрыш на последнем шаге, для состояния процесса S_m :

$$W_m(S_m) = \varphi_m(S_m, x_m), \quad x_m = S_m. \quad (7.10)$$

Все средства, имеющиеся перед инвестированием в последний объект, нужно вложить в этот объект (простое владение остатком денежных средств не приносит прибыли).

7. Составим функциональное уравнение динамического программирования, определяющее условный оптимальный выигрыш для данного состояния S_i с i -го шага до конца процесса через известный оптимальный выигрыш с $(i+1)$ -го шага до конца процесса:

$$W_i(S_i) = \max\{\varphi_i(S_i, x_i) + W_{i+1}(S_{i+1})\}. \quad (7.11)$$

В уравнении (7.11) функция W_{i+1} определяется на предыдущем шаге оптимизации, новое состояние системы S_{i+1} определяется по формуле (7.9).

8. Проводим безусловную оптимизацию, определяя для начального состояния системы $S_1 = D$ наилучшую последовательность шаговых управлений.

Практическая часть

Задача о замене оборудования

7.0. Разработать оптимальную политику замены оборудования (не старше 10 лет), если известны: стоимость $r(t)$ продукции, производимой в течение года с использованием данного оборудования; ежегодные расходы $l(t)$, связанные с эксплуатацией оборудования; его остаточная стоимость $c(t)$; стоимость p нового оборудования (с расходами, связанными с установкой, накладкой и запуском оборудования). После составления матрицы максимальных прибылей сформировать оптимальные политики в отношении оборудования данного возраста t в плановом периоде данной продолжительности m .

Таблица 7.1. Условие задачи замены оборудования

	Возраст оборудования t						Продолжительность периода m	6
	0	1	2	3	4	5	Возраст t оборудования	4
$r(t)$	80	75	65	60	60	55	Остаточная стоимость $c(t)$	0
$l(t)$	20	25	30	35	45	55	Стоимость p нового оборудования	40

Решение.

Строим таблицу условной оптимизации (7.2).

Условная оптимизация начинается с последнего 5-го шага. Заполним таблицу условной оптимизации для пятого шага.

Функциональное уравнение для пятого шага имеет вид:

$$W_5(t) = \max \begin{cases} r(t) - l(t), \\ c(t) - p + r(0) - l(0). \end{cases}$$

Каждая строчка соответствует условной оптимизации:

если в начале пятого года возраст оборудования один год:

$$W_5(1) = \max \begin{cases} 75 - 25 \\ -40 + 80 - 20 \end{cases} = 50, \quad x_5(1) = 0,$$

тогда управляющее решение на этом шаге – оборудование не менять;

если в начале пятого года возраст оборудования два года:

$$W_5(2) = \max \begin{cases} 65 - 30 \\ -40 + 80 - 20 \end{cases} = 35, \quad x_5(2) = 0,$$

тогда управляющее решение на этом шаге – оборудование не менять.

Аналогично заполняем остальные строки:

$$W_5(3) = \max \begin{cases} 60 - 35 \\ -40 + 80 - 20 \end{cases} = 25, \quad x_5(3) = 0,$$

$$W_5(4) = \max \begin{cases} 60 - 45 \\ -40 + 80 - 20 \end{cases} = 20, \quad x_5(4) = 1,$$

$$W_5(5) = \max \begin{cases} 55 - 55 \\ -40 + 80 - 20 \end{cases} = 20, \quad x_5(5) = 1.$$

Таблица 7.2. Таблица условной оптимизации
для задачи замены оборудования

t состояние системы	$i = 5$		$i = 4$		$i = 3$		$i = 2$		$i = 1$	
	x_5	W_5	x_4	W_4	x_3	W_3	x_2	W_2	x_1	W_1
1	0	50	0	85	0	120	0	155	0	190
2	0	35	1	70	0/1	105	0/1	140	0/1	175
3	0	25	1	70	1	105	1	140	1	175
4	1	20	1	70	1	105	1	140	1	175
5	1	20	1	70	1	105	1	140	1	175

Функциональное уравнение для четвертого шага имеет вид:

$$W_4(t) = \max \begin{cases} r(t) - l(t) + W_5(t+1), \\ c(t) - p + r(0) - l(0) + W_5(1). \end{cases}$$

Если в начале четвертого года имеем оборудование возраста один год:

$$W_4(1) = \max \begin{cases} 75 - 25 + 35 \\ -40 + 80 - 20 + 50 \end{cases} = 85, \quad x_4(1) = 0,$$

тогда управляющее решение на этом шаге – оборудование не менять.

Для остальных возможных значений возраста оборудования получаем:

$$W_4(2) = \max \begin{cases} 65 - 30 + 25 \\ -40 + 80 - 20 + 50 \end{cases} = 70,$$

$x_4(2) = 0/1$ (безразлично какое решение выбрать, результат одинаков),

$$W_4(3) = \max \begin{cases} 60 - 35 + 20 \\ -40 + 80 - 20 + 50 \end{cases} = 70, \quad x_4(3) = 1,$$

$$W_4(4) = \max \begin{cases} 60 - 45 + 20 \\ -40 + 80 - 20 + 50 \end{cases} = 70, \quad x_4(4) = 1,$$

$$W_4(5) = \max \begin{cases} 55 - 55 + 20 \\ -40 + 80 - 20 - 50 \end{cases} = 70, \quad x_4(5) = 1.$$

Как видим, если для оборудования некоторого возраста принимается решение заменить, то для оборудования старшего возраста на этом шаге принимается аналогичное решение.

Функциональное уравнение для третьего шага имеет вид:

$$W_3(t) = \max \begin{cases} r(t) - l(t) + W_4(t+1), \\ c(t) - p + r(0) - l(0) + W_4(1). \end{cases}$$

Если в начале третьего года имеем оборудование возраста один год:

$$W_3(1) = \max \begin{cases} 75 - 25 + 70 \\ -40 + 80 - 20 + 85 \end{cases} = 120, \quad x_3(1) = 0,$$

тогда управляющее решение на этом шаге – оборудование не менять.

Для остальных возможных значений возраста оборудования получаем:

$$W_3(2) = \max \left\{ \begin{array}{l} 65 - 30 + 70 \\ -40 + 80 - 20 + 85 \end{array} \right\} = 105,$$

$x_3(2) = 0/1$ (безразлично, какое решение выбрать, результат одинаков),

$$W_3(3) = \max \left\{ \begin{array}{l} 60 - 35 + 70 \\ -40 + 80 - 20 + 85 \end{array} \right\} = 105, \quad x_3(3) = 1.$$

Для оборудования возраста четырех и пяти лет выбирается управляющее решение менять оборудование, показатель эффективности при этом не изменится и будет равен 105.

Функциональное уравнение для второго шага имеет вид:

$$W_2(t) = \max \left\{ \begin{array}{l} r(t) - l(t) + W_3(t+1), \\ c(t) - p + r(0) - l(0) + W_3(1). \end{array} \right.$$

Если в начале третьего года имеем оборудование возраста один год:

$$W_2(1) = \max \left\{ \begin{array}{l} 75 - 25 + 105 \\ -40 + 80 - 20 + 120 \end{array} \right\} = 155, \quad x_2(1) = 0,$$

тогда управляющее решение на этом шаге – оборудование не менять.

Для остальных возможных значений возраста оборудования получаем:

$$W_2(2) = \max \left\{ \begin{array}{l} 65 - 30 + 105 \\ -40 + 80 - 20 + 120 \end{array} \right\} = 140,$$

$x_2(2) = 0/1$ (безразлично, какое решение выбрать, результат одинаков),

$$W_2(3) = \max \left\{ \begin{array}{l} 60 - 35 + 105 \\ -40 + 80 - 20 + 120 \end{array} \right\} = 140, \quad x_2(3) = 1.$$

Для оборудования возраста четырех и пяти лет выбирается управляющее решение менять оборудование, показатель эффективности при этом не изменится и будет равен 140.

Функциональное уравнение для первого шага имеет вид:

$$W_1(t) = \max \left\{ \begin{array}{l} r(t) - l(t) + W_2(t+1), \\ c(t) - p + r(0) - l(0) + W_2(1). \end{array} \right.$$

Если в начале третьего года имеем оборудование возраста один год:

$$W_1(1) = \max \left\{ \begin{array}{l} 75 - 25 + 140 \\ -40 + 80 - 20 + 155 \end{array} \right\} = 190, \quad x_1(1) = 0,$$

тогда управляющее решение на этом шаге – оборудование не менять.

Для остальных возможных значений возраста оборудования получаем:

$$W_1(2) = \max \left\{ \begin{array}{l} 65 - 30 + 140 \\ -40 + 80 - 20 + 155 \end{array} \right\} = 175,$$

$x_1(2) = 0/1$ (безразлично, какое решение выбрать, результат одинаков),

$$W_1(3) = \max \left\{ \begin{array}{l} 60 - 35 + 140 \\ -40 + 80 - 20 + 155 \end{array} \right\} = 175, \quad x_1(3) = 1.$$

Для оборудования возраста четырех и пяти лет выбирается управляющее решение менять оборудование, показатель эффективности при этом не изменится и будет равен 175.

Этап безусловной оптимизации начинается с первого шага. Определяем начальное состояние системы возраст оборудования $t_1 = 4$:

Таблица 7.3. Безусловная оптимизация
для задачи о замене оборудования

t состояние системы	$i = 5$		$i = 4$		$i = 3$		$i = 2$		$i = 1$	
	x_5	W_5	x_4	W_4	x_3	W_3	x_2	W_2	x_1	W_1
1	0	50	0	85	0	120	0	155	0	190
2	0	35	1	70	0/1	105	0/1	140	0/1	175
3	0	25	1	70	1	105	1	140	1	175
4	1	20	1	70	1	105	1	140	1	175
5	1	20	1	70	1	105	1	140	1	175

На первом шаге управляющее решение – оборудование менять. На втором шаге новое оборудование через год эксплуатации будет возраста один год: $t_2 = 1$, управляющее решение оборудование не менять. Через год $t_3 = t_2 + 1 = 2$, управляющее решение оборудование менять или не менять безразлично (таким образом, может быть не одно оптимальное управление

процессом). Для определенности выберем на третьем шаге управление – оборудование не менять. Через год $t_4 = t_3 + 1 = 3$, управляющее решение оборудование заменить. Тогда через год эксплуатации возраст оборудования $t_5 = 1$.

