

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)

---

А. Я. Султанов, Г. А. Султанова,  
О. А. Монахова

## Избранные вопросы математики

Учебное пособие

Пенза  
Издательство ПГУ  
2023

УДК 51  
С89

Р е ц е н з е н т ы :

доктор технических наук,  
профессор кафедры «Математика и математическое  
моделирование» Пензенского государственного  
университета архитектуры и строительства

*И. А. Гарькина;*

директор гимназии № 53 (г. Пенза)

*Р. В. Наумова*

**Султанов, Адгам Яхиевич.**

С89      Избранные вопросы математики : учеб. пособие /  
А. Я. Султанов, Г. А. Султанова, О. А. Монахова. – Пенза :  
Изд-во ПГУ, 2023. – 182 с.

ISBN 978-5-907752-71-9

Приведены основные понятия теории рекуррентных последовательностей, свойства и приложения оператора конечной разности с постоянным шагом к суммированию функций. Описаны методы суммирования некоторых элементарных функций, приведены примеры суммирования. Изложены основные понятия теории графов. Приведены задачи для практических занятий и задания для самостоятельной работы студентов.

Издание подготовлено на кафедре «Математическое образование» ПГУ и предназначено для обучающихся по направлению подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование», а также может быть полезно обучающимся математических специальностей.

УДК 51

ISBN 978-5-907752-71-9

© Пензенский государственный  
университет, 2023

# СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                                                       |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Введение .....                                                                                                                        | 5   |
| Г л а в а 1. РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ .....                                                                                    | 6   |
| § 1.1. Понятие рекуррентной последовательности .....                                                                                  | 6   |
| § 1.2. Решение однородных рекуррентных уравнений .....                                                                                | 19  |
| § 1.3. Решение линейных однородных рекуррентных<br>уравнений в случае различных простых корней<br>характеристического уравнения ..... | 22  |
| § 1.4. Дифференциальные операторы<br>специального типа в алгебре многочленов .....                                                    | 26  |
| § 1.5. Решение линейных однородных рекуррентных<br>уравнений в случае различных кратных корней<br>характеристического уравнения ..... | 30  |
| § 1.6. Решение неоднородных рекуррентных<br>уравнений .....                                                                           | 34  |
| § 1.7. Рекуррентные уравнения над полем<br>действительных чисел .....                                                                 | 41  |
| § 1.8. Производящие функции рекуррентных<br>последовательностей .....                                                                 | 46  |
| § 1.9. Многочлены, определяемые рекуррентными<br>соотношениями .....                                                                  | 53  |
| Г л а в а 2. ОПЕРАТОР КОНЕЧНОЙ РАЗНОСТИ .....                                                                                         | 58  |
| § 2.1. Конечные разности .....                                                                                                        | 58  |
| § 2.2. Обобщенные степени .....                                                                                                       | 67  |
| § 2.3. Формула Ньютона .....                                                                                                          | 73  |
| § 2.4. Числа Бернулли .....                                                                                                           | 75  |
| § 2.5. Многочлены Бернулли .....                                                                                                      | 79  |
| § 2.6. Задача о суммировании и задача<br>нахождения суммирующей функции .....                                                         | 84  |
| § 2.7. Тождество Абеля .....                                                                                                          | 88  |
| § 2.8. О решениях уравнения $\Delta F(x) = f(x)$ .....                                                                                | 90  |
| § 2.9. Суммирование прогрессий .....                                                                                                  | 94  |
| § 2.10. Суммы степеней натуральных чисел .....                                                                                        | 98  |
| § 2.11. Вычисление суммы степеней<br>членов арифметической прогрессии .....                                                           | 104 |
| § 2.12. Суммы произведений членов<br>арифметической прогрессии .....                                                                  | 110 |
| § 2.13. Суммы произведений чисел,<br>обратных членам арифметической прогрессии .....                                                  | 112 |

|                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 2.14. Суммирование тригонометрических функций.....                    | 114 |
| § 2.15. Суммирование гиперболических функций.....                       | 118 |
| § 2.16. О суммах значений функций.....                                  | 121 |
| § 2.17. Задача о кратной сумме .....                                    | 123 |
| Г л а в а 3. ТЕОРИЯ ГРАФОВ .....                                        | 127 |
| § 3.1. Основные понятия теории графов .....                             | 127 |
| § 3.2. Пути, маршруты, циклы в графе.<br>Связные и несвязные графы..... | 131 |
| § 3.3. Степени вершин графа и их свойства .....                         | 134 |
| § 3.4. Гомоморфизм и изоморфизм графов.....                             | 136 |
| § 3.5. Полные графы. Дополнение графа .....                             | 144 |
| § 3.6. Эйлеровы и гамильтоновы графы.....                               | 146 |
| § 3.7. Планарность графов.....                                          | 149 |
| § 3.8. Раскраска графа.....                                             | 154 |
| Список литературы.....                                                  | 181 |

## ВВЕДЕНИЕ

---

Первая глава настоящего учебного пособия посвящена рекуррентным последовательностям. Они имеют важное значение в математике и ее приложениях. Многие задачи, связанные с рекуррентными последовательностями, возникли давно.

Настоящее учебное пособие имеет целью описать основные методы решения рекуррентных уравнений с постоянными коэффициентами над различными полями.

Во второй главе изложены свойства и приложения оператора конечной разности с постоянным шагом к суммированию функций.

Дано определение оператора конечной разности первого порядка в алгебре вещественных функций одного аргумента, затем определяются по индукции операторы конечной разности произвольного порядка. Доказаны основные свойства этих операторов. Построен интерполяционный многочлен Ньютона. Этот многочлен имеет важные приложения в теории приближения функций в вопросах суммирования. Введены понятия чисел и многочленов Бернулли, описаны их свойства.

Решается задача о суммировании функций. Указаны методы суммирования некоторых функций.

Описаны методы суммирования некоторых элементарных функций и приведены примеры суммирования. Рассмотрены вопросы о кратных суммах.

В третьей главе пособия излагаются основные понятия теории графов. Рассматриваются важнейшие классы графов: деревья, двудольные графы, планарные графы.

Учебное пособие содержит задачи для практических занятий и задания для самостоятельной работы студентов.

# Глава 1

## РЕКУРРЕНТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

---

### § 1.1. Понятие рекуррентной последовательности

Последовательностью элементов заданного множества  $A$  называют закон, по которому каждому натуральному числу  $n$  сопоставляется элемент  $a_n$  множества  $A$ . Например, на множестве  $N$  натуральных чисел последовательность квадратов натуральных чисел задается простым правилом, каждому  $n$  сопоставляется  $n^2$ . Под натуральными числами мы будем понимать числа  $0, 1, 2, 3, \dots$

Другой способ задания последовательности – с помощью указания связи между некоторыми членами последовательности. Так можно задать, например, арифметическую и геометрическую прогрессию: разность для арифметической прогрессии (отношение – для геометрической) между любыми двумя соседними членами последовательности  $a_{n+1}$  и  $a_n$  есть величина постоянная, равная  $d$  – разности арифметической прогрессии ( $q$  – знаменателю геометрической прогрессии). В таком способе задания могут участвовать и более двух членов последовательности, таким образом, один из членов последовательности можно считать определенным с помощью других членов этой последовательности – это так называемый рекуррентный способ задания. В случае арифметической прогрессии имеем следующее соотношение для ее членов:  $a_{n+1} - a_n = d$  (в случае геометрической прогрессии  $a_{n+1} - qa_n = 0$ ).

Для членов последовательности  $(a_n) = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$ , где  $a_n = n^2$ , можно составить следующее соотношение:  $a_{n+1} = (n+1)^2$ . Отсюда следует, что  $a_{n+1} - a_n = 2n + 1$  для любого натурального числа  $n$ . Увеличив в последнем равенстве  $n$  на 1, получим  $a_{n+2} - a_{n+1} = 2n + 3$ . Тогда из двух последних равенств следует  $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2$ . Повторив эти рассуждения, мы придем еще к одному соотношению  $a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 0$ , у которого правая часть равна нулю. Таким образом, последовательность квадратов натуральных чисел удовлетворяет следующим соотношениям:

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 1,$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2,$$

$$a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 0.$$

Таких соотношений, которым удовлетворяют члены рассматриваемой последовательности, бесконечное множество. Приведенные соотношения для  $(a_n) = (n^2)$  примечательны тем, что в первом из них указана связь между  $a_n$  и  $a_{n+1}$ , причем справа имеем функцию  $f(n) = 2n + 1$ , во втором – соотношение между  $a_n$ ,  $a_{n+1}$  и  $a_{n+2}$ , с правой частью  $\varphi(n) = 2 = \text{const}$ , а в третьем соотношении правая часть равна нулю, и это соотношение – первое, с нулевой правой частью. Полученные соотношения называются рекуррентными.

Введем в общем виде понятие рекуррентной последовательности и рекуррентного соотношения. При этом будем предполагать, что последовательности рассматриваются над некоторым полем  $P$ .

**Определение 1.1.1.** Последовательность  $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$  ( $a_i \in P$ ) называется **рекуррентной** (возвратной) последовательностью порядка  $k$ , если ее члены при каждом  $n \in N$  удовлетворяют равенству (рекуррентному соотношению)

$$a_{n+k} + p_{k-1}a_{n+k-1} + p_{k-2}a_{n+k-2} + \dots + p_0a_n = f(n), \quad (1.1.1)$$

где  $k$  – фиксированное натуральное число, называемое **порядком рекуррентности**;  $p_i$  – фиксированные элементы поля  $P$ , называемые коэффициентами рекуррентного соотношения;  $f(n)$  – некоторая функция натурального аргумента, принимающая значения в  $P$ . При  $f = 0$  последовательность называется однородной, в противном случае – неоднородной.

