

ИНФОРМАЦИОННО-АЛГОРИТМИЧЕСКИЙ СПОСОБ ВИЗУАЛИЗАЦИИ НЕГЛАДКИХ КРИВЫХ

Предлагается способ сплайн-интерполяции кривых линий, заданных множеством опорных точек. Способ позволяет получать как гладкие кривые, так и кривые с изломами. Для получения изломов опорные точки дополняются новыми опорными точками, влияющими на направления касательных к участкам кривой. Для хранения координат опорных точек создана списковая информационная структура, приведена логика работающего с ней алгоритма.

Существует целый ряд задач визуализации, для которых требуется графическое представление математических функций, терпящих в некоторых точках разрыв первой производной. Визуализация этих функций на плоскости дает в общем случае кривые, характеризующиеся только C^0 -гладкостью, далее будем называть их негладкими кривыми. Такими кривыми являются, в частности, некоторые изолинии – изобата, изопахы, изогипсы. К ним относятся объекты цифровой топографии, например, границы земельных участков, береговая линия водоемов. Негладкие кривые представляются автоматизированной обучающей системой при изучении некоторых наук. Это, в частности, результаты деформаций в топологии, объекты геометрии на криволинейных поверхностях, например, на сфере, а также графические фигуры (их фрагменты), полученные проецированием суперквадриков на плоскость. Кроме того, негладкие кривые являются основой для представления сечений неаналитических поверхностей, например, поверхности земли.

Во многих случаях исходной информацией для построения негладких кривых является набор их характерных (опорных) точек, тогда построение кривых идет с применением интерполяционных методов. Применяются различные виды интерполяции, простейшим из которых является кусочно-линейная интерполяция. Другой вариант основан на применении непрерывных кусочно-гладких кривых, состоящих из нескольких состыкованных участков. В первом случае низка точность приближения ломаной к желаемой форме, особенно при больших расстояниях между опорными точками. Во втором случае необходимо описывать и строить участки кривой порознь, по отдельности заданным для каждого участка опорным точкам, что усложняет алгоритм интерполяции.

Для построения негладких кривых можно применить и сплайн-интерполяцию, но не традиционную, а модифицированную. Традиционная интерполяция распространенными в компьютерной графике сплайнами Безье (Bezier), Кэтмулла-Рома (Catmull-Rom), В-сплайнами, бета-сплайнами, как известно, дает гладкую кривую [1.]. Одно из нетрадиционных решений – интерполяция сплайнами Кочанек-Бартельса (Kochanek-Bartels) [2]. В математическое описание этих сплайнов введены три количественных

параметра: натяжение (tension), непрерывность (continuity) и смещение (bias). Их изменение позволяет менять направления и длины касательных в опорных точках кривой, управляя тем самым ее формой. Сплайны Кочанек-Бартельса создавались авторами для целей анимации изображений. Плавное изменение управляющих параметров от кадра к кадру позволяло получить желаемую динамику кривых во времени. Для визуализации результатов вычислений настройка каждого отсека составной кривой с помощью трех параметров, которые к тому же влияют на форму кривой комплексно, является слишком затратной.

Можно предложить информационно-алгоритмический способ получения негладких кривых. Его суть в добавлении к множеству исходных опорных точек дополнительных опорных точек. Эти дополнительные точки задают направления и длины касательных в тех исходных точках, где требуется задать изломы кривой. При формировании составной кривой вычислительный алгоритм должен выбирать из множества исходных и дополнительных точек те точки, которые требуются для получения гладкого или негладкого сопряжения соседних отсеков. При этом форма математического описания отсеков не претерпевает никаких изменений.

Для реализации предлагаемого способа наиболее подходят разновидности сплайнов, в которых касательные к отсекам задаются положением опорных точек. С целью обеспечения высокой производительности и точности интерполяции из них следует выбрать сплайны, имеющие простое описание и обеспечивающие точное прохождение кривой через опорные точки. Этим требованиям удовлетворяют сплайны Безье и сплайны Кэтмулла-Рома, причем последние имеют предпочтение. Дело в том, что отсеки составной кривой могут стыковаться и гладко, и не гладко. Сплайны Безье требуют определения дополнительных опорных точек в обоих этих случаях, а сплайны Кэтмулла-Рома – только в случаях негладкого сопряжения.

Математическое описание элементарного отсека Кэтмулла-Рома на четырех опорных точках $P_i(x_i, y_i)$, где $i=0, \dots, 3$ – номер точки, имеет вид [1]

$$x = \frac{1}{2}(-t(1-t)^2x_0 + (2-5t^2+3t^3)x_1 + t(1+4t-3t^2)x_2 - t^2(1-t)x_3),$$

$$y = \frac{1}{2}(-t(1-t)^2y_0 + (2-5t^2+3t^3)y_1 + t(1+4t-3t^2)y_2 - t^2(1-t)y_3),$$

где t – параметр.