Таким образом, последовательность выбора управлений:

$$t_1 = 4, x_1(4) = 1,$$

$$t_2 = 1, x_2(1) = 0,$$

$$t_3 = t_2 + 1 = 2, x_3(2) = 0,$$

$$t_4 = t_3 + 1 = 3, x_4(3) = 1,$$

$$t_5 = 1, x_5(1) = 0.$$

Для оптимального управления $X^* = (1, 0, 0, 1, 0)$ показатель эффективности $W^* = 175$.

Использование программы MS Excel

Для решения задачи о замене оборудования можно воспользоваться таблицами программы MS Excel. Специального инструмента для решения подобной задачи нет, но анализ с помощью таблиц упрощает однообразные вычисления.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	стоимость нового оборудования 40													
				$r(t)-l(t) \ (t \geq 1)$ $-p+r(0)-l(0) \ (t=0)$	x_5	W5	x_4	W4	x_3	W3	x_2	W2	x_1	W1
2	t	r(t)	l(t)	=B3-C3-D1		=D3		=D3+F4		=D3+H4		=D3+J4		=D3+L4
3	0	80	20											
4	1	75	25	=B4-C4		=D4		=D4+F5		=D4+H5		=D4+J5		=D4+L5
5	2	65	30	=B5-C5		=D5		=D5+F6		=D5+H6		=D5+J6		=D5+L6
6	3	60	35	=B6-C6		=D6		=D6+F7		=D6+H7		=D6+J7		=D6+L7
7	4	60	45	=B7-C7		=D7		=D7+F8		=D7+H8		=D7+J8		=D7+L8
8	5	55	55	=B8-C8		=D8		=D8+F9		=D8+H9		=D8+J9		=D8+L9

Рисунок 7.1. Таблица модели задачи замены оборудования

Столбцы с управляющими решениями на каждом шаге пока не заполняются. Значение показателя эффективности W_i при $t = 0$ соответствует решению заменить оборудование и при анализе значений показателя эффек-

тивности на i -ом шаге служит пороговым значением для смены решения с 0 – не менять оборудование, на 1 – оборудование заменить.

Проанализируем столбец показателя эффективности W_5 .

1	стоимость нового оборудования				40	
2	t	r(t)	l(t)	$r(t)-l(t) \ (t \geq 1)$ $-p+r(0)-l(0) \ (t=0)$	x5	W5
3	0	80	20	20		20
4	1	75	25	50		50
5	2	65	30	35		35
6	3	60	35	25		25
7	4	60	45	15		15
8	5	55	55	0		0

Рисунок 7.2. Вычисление показателя эффективности для последнего шага

Значение $W_5(4)$ хуже значения $W_5(0)$, а это значит, что управляющее решение меняется для этого года и всех последующих с 0 на 1, а в соответствующие ячейки показателя эффективности заносится значение 20.

	A	B	C	D	E	F
1	стоимость нового оборудования			40		
2	t	r(t)	l(t)	$r(t)-l(t) \ (t \geq 1)$ $-p+r(0)-l(0) \ (t=0)$	x5	W5
3	0	80	20	20		20
4	1	75	25	50	0	50
5	2	65	30	35	0	35
6	3	60	35	25	0	25
7	4	60	45	15	1	20
8	5	55	55	0	1	20

Рисунок 7.3. Таблица условной оптимизации управляющего решения на последнем шаге

Переходим к анализу 4 шага.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	стоимость нового оборудования			40				
2	t	r(t)	l(t)	$r(t)-l(t) \ (t \geq 1)$ $-p+r(0)-l(0) \ (t=0)$	x5	W5	x4	W4
3	0	80	20	20		20		70
4	1	75	25	50	0	50		85
5	2	65	30	35	0	35		60
6	3	60	35	25	0	25		45
7	4	60	45	15	1	20		35
8	5	55	55	0	1	20		20
9					1	20		

Рисунок 7.4. Вычисление показателя эффективности для четвертого шага

Значение $W_4(2)$ хуже значения $W_4(0)$, а это значит, что управляющее решение меняется для этого года и всех последующих с 0 на 1, а в соответствующие ячейки показателя эффективности заносится значение 70.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	стоимость нового оборудования			40				
2	t	r(t)	l(t)	$r(t)-l(t) \ (t \geq 1)$ $-p+r(0)-l(0) \ (t=0)$	x5	W5	x4	W4
3	0	80	20	20		20		70
4	1	75	25	50	0	50	0	85
5	2	65	30	35	0	35	1	70
6	3	60	35	25	0	25	1	70
7	4	60	45	15	1	20	1	70
8	5	55	55	0	1	20	1	70
9					1	20	1	70

Рисунок 7.5. Таблица условной оптимизации управляющего решения на четвертом шаге

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	стоимость нового оборудования			40										
2	t	r(t)	l(t)	$r(t)-l(t) \ (t \geq 1)$ $-p+r(0)-l(0) \ (t=0)$	x5	W5	x4	W4	x3	W3	x2	W2	x1	W1
3	0	80	20	20		20		70		105		140		175
4	1	75	25	50	0	50	0	85	0	120	0	155	0	190
5	2	65	30	35	0	35	1	70	0/1	105	0/1	140	0/1	175
6	3	60	35	25	0	25	1	70	1	105	1	140	1	175
7	4	60	45	15	1	20	1	70	1	105	1	140	1	175
8	5	55	55	0	1	20	1	70	1	105	1	140	1	175
9					1	20	1	70	1	105	1	140		

Рисунок 7.6. Таблица решенной задачи о замене оборудования

Задача планирования инвестиций.

7.0*. В таблице 7.4. приведены значения возможного прироста прибыли на четырех фирмах в зависимости от выделенной на модернизацию производства суммы x . Распределить между фирмами 5 млн. руб., чтобы общий прирост прибыли был максимальным. Для упрощения вычислений значения x будем выбирать кратными 1 млн. руб.

Таблица 7.4. Значения прироста прибыли

Прибыль $\varphi_i(x)$	Средства млн. руб.				
	1	2	3	4	5
$\varphi_1(x)$	0,5	1,2	1,5	1,8	2
$\varphi_2(x)$	0,8	1	1,3	1,5	1,9
$\varphi_3(x)$	0,3	0,7	1,2	1,9	2,3
$\varphi_4(x)$	0,4	0,9	1,4	1,7	2,4

Решение.

Строим таблицу условной оптимизации. Число различных состояний системы равно возможным остаткам средств на отдельных шагах. Так как

имеется в наличии 5 млн. руб., вкладывать в предприятия можно суммами кратными 1 млн. руб., то рассматриваются состояния: 1, 2, 3, 4 и 5 (0 не берем в рассмотрение из-за тривиальности этого состояния, остаток 0 говорит о завершении процесса инвестирования, на каком бы шаге он не появился).

Таблица 7.5. Таблица условной оптимизации
для задачи планирования инвестиций

S состояние системы	$i = 4$		$i = 3$		$i = 2$		$i = 1$	
	x_4	W_4	x_3	W_3	x_2	W_2	x_1	W_1
1	1	0,4	0	0,4	1	0,8		
2	2	0,9	0	0,9	1	1,2		
3	3	1,4	0	1,4	1	1,7		
4	4	1,7	4	1,9	1	2,2		
5	5	2,4	0	2,4	1	2,7	2	2,9

Условная оптимизация начинается с последнего 4-го шага. Заполним таблицу условной оптимизации для четвертого шага.

Функциональное уравнение для четвертого шага имеет вид:

$$W_4(S_4) = \varphi_4(S_4, x_4), \quad x_4 = S_4.$$

То есть если $S_4 = 1$, то $x_4 = 1$, $W_4(1) = \varphi_4(1) = 0,4$, аналогично заполняем остальные строчки таблицы 7.5. для 4 шага.

Функциональное уравнение для третьего шага имеет вид:

$$W_3(S_3) = \max\{\varphi_3(S_3, x_3) + W_4(S_4)\}, \text{ где } S_4 = S_3 - x_3.$$

Для оптимизации третьего шага составим специальную таблицу. Для каждого возможного значения состояния системы на третьем шаге находится наилучший вариант распределения средств (в таблице соответствующая строка выделена для каждого возможного состояния системы).

Таблица 7.6. Таблица условной оптимизации для третьего шага

S_3	x	$S_4 = S_3 - x$	$\varphi_3(x)$	$W_4(S_4)$	$W_3(S_3) = W_4(S_4) + \varphi_3(x)$
1	0	1	0	0,4	0,4
	1	0	0,3	0	0,3
2	0	2	0	0,9	0,9
	1	1	0,3	0,4	0,7
	2	0	0,7	0	0,7
3	0	3	0	1,4	1,4
	1	2	0,3	0,9	1,2
	2	1	0,7	0,4	1,1
	3	0	1,2	0	1,2
4	0	4	0	1,7	1,7
	1	3	0,3	1,4	1,7
	2	2	0,7	0,9	1,6
	3	1	1,2	0,4	1,6
	4	0	1,9	0	1,9
5	0	5	0	2,4	2,4
	1	4	0,3	1,7	2
	2	3	0,7	1,4	2,1
	3	2	1,2	0,9	2,1
	4	1	1,9	0,4	2,3
	5	0	2,3	0	2,3

Функциональное уравнение для второго шага имеет вид:

$$W_2(S_2) = \max\{\varphi_2(S_2, x_2) + W_3(S_3)\}, \text{ где } S_3 = S_2 - x_2.$$

Для оптимизации второго шага также составим таблицу. Для каждого возможного значения состояния системы на втором шаге находится наилучший вариант распределения средств.

Таблица 7.7. Таблица условной оптимизации для второго шага

S_2	x	$S_3 = S_2 - x$	$\varphi_2(x)$	$W_3(S_3)$	$W_2(S_2) = W_3(S_3) + \varphi_2(x)$
1	0	1	0	0,4	0,4
	1	0	0,8	0	0,8
2	0	2	0	0,9	0,9
	1	1	0,8	0,4	1,2
	2	0	1	0	1
3	0	3	0	1,4	1,4
	1	2	0,8	0,9	1,7
	2	1	1	0,4	1,4
	3	0	1,3	0	1,3
4	0	4	0	1,9	1,9
	1	3	0,8	1,4	2,2
	2	2	1	0,9	1,9
	3	1	1,3	0,4	1,7
	4	0	1,5	0	1,5
5	0	5	0	2,4	2,4
	1	4	0,8	1,9	2,7
	2	3	1	1,4	2,4
	3	2	1,3	0,9	2,2
	4	1	1,5	0,4	1,9
	5	0	1,9	0	1,9

Функциональное уравнение для первого шага имеет вид:

$$W_1(S_1) = \max\{\varphi_1(S_1, x_1) + W_2(S_2)\}, \text{ где } S_2 = S_1 - x_1.$$

Оптимизация первого шага имеет свои особенности. Рассматривать различные состояния системы нет необходимости, так как $S_1 = 5$ (все имеющиеся средства перед первым шагом в наличии).