Соотношение (1.1.1) может иметь место для различных последовательностей. Например, третьему из приведенных выше соотношений удовлетворяют члены последовательности с общим членом  $b_n = 2n^2 + 3n + 1$ , поэтому мы введем понятия рекуррентного уравнения и решений рекуррентного уравнения.

Пусть  $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$  – переменные, принимающие значение из поля  $P$ .

**Определение 1.1.2.** Система равенств при фиксированном натуральном  $k \in N$  и произвольных  $n \in N$ :

$$x_{n+k} + p_{k-1}x_{n+k-1} + p_{k-2}x_{n+k-2} + \dots + p_0x_n = f(n), \quad (1.1.2)$$

где  $p_{k-1}, p_{k-2}, \dots, p_1, p_0$  – фиксированные элементы поля  $P$ ;  $f(n)$  – фиксированная функция натурального аргумента, называется рекуррентным уравнением.

*Замечание.* В уравнении (1.1.2) коэффициент при  $x_{n+k}$ , называемый старшим коэффициентом, равен 1. Вообще говоря, коэффициент при  $x_{n+k}$  может быть любым, отличным от нуля элементом  $p_k$  поля  $P$ . Умножив обе части такого уравнения на  $p_n^{-1}$ , получим равносильное ему уравнение (1.1.2). Уравнение (1.1.2) называется нормированным, иначе – приведенным рекуррентным однородным уравнением.

Натуральное число  $k$  в равенствах называется порядком рекуррентности уравнения.

Пусть  $(a_n) = (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots)$ , где  $a_k \in P$ , – произвольная последовательность. В равенствах вместо переменных подставим члены этой последовательности с соответствующими номерами. Тогда получим систему

$$a_{n+k} + p_{k-1}a_{n+k-1} + p_{k-2}a_{n+k-2} + \dots + p_0a_n = f(n).$$

Если при каждом  $n = 0, 1, 2, \dots$  равенства истинны, то последовательность  $(a_n)$  называется решением рекуррентного уравнения.

**Определение 1.1.3.** Общим решением линейного рекуррентного уравнения называется последовательность  $(a_n)$ , общий член которой зависит от  $k$  произвольных постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , причем выполняются условия:

1) для каждого набора значений этих постоянных  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_k^0$  последовательность  $(a_n(C_1^0, C_2^0, \dots, C_k^0))$  является решением рекуррентного уравнения (1.1.2);

2) для каждого решения  $(b_n)$  существуют значения постоянных  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_k^0$  такие, что  $b_n = a_n(C_1^0, C_2^0, \dots, C_k^0)$ .

Решения, отличные от общего решения, называются частными решениями.

Основной задачей теории рекуррентных уравнений является задача отыскания всех его решений.

Если в уравнении (1.1.2) правая часть равна нулю, то уравнение называется однородным, в противном случае – неоднородным.

#### Определение 1.1.4. Многочлен

$$\varphi(x) = x^k + p_{k-1}x^{k-1} + \dots + p_1x + p_0 \in P[x],$$

где  $p_{k-1}, p_{k-2}, \dots, p_1, p_0$  – элементы поля  $P$ , входящие в (1.1.2), называется характеристическим многочленом рекуррентного уравнения (1.1.2). Многочлен  $\varphi^*(x) = 1 + p_{k-1}x + p_{k-2}x^2 + \dots + p_0x^k$  называется двойственным характеристическим многочленом.

Заметим, что  $\varphi(x)$  и  $\varphi^*(x)$  связаны между собой соотношением  $\varphi^*(x) = x^k \varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ .

### Упражнения

1. Установите, однородны или неоднородны арифметическая и геометрическая прогрессии. Каковы их порядки?

2. Задача Фибоначчи.

Фибоначчи – итальянский средневековый математик, предложивший задачу, в которой нужно определить число пар зрелых кроликов, образовавшихся от одной пары в течение года, если известно, что каждая зрелая пара кроликов ежемесячно рождает новую пару, причем новорожденные достигают полной зрелости в течение месяца. Найдите соотношение, которому удовлетворяют члены последовательности Фибоначчи.

3. Определите порядок рекуррентности данных соотношений:

а)  $u_n + C_1u_{n-1} + C_2u_{n-2} + \dots + C_ku_{n-k} = f(n);$

б)  $u_{n+3} + 2u_{n+2} + u_{n+1} = 1;$

в)  $u_{n+3} + 2u_{n+2} + u_n = 0.$

4. Найдите однородное рекуррентное соотношение второго порядка, задающее арифметическую прогрессию.

Р е ш е н и е.

Рассмотрим арифметическую прогрессию  $(a_n)$ , члены которой удовлетворяют соотношению

$$a_n = a_{n-1} + d,$$

при подстановке  $n + 1$  вместо  $n$  получим

$$a_{n+1} = a_n + d.$$

Вычтем из получившегося соотношения исходное

$$a_{n+1} - a_n = a_n + a_{n-1}.$$

Отсюда получим

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}.$$

Таким образом, мы получили рекуррентное соотношение второго порядка, которому удовлетворяют члены арифметической прогрессии.

**5.** Составьте рекуррентное соотношение, определяющее последовательность кубов натуральных чисел.

**6.** Покажите, что следующие последовательности являются линейными однородными рекуррентными последовательностями с постоянными коэффициентами:

$$\mathbf{6.1.} \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 2, \quad a_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 2 \end{vmatrix}, \quad (n \geq 2).$$

$$\mathbf{6.2.} \quad a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 3 \end{vmatrix}, \quad (n \geq 2).$$

$$\mathbf{6.3.} \quad a_n = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & m+1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n+1 \end{vmatrix}, \quad (n \geq 1),$$

где  $m$  — фиксированное число.

$$6.4. \ a_n = \begin{vmatrix} \alpha(n) & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \alpha(n) & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & \alpha(n) \end{vmatrix}, \ (n \geq 1),$$

где  $\alpha(n)$  – многочлен, а определитель имеет фиксированный порядок.

$$6.5. \ a_n = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c & a \end{vmatrix}, \ a, b, c \in R.$$

$$6.6. \ a_0 = 1, \ a_n = \begin{vmatrix} 0 & a & 0 & \dots & 0 \\ -a & 0 & a & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -a & 0 \end{vmatrix}, \ (n \geq 1),$$

где определитель имеет порядок  $2n$ .

$$6.7. \ a_n = \cos \frac{\pi n}{4}.$$

$$6.8. \ a_n = \sin \frac{\pi n}{4}.$$

$$6.9. \ a_n = \cos \frac{\pi n}{3}.$$

$$6.10. \ a_n = \sin \frac{\pi n}{3}.$$

$$6.11. \ a_n = n \cos \frac{\pi n}{3}.$$

$$6.12. \quad a_n = n \sin \frac{\pi n}{2}.$$

$$6.13. \quad a_n = \cos \frac{\pi n}{3} + \sin \frac{\pi n}{2}.$$

$$6.14. \quad a_n = n^2 2^n.$$

$$6.15. \quad a_n = S_n, \text{ где } S_n = 1 + 2 + \dots + n.$$

$$6.16. \quad a_n = S_n, \text{ где } S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

7. Покажите, что следующие последовательности  $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  удовлетворяют указанным рекуррентным уравнениям, используя прием, описанный в начале этого параграфа, а также в задаче 4:

$$\text{а) } a_n = 1, \quad x_{n+1} - x_n = 0;$$

$$\text{б) } a_n = n, \quad x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0;$$

$$\text{в) } a_n = n^2, \quad x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 0;$$

$$\text{г) } a_n = n^3, \quad x_{n+4} - 4x_{n+3} + 6x_{n+2} - 4x_{n+1} + x_n = 0.$$

В задаче 7 коэффициенты в рекуррентных уравнениях совпадают с точностью до знака, с биномиальными коэффициентами.

**Р е ш е н и е.**

*Первый способ.* Решим задачу для случая (в). Найдем  $a_{n+1}$  и разность  $a_{n+1} - a_n$ :

$$a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1,$$

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 1.$$

В полученном тождестве увеличим  $n$  на 1:

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2n + 3.$$

Вычтем из левой части полученного тождества левую часть предыдущего тождества, а из правой части второго тождества — правую часть первого тождества:

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2.$$

Увеличим в этом тождестве переменную  $n$  на 1 и вычтем из полученного тождества последнее тождество:

$$a_{n+3} - 2a_{n+2} + a_{n+1} = 2,$$

$$a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n = 0.$$

Полученное тождество означает, что последовательность  $a$  с общим членом  $a_n = n^2$  является решением уравнения

$$x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 0.$$

*Второй способ.* Считая, что задача для случая (б) решена, т.е.  $a_n = n$ , соотношение  $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$  является тождеством, решим задачу (в). Положим,  $b_n = n^2$ , тогда  $b_n = na_n$ . Вычислим левую часть соответствующего рекуррентного уравнения, подставив в нее члены последовательности  $(b_n)$ :

$$\begin{aligned} b_{n+3} - 3b_{n+2} + 3b_{n+1} - b_n &= (n+3)a_{n+3} - 3(n+2)a_{n+2} + 3(n+1)a_{n+1} + na_n = \\ &= n(a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n) + 3(a_{n+3} - 2a_{n+2} + a_n). \end{aligned}$$

Так как выполняется тождество  $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0$ , то увеличив  $n$  на 1, также получим тождество  $a_{n+3} - 2a_{n+2} + a_n = 0$ . Далее, учитывая условие  $a_n = n$ , получим

$$\begin{aligned} a_{n+3} - 3a_{n+2} + 3a_{n+1} - a_n &= (n+3) - 3(n+2) + 3(n+1) - n = \\ &= n(1 - 3 + 3 - 1) + (3 - 6 + 3) = 0 \end{aligned}$$

для каждого значения переменной  $n$  из  $N$ . Таким образом, получили тождество

$$b_{n+3} - 3b_{n+2} + 3b_{n+1} - b_n = 0,$$

означающее, что  $b = (b_n)$  является решением уравнения (в) задачи 7.