При изменении параметра t в диапазоне от 0 до 1 формируется криволинейный отсек сплайна, соединяющий точку P_1 с точкой P_2 . Изгибы отсека в его концевых точках определяются направлениями и длинами векторов касательных, проведенных через эти точки, а касательные параллельны хордам, соединяющим предыдущую и последующую (по отношению к каждой концевой точке) опорные точки. При отсутствии изломов для P_1 это хорда P_0P_2 , а для P_2 – хорда P_1P_3 . Для получения излома в некоторой точке P_j нужно ввести в общем случае

две дополнительные опорные точки P_j^e, P_j^b , так как P_j является концом (*end*) предыдущего и началом (*begin*) следующего отсека кривой. Меняя положение дополнительных точек P_j^e, P_j^b , можно изменять направление каждой хорды, проходящей через P_j , и задавать желаемый вид излома кривой в выбранной опорной точке отсека. Например, для получения излома в т. P_2 элементарного отсека нужно строить его на опорных точках P_0, P_1, P_2, P_2^e .

Координаты исходных и дополнительных опорных точек заносятся в список. Каждый элемент списка представляет собой набор из трех точек. Точки без верхнего индекса являются точками, по которым строилась бы гладкая кривая Кэтмулла-Рома. Точки с верхним индексом b – это дополнительные опорные точки, позволяющие получать изломы кривой в начальных точках отсеков составной кривой, точки с верхним индексом e позволяют получать изломы кривой в конечных точках отсеков. Координаты дополнительных точек должны определяться из ожидаемого результата. Если излома кривой в данной точке не предполагается, содержимое дополнительных элементов списка получает соответствующее значение в зависимости от выбранного типа данных списка.

Для построения первого отсека гладкой составной кривой нужно из общего списка точек взять следующие: P_0, P_1, P_2, P_3 , для построения второго отсека – взять P_1, P_2, P_3, P_4 и т.д. В этом случае два первых отсека составной кривой будут гладко сопрягаться в точке P_2 . Если есть необходимость получить излом, например в т. P_3 (это место сопряжения второго и третьего отсеков), то необходимо, чтобы для этой точки были определены дополнительные P_3^b, P_3^e . Таким образом, для построения второго и третьего отсеков составной кривой будут использоваться наборы точек P_1, P_2, P_3, P_3^e и P_3^b, P_3, P_4, P_5 соответственно.

На рисунке 1 для примера показан вид кривой, состоящей из трех отсеков Кэтмулла-Рома. Ее форму задают шесть опорных точек $P_0, \dots, P_5$. В т. P_2 первый и второй отсеки сопрягаются гладко, а в т. P_3 направления касательных ко второму и третьему отсекам изменены, благодаря чему образуется излом. Касательные ко второму и третьему отсекам в т. P_3 параллельны хордам $P_2P_3^e, P_3^bP_4$.

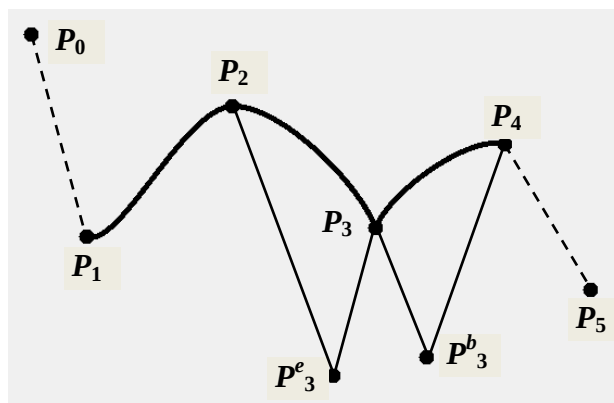


Рисунок 1. Негладкая кривая из трех отсеков

Точки P_0 и P_5 – начальная и конечная опорные точки кривой, что отмечено штриховыми линиями.

Список опорных точек для кривой изображен на рисунке 2.

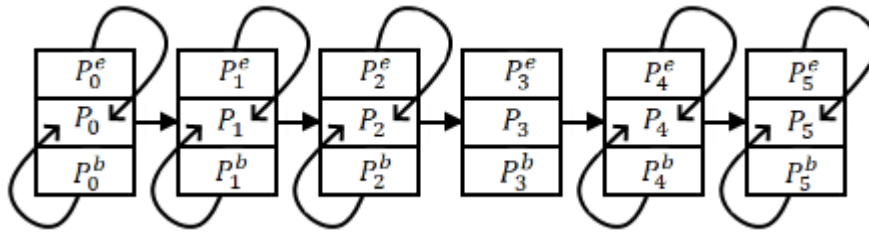


Рисунок 2. Списковая структура данных для описания негладкой кривой

Каждый элемент списка представляет собой набор из трех точек P_i , P_i^e и P_i^b . В точках, где излом необходим, в элементе списка с соответствующим номером содержатся координаты дополнительных точек P_i^e , P_i^b , отличные от координат опорной точки, через которую будет проходить кривая. В точках, где излом не нужен, P_i^e и P_i^b определены как ссылки на опорную точку P_i . Такая организация ссылок на точки в одном элементе списка дает возможность унифицировать обход списка (выбор четверок точек) для любого сегмента кривой. В таблице показано соответствие опорных точек, выбранных для построения трех отсеков кривой, обозначениям точек элементарного отсека Кэтмулла-Рома.