Таблица 7.8. Таблица условной оптимизации для первого шага

S_1	x	$S_2 = S_1 - x$	$\varphi_1(x)$	$W_2(S_2)$	$W_1(S_1) = W_2(S_2) + \varphi_1(x)$
5	0	5	0	2,7	2,7
	1	4	0,5	2,2	2,7
	2	3	1,2	1,7	2,9
	3	2	1,5	1,2	2,7
	4	1	1,8	0,8	2,6
	5	0	2	0	2

Таблица 7.9. Безусловная оптимизация
для задачи планирования инвестиций

S состояние системы	$i = 4$		$i = 3$		$i = 2$		$i = 1$	
	x_4	W_4	x_3	W_3	x_2	W_2	x_1	W_1
1	1	0,4	0	0,4	1	0,8		
2	2	0,9	0	0,9	1	1,2		
3	3	1,4	0	1,4	1	1,7		
4	4	1,7	4	1,9	1	2,2		
5	5	2,4	0	2,4	1	2,7	2	2,9

Таким образом, последовательность выбора управлений:

$$S_1 = 5, x_1(5) = 2,$$

$$S_2 = S_1 - x_1 = 5 - 2 = 3, x_2(3) = 1,$$

$$S_3 = S_2 - x_2 = 3 - 1 = 2, x_3(2) = 0,$$

$$S_4 = S_3 - x_3 = 2 - 0 = 2, x_4(2) = 2.$$

Для оптимального управления $X^* = (2, 1, 0, 2)$ показатель эффективности $W^* = 2,9$.

Показатель эффективности можно вычислить как сумму выигрышей на отдельных шагах:

$$W^* = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2) + \varphi_3(x_3) + \varphi_4(x_4) = \varphi_1(2) + \varphi_2(1) + \varphi_3(0) + \varphi_4(2) = 1,2 + 0,8 + 0 + 0,9 = 2,9.$$

Инструмент Поиск решения программы MS Excel

Использование инструмента Поиск решения программы MS Excel для получения оптимального решения задачи планирования инвестиций.

В документе MS Excel создадим страничку модели задачи **7*.0.:**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Инвестируемая сумма	1 предприятие	2 предприятие	3 предприятие	4 предприятие				
2	1	0	0	0	0	=СУММ(B2:E2)	=F2*A2		
3	2	0	0	0	0	=СУММ(B3:E3)	=F3*A3		
4	3	0	0	0	0	=СУММ(B4:E4)	=F4*A4		
5	4	0	0	0	0	=СУММ(B5:E5)	=F5*A5		
6	5	0	0	0	0	=СУММ(B6:E6)	=F6*A6		
7		=СУММ(B2:B6)	=СУММ(C2:C6)	=СУММ(D2:D6)	=СУММ(E2:E6)		=СУММ(G2:G6)	<=	5
8		1	1	1	1	ограничение на общую сумму средств к инвестированию			
9									
10		$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$				
11		0,5	0,8	0,3	0,4				
12		1,2	1	0,7	0,9				
13		1,5	1,3	1,2	1,4	целевая функция			
14		1,8	1,5	1,9	1,7	=СУММПРОИЗВ(B2:E6;B11:E15)			
15		2	1,9	2,3	2,4				
16									
17									

Рисунок 7.7. Страница модели задачи (формулы)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Инвестируемая сумма	1 предприятие	2 предприятие	3 предприятие	4 предприятие				
2	1	0	0	0	0	0	0		
3	2	0	0	0	0	0	0		
4	3	0	0	0	0	0	0		
5	4	0	0	0	0	0	0		
6	5	0	0	0	0	0	0		
7		0	0	0	0	0	0	<=	5
8		1	1	1	1	ограничение на общую сумму средств			
9									
10		$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$				
11		0,5	0,8	0,3	0,4				
12		1,2	1,0	0,7	0,9				
13		1,5	1,3	1,2	1,4	целевая функция			
14		1,8	1,5	1,9	1,7	0,0			
15		2,0	1,9	2,3	2,4				

Рисунок 7.8. Страница модели задачи (числовые значения)

В ячейках B2:E6 находятся значения переменных, описывающих управляющие решения. Значение равное 1, означает, что в соответствующее предприятие (название столбца) инвестируется соответствующая сумма (значение в строке для инвестируемой суммы). Левая часть ограничения на инвестиции находится, как сумма произведений управляющих решений на соответствующие суммы к инвестированию. Также составляется ограничение на число принимаемых решений в отношении каждого предприятия. В предприятие либо инвестируется одна конкретная сумма, либо ничего, поэтому сумма элементов в столбце управляющих решений не превосходит единицу.

Целевая функция представляет собой сумму произведений управляющих решений на соответствующие этим решениям выигрыши.

Встав на ячейку, сохраняющую значение целевой функции (в примере F14) вызовем инструмент **Поиск решения** и заполним диалоговое окно исходной информацией.

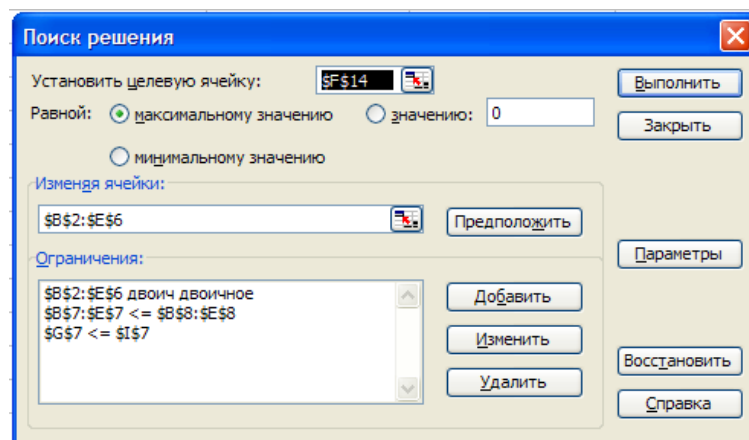


Рисунок 7.9. Диалоговое окно инструмента Поиск решения

На вкладке параметры выбираем необходимые характеристики модели.

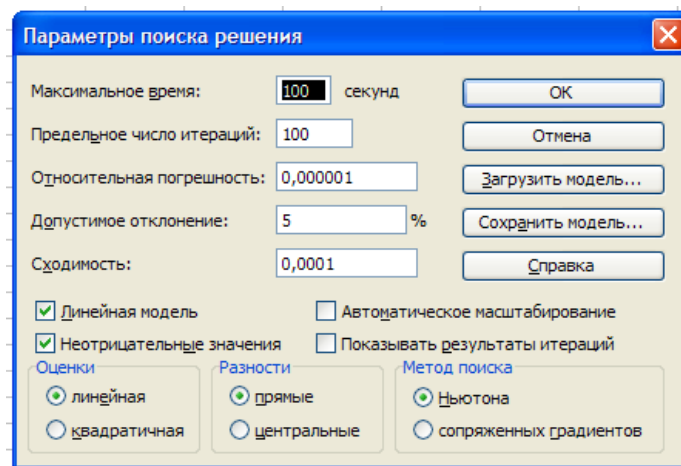


Рисунок 7.10. Вкладка параметры поиска решения

Возвращаемся к исходному окну и выбираем команду **Выполнить**.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Инвестируемая сумма	1 предприятие	2 предприятие	3 предприятие	4 предприятие				
2	1	0	1	0	0	1	1		
3	2	1	0	0	1	2	4		
4	3	0	0	0	0	0	0		
5	4	0	0	0	0	0	0		
6	5	0	0	0	0	0	0		
7		1	1	0	1			5 <=	5
8		1	1	1	1	ограничение на общую сумму средств к инвестированию			
9									
10		$\varphi_1(x)$	$\varphi_2(x)$	$\varphi_3(x)$	$\varphi_4(x)$				
11		0,5	0,8	0,3	0,4				
12		1,2	1,0	0,7	0,9				
13		1,5	1,3	1,2	1,4	целевая функция			
14		1,8	1,5	1,9	1,7	2,9			
15		2,0	1,9	2,3	2,4				

Рисунок 7.11. Оптимальный план распределения инвестиций для задачи **7.0***.

Как видно из таблицы на рисунке 7.11 в первое предприятие следует вложить два миллиона, во второе один и в четвертое также два миллиона, в третье предприятие инвестировать невыгодно.

Задачи для самостоятельного решения

Задача о замене оборудования

Задание общее:

Разработать оптимальную политику замены оборудования (не старше 10 лет), если известны: стоимость $r(t)$ продукции, производимой в течение года с использованием данного оборудования; ежегодные расходы $l(t)$, связанные с эксплуатацией оборудования; его остаточная стоимость $c(t)$; стоимость p нового оборудования (с расходами, связанными с установкой, накладкой и запуском оборудования). После составления матрицы максимальных прибылей сформировать оптимальные политики в отношении оборудования данного возраста t в плановом периоде данной продолжительности m .