**8.** Пусть последовательность  $a = (a_n)$ , где  $a_n = n^s$  является решением линейного однородного уравнения

$$\binom{k}{0}x_{n+k} + (-1)^1\binom{k}{1}x_{n+k-1} + \dots + (-1)^m\binom{k}{m}x_{n+k-m} + \dots + (-1)^k\binom{k}{k}x_n = 0,$$

где  $\binom{k}{m} = \frac{k!}{m!(k-m)!}$  — биномиальные коэффициенты. В силу этого

доказанное уравнение будем называть биномиальным уравнением

порядка  $k$ . Докажите, что последовательность  $a = (a_n)$  является решением биномиального уравнения порядка  $k + 1$ , т.е. соотношение

$$\binom{k+1}{0} a_{n+k+1} + (-1)^1 \binom{k+1}{1} a_{n+k} + \dots + (-1)^m \binom{k+1}{m} a_{n+k+1-m} + \dots \\ \dots + (-1)^k \binom{k+1}{k+1} a_n = 0$$

является тождеством относительно переменной  $n$ .

**Р е ш е н и е.**

Увеличим  $n$  на 1 в тождестве

$$\binom{k}{0} a_{n+k} + (-1)^1 \binom{k}{1} a_{n+k-1} + \dots + (-1)^m \binom{k}{m} a_{n+k-m} + \dots + (-1)^k \binom{k}{k} a_n = 0, \quad (1.1.3)$$

$$\binom{k}{0} a_{n+k} + (-1)^1 \binom{k}{1} a_{n+k} + \dots + (-1)^m \binom{k}{m} a_{n+k-m+1} + \dots + (-1)^k \binom{k}{k} a_n = 0. \quad (1.1.4)$$

Умножим (1.1.3) на  $(-1)$  и сложим с (1.1.4). В результате получим тождество

$$\binom{k+1}{0} a_{n+k+1} + (-1) \left( \binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right) a_{n+k} + \dots + (-1)^m \left( \binom{k}{m-1} + \binom{k}{m} \right) a_{n+k-m+1} + \dots \\ \dots + (-1)^k (-1) \left( \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right) a_n = 0.$$

Отсюда, используя одно из основных тождеств

$$\binom{k}{m-1} + \binom{k}{m} = \binom{k+1}{m},$$

получим

$$\binom{k+1}{0} a_{n+k+1} + (-1) \binom{k+1}{1} a_{n+k} + \dots + (-1)^m \binom{k+1}{m} a_{n+k-m+1} + \dots \\ \dots + (-1)^k \binom{k+1}{k+1} a_n = 0.$$

Это тождество и доказывает, что последовательность, удовлетворяющая уравнению (1.1.3), удовлетворяет уравнению (1.1.4).

**9.** Докажите, что если последовательность  $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  является решением линейного однородного рекуррентного уравнения

$$\binom{k}{0}x_{n+k} + (-1)^1 \binom{k}{1}x_{n+k-1} + \dots + (-1)^k \binom{k}{k}x_n = 0,$$

то эта последовательность является решением линейного однородного биномиального уравнения любого порядка  $k' > k$ .

**Р е ш е н и е.**

Так как  $k'$  и  $k$  – натуральные числа, то условие  $k' > k$  равносильно условию  $k' = k + s$  для некоторого  $s \in \mathbb{N}$ . Далее воспользуемся методом математической индукции.

При  $s = 1$  получаем утверждение задачи **8**, которое является верным.

Пусть утверждение задачи **9** верно для фиксированных значений  $s$ .

Докажем утверждение для  $k' = k + (s + 1)$ . Составим биномиальное выражение

$$\binom{s+1}{0}x_{n+s+1} + (-1)^1 \binom{s+1}{1}x_{n+s} + \dots + (-1)^k \binom{s+1}{s+1}x_n$$

и подставим в него члены последовательности  $a = (a_n)$ . В силу индуктивного предположения имеет место тождество

$$\binom{s}{0}a_{n+s} + (-1)^1 \binom{s}{1}a_{n+s-1} + \dots + (-1)^s \binom{s}{s}a_n = 0.$$

Используя утверждение задачи **6**, получим тождество

$$\binom{s+1}{0}a_{n+s+1} + (-1)^1 \binom{s+1}{1}a_{n+s} + \dots + (-1)^{s+1} \binom{s+1}{s+1}a_n = 0.$$

Таким образом, последовательность  $a = (a_n)$ , удовлетворяющая биномиальному уравнению порядка  $s$ , удовлетворяет биномиальному рекуррентному уравнению порядка  $s + 1$ .

**10.** Докажите, что последовательность  $a = (a_n)$  удовлетворяет линейному однородному биномиальному уравнению произвольного порядка  $k'$ , удовлетворяющего указанному неравенству:

- а)  $a_n = 1, k' > 1$ ;
- б)  $a_n = n, k' > 2$ ;
- в)  $a_n = n^2, k' > 3$ ;
- г)  $a_n = n^3, k' > 4$ ;
- д)  $a_n = n^s, k' > s + 1$ .

**11.** Докажите, что единственным нормированным линейным однородным рекуррентным уравнением наименьшего порядка  $k$ , которому удовлетворяет последовательность  $a = (n^{k-1})$ , является биномиальное рекуррентное уравнение порядка  $k$ . Сначала убедитесь в этом для случаев (а)  $k = 1$ ; (б)  $k = 2$ ; (в)  $k = 3$ ; (г)  $k = 4$ ; (д)  $k = 5$ .

**Р е ш е н и е.**

Для случая (в). Последовательность  $a = (a_n)_{n=0}^{\infty}$  определяется общим членом  $a_n = n^2$ . Учитывая утверждения задачи 7, имеем, что эта последовательность является решением уравнения

$$x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 0.$$

Сначала покажем, что последовательность с общим членом  $n^2$  не удовлетворяет однородному рекуррентному уравнению порядка  $s < 3$ . Возможны только случаи: 1)  $s = 1$ ; 2)  $s = 2$ .

В случае (1) предположим, что  $a_{n+1} + \alpha_1 a_n = 0$  является тождеством. Но  $(n+1)^2 + \alpha_1 n^2 = (1 + \alpha_1)n^2 + 2n + 1$ , поэтому  $(n+1)^2 + \alpha_1 n \neq 0$  для каждого  $n = 0, 1, 2, \dots$

Пусть в случае (2) имеем тождество  $a_{n+2} + \alpha_1 a_{n+1} + \alpha_2 a_n = 0$ . Тогда  $(n+2)^2 + \alpha_1(n+1)^2 + \alpha_2 a_n = 0$  выполняется для всех  $n = 0, 1, 2, \dots$  В частности, при  $n = 0, n = 1$  и  $n = 2$  имеем верные равенства:

$$4 + \alpha_1 = 0, 9 + 4\alpha_1 + \alpha_2 = 0, 16 + 9\alpha_1 + 4\alpha_2 = 0.$$

Из первого равенства находим, что  $\alpha_1 = -4$ ; подставив  $-4$  во второе равенство, получим  $\alpha_2 = 7$ . Тогда из третьего равенства находим  $16 - 36 + 28 = 0$ . Получим противоречие.

**12.** Докажите, что последовательность с общим членом  $a_n = n^{k-1}$  является решением линейного однородного уравнения

$$\binom{k}{0} x_{n+k} + (-1) \binom{k}{1} x_{n+k-1} + \dots + (-1)^k \binom{k}{k} x_n = 0.$$

Р е ш е н и е.

Докажем справедливость утверждения методом математической индукции по переменной  $k$ .

При  $k = 1$  общий член последовательности имеет вид  $a_n = n^0 = 1$  за исключением  $n = 0$ . Будем считать, что  $a_0 = 1$  в рассматриваемом случае. Имеет место очевидное тождество

$$a_{n+1} - a_n = 0,$$

т.е.

$$\binom{1}{0} a_{n+1} + (-1)^1 \binom{1}{1} a_n = 0.$$

Таким образом, при  $k = 1$  утверждение задачи верно.