Номера отсеков	Точки отсека сплайна			
	P_0	P_1	P_2	P_3
1	P_0	P_1	P_2	P_3
2	P_1	P_2	P_3	P_3^e
3	P_3^b	P_3	P_4	P_5

Исходный код, написанный на языке программирования C# и предназначенный для формирования наборов точек (четверок точек), которые необходимы для построения отсеков негладкой составной кривой с заданными изломами, представлен ниже.

```

Point2d p0, p1, p2, p3;
for (int i = 0; i < cPoints.Count - 3; i++)
{
    p0 = cPoints[i+1].location == cPoints[i+1].locationBegin ?
cPoints[i].location : cPoints[i+1].locationBegin;
    p1 = cPoints[i+1].location;
    p2 = cPoints[i+2].location;
    p3 = cPoints[i+2].location == cPoints[i+2].locationEnd ?
cPoints[i+3].location : cPoints[i+2].locationEnd;
}

```

```

        DrawCatmullRomSegment(p0, p1, p2, p3);
    }

```

В коде определены следующие переменные:

`cPoints` – список точек, где каждый элемент списка представляет собой набор из координат трех точек P_i , P_i^e и P_i^b ;

`i` – номер отсека составной кривой;

`p0`, `p1`, `p2`, `p3` – набор отобранных точек, по которым будет строиться отсек кривой;

`location`, `locationEnd`, `locationBegin` – экземпляры классов `Point2d`, описывающие координаты точек, через которые проходит кривая (`location`), дополнительных точек, которые будут влиять на конец предыдущего отсека (`locationEnd`), и дополнительных точек, которые будут влиять на начало следующего отсека (`locationBegin`);

`DrawCatmullRomSegment` – метод, предназначенный для расчета и визуализации точек отсека. Вычисления координат промежуточных точек отсека выполняется по приведенным ранее математическим выражениям. Для повышения производительности алгоритма метод реализуется с применением правых конечных разностей [3].

Переменным `p1` и `p2` присваиваются координаты опорных точек, через которые будет проходить составная кривая. Особый интерес вызывают условия при выборе значений для переменных `p0` и `p3`. Именно значения этих переменных будут задавать или не задавать излом кривой. При выборе значения для переменной `p0` из элемента списка с индексом `i` сначала рассматривается следующий элемент списка (`i+1`), по которому путем сравнения точек (`cPoints[i+1].location == cPoints[i+1].locationBegin`) определяется наличие дополнительной точки, вносящей излом. Если координаты совпадают, то переменной `p0` присваивается значение `cPoints[i].location`. Это говорит о том, что в точке с индексом `i+1` будет гладкое сопряжение сегментов, иначе будет присвоено значение точки `cPoints[i+1].locationBegin`, вносящей излом. Аналогичным образом действия производятся с точкой `p3`. Если на конце сегмента не предусмотрен излом (это проверяется сравнением точек в предыдущем элементе списка `cPoints[i+2].location == cPoints[i+2].locationEnd`), то переменной `p3` присваивается значение `cPoints[i+3].location`, иначе `cPoints[i+2].locationEnd`.

Алгоритм гарантирует, что составная кривая будет проходить через все опорные точки, за исключением первой и последней, как это следует из свойств кривой Кэтмулла-Рома. Подтверждением является кривая на рисунке 1, полученная при программной реализации предлагаемого способа. Применение описанного способа позволяет получать негладкие кривые любой желаемой формы.

Литература

1. Шикин, Е.В., Плис, Л.И. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей.– М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1996. – 223 с.
2. Kochanek, D., Bartels, R. Interpolating splines with local tension, continuity and bias control // SIGGRAPH '84 Proceedings of the 11th annual conference on Computer graphics and interactive techniques. – ACM. – P. 33–41.
3. Косников, Ю.Н. Интерполяционные модели криволинейных геометрических объектов в приложениях научной визуализации // Сборник статей по материалам XXXIII Международной научно-технической конференции «Проблемы автоматизации и управления в технических системах - 2019» (22 – 23 мая 2019, Пенза, ПГУ) / Под ред. М.А.Щербакова. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2019. – С.150 – 156.