Таблица 7.10. Начальные условия задачи

Номер задания	Продолжительность периода m	Возраст t оборудования	Остаточная стоимость $c(t)$	Стоимость p нового оборудования
7.1	6	4	0	11
7.2	7	5	0	14
7.3	8	5	0	10
7.4	10	8	0	10
7.5	9	6	0	8
7.6	8	5	0	17
7.7	7	4	0	12
7.8	9	8	0	6
7.9	6	3	0	13

Таблица 7.11. Стоимость продукции и стоимость обслуживания
единицы оборудования

	Возраст оборудования t											Номер задания
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$r(t)$	20	20	20	19	19	18	18	17	17	16	15	7.1
	22	22	21	21	21	20	20	19	19	19	18	7.2
	25	24	24	23	22	22	21	21	21	20	20	7.3
	28	27	27	26	25	25	24	23	23	22	21	7.4
	21	20	19	19	18	18	17	16	16	15	15	7.5
	24	24	24	23	23	22	21	21	21	20	20	7.6
	28	27	26	25	24	24	23	22	22	22	21	7.7
	20	20	19	18	17	16	16	15	15	14	13	7.8
	26	25	25	24	24	23	23	23	22	21	21	7.9
$l(t)$	10	11	12	12	13	13	14	14	15	15	15	7.1
	12	13	13	14	15	15	16	16	17	18	18	7.2
	13	13	14	15	15	16	16	17	18	19	20	7.3
	16	16	17	17	17	18	18	19	20	20	21	7.4
	11	11	11	12	12	13	13	13	14	14	15	7.5
	13	14	15	16	17	17	17	18	19	19	20	7.6
	15	15	16	17	17	18	19	20	20	21	21	7.7
	8	9	9	10	10	10	11	11	12	13	13	7.8
	15	15	16	16	17	17	18	19	19	20	21	7.9

Задача о планировании инвестиций

Задание общее: В таблице 7.12 приведены значения возможного прироста выпуска продукции на четырех фирмах в зависимости от выделенной на модернизацию производства суммы x . Распределить между фирмами 1 млн. руб., чтобы общий прирост прибыли был максимальным. Для упрощения вычислений значения x будем выбирать кратными 200 тыс. руб.

Таблица 7.12. Значения прироста прибыли

Прибыль $\varphi_i(x)$	Средства тыс. руб.					Номер задания
	200	400	600	800	1000	
$\varphi_1(x)$	95	183	241	383	501	7.1*
$\varphi_2(x)$	114	191	302	442	591	
$\varphi_3(x)$	164	321	402	571	701	
$\varphi_4(x)$	133	273	442	692	733	
$\varphi_1(x)$	97	172	292	382	472	7.2*
$\varphi_2(x)$	116	343	463	533	752	
$\varphi_3(x)$	135	283	374	492	612	
$\varphi_4(x)$	126	354	403	542	734	
$\varphi_1(x)$	73	297	371	411	593	7.3*
$\varphi_2(x)$	98	194	284	373	463	
$\varphi_3(x)$	172	274	373	483	661	
$\varphi_4(x)$	168	302	423	651	815	
$\varphi_1(x)$	94	205	352	443	574	7.4*
$\varphi_2(x)$	124	252	341	464	574	
$\varphi_3(x)$	118	206	322	482	613	
$\varphi_4(x)$	144	233	404	503	583	

$\varphi_1(x)$	98	183	293	414	602	7.5*
$\varphi_2(x)$	82	194	303	472	585	
$\varphi_3(x)$	125	253	513	581	694	
$\varphi_4(x)$	72	155	522	594	602	
$\varphi_1(x)$	110	214	404	542	623	7.6*
$\varphi_2(x)$	133	203	424	451	612	
$\varphi_3(x)$	123	227	344	552	603	
$\varphi_4(x)$	104	273	333	573	691	
$\varphi_1(x)$	123	267	402	604	721	7.7*
$\varphi_2(x)$	164	212	365	491	633	
$\varphi_3(x)$	99	174	355	512	652	
$\varphi_4(x)$	155	252	512	622	762	
$\varphi_1(x)$	145	244	373	455	582	7.8*
$\varphi_2(x)$	125	305	422	583	714	
$\varphi_3(x)$	134	252	453	621	701	
$\varphi_4(x)$	77	334	463	602	683	

Вопросы

Литература: [1] стр. 115-126, [5] стр. 245-272, [9] стр. 361-392.

Задачи: [5] стр. 270-272, [9] стр. 389-392.

1. Как формулируется задача динамического программирования и в чем ее отличие от задач линейного программирования?
2. В чем заключаются особенности математической модели ДП?
3. Что лежит в основе метода ДП?
4. При каких условиях принцип оптимальности Беллмана верен?
5. Что является переменной управления и переменной состояния в задаче выбора оптимальной стратегии обновления оборудования?
6. Запишите функциональные уравнения Беллмана, используемые на каждом шаге управления в задаче выбора оптимальной стратегии обновления оборудования.
7. Запишите математическую модель оптимального распределения инвестиций и рекуррентное соотношение Беллмана для ее реализации.

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ТЕМА 8.

КЛАССИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСТРЕМУМОВ МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Вопросы

1. Необходимые и достаточные условия определения экстремумов.
2. Условный экстремум.
3. Метод множителей Лагранжа.

Теоретическая часть

Во многих экономических моделях, в частности задачах планирования производства взаимосвязи между показателями нелинейные. Например, прибыль с единицы изделия уменьшается при увеличении объема реализуемых изделий одному покупателю.

Если критерий оптимизации или функции определяющие ограничения – нелинейны, то получаем задачу нелинейного программирования.

Можно выделить класс нелинейных задач, которые относятся к классическим методам оптимизации.

Желательным свойством функций, которые используются в экономических моделях, является «гладкость».

Гладкой называется функция, которая в области своего определения имеет производные, то есть является дифференцируемой.

Для функции многих аргументов производные определяются для каждого аргумента и называются частными производными.

Частной производной функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ по аргументу x_i в точке $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется предел отношения приращения $\Delta f = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ функции f к прира-

щению Δx_i аргумента x_i при условии, что остальные аргументы x_j ($j \neq i$) фиксированы, а $\Delta x_i \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i}. \quad (8.1)$$

При помощи производных можно исследовать возрастание и убывание функции. Если во всех точках некоторого множества выполняется условие $\frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0$, то на этом множестве функция f по переменной x_i – неубывающая,

если во всех точках некоторого множества выполняется условие $\frac{\partial f}{\partial x_i} \leq 0$, то на этом множестве функция f по переменной x_i – невозрастающая.

Если пределы (8.1) существуют для всех $i = \overline{1, n}$, то совокупность всех частных производных называется вектором градиентом функции f :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Вектор градиент показывает направление возрастания функции f , а антиградиент $-\nabla f$ показывает направление убывания.

Точка $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ называется точкой локального экстремума, если для всех точек $(x_1, \dots, x_n)$ из области определения функции f близких к точке $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ справедливо неравенство $f(x_1^*, \dots, x_n^*) \geq f(x_1, \dots, x_n)$ (максимум) или $f(x_1^*, \dots, x_n^*) \leq f(x_1, \dots, x_n)$ (минимум).

Само частное значение $f(x_1^*, \dots, x_n^*)$ называется локальным экстремумом функции $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

Точка $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ называется точкой глобального экстремума, если для всех точек $(x_1, \dots, x_n)$ из области определения функции f справедливо неравенство $f(x_1^*, \dots, x_n^*) \geq f(x_1, \dots, x_n)$ (максимум) или $f(x_1^*, \dots, x_n^*) \leq f(x_1, \dots, x_n)$ (минимум).

Само частное значение $f(x_1^*, \dots, x_n^*)$ называется глобальным экстремумом функции $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

Необходимое условие локального экстремума

Пусть функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$ в точке $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ имеет локальный экстремум (точка $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ – внутренняя для области определения функции f), тогда

$$\frac{\partial f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_n} = 0,$$

если первые частные производные существуют.

Второй частной производной функции $y = f(x_1, \dots, x_n)$ называется первая частная производная от первой частной производной: $\frac{\partial^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i^2}$ или

$$\frac{\partial^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (i \neq j).$$

Если смешанные вторые частные производные $\frac{\partial^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j} \quad (i \neq j)$ непрерывны, то они обязательно равны. Вторые частные производные вида $\frac{\partial^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i^2}$ называются чистыми.

Если функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$ в точке $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ имеет частные производные равные нулю $\frac{\partial f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial f(x_1^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_n} = 0$, то точка $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ называется стационарной точкой.

Дифференциал второго порядка обозначается $d^2 f(x_1, \dots, x_n)$ и равен сумме частных производных второго порядка на соответствующие приращения аргументов:

$$d^2 f = \sum \sum \frac{\partial^2 f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j.$$

Достаточное условие локального экстремума

1. в стационарной точке $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$ имеет максимум, если $d^2 f(x_1^*, \dots, x_n^*) < 0$, и минимум, если $d^2 f(x_1^*, \dots, x_n^*) > 0$ при любых Δx_i и Δx_j , не обращающихся в нуль одновременно;
2. если $d^2 f(x_1^*, \dots, x_n^*)$ может принимать в зависимости от Δx_i и Δx_j и положительные и отрицательные значения, то в точке $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ экстремума нет;
3. если $d^2 f(x_1^*, \dots, x_n^*)$ может обращаться в нуль не только при нулевых приращениях Δx_i и Δx_j , то вопрос об экстремуме остается открытым.

Теорема Вейерштрасса. *Если область D замкнута и ограничена, то дифференцируемая функция $y = f(x_1, \dots, x_n)$ достигает в этой области своих наибольшего и наименьшего значений или в стационарной точке, или в граничной точке области.*

В силу того, что ограниченность области D проверить сложно на практике часто применяется следствие из этой теоремы.

Следствие (теоремы Вейерштрасса). *Если функция f непрерывна на R^n и*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = +\infty, \quad \left(\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = -\infty \right),$$

то f достигает своего глобального минимума (максимума) в любом замкнутом подмножестве D пространства R^n .

Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции $y = f(x_1, \dots, x_n)$ в области D необходимо:

1. Определить все стационарные точки в области D .
2. Выяснить характер экстремума стационарных точек.

3. Среди всех точек локального максимума (минимума) найти точки глобального максимума (минимума) сравнивая значения функции f в этих точках.

Метод множителей Лагранжа

Рассмотрим задачу условной оптимизации, когда множество допустимых решений определяется системой уравнений и неравенств:

$$f(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \max(\min), \quad (8.2)$$

при ограничениях

$$g_i(x) \leq 0, \quad i = \overline{1, k},$$

$$h_j(x) = 0, \quad j = \overline{1, m}.$$

Если среди всех функций f, g_i, h_j есть хотя бы одна нелинейная, то (8.2) – задача нелинейного программирования. Если все функции f, g_i, h_j дифференцируемы в R^n , то (8.2) гладкая задача нелинейного программирования.