Предположим, что утверждение верно при  $k = s$ , т.е. последовательность с общим членом  $a_n = n^{s-1}$  удовлетворяет тождеству

$$\binom{s}{0} a_{n+s} + (-1) \binom{s}{1} a_{n+s-1} + \dots + (-1)^s \binom{s}{s} a_n = 0. \quad (1.1.5)$$

Докажем, что утверждение будет верным и для  $k = s + 1$ . Рассмотрим последовательность с общим членом  $b_n = n^s$ . Тогда  $b_n = n a_n$  и

$$\begin{aligned} & \binom{s+1}{0} b_{n+s+1} + (-1) \binom{s+1}{1} b_{n+s} + \dots + (-1)^{s+1} \binom{s+1}{s+1} b_n = \\ & = \binom{s+1}{0} (n+s+1) a_{n+s+1} + \dots + (-1)^m \binom{s+1}{m} (n+s+1-m) a_{n+s+1-m} + \dots \\ & \quad \dots + (-1)^{s+1} \binom{s+1}{s+1} n a_n = \\ & = n \left( \binom{s+1}{0} a_{n+s+1} + \dots + (-1)^{s+1} \binom{s+1}{s+1} a_n \right) + \binom{s+1}{0} (s+1) a_{n+s+1} + \dots \\ & \quad \dots + (-1)^m \binom{s+1}{m} (s+1-m) a_{n+s+1-m} + \dots + (-1)^s \binom{s+1}{s} a_{n+1}. \end{aligned}$$

Преобразуем общий член  $(-1)^m \binom{s+1}{m} (s+1-m) a_{n+s+1-m}$ , используя определения биномиального коэффициента:

$$\begin{aligned} (-1)^m \binom{s+1}{m} (s+1-m) a_{n+s+1-m} &= (-1)^m \frac{(s+1)!}{m!(s+1-m)!} (s+1-m) a_{n+s+1-m} = \\ &= (-1)^m (s+1) \frac{s!}{m!(s-m)!} a_{n+s+1-m} = (-1)^m (s+1) \binom{s}{m} a_n. \end{aligned}$$

Учитывая, что имеет место тождество (1.1.5) по индуктивному предположению и результат преобразования общего члена и задачу 8, получим

$$(s+1) \left( \binom{s+1}{0} a_{n+s+1} + \dots + (-1)^m \binom{s}{m} a_{n+s+1-m} + \dots + (-1)^s \binom{s}{s} a_{n+1} \right) = 0.$$

Следовательно, имеет место тождество

$$\binom{s+1}{0} b_{n+s+1} + \dots + (-1)^1 \binom{s+1}{1} b_{n+s} + \dots + (-1)^{s+1} \binom{s+1}{s+1} b_n = 0.$$

Этим доказано, что последовательность  $a = (a_n)$ , где  $a_n = n^{s-1}$ , является решением уравнения (1.1.3) при любом  $s \in \mathbb{N}$ .

**13.** Докажите, что если  $a = (a_n)_{n=0}^\infty$ ,  $b = (b_n)_{n=0}^\infty$  и  $\alpha, \beta$  – произвольные числа – являются решениями линейного однородного рекуррентного уравнения  $\alpha_0 x_{n+k} + \alpha_1 x_{n+k-1} + \dots + \alpha_k x_n = 0$ , то последовательность  $\alpha a + \beta b = (\alpha a_n + \beta b_n)_{n=0}^\infty$  является решением этого уравнения.

**Решение.**

По условию последовательности  $a$  и  $b$  – решения указанных в условии уравнений, поэтому имеют место тождества относительно переменной  $n$ :

$$\alpha_0 a_{n+k} + \alpha_1 a_{n+k-1} + \dots + \alpha_k a_n = 0,$$

$$\alpha_0 b_{n+k} + \alpha_1 b_{n+k-1} + \dots + \alpha_k b_n = 0.$$

Умножим обе части первого тождества на число  $\alpha$ , а обе части второго тождества на число  $\beta$ , затем сложим левые и правые части полученных тождеств. В результате получим тождество

$$\alpha_0(\alpha a_{n+k} + \beta b_{n+k}) + \alpha_1(\alpha a_{n+k-1} + \beta b_{n+k-1}) + \dots + \alpha_k(\alpha a_n + \beta b_n) = 0.$$

Отсюда следует, что последовательность  $\alpha a + \beta b$  является решением рассматриваемого уравнения.

**14.** Методом математической индукции докажите, что если последовательности  $a^1 = (a_n^1), a^2 = (a_n^2), \dots, a^m = (a_n^m)$  являются решениями линейного однородного уравнения

$$\alpha_0 x_{n+k} + \alpha_1 x_{n+k-1} + \dots + \alpha_k x_n = 0,$$

то их линейная комбинация  $\lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \dots + \lambda_m a^m$  является решением этого уравнения для любых чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ .

**15.** Докажите, что любая последовательность  $(f(n))_{n=0}^\infty$ , где  $f(n) = \beta_0 + \beta_1 n + \dots + \beta_m n^m, \beta_0, \dots, \beta_m \in R, \beta_m \neq 0$ ,

где переменная  $n$  принимает целые неотрицательные значения, является решением линейного однородного биномиального уравнения порядка  $m$ .

## § 1.2. Решение однородных рекуррентных уравнений

Рассмотрим однородное рекуррентное уравнение

$$x_{n+k} + p_{k-1}x_{n+k-1} + p_{k-2}x_{n+k-2} + \dots + p_0x_n = 0 \quad (1.2.1)$$

порядка  $k$ .

Отметим некоторые свойства решений рекуррентного уравнения (1.2.1).

**Предложение 1.2.1.** Последовательности  $(a_n)$  и  $(b_n)$ , являющиеся решениями уравнения (1.2.1), совпадают тогда и только тогда, когда совпадают первые  $k$  членов этих последовательностей.

*Доказательство.* Необходимость очевидна.

Докажем достаточность. Пусть  $(a_n), (b_n)$  – решения уравнения (1.2.1), пусть  $a_i = b_i$  для всех номеров  $i$  от 0 до  $k-1$ . Методом математической индукции докажем, что  $a_m = b_m$  для всех  $m \geq k$ .

Для  $m = k$  имеем

$$a_k = -p_{k-1}a_{k-1} - p_{k-2}a_{k-2} - \dots - p_0a_0 = -p_{k-1}b_{k-1} - p_{k-2}b_{k-2} - \dots - p_0b_0 = b_k.$$

Предположим, что утверждение верно для  $m = k + s$ ,  $0 \leq s \leq j-1$ . Докажем, что утверждение верно для  $m = k + j$ :

$$\begin{aligned} a_{k+j} &= -p_{k-1}a_{k+j-1} - p_{k-2}a_{k+j-2} - \dots - p_0a_j = \\ &= -p_{k-1}b_{k+j-1} - p_{k-2}b_{k+j-2} - \dots - p_0b_j = b_{k+j}. \end{aligned}$$

Таким образом,  $(a_n) = (b_n)$ .

**Предложение 1.2.2.** Множество всех решений рекуррентного уравнения (1.2.1) относительно операции сложения решений и операции умножения решений на скаляры из поля  $\mathbf{P}$  образует векторное пространство.

*Доказательство.* Пусть  $(a_n), (b_n)$  – любые два решения уравнения (1.2.1), тогда для любых  $n \in \mathbf{N}$  выполняются следующие равенства:

$$a_{n+k} + p_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + p_0a_n = 0,$$

$$b_{n+k} + p_{k-1}b_{n+k-1} + \dots + p_0b_n = 0.$$

Сложим эти равенства. Тогда получим

$$(a_{n+k} + b_{n+k}) + p_{k-1}(a_{n+k-1} + b_{n+k-1}) + \dots + p_0(a_n + b_n) = 0$$

для любого  $n \in \mathbf{N}$ . Значит, последовательность с общим членом  $c_n = a_n + b_n$  является решением уравнения (1.2.1).

Аналогично доказывается, что произведение произвольной последовательности, являющейся решением (1.2.1), на произвольный скаляр поля  $\mathbf{P}$  является решением (1.2.1). Действительно, если  $(a_n)$  – решение уравнения (1.2.1), то для всех  $n \in \mathbf{N}$  истинны равенства

$$a_{n+k} + p_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + p_0a_n = 0.$$

Умножим обе части этих равенств на произвольный скаляр  $\lambda \in \mathbf{P}$ . Тогда получим истинные равенства

$$\lambda a_{n+k} + p_{k-1}\lambda a_{n+k-1} + \dots + p_0\lambda a_n = 0 \text{ для всех } n \in \mathbf{N}.$$

Значит, последовательность  $(\lambda a_n)$  является решением уравнения (1.2.1).

Таким образом, множество решений уравнения (1.2.1) замкнуто относительно операций сложения последовательностей и умножения последовательностей на скаляры поля  $P$ . Отсюда следует справедливость утверждения.

Обозначим векторное пространство решений однородного рекуррентного уравнения (1.2.1) символом  $V(k, P)$ .

**ТЕОРЕМА 1.2.1.** Векторное пространство  $V(k, P)$  является конечномерным и имеет размерность, равную  $k$ , т.е.

$$\dim_P V(k, P) = k.$$

*Доказательство.* Предложение 1.2.1 позволяет ввести отображение

$$f : P^k \rightarrow V(k, P)$$

по правилу  $f(a_0, a_1, \dots, a_{k-1}) = (C_n)_{n=0}^\infty$ , где  $(C_n)_{n=0}^\infty$  – решение уравнения (1.2.1), удовлетворяющее условию  $C_0 = a_0, C_1 = a_1, \dots, C_{k-1} = a_{k-1}$ .