Функция Лагранжа для задачи (8.2) имеет вид:

$$\begin{aligned} L(x_1, \dots, x_n; \lambda_1, \dots, \lambda_k; \mu_1, \dots, \mu_m) = \\ = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \mu_j h_j(x_1, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (8.3)$$

где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ – вектор множителей Лагранжа для ограничений-неравенств, а $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ – вектор множителей Лагранжа для ограничений-равенств.

Теорема (необходимое условие Куна-Таккера). Пусть задача (8.2) гладкая. Для того чтобы точка $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ была точкой локального минимума (максимума) в задаче (8.2), необходимо выполнение следующих условий:

1. условия стационарности

$$\frac{\partial L(x, \lambda, \mu)}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial L(x, \lambda, \mu)}{\partial x_n} = 0; \quad (8.4)$$

2. условия дополняющей нежесткости

$$\lambda_i g_i(x_1^*, \dots, x_n^*) = 0, \quad i = \overline{1, k}; \quad (8.5)$$

3. условия неотрицательности

$$\lambda_i \geq 0, \quad i = \overline{1, k}; \quad (8.6)$$

причем все множители Лагранжа λ_i и μ_i одновременно не могут быть равны нулю.

Метод множителей Лагранжа

1. Убедиться в существовании экстремальных точек (теорема Вейерштрасса и ее следствие).
2. Составить функцию Лагранжа (8.3).
3. Выписать необходимые условия (8.4)-(8.6).
4. Вычислить все стационарные точки (решения уравнения (8.4)).
5. Определить характер экстремума стационарных точек.

Практическая часть

8.0. На производство продукции определенного вида расходуется два вида ресурсов. Цена единицы первого ресурса составляет 100 рублей, цена единицы второго ресурса составляет 150 рублей. На закупку ресурсов выделено 500 тысяч рублей. Выпуск продукции определяется из уравнения:

$$Y = 2x_1^{0,5}x_2^{0,5}. \quad (8.7)$$

Необходимо обеспечить максимум выпуска продукции.

Замечание. Функция вида (8.7) называется производственной функцией.

Решение.

Математическая модель задачи:

$$\begin{aligned} F(X) &= 2x_1^{0,5}x_2^{0,5} \rightarrow \max, \\ \begin{cases} 0,1x_1 + 0,15x_2 \leq 600, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Составим функцию Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1^{0,5}x_2^{0,5} + \lambda(0,1x_1 + 0,15x_2 - 600).$$

Найдем условия (8.4):

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = \frac{x_2^{0,5}}{x_1^{0,5}} + 0,1\lambda = 0, \quad (8.8)$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = \frac{x_1^{0,5}}{x_2^{0,5}} + 0,15\lambda = 0. \quad (8.9)$$

Условие дополняющей нежесткости (8.5):

$$\lambda(0,1x_1 + 0,15x_2 - 600) = 0. \quad (8.10)$$

Из условий (8.8)-(8.9) получаем соотношение:

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{0,1}{0,15}, \text{ то есть } x_1 = \frac{3}{2}x_2. \quad (8.11)$$

Тогда из условия (8.10) получаем $x_2 = 2000$.

Из условия (8.11) $x_1 = 3000$.

В стационарной точке (3000, 2000) вторые производные целевой функции (8.7) отрицательные. Значит найденная точка экстремума – точка максимума.

Инструмент Поиск решения программы MS Excel

Использование инструмента Поиск решения программы MS Excel для получения оптимального решения задачи нелинейного программирования.

В документе MS Excel создадим страничку модели задачи:

	A	B	C	D	E	F
1		Переменные				
2	Имя	x1	x2			
3	Значение					
4	Целевая функция		0			
5		Ограничения		Левая часть	Знак	Правая часть
6	Коэффициенты	0,1	0,15	0 =		600
7						

Рисунок 8.1. Страница модели задачи (числовые значения)

	A	B	C	D	E	F	
1		Переменные					
2	Имя	x1	x2				
3	Значение						
4	Целевая функция		=2*КОРЕНЬ(B3*C3)				
5		Ограничения		Левая часть	Знак	Правая часть	
6	Коэффициенты	0,1	0,15	=СУММПРОИЗВ(B3:C3;B6:C6)	=	600	
7							

Рисунок 8.2. Страница модели задачи (формулы)

Встав на ячейку, сохраняющую значение целевой функции (в примере C4), вызовем инструмент Поиск решения и заполним диалоговое окно исходной информацией.

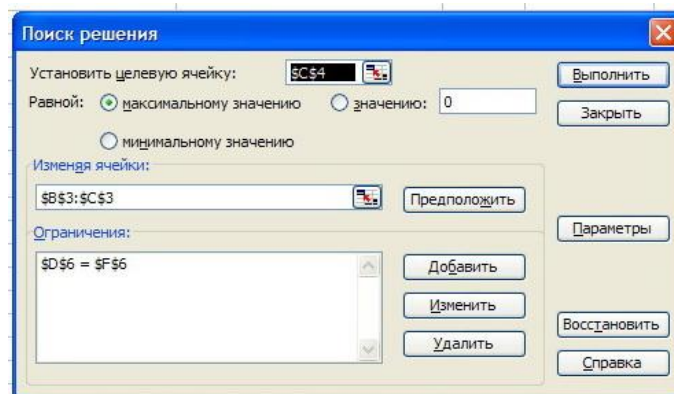


Рисунок 8.3. Диалоговое окно инструмента Поиск решения

На вкладке параметры выбираем необходимые характеристики модели.

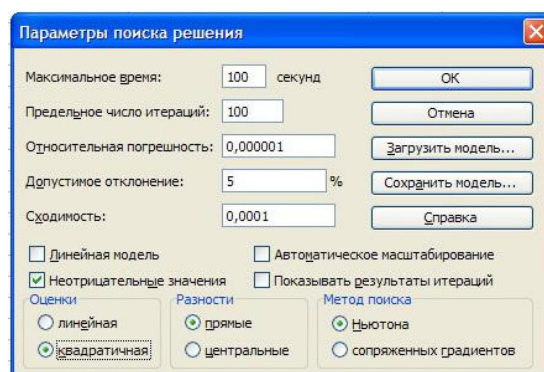


Рисунок 8.4. Вкладка параметры поиска решения

Возвращаемся к исходному окну и выбираем команду **Выполнить**.

	A	B	C	D	E	F
1		Переменные				
2	Имя	x1	x2			
3	Значение	3000	2000			
4	Целевая функция		4899			
5		Ограничения		Левая часть	Знак	Правая часть
6	Коэффициенты	0,1	0,15	600	=	600

Рисунок 8.5. Результаты поиска решения

Отчет по устойчивости содержит важный показатель – множитель Лагранжа. Множитель Лагранжа для i -го ограничения интерпретируется как мгновенная скорость изменения целевой функции при увеличении правой части i -го ограничения при условии, что остальные ограничения модели остаются неизменными. При этом в новой точке оптимума множитель Лагранжа для этого ограничения будет уже другим. То есть в отличие от задачи линейного программирования, в которой двойственные оценки, соответствующие неравенствам, сохраняют на определенных интервалах изменения правых частей неравенств постоянные значения, в задаче нелинейного программирования двойственные оценки меняются при изменении правой части.

6	Изменяемые ячейки			
7			Результ.	Нормир.
8	Ячейка	Имя	значение	градиент
9	\$B\$3	Значение x1	3000	0
10	\$C\$3	Значение x2	2000	0
11				
12	Ограничения			
13			Результ.	Лагранжа
14	Ячейка	Имя	значение	Множитель
15	\$D\$6	Коэффициенты Левая часть	600	8

Рисунок 8.6. Отчет по устойчивости

8.0*. Портфель состоит из двух акций – А и В. Ожидаемая доходность акции А составляет 25%, стандартное отклонение доходности – 20% . Ожи-

даваемая доходность акции В составляет 10%, стандартное отклонение доходности – 5% . Коэффициент корреляции доходности акции равен 0,5. Определите доли бумаг в портфеле, доходность которого не ниже 15%, а ожидаемый риск портфеля минимален.

Решение.

Пусть x_1 – доля вложений в акции А, x_2 – доля вложений в акции В. Ожидаемая доходность портфеля определяется по формуле:

$$R_{\pi} = x_1 R_A + x_2 R_B, \quad (8.12)$$

где по условию задачи $R_A = 0,25$ – ожидаемая доходность акции А, $R_B = 0,1$ – ожидаемая доходность акции В, R_{π} – ожидаемая доходность портфеля.

То есть

$$R_{\pi} = 0,25x_1 + 0,1x_2 \geq 0,15.$$

Целевым критерием в задаче формирования портфеля выступает риск, который определяется через дисперсию доходности. Дисперсия доходности характеризует разброс возможных значений доходности вокруг ожидаемого значения. Большая дисперсия говорит о высоком риске. Дисперсия доходности определяется как стандартное отклонение доходности в квадрате. Пусть σ_A – стандартное отклонение доходности акции А, σ_B – стандартное отклонение доходности акции В. Коэффициент корреляции доходностей определяет направление совместного изменения и его согласованность и обозначается r_{AB} . Если коэффициент корреляции положителен, то доходности акций отклоняются от ожидаемых значений в одном направлении (совместно возрастают или убывают), и тем более согласованно, чем ближе коэффициент корреляции к единице. Если коэффициент корреляции отрицателен, то доходности акций отклоняются от ожидаемых значений в разных направлениях (одна из доходностей возрастает другая убывает), и тем более согласованно, чем ближе коэффициент корреляции к минус единице. Коэффициент корреляции

равный нулю означает, что изменение доходностей бумаг происходит несогласованно. Дисперсия портфеля из двух бумаг определяется по формуле:

$$\sigma_{\Pi}^2 = \sigma_A^2 x_1^2 + \sigma_B^2 x_2^2 + 2r_{AB}\sigma_A\sigma_B x_1 x_2 \rightarrow \min$$

или

$$\sigma_{\Pi}^2 = 0,04x_1^2 + 0,0025x_2^2 + 0,008x_1x_2 \rightarrow \min .$$

Дополнительным ограничением выступает нормировочное условие: сумма долей акций в портфеле должна быть равна единице: $x_1 + x_2 = 1$.

Окончательно математическая модель задачи примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{\Pi}^2 &= 0,04x_1^2 + 0,0025x_2^2 + 0,008x_1x_2 \rightarrow \min , \\ &\begin{cases} 0,25x_1 + 0,1x_2 \geq 0,15, \\ x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Составляем Лагранжиан:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) &= 0,04x_1^2 + 0,0025x_2^2 + 0,008x_1x_2 + \\ &+ \lambda_1(0,25x_1 + 0,1x_2 - 0,15) + \lambda_2(x_1 + x_2 - 1). \end{aligned}$$

Найдем условия (8.4):

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_1} = 0,08x_1 + 0,008x_2 + 0,25\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \quad (8.13)$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial x_2} = 0,005x_2 + 0,008x_1 + 0,1\lambda_1 + \lambda_2 = 0. \quad (8.14)$$

Условие дополняющей нежесткости (8.5):

$$\lambda_1(0,25x_1 + 0,1x_2 - 0,15) = 0, \quad (8.15)$$

$$\lambda_2(x_1 + x_2 - 1) = 0. \quad (8.16)$$

Из условий (8.13)-(8.16) получаем $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$.

Вторые производные в этой точке положительные, значит найденная точка – точка минимума.

Задачи для самостоятельного решения

8.1. Магазин, торгующий одеждой, размещает рекламу в двух средствах массовой информации в газете и на радио. Ежемесячные расходы на рекламу составляют 40 тысяч рублей. Функция определяющая эффект от рекламы (число покупателей): $y = 20x_1^2 + 5x_2^2 + 25x_1x_2$, где x_1 количество публикаций в газете, x_2 количество объявлений по радио. Одно объявление по радио стоит 500 рублей, одна публикация в газете стоит 1 тысячу. При каком распределении месячного бюджета эффект от рекламы будет максимальным.

8.2. Портфель состоит из двух акций – А и В. Ожидаемая доходность акции А составляет 30%, стандартное отклонение доходности – 25% . Ожидаемая доходность акции В составляет 20%, стандартное отклонение доходности – 15% . Коэффициент корреляции доходности акции равен 0,4. Определите доли бумаг в портфеле, доходность которого не ниже 25%, а ожидаемый риск портфеля минимален.

8.3. Общие издержки фирмы по ремонту автомобилей в месяц составляют $C = 0,05S^2 + 50$ тысяч, где S – число автомобилей. Пусть рыночная стоимость ремонта автомобиля составляет в среднем 4 тысячи. Найти оптимальное число автомобилей, ремонт которых принесет наибольшую прибыль. Какую прибыль в этом случае получит фирма?

Вопросы

Литература: [1] стр. 115-126, [4] стр. 42-134, [5] стр. 200-211, 214-242, [11] стр. 173-175, [12] стр. 346-358.

Задачи: [5] стр. 212-213, 243-244.

1. Какая функция называется гладкой?
2. Как определяется частная производная функции нескольких переменных?
3. Как определяется дифференциал функции нескольких переменных?
4. Как с помощью производной исследовать возрастание и убывание функции?
5. Как определяются стационарные точки?
6. Дайте определение экстремума функции.
7. Сформулируйте достаточное условие экстремума.
8. Сформулируйте необходимое условие экстремума.
9. Как определяется вторая производная.
10. Сформулируйте условие Куна-Таккера.
11. Метод множителей Лагранжа.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ТЕМА 9.

МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Вопросы

1. Постановка многокритериальной задачи. Множество Парето.
2. Метод идеальной точки.
3. Метод последовательных уступок.

Теоретическая часть

Эффективность функционирования экономического процесса или системы обычно определяется с помощью нескольких показателей. При построении математической модели в таком случае получается многокритериальная задача. В многокритериальной задаче несколько целевых функций, отвечающих разным показателям эффективности. При решении однокритериальной задачи множество допустимых решений (планов) переходит в область допустимых значений критерия, для которой (если она ограничена) можно определить оптимальное значение критерия и соответствующее ему допустимое решение. В случае если критериев больше одного, оптимальное решение по одному критерию может не совпадать с оптимальным решением по другому критерию.

Для допустимых решений можно определить множество Парето. Этому множеству принадлежат допустимые решения, которые лучше по одному критерию, но хуже по другому критерию, и нет допустимого решения, в котором значения всех критериев наилучшие.

Среди методов, используемых при решении многокритериальных задач, охарактеризуем следующие:

- сведение многокритериальной задачи к однокритериальной с помощью весовых коэффициентов;
- метод последовательных уступок;
- метод идеальной точки.

Решение многокритериальной задачи путем сведения ее к однокритериальной предполагает ранжирование критериев по важности и назначении каждому критерию определенного веса. Вес может назначаться с использованием произвольной шкалы, однако впоследствии веса можно нормировать.

Пусть имеется m критериев оптимизируемых в одном направлении, ранжируем их по важности:

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max,$$

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max,$$

.....,

$$F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max.$$

Каждому критерию присваивается вес ρ_i , исходя из соотношения $\rho_i \geq \rho_{i+1}$. Нормирование весов происходит по формуле:

$$\lambda_i = \frac{\rho_i}{\sum_{k=1}^m \rho_k}, \text{ тогда } \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1.$$

Обобщенный критерий представляет собой:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1 F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda_2 F_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + \lambda_m F_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \max.$$

Система ограничений, определяющая допустимые решения остается неизменной.

Метод последовательных уступок решения многокритериальных задач также предполагает на начальном этапе ранжирование критериев по важности. А также определения по каждому критерию величины возможных уступок.

Пусть в многокритериальной задаче имеется m критериев, определяемых целевыми функциями: $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $F_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ..., $F_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$, направления оптимизации могут быть различными.

Суть метода в последовательном решении однокритериальных задач. На первом этапе решается задача с первым по важности критерием. На множестве допустимых решений находится план, для которого значение критерия будет оптимальным: $F_1(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = Z_1^*$. По этому критерию назначается уступка δ_1 , которая определяется с помощью оценок экспертов. Для следующей задачи этот критерий будет выступать в роли ограничения. В случае если первый критерий на максимум, то дополнительное ограничение принимает вид:

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq Z_1^* - \delta_1,$$

если первый критерий на минимум, то дополнительное ограничение принимает вид:

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq Z_1^* + \delta_1.$$

Все исходные ограничения задачи сохраняются неизменными. С дополнительным ограничением решается вторая однокритериальная задача со вторым по важности критерием. Аналогичным образом определяется оптимальное значение для второго критерия и по нему назначается уступка.

Общий принцип метода последовательных уступок. На k -ом шаге решается задача с $k-1$ дополнительным ограничением, в которые преобразованы критерии оптимальности после решения предыдущих задач, относительно целевой функции $F_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Находится оптимальное допустимое решение задачи: $F_k(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*) = Z_k^*$, назначается уступка δ_k . И к числу ограничений добавляется новое

$$F_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq Z_k^* - \delta_k \text{ (} k \text{-ый критерий на максимум),} \quad (9.1)$$

$$F_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq Z_k^* + \delta_k \text{ (} k \text{-ый критерий на минимум).} \quad (9.2)$$

Уступка может назначаться в процентном отношении от оптимального значения критерия. Для критерия на максимум (критерий на минимум может быть преобразован в критерий на максимум) выбирается число $0 < \lambda_k < 1$, которое будет определять долю оптимального значения критерия, которая должна быть достигнута обязательно. Тогда дополнительное ограничение будет формироваться в виде:

$$F_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq \lambda_k Z_k^* \text{ (} k \text{-ый критерий на максимум)}.$$

Основная идея *метода идеальной точки* заключается в нахождении множества решений оптимальных по Парето. Идеальной точкой считается та, для которой все критерии принимают наилучшие из допустимых значений критериев. Обычно эта точка не принадлежит множеству допустимых решений (в противном случае не компромиссное, а оптимальное по всем критериям решение существует). Во множестве решений эффективных по Парето находится точка, расстояние от которой до идеальной точки будет наименьшим. В этом случае все критерии учитываются с одинаковым весом. Если критерии неодинаковы по важности, то целевые функции умножаются на веса, прежде чем найти множество решений эффективных по Парето.

Практическая часть

9.0. Математическая модель многокритериальной задачи имеет вид:

$$F_1(x_1, x_2) = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \quad (9.3)$$

$$F_2(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max, \quad (9.4)$$

$$F_3(x_1, x_2) = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min, \quad (9.5)$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (9.6)$$

Определить решение оптимальное по всем критериям.

Решение.

Построим многоугольник допустимых решений, определяемый системой (9.6).

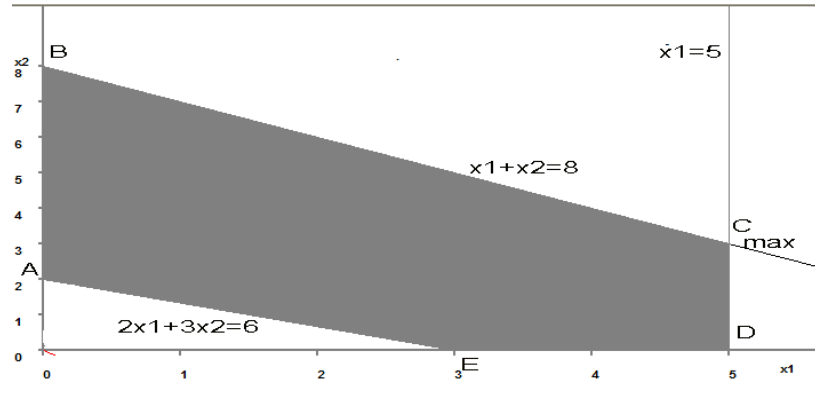


Рисунок 9.1. Многоугольник допустимых решений
для системы ограничений (9.6)

На этом многоугольнике определим точки оптимума по каждому из критериев. Если точки совпадут, то соответствующие критерии не противоречат друг другу. Однако, по первому критерию на исходном многоугольнике точка оптимума – точка C , по второму критерию точка оптимума – точка B , по третьему критерию точка оптимума – точка D . Все критерии разнонаправленные и наилучшее решение по всем критериям достигнуто быть не может.

Решим задачу методом последовательных уступок. С помощью экспертных оценок определим уступки по первому и второму критерию в размере: $\delta_1 = 4$, $\delta_2 = 3$.

На первом этапе решаем однокритериальную задачу вида:

$$F_1(x_1, x_2) = 5x_1 + 3x_2 \rightarrow \max, \quad \begin{cases} x_1 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (9.7)$$

Это задача линейного программирования, решать ее можно и симплекс методом, но для наглядности решим ее графическим методом, так как переменных всего две. Построим многоугольник допустимых решений, линию уровня, вектор-градиент и определим точку максимума.