Докажем, что  $f$  является изоморфизмом. Пусть  $a = (a_0, a_1, \dots, a_{k-1}), b = (b_0, b_1, \dots, b_{k-1})$  – любые два вектора арифметического векторного пространства  $P^k$ . Тогда  $f(a + b) = (d_n)_{n=0}^\infty$  – решение уравнения 1.2.1, причем

$$d_0 = a_0 + b_0, d_1 = a_1 + b_1, \dots, d_{k-1} = a_{k-1} + b_{k-1}.$$

С другой стороны,

$$f(a) = (c_n)_{n=0}^\infty, \text{ причем } a_0 = c_0, a_1 = c_1, \dots, a_{k-1} = c_{k-1},$$

$$f(b) = (\tilde{c}_n)_{n=0}^\infty, \text{ причем } b_0 = \tilde{c}_0, b_1 = \tilde{c}_1, \dots, b_{k-1} = \tilde{c}_{k-1}.$$

Из предложения 1.2.2 следует, что  $f(a) + f(b)$  – решение рекуррентного уравнения (1.2.1), причем первые  $k$  членов этого решения образуют вектор  $(a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_{k-1} + b_{k-1}) = a + b$ . Таким образом, у решений  $f(a + b)$  и  $f(a) + f(b)$  первые  $k$  членов совпадают. Значит, на основании предложения 1.2.1 заключаем, что  $f(a + b) = f(a) + f(b)$ . Аналогично доказывается равенство  $f(\lambda a) = \lambda f(a), \lambda \in P$ . Таким образом,  $f$  – линейное отображение. Очевидными являются инъективность и сюръективность отображения  $f$ . Отсюда заключаем, что  $f$  – изоморфизм и  $\dim_P V(k, P) = k$ .

Любой базис пространства решений линейного рекуррентного уравнения (1.2.1) называется иначе фундаментальной системой решений.

Если  $(a_n^1), (a_n^2), \dots, (a_n^s)$  – фундаментальный набор решений уравнения (1.2.1), то общее решение уравнения (1.2.1) имеет вид

$$(a_n) = C_1(a_n^1) + C_2 a_n^2 + \dots + C_k a_n^k,$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_k$  – произвольные постоянные (значения которых принадлежат полю  $P$ ).

**Определение 1.2.1.** Система последовательностей  $(a_n^1), (a_n^2), \dots, (a_n^s)$  называется **линейно независимой**, если из равенств

$$\alpha_1 a_n^1 + \alpha_2 a_n^2 + \dots + \alpha_s a_n^s = 0$$

при всех  $n \in N$  следует, что  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_s = 0$ .

### § 1.3. Решение линейных однородных рекуррентных уравнений в случае различных простых корней характеристического уравнения

Рассмотрим линейное рекуррентное уравнение порядка  $k$  с постоянными коэффициентами над полем  $P$ :

$$x_{n+k} + p_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + p_1x_{n+1} + p_0x_n = 0, \quad (1.3.1)$$

причем  $p_0 \neq 0$ . Пусть  $\lambda$  – корень характеристического многочлена этого уравнения

$$\varphi(x) = x^k + p_{k-1}x^{k-1} + \dots + p_1x + p_0.$$

Тогда

$$\lambda^k + p_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + p_1\lambda + p_0 = 0, \quad (1.3.2)$$

при этом  $\lambda \neq 0$ .

**Предложение 1.3.1.** Если  $\lambda$  – корень характеристического многочлена  $\varphi(x)$ , то последовательность  $(\lambda^n)$  является решением рекуррентного уравнения (1.3.1).

*Доказательство.* Подставим  $\lambda^m$  в уравнение (1.3.1). Тогда

$$\lambda^{n+k} + p_{k-1}\lambda^{n+k-1} + \dots + p_1\lambda^{n+1} + p_0\lambda^n = \lambda^n(\lambda^k + p_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + p_1\lambda + p_0) = 0$$

для любых  $n \in N$  в силу (1.3.2). Предложение доказано.

В дальнейшем уравнение

$$x^k + p_{k-1}x^{k-1} + \dots + p_1x + p_0 = 0$$

будем называть характеристическим уравнением рекуррентного уравнения (1.3.1).

При решении характеристического уравнения может оказаться так, что число всех корней этого уравнения в поле  $\mathbf{P}$  меньше, чем  $k$ , считая их кратности. Тогда уравнение (1.3.1) будем решать в поле разложения  $\mathbf{P}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  над  $\mathbf{P}$  характеристического многочлена  $\varphi(x)$ . Здесь  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  – различные корни многочлена  $\varphi(x)$ .

**ТЕОРЕМА 1.3.1.** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  – попарно различные корни характеристического многочлена  $\varphi(x)$ . Последовательность  $(a_n)$  будет решением рекуррентного уравнения (1.3.1) тогда и только тогда, когда существуют скаляры  $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbf{P}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  такие, что

$$a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \dots + c_k\lambda_k^n. \quad (1.3.3)$$

**Доказательство. Необходимость.** В силу предложения 1.3.1 и свойств решений однородного рекуррентного уравнения заключаем, что для любых скаляров  $c_1, c_2, \dots, c_k$  из поля разложения над  $\mathbf{P}$  многочлена  $\varphi(x)$  последовательность  $(a_n)$ , где  $a_n$  определяется формулой (1.3.3), является решением уравнения (1.3.1).

**Достаточность.** Размерность пространства решений уравнения (1.3.1) равна  $k$ , поэтому достаточно доказать, что система решений

$$(\lambda_1^n), (\lambda_2^n), \dots, (\lambda_k^n) \quad (1.3.4)$$

линейно независима.

Пусть при любом  $n \in \mathbf{N}$

$$y_1\lambda_1^n + y_2\lambda_2^n + \dots + y_k\lambda_k^n = 0,$$

а неизвестные  $y_1, y_2, \dots, y_k$  принимают значения из поля разложения  $\mathbf{P}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ . Тогда в силу произвольности  $n$ , придав этой переменной значения  $0, 1, 2, \dots, k-1$ , получим

$$\begin{aligned} y_1 + y_2 + \dots + y_k &= 0, \\ y_1\lambda_1 + y_2\lambda_2 + \dots + y_k\lambda_k &= 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots & \\ y_1\lambda_1^{k-1} + y_2\lambda_2^{k-1} + \dots + y_k\lambda_k^{k-1} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

Определителем этой системы является определитель Вандермонда:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_k \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \dots & \lambda_k^{k-1} \end{vmatrix} = \prod_{j < i} (\lambda_i - \lambda_j),$$

В силу того, что  $\lambda_i \neq \lambda_j$  при  $i \neq j$ , заключаем, что  $\Delta \neq 0$ . Отсюда следует, что система (1.3.5) имеет единственное нулевое решение. Значит, система решений (1.3.4) линейно независима и содержит ровно  $k$  решений. Таким образом, система (1.3.4) является базисом пространства решений линейного однородного уравнения (1.3.1).

Для любого решения  $(a_n)$  найдутся скаляры  $c_1, c_2, \dots, c_k$  (определенные однозначно) такие, что будет иметь место равенство (1.3.3).

**Определение 1.3.1.** Последовательность  $(a_n)$ , представленная в виде линейной комбинации  $a_n = c_1 a_n^1 + \dots + c_k a_n^k$ , называется общим решением уравнения (1.3.1), если она при любых  $c_1, c_2, \dots, c_k$  является решением этого уравнения и для любого решения  $(b_n)$  уравнения (1.3.1) существуют скаляры  $c_1^0, c_2^0, \dots, c_k^0$  такие, что  $b_n = c_1^0 a_n^1 + \dots + c_k^0 a_n^k$ .

Всякое фиксированное решение рекуррентного уравнения называется его частным решением.

**Примеры.**

1. Решить уравнение  $x_{n+2} + 6x_{n+1} + \frac{5}{4}x_n = 0$  над полем  $\mathcal{Q}$  рациональных чисел.

**Решение.**

Составим характеристическое уравнение

$$x^2 + 3x + \frac{5}{4} = 0.$$

Найдем корни этого уравнения:  $\lambda_1 = -\frac{5}{2}$  и  $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$ . Оба корня принадлежат полю  $\mathcal{Q}$ , значит, полем разложения характеристического многочлена является само поле  $\mathcal{Q}$ . Пространство всех

решений представляет собой множество всевозможных последовательностей  $(a_n)$ , где

$$a_n = c_1 \left(-\frac{5}{2}\right)^n + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n, c_1, c_2 \in \mathcal{Q}.$$

**2.** Решить уравнение  $x_{n+2} - 2x_n = 0$ , заданное над полем  $\mathcal{Q}$ .

**Р е ш е н и е.**

Характеристический многочлен  $\varphi(x) = x^2 - 2$  неприводим над полем  $\mathcal{Q}$ . Полем разложения этого многочлена является поле  $\mathcal{Q}(\sqrt{2})$ . В этом поле характеристический многочлен имеет два различных корня  $\lambda_1 = -\sqrt{2}$  и  $\lambda_2 = \sqrt{2}$ . Тогда любая последовательность  $(a_n)$ , где

$$a_n = c_1(-\sqrt{2})^n + c_2(\sqrt{2})^n, c_1, c_2 \in \mathcal{Q}(\sqrt{2})$$

будет являться решением данного рекуррентного уравнения.

**3.** Решить уравнение  $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$ , заданное над полем  $F_2 = \{0, 1\}$ .

Характеристический многочлен  $\varphi(x) = x^2 - x - 1$  неприводим над полем  $F_2$ . Обозначим через  $\theta$  один из корней многочлена  $\varphi(x)$ . Тогда в поле  $F_2(\theta)$  вторым корнем будет элемент  $\theta + 1$ . Действительно,

$$(\theta + 1)^2 - (\theta + 1) - 1 = \theta^2 + 1 - \theta - 1 - 1 = \theta^2 - \theta - 1 = 0.$$

Таким образом,  $\lambda_1 = \theta$ ,  $\lambda_2 = \theta + 1$ , и поэтому всякая последовательность  $(a_n)$ , где

$$a_n = c_1\theta^n + c_2(\theta + 1)^n, c_1, c_2 \in F_2(\theta),$$

является решением уравнения (1.3.1).