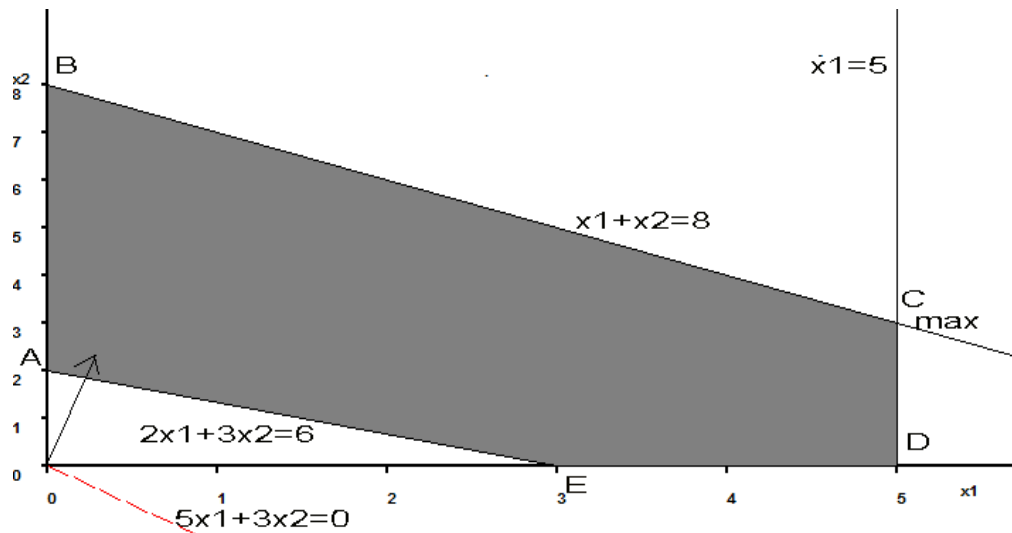


Рисунок 9.2. Графическое решение задачи (9.7)

Многоугольник допустимых решений $ABCDE$, вектор градиент с координатами $(5,3)$. Точка максимума – точка C . Найдём ее координаты из системы:

$$\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_1 + x_2 = 8. \end{cases}$$

Точка $C(5,3)$ доставляет максимальное значение первого критерия: $F_1(C) = 34$. Составляем дополнительное ограничение, используя уступку $\delta_1 = 4$. Воспользуемся формулой (9.1):

$$5x_1 + 3x_2 \geq 30.$$

На втором этапе решим однокритериальную задачу вида:

$$F_2(x_1, x_2) = -x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (9.8)$$

Построим многоугольник допустимых решений, линию уровня, вектор-градиент и определим точку максимума.

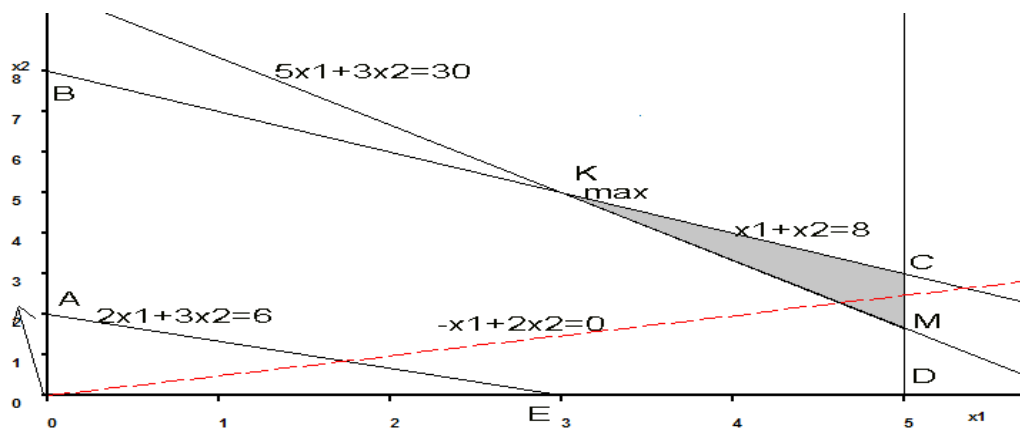


Рисунок 9.3. Графическое решение задачи (9.8)

Многоугольник допустимых решений KCM , вектор градиент с координатами $(-1, 2)$. Точка максимума – точка K . Найдём её координаты из системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8, \\ 5x_1 + 3x_2 = 30. \end{cases}$$

Точка $K(3, 5)$ доставляет максимальное значение второго критерия: $F_2(K) = 7$. Составляем дополнительное ограничение, используя уступку $\delta_2 = 3$. Воспользуемся формулой (9.1):

$$-x_1 + 2x_2 \geq 4.$$

На третьем этапе решим однокритериальную задачу вида:

$$F_3(x_1, x_2) = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow \min ,$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 5, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 5x_1 + 3x_2 \geq 30, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (9.9)$$

Построим многоугольник допустимых решений, линию уровня, вектор-градиент и определим точку минимума.

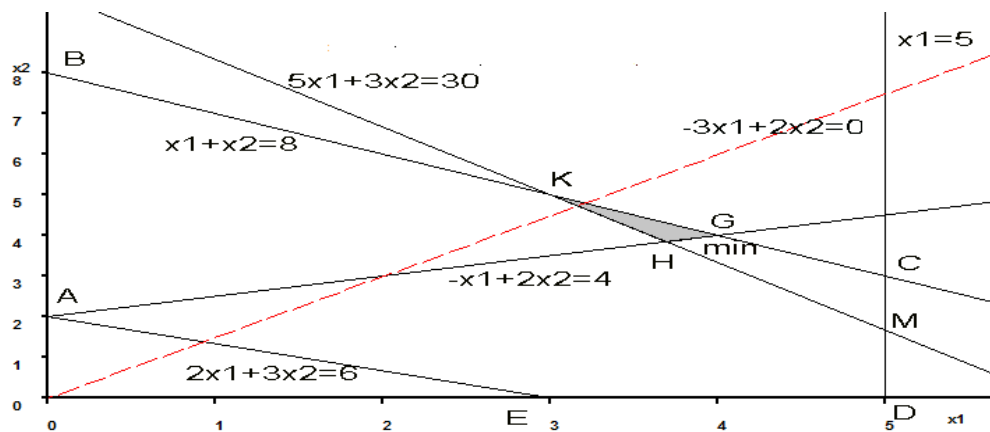


Рисунок 9.4. Графическое решение задачи (9.9)

Многоугольник допустимых решений KGH , вектор градиент с координатами $(-3, 2)$. Точка минимума — точка G . Найдём ее координаты из системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 8, \\ -x_1 + 2x_2 = 4. \end{cases}$$

Точка $G(4, 4)$ доставляет минимальное значение третьего критерия:
 $F_3(G) = -4$.

Окончательно получаем, что точка $G(4, 4)$ компромиссное решение, в этой точке значения критериев следующие: $F_1(G) = 32$, $F_2(G) = 4$, $F_3(G) = -4$.

9.0*. Математическая модель многокритериальной задачи имеет вид:

$$F_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 8 \rightarrow \max, \quad (9.10)$$

$$F_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 6 \rightarrow \min, \quad (9.11)$$

$$\begin{cases} x_1 \leq 8, \\ x_2 \leq 6, \\ x_1 + x_2 \leq 10, \\ 5x_1 - 2x_2 \geq 15, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (9.12)$$

Определить решение оптимальное по всем критериям.

Решение.

Построим многоугольник допустимых решений, определяемый системой (9.12).

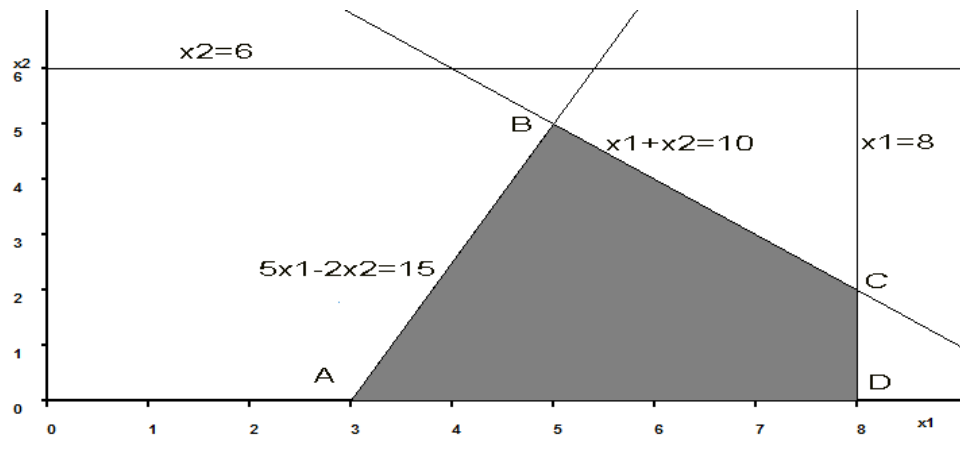


Рисунок 9.5. Многоугольник допустимых решений
системы ограничений (9.12)

На этом многоугольнике определим точки оптимума по каждому из критериев. Если точки совпадут, то соответствующие критерии не противоречат друг другу. Однако, по первому критерию на исходном многоугольнике точка оптимума – точка D , по второму критерию точка оптимума – точка

А. Критерии разнонаправленные и наилучшее решение по обоим критериям достигнуто быть не может.

Решим задачу методом идеальной точки. Критерии (9.10)-(9.11) задают движение, то есть область допустимых значений критериев будет определяться многоугольником $A'B'C'D'$. Обозначим $u = F_1(x_1, x_2)$, $v = F_2(x_1, x_2)$. Преобразования переводят: $A(3,0) \rightarrow A'(11,-3)$, $B(5,5) \rightarrow B'(8,4)$, $C(8,2) \rightarrow C'(14,4)$, $D(8,0) \rightarrow D'(16,2)$.