### Упражнения

Решите следующие рекуррентные уравнения над полем  $\mathcal{Q}$ :

**1.**  $x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = 0$ .

**2.**  $x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 0$ .

**3.**  $x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = 0$ .

**4.**  $x_{n+2} + 2x_{n+1} - 15x_n = 0$ .

$$5. x_{n+2} - 9x_{n+1} + 18x_n = 0.$$

$$6. x_{n+3} - 3x_{n+2} - 4x_{n+1} + 12x_n = 0.$$

$$7. x_{n+4} - 13x_{n+2} + 36x_n = 0.$$

8. Решите задачу примера 2 над полем  $\mathcal{Q}$ .

9. Решите задачу примера 3 над полями  $F_2, F_3, F_5$ .

### § 1.4. Дифференциальные операторы специального типа в алгебре многочленов

При решении рекуррентных уравнений полезными являются дифференциальные операторы специального вида.

В алгебре многочленов  $P[x]$  определим операцию  $D: P[x] \rightarrow P[x]$  по правилу

$$Df = x \frac{df}{dx}.$$

Операция  $D$   $P$ -линейна. Действительно, для произвольных  $f, g \in P[x]$  и  $\lambda \in P$  имеем

$$D(f + g) = x \frac{d}{dx}(f + g) = x \frac{d}{dx}f + x \frac{d}{dx}g = Df + Dg,$$

$$D(\lambda f) = \lambda Df.$$

Кроме того,  $D$  является дифференцированием алгебры многочленов  $P[x]$ :

$$D(fg) = x \frac{d}{dx}(fg) = (x \frac{df}{dx})g + f \frac{dg}{dx} = (Df)g + fDg.$$

**Предложение 1.4.1.** Дифференцирование  $D$  удовлетворяет равенствам

$$(a) D(1) = 0;$$

$$(б) Dx^n = nx^n.$$

*Доказательство.*

1. Так как  $D(1 \cdot 1) = D(1)$ , то  $D(1) \cdot 1 + 1 \cdot D(1) = D(1)$ . Отсюда следует (a).

2. Из определения  $D$  следует, что

$$Dx^n = x(x^n)' = nx^n.$$

Утверждение доказано.

Определим по индукции операции  $D^m : P[x] \rightarrow P[x]$ :

$$(D^0 f) = f ,$$

$$(D^m f) = D(D^{m-1} f) .$$

**Предложение 1.4.2.** Имеет место тождество

$$D^m x^n = n^m x^n .$$

Доказательство проведем методом математической индукции по  $m$ .

1. При  $m = 0$  имеем

$$D^0 x^n = x^n = n^0 x^n .$$

2. Пусть утверждение верно для фиксированного  $m$ :

$$D^m x^n = n^m x^n .$$

3. Проверим справедливость равенства для  $m + 1$ :

$$D^{m+1}(x^n) = D(D^m x^n) = D(n^m x^n) = n^m D(x^n) = n^m (nx^n) = n^{m+1} x^n .$$

Утверждение доказано.

**Предложение 1.4.3.**  $D^m$  –  $P$ -линейный оператор на  $P[x]$ .

Доказательство проведем методом математической индукции.

1. При  $m = 0$  оператор  $D^0 = id_{P[x]}$  –  $P$ -линейный.

2. Пусть  $D^m$  –  $P$ -линейный оператор.

3. Докажем, что оператор  $D^{m+1}$  –  $P$ -линейный. Для произвольных  $f, g \in P[x]$  и  $\lambda \in P$  имеем

$$\begin{aligned} D^{m+1}(f + g) &= D(D^m)(f + g) = D(D^m(f + g)) = D(D^m f + D^m g) = \\ &= D(D^m f) + D(D^m g) = D^{m+1}(\lambda f) = D(D^m \lambda f) = \lambda D^{m+1} f = D^{m+1} f + D^{m+1} g . \end{aligned}$$

$$D^{m+1}(\lambda f) = D(D^m(\lambda f)) = \lambda D(D^m f) = \lambda D^{m+1} f .$$

Следствием предложений 1.4.1–1.4.3 является предложение 1.4.4.

**Предложение 1.4.4.** Для произвольного многочлена

$$f = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_n x^n$$

имеют место равенства

$$D^m f = q_1 x + 2^m q_2 x^2 + \dots + n^m q_n x^n \quad (\text{при } m \geq 1) .$$

**Предложение 1.4.5.** Для произвольного натурального числа  $m \geq 1$  и произвольного многочлена  $f \in P[x]$  выполняются равенства

$$D^s f = xf' + b_2 x^2 f'' + \dots + b_{s-1} x^{s-1} f^{(s-1)} + x^s f^{(s)},$$

где  $b_2, \dots, b_{s-1}$  – некоторые элементы поля  $P$ , а  $f', f'', \dots, f^{(s)}$  – производные многочлена  $f$ .

*Доказательство.*

1. При  $m = 1$  равенство выполняется по определению оператора  $D^m$ :

$$(D^1 f) = xf'.$$

2. Предположим, что утверждение верно при  $m = s - 1$ , для произвольного фиксированного  $s \geq 2$ :

$$D^{s-1} f = xf' + a_2 x^2 f'' + \dots + a_{s-2} x^{s-2} f^{(s-2)} + x^{s-1} f^{(s-1)},$$

где  $a_2, a_3, \dots, a_{m-1}$  – некоторые скаляры из  $P$ .

3. Докажем справедливость утверждения при  $m = s$ . Из определения оператора  $D^m$  и предложения 1.4.1 получим

$$\begin{aligned} D^s f &= D(D^{s-1} f) = D(xf' + a_2 x^2 f'' + \dots + a_{s-2} x^{s-2} f^{(s-2)} + x^{s-1} f^{(s-1)}) = \\ &= xf' + (1 + 2a_2)x^2 f'' + (a_2 + 3a_3)x^3 f''' + \dots + (a_{s-2} + (s-1))x^{s-1} f^{(s-1)} + x^s f^{(s)} = \\ &= xf' + b_2 x^2 f'' + \dots + b_{s-1} x^{s-1} f^{(s-1)} + x^s f^{(s)}, \quad b_2, b_3, \dots, b_{s-1} \in P. \end{aligned}$$

Утверждение доказано.

**Предложение 1.4.6.** Пусть  $\lambda \in P$ ,  $\lambda, \mu \neq 0$ . Если  $(D^s f)(\lambda) = 0$  ( $s = 0, 1, \dots, m$ ), то

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = \dots = f^{(m)}(\lambda) = 0 \quad \text{и} \quad (D^{m+1} f)(\lambda) = \lambda^{m+1} f^{(m+1)}(\lambda).$$

*Доказательство.*

1. Проверим, что утверждение верно при  $m = 0$ . Пусть  $(D^0 f)(\lambda) = 0$ . Тогда  $f(\lambda) = 0$  и  $(D^1 f)(\lambda) = (xf')(\lambda) = \lambda f'(\lambda)$ . Таким образом, утверждение верно при  $m = 0$ .

2. Предположим, что утверждение верно при  $m = k$ .

3. Докажем истинность утверждения при  $m = k + 1$ . Пусть  $(D^s f)(\lambda) = 0$  для  $s = 0, 1, \dots, k, k + 1$ . В силу индуктивного предположения имеем

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = \dots = f^{(k)}(\lambda) = 0 \quad \text{и} \quad (D^{k+1} f)(\lambda) = \lambda^{k+1} f^{(k+1)}(\lambda).$$

Но  $(D^{k+1} f)(\lambda) = 0$ , поэтому  $f^{(k+1)}(\lambda) = 0$ . На основании предложения 1.4.5 можно записать следующее равенство:

$$(D^{k+2} f)(\lambda) = \lambda f'(\lambda) + a_2 \lambda^2 f''(\lambda) + \dots + a_{k+1} \lambda^{k+1} f^{(k+1)}(\lambda) + \lambda^{k+2} f^{(k+2)}(\lambda).$$

Отсюда следует, что  $(D^{k+2} f)(\lambda) = \lambda^{k+2} f^{(k+2)}(\lambda)$ . Предложение 1.4.6 доказано.

**Предложение 1.4.7.** Пусть  $P$  – поле нулевой характеристики. Следующие условия для  $\lambda \in P$ ,  $\lambda \neq 0$  логически эквивалентны:

- 1)  $\lambda$  –  $\alpha$ -кратный корень многочлена  $f \in P[x]$ ;
- 2)  $(D^m f)(\lambda) = 0$  ( $m = 0, 1, \dots, \alpha - 1$ ) и  $(D^\alpha f)(\lambda) \neq 0$ .

*Доказательство.* Докажем истинность импликации  $(1) \rightarrow (2)$ . Пусть  $\lambda$  –  $\alpha$ -кратный корень. Тогда из курса алгебры известно, что

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = \dots = f^{(\alpha-1)}(\lambda) = 0 \quad \text{и} \quad f^{(\alpha)}(\lambda) \neq 0.$$

Тогда  $D^0 f(\lambda) = f(\lambda) = 0$ . Из предложения 1.4.5 при  $m = 1, 2, \dots, \alpha - 1$  получим

$$(D^1 f)(\lambda) = (D^2 f)(\lambda) = \dots = (D^{(\alpha-1)} f)(\lambda) = 0 \quad \text{и} \quad (D^\alpha f)(\lambda) = \lambda^\alpha f^{(\alpha)}(\lambda) \neq 0.$$

Истинность импликации  $(1) \rightarrow (2)$  доказана.