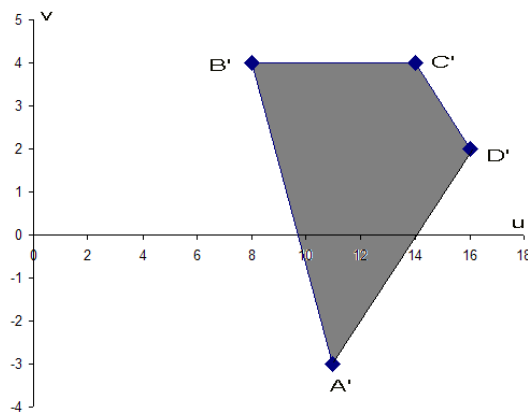


Рисунок 9.6. Многоугольник допустимых значений критериев

Множество критериев оптимальных по Парето – отрезок $A'D'$. Для точки $D'(u_{\max}, v)$, для точки $A'(u, v_{\min})$, точка $Q(u_{\max}, v_{\min})$ – идеальная точка, в которой сочетание критериев оптимальное из достижимых в точках A' и D' , однако эта точка не принадлежит многоугольнику допустимых значений критериев, а, следовательно, ей не соответствует ни одна точка многоугольника допустимых решений $ABCD$.

Найдем на отрезке $A'D'$ точку ближайшую к точке Q . Обозначим эту точку M' . Для этой точки должны выполняться два условия: $QM' \perp A'D'$ и $M' \in A'D'$.

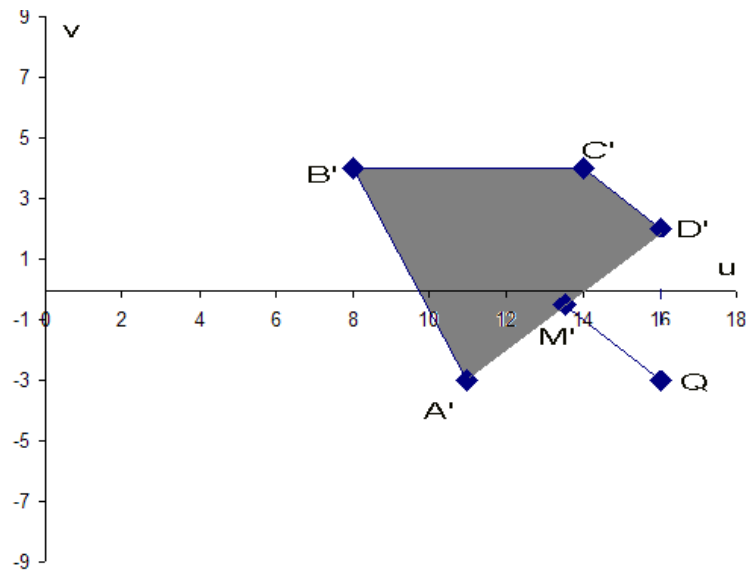


Рисунок 9.7. Точка утопии Q и идеальная точка M'

Уравнение прямой $A'D'$ имеет вид:

$$\frac{u-11}{5} = \frac{v+3}{5}, \text{ или } v = u - 14. \quad (9.13)$$

Расстояние от $Q(16, -3)$ до $M'(u, v)$ по перпендикуляру будет минимальным, то есть:

$$\sqrt{(u-16)^2 + (v+3)^2} \rightarrow \min. \quad (9.14)$$

Минимум корня достигается при минимуме подкоренного выражения. Подставим в (9.14) условие (9.13) и воспользуемся условием для нахождения экстремума:

$$\left((u-16)^2 + (u-11)^2 \right)' = 0. \quad (9.15)$$

Из (9.15) получаем, что $u = 13,5$, тогда из (9.13) $v = -0,5$. Вторая производная по переменной u от функции $f(u) = (u-16)^2 + (u-11)^2$ будет положительной, следовательно, найдена точка минимума. Точка $M'(13,5; -0,5)$ – точка с компромиссным сочетанием значений критериев, наиболее близкая к точке утопии $Q(16, -3)$. Определим на множестве допустимых решений точку $M(x, y)$, которая переходит в точку $M'(13,5; -0,5)$. Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 8 = 13,5, \\ x_1 + x_2 - 6 = -0,5. \end{cases} \quad (9.16)$$

Решением системы (9.16) является точка $M(5,5;0)$, которая и определяет компромиссное решение по методу идеальной точки.

Задачи для самостоятельного решения

9.1. Восемь альтернатив заданы оценками полезности по двум критериям $F_1 \rightarrow \max$, $F_2 \rightarrow \max$: $(8, 1)$, $(7, 7)$, $(6, 4)$, $(4, 6)$, $(10, 2)$, $(2, 3)$, $(5, 8)$, $(9, 5)$. Определите в пространстве критериев множество решений эффективных по Парето.

9.2. Восемь альтернатив заданы оценками полезности по двум критериям $F_1 \rightarrow \min$, $F_2 \rightarrow \max$: $(8, 1)$, $(7, 7)$, $(6, 4)$, $(4, 6)$, $(10, 2)$, $(2, 3)$, $(5, 8)$, $(9, 5)$. Определите в пространстве критериев множество решений эффективных по Парето.

9.3. Восемь альтернатив заданы оценками полезности по двум критериям $F_1 \rightarrow \min$, $F_2 \rightarrow \min$: $(8, 1)$, $(7, 7)$, $(6, 4)$, $(4, 4)$, $(10, 2)$, $(2, 3)$, $(5, 8)$, $(9, 5)$. Определите в пространстве критериев множество решений эффективных по Парето.

9.4. Восемь альтернатив заданы оценками полезности по двум критериям $F_1 \rightarrow \max$, $F_2 \rightarrow \min$: $(8, 1)$, $(7, 7)$, $(6, 4)$, $(4, 6)$, $(10, 3)$, $(2, 3)$, $(5, 8)$, $(9, 2)$. Определите в пространстве критериев множество решений эффективных по Парето.

9.5. Восемь альтернатив заданы оценками полезности по двум критериям $F_1 \rightarrow \max$, $F_2 \rightarrow \max$: $(-1, 8)$, $(7, 3)$, $(6, 8)$, $(4, 2)$, $(10, 2)$, $(2, 3)$, $(5, 8)$, $(9, 5)$. Определите в пространстве критериев множество решений эффективных по Парето.

9.6. Математическая модель многокритериальной задачи имеет вид:

$$F_1(x_1, x_2) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

$$F_2(x_1, x_2) = -x_1 + 4x_2 \rightarrow \max,$$

$$F_3(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 12, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Определить решение оптимальное по всем критериям методом последовательных уступок. Уступки назначить равными $\delta_1 = 6$, $\delta_2 = 1$.

9.7. Математическая модель многокритериальной задачи имеет вид:

$$F_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2 + 5 \rightarrow \max,$$

$$F_2(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 6 \rightarrow \max,$$

$$\begin{cases} x_2 \leq 5, \\ -x_1 + x_2 \leq 4, \\ 5x_1 + 3x_2 \leq 30, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Определить оптимальное решение методом идеальной точки.

Вопросы

Литература: [1] стр. 108-114, [12] стр. 359-363.

Задачи: [12] стр. 364-365.

1. Как определяется множество решений эффективных по Парето.
2. Особенности моделирования многокритериальных задач.
3. Роль экспертных оценок при решении многокритериальных задач.
4. Метод сведения многокритериальной задачи к однокритериальной.
5. Суть метода последовательных уступок.
6. Особенности преобразования целевых критериев в ограничения на допустимые решения.
7. Метод идеальной точки.
8. Почему в большинстве многокритериальных задач идеальная точка является точкой утопии?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие./ Под редакцией Федосеева В. В.-М.: ЮНИТИ, 1999. – 391с.
2. Вентцель Е. С. Исследование операций. – М.: КноРус, 2010. – 192с.
3. Шикин Е. В., Чхартишвили А. Г. Математические методы и модели в управлении. Учебное пособие. – М.: Дело, 2001. – 440с.
4. Замков О.О., Толстомятенко А.В. Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. Учебник. – М.:МГУ, “ДИС”, 2004. – 368с.
5. Исследование операций в экономике: Учебное пособие./ Под редакцией профессора Н.Ш. Кремера. – М.: ЮНИТИ, 2007. – 407с.
6. Кузнецов Ю. Н., Кузубов В. И., Волощенко А. Б. Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1980. – 300с.
7. Лабскер Л. Г., Бабешко Л. О. Теория массового обслуживания в экономической сфере. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998. – 319с.
8. Лабскер Л. Г., Бабешко Л. О. Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом. – М.: Дело, 2001. – 464с.
9. Фомин Г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. Учебник. – 2-е изд. перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2005. – 616с.
10. Моделирование экономических процессов: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям экономики и управления (060000) / Под ред. М. В. Грачевой, Л. Н. Фадеевой, Ю. Н. Черемных. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 351с.
11. Орехов Н. А., Левин А. Г., Горбунов Е. А. Математические методы и модели в экономике: Учеб. пособие для вузов / Под ред. проф. Н.А. Орехова. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. – 302 с.
12. Бережная Е. В., Бережной В. И. Математические методы моделирования экономических систем: Учеб. пособие. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 432 с.

13. Розен В. В. Математические модели принятия решений в экономике. Учебное пособие. – М.: Книжный дом «Университет», Высшая школа, 2002. – 288 с.
14. Васин А. А., Морозов В. В. Введение в теорию игр с приложениями к экономике. Учебное пособие. – М.: 2003. – 278 с.
15. Данилов Н. Н. Курс математической экономики: Учебное пособие. – М.: Высш.шк., 2006. – 407с.
16. Колемаев В. А. Математическая экономика: Учебник для вузов. – 3-е стереотип. изд. – М.: ЮНИТИ_ДАНА, 2005. – 399 с.

Пензенский государственный педагогический университет
имени В. Г. Белинского

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Часть первая

Математическое программирование

Учебное пособие

Светлана Валентиновна Рындина
доцент кафедры прикладной математики и информатики
Пензенского государственного педагогического университета
имени В. Г. Белинского

В авторской редакции
Компьютерный набор и верстка – С. В. Рындина

План ПГПУ 2010 г. (Поз. 143)

Подписано к печати 30.09.10.

Бумага писчая белая.

Усл.-печ. л. 9,5.

Тираж 200 экз.

Заказ № 143/10

Формат 60x84/16

Печать RISO

Уч.-изд. л. 10,2

Цена С. 143.



Редакционно-издательский отдел ПГПУ им. В. Г. Белинского:

440026, Пенза, ул. Лермонтова, 37, корпус 5, комната 466

Типография ПГПУ им. В. Г. Белинского

440026, Пенза, ул. Лермонтова, 37, корпус 8, комната 311