Пусть выполняется условие (2). Тогда из предложения 1.4.5 получаем, что

$$f(\lambda) = f'(\lambda) = \dots = f^{(\alpha-1)}(\lambda) = 0 \quad \text{и} \quad f^{(\alpha)}(\lambda) \neq 0.$$

Отсюда следует, что  $\lambda$  –  $\alpha$ -кратный корень многочлена  $f \in P[x]$ . Истинность импликации  $(2) \rightarrow (1)$  доказана.

## § 1.5. Решение линейных однородных рекуррентных уравнений в случае различных кратных корней характеристического уравнения

В этом параграфе будем исследовать решения линейного однородного уравнения (1.3.1) в случае, когда среди корней есть кратные корни. Будем считать, что характеристика поля  $P$  равна нулю.

**ТЕОРЕМА 1.5.1.** Если  $\lambda - \alpha$ -кратный корень характеристического многочлена  $\varphi(x) = x^k + p_{k-1}x^{k-1} + \dots + p_1x + p_0$  рекуррентного уравнения (1.3.1), то последовательность  $(n^t \lambda^n)$  ( $0 \leq t < \alpha$ ) является решением уравнения (1.3.1).

*Доказательство.* При  $t = 0$  утверждение следует из предложения 1.3.1.

При  $0 < t \leq \alpha - 1$  запишем результат подстановки последовательности в левую часть уравнения (1.3.1):

$$(n+k)^t \lambda^{n+k} + p_{k-1}(n+k-1)^t \lambda^{n+k-1} + \dots + p_1(n+1)^t \lambda^{n+1} + p_0 n^t \lambda^n. \quad (1.5.1)$$

По формуле бинома Ньютона

$$(n+l)^t = n^t + \binom{t}{1} n^{t-1} l + \binom{t}{2} n^{t-2} l^2 + \dots + \binom{t}{t-1} n l^{t-1} + l^t$$

при  $l = k, k-1, \dots, 1, 0$  равенство (1.5.1) перепишем следующим образом:

$$\begin{aligned} & (n^t + \binom{t}{1} n^{t-1} k + \binom{t}{2} n^{t-2} k^2 + \dots + \binom{t}{t-1} n k^{t-1} + k^t) \lambda^{n+k} + \\ & + p_{k-1} (n^t + \binom{t}{1} n^{t-1} (k-1) + \dots + \binom{t}{t-1} n (k-1)^{t-1} + (k-1)^t) \lambda^{n+k-1} + \dots \\ & \dots + p_1 (n^t + \binom{t}{1} n^{t-1} + \binom{t}{2} n^{t-2} + \dots + \binom{t}{t-1} n + 1) \lambda^{n+1} + p_0 n^t \lambda^n = \\ & = n^t \lambda^n (\lambda^k + p_{k-1} \lambda^{k-1} + \dots + p_1 \lambda + p_0) + \binom{t}{1} n^{t-1} \lambda^n (k \lambda^k + p_{k-1} (k-1) \lambda^{k-1} + \dots + p_1 \lambda) + \\ & + \binom{t}{2} n^{t-2} \lambda^n (k^2 \lambda^k + p_{k-1} (k-1)^2 \lambda^{k-1} + \dots + p_1 \lambda) + \dots \\ & \dots + \binom{t}{t-1} n \lambda^n (k^{t-1} \lambda^k + p_{k-1} (k-1)^{t-1} \lambda^{k-1} + \dots + p_1 \lambda) + \\ & + \lambda^n (k^t \lambda^k + p_{k-1} (k-1)^t \lambda^{k-1} + \dots + p_1 \lambda) = \\ & = n^t \lambda^n D^0 \varphi(\lambda) + \binom{t}{1} n^{t-1} \lambda^n D^1 \varphi(\lambda) + \dots + \binom{t}{t-1} n \lambda^n D^{t-1} \varphi(\lambda) + \lambda^n D^t \varphi(\lambda). \end{aligned}$$

Так как  $D^m \varphi(\lambda) = 0$  для  $m = 0, 1, 2, \dots, t$ , то полученное выражение тождественно равно нулю. Теорема 1.5.1 доказана.

**ТЕОРЕМА 1.5.2.** Пусть  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  – попарно различные корни характеристического многочлена  $\varphi(x) = x^k + p_{k-1}x^{k-1} + \dots + p_1x + p_0$  рекуррентного уравнения (1.3.1) и пусть кратности этих корней равны  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  соответственно. Тогда система решений

$$(\lambda_1^n), (n\lambda_1^n), \dots, (n^{\alpha_1-1}\lambda_1^n), \dots, (\lambda_s^n), (n\lambda_s^n), \dots, (n^{\alpha_s-1}\lambda_s^n) \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

линейно независима.

*Доказательство.* Составим линейную комбинацию этих решений и приравняем к нулю. Тогда получим тождество относительно  $n$ :

$$C_0^1 \lambda_1^n + C_1^1 n \lambda_1^n + \dots + C_{\alpha_1-1}^1 n^{\alpha_1-1} \lambda_1^n + C_0^2 \lambda_2^n + C_1^2 n \lambda_2^n + \dots \\ \dots + C_{\alpha_2-1}^2 n^{\alpha_2-1} \lambda_2^n + \dots + C_0^s \lambda_s^n + C_1^s n \lambda_s^n + \dots + C_{\alpha_s-1}^s n^{\alpha_s-1} \lambda_s^n = 0. \quad (1.5.2)$$

Придадим переменной значения  $0, 1, 2, \dots, k-1$ . Тогда из тождества (1.5.2) получим систему:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_0^1 + C_0^2 + \dots + C_0^s = 0, \\ (C_{\sigma_1}^1 1^{\sigma_1}) \lambda_1 + (C_{\sigma_2}^2 1^{\sigma_2}) \lambda_2 + \dots + (C_{\sigma_s}^s 1^{\sigma_s}) \lambda_s = 0, \\ (C_{\sigma_1}^1 2^{\sigma_1}) \lambda_1^2 + (C_{\sigma_2}^2 2^{\sigma_2}) \lambda_2^2 + \dots + (C_{\sigma_s}^s 2^{\sigma_s}) \lambda_s^2 = 0, \\ (C_{\sigma_1}^1 3^{\sigma_1}) \lambda_1^3 + (C_{\sigma_2}^2 3^{\sigma_2}) \lambda_2^3 + \dots + (C_{\sigma_s}^s 3^{\sigma_s}) \lambda_s^3 = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots, \\ (C_{\sigma_1}^1 (k-1)^{\sigma_1}) \lambda_1^{k-1} + (C_{\sigma_2}^2 (k-1)^{\sigma_2}) \lambda_2^{k-1} + \dots + (C_{\sigma_s}^s (k-1)^{\sigma_s}) \lambda_s^{k-1} = 0. \end{array} \right. \quad (1.5.3)$$

Матрица этой системы будет следующей:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_1 & \lambda_1 & \dots & \lambda_1 & \dots & \lambda_s & \lambda_s & \lambda_s & \dots & \lambda_s \\ \lambda_1^2 & 2\lambda_1^2 & 2^2\lambda_1^2 & \dots & 2^{\alpha_1-1}\lambda_1^2 & \dots & \lambda_s^2 & 2\lambda_s^2 & 2^2\lambda_s^2 & \dots & 2^{\alpha_s-1}\lambda_s^2 \\ \lambda_1^3 & 3\lambda_1^3 & 3^2\lambda_1^3 & \dots & 3^{\alpha_1-1}\lambda_1^3 & \dots & \lambda_s^3 & 3\lambda_s^3 & 3^2\lambda_s^3 & \dots & 3^{\alpha_s-1}\lambda_s^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{k-1} & (k-1)\lambda_1^{k-1} & (k-1)^2\lambda_1^{k-1} & \dots & (k-1)^{\alpha_1-1}\lambda_1^{k-1} & \dots & \lambda_s^{k-1} & (k-1)\lambda_s^{k-1} & (k-1)^2\lambda_s^{k-1} & \dots & (k-1)^{\alpha_s-1}\lambda_s^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Докажем, что  $\text{rank } A = k$ . Доказательство проведем от противного. Предположим, что  $\text{rank } A < k$ . Тогда система строк этой

матрицы линейно зависима. Значит, существуют скаляры  $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_{k-1} \in \mathbf{P}$ , не равные нулю одновременно, такие, что

$$\mu_0 A_0 + \mu_1 A_1 + \dots + \mu_{k-1} A_{k-1} = 0,$$

где  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$  – строки вещественной матрицы  $A$ .

Значит,

$$\begin{aligned} & \mu_0(1, 0, 0, \dots, 0, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0) + \\ & + \mu_1(\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \dots, \lambda_1, \dots, \lambda_s, \lambda_s, \lambda_s, \dots, \lambda_s) + \\ & + \mu_2(\lambda_1^2, 2\lambda_1^2, 2^2\lambda_1^2, \dots, 2^{\alpha_1-1}\lambda_1^2, \dots, \lambda_s^2, 2\lambda_s^2, 2^2\lambda_s^2, \dots, 2^{\alpha_s-1}\lambda_s^2) + \\ & \dots \quad (1.5.4) \\ & + \mu_{k-1}(\lambda_1^{k-1}, (k-1)\lambda_1^{k-1}, (k-1)^2\lambda_1^{k-1}, \dots, (k-1)^{\alpha_1-1}\lambda_1^{k-1}, \dots, \lambda_s^{k-1}, (k-1)\lambda_s^{k-1}, \\ & (k-1)^2\lambda_s^{k-1}, \dots, (k-1)^{\alpha_s-1}\lambda_s^{k-1}) = 0. \end{aligned}$$

Координаты каждого вектора  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$  можно разбить на  $s$  блоков, соответствующих корням  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ .

Из равенства (1.5.4) следуют аналогичные  $k$  равенств для соответствующих координат векторов системы  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$ .

Выпишем равенства для блока, соответствующего корню  $\lambda_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ):

$$\begin{aligned} & \mu_0 + \mu_1\lambda_i + \mu_2\lambda_i^2 + \dots + \mu_{k-1}\lambda_i^{k-1} = 0, \\ & \mu_1\lambda_i + \mu_2 2\lambda_i^2 + \dots + \mu_{k-1}(k-1)\lambda_i^{k-1} = 0, \\ & \mu_1\lambda_i + \mu_2 2^2\lambda_i^2 + \dots + \mu_{k-1}(k-1)^2\lambda_i^{k-1} = 0, \quad (1.5.5) \\ & \dots \\ & \mu_1\lambda_i + \mu_2 2^{\alpha_i-1}\lambda_i^2 + \dots + \mu_{k-1}(k-1)^{\alpha_i-1}\lambda_i^{k-1} = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим многочлен

$$g = \mu_0 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \dots + \mu_{k-1} x^{k-1}.$$

Равенства (1.5.5) в силу предложения 1.4.4 примут вид

$$g(\lambda_i) = 0, D^1 g(\lambda_i) = 0, D^2 g(\lambda_i) = 0, \dots, D^{\alpha_i-1} g(\lambda_i) = 0.$$

Отсюда замечаем, что кратность  $\beta_i$  корня  $\lambda_i$  многочлена  $g$  не меньше, чем  $\alpha_i$ :  $\beta_i \geq \alpha_i$ . Напомним, что  $\alpha_i$  – кратность корня  $\lambda_i$  характеристического многочлена.

Оценим число корней многочлена  $g$ . Как было установлено выше, кратности  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$  корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  соответственно многочлена  $g$  удовлетворяют неравенствам  $\beta_1 \geq \alpha_1, \beta_2 \geq \alpha_2, \dots, \beta_s \geq \alpha_s$ .

В связи с этим  $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s \geq \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s$ . С другой стороны,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_s = k$  — степень характеристического многочлена.

Следовательно, число корней многочлена  $g$  равно

$$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s \geq k.$$

Степень многочлена  $g$  не превосходит  $k-1$ , поэтому  $g$  имеет не более, чем  $k-1$  корней. Это значит,  $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_s \leq k-1$ . Отсюда  $k-1 \geq k$ . Получили противоречие. Следовательно, система строк  $A_0, A_1, \dots, A_{k-1}$  имеет ранг, равный  $k$ , поэтому система (1.5.3) имеет единственное нулевое решение. Значит,

$$C_0^t, C_1^t, \dots, C_{\alpha_t-1}^t = 0, \quad (t = 1, 2, \dots, s).$$

Теорема доказана.

Из доказанных теоремы 1.5.1 и теоремы 1.5.2 следует теорема 1.5.3.

**ТЕОРЕМА 1.5.3.** Если  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  — различные корни характеристического многочлена  $\varphi(x)$  однородного рекуррентного уравнения (1.3.1), кратности корней равны  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  соответственно, то каждое решение  $(a_n)$  уравнения (1.3.1) можно представить в виде

$$a_n = \sum_{i=1}^s P_i(n) \lambda_i^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $P_i(n)$  — многочлен степени не больше, чем  $\alpha_i - 1$ , коэффициенты которого однозначно определяются начальными условиями  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  и принадлежат полю разложения характеристического многочлена  $\varphi(x)$  над  $P$ .

*Замечание.* Теорема 1.5.3 имеет место и в случае, когда поле  $P$  имеет конечную характеристику  $p > 0$ , при условии, что кратности  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$  корней  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  характеристического уравнения  $\varphi(x)$  меньше, чем  $p$ .

## Упражнения

Решите следующие рекуррентные уравнения над полем  $R$ :

1.  $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$ .

2.  $x_{n+2} + 8x_{n+1} + 16x_n = 0$ .

3.  $x_{n+3} + 3x_{n+2} - 4x_{n+1} - 12x_n = 0$ .

4.  $x_{n+3} - 2x_{n+2} - 4x_{n+1} + 8x_n = 0$ .

## § 1.6. Решение неоднородных рекуррентных уравнений

### 1. Свойства решений неоднородных рекуррентных уравнений

Рассмотрим над полем  $P$  нулевой характеристики неоднородное рекуррентное уравнение

$$x_{n+k} + p_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + p_1x_{n+1} + p_0x_n = f(n), \quad (1.6.1)$$

где  $f(n)$  – некоторая функция натурального аргумента, со значениями в  $P$  и не равная нулю;  $p_0, p_1, \dots, p_{k-1}$  – фиксированные элементы поля  $P$ .

**Определение 1.6.1.** Всякое решение уравнения (1.6.1) называется неоднородной рекуррентной последовательностью порядка  $k$ .

Наряду с уравнением (1.6.1) рассмотрим однородное рекуррентное уравнение

$$x_{n+k} + p_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + p_1x_{n+1} + p_0x_n = 0, \quad (1.6.2)$$

которое называется соответствующим уравнению (1.6.1) однородным рекуррентным уравнением.

Отметим свойства решений уравнения (1.6.1).

**Предложение 1.6.1.** Разность любых двух частных решений рекуррентного уравнения (1.6.1) является решением однородного рекуррентного уравнения (1.6.2), соответствующего данному неоднородному уравнению.

**Предложение 1.6.2.** Если  $(b_n)$  – решение однородного уравнения (1.6.2),  $(\tilde{b}_n)$  – частное решение уравнения (1.6.1), то последовательность  $(a_n)$  с общим членом вида  $a_n = b_n + \tilde{b}_n$  является решением рекуррентного соотношения (1.6.1).

*Следствие.* Общее решение уравнения (1.6.1) является суммой общего решения соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения неоднородного уравнения.

**Предложение 1.6.3.** Пусть правая часть уравнения (1.6.1) является суммой двух функций:  $f(n) = f_1(n) + f_2(n)$ . Тогда сумма решений уравнений вида (1.6.1) с правыми частями  $f_1(n)$  и  $f_2(n)$  является решением уравнения (1.6.1).

*Доказательство.* Предположим, что  $(b_n^1)$  и  $(b_n^2)$  – решения уравнений вида (1.6.1) с правыми частями  $f_1(n)$  и  $f_2(n)$ . Тогда равенства

$$b_{n+k}^1 + p_{k-1}b_{n+k-1}^1 + \dots + p_1b_{n+1}^1 + p_0b_n^1 = f_1(n),$$

$$b_{n+k}^2 + p_{k-1}b_{n+k-1}^2 + \dots + p_1b_{n+1}^2 + p_0b_n^2 = f_2(n)$$

выполняются для всех  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Сложив эти тождества, получим, что последовательность  $(b_n^1 + b_n^2)$  является решением уравнения (1.6.1).

## 2. Решение неоднородных рекуррентных уравнений путем сведения к однородным

Для нахождения решений уравнения (1.6.1) перепишем данное уравнение, заменив  $n$  на  $n+1$ :

$$x_{n+k+1} + p_{k-1}x_{n+k} + p_{k-2}x_{n+k-1} + \dots + p_0x_{n+1} = f(n+1).$$

Вычтем соответствующие части исходного уравнения из полученного уравнения. При этом если правая часть станет равной нулю, то мы получим однородное уравнение порядка рекуррентности  $k+1$ , если в правой части не ноль, то процедуру можно повторить.

**Пример.**

Найти все последовательности, члены которых удовлетворяют соотношению

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4.$$

**Решение.**

Запишем соотношение для номера  $n+1$ . Получим

$$a_{n+3} - 5a_{n+2} + 6a_{n+1} = 4.$$

Вычтем из получившегося соотношения исходное, получим однородное рекуррентное соотношение

$$a_{n+3} - 6a_{n+2} + 11a_{n+1} - 6a_n = 0.$$

Его общее решение:

$$a_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n + C_3 \cdot 3^n.$$

Чтобы найти решение поставленной задачи, мы подставим полученную последовательность в исходное неоднородное соотношение. Тогда

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 \cdot 2^{n+2} + C_3 \cdot 3^{n+2} - 5(C_1 + C_2 \cdot 2^{n+1} + C_3 \cdot 3^{n+1}) + \\ + 6(C_1 + C_2 \cdot 2^n + C_3 \cdot 3^n) = 4. \end{aligned}$$

После преобразования левой части мы придем к равенству

$$2C_1 + C_2 \cdot 2^n (2^2 - 5 \cdot 2 + 6) + C_3 \cdot 3^n (3^2 - 5 \cdot 3 + 6) = 4.$$

Отсюда следует, что  $C_1 = 2$ . Таким образом, общим решением задачи является последовательность  $(a_n)$ , где  $a_n = 2 + C_2 \cdot 2^n + C_3 \cdot 3^n$ .

### 3. Решение неоднородных рекуррентных уравнений по виду правой части

В некоторых частных случаях частное решение можно найти по виду правой части  $f(n)$  уравнения (1.6.1).

**3.1.** Пусть правая часть  $f(n)$  является многочленом степени  $m$  над полем  $P$ . Тогда, если 1 не является корнем характеристического уравнения, то частное решение  $(\tilde{b}_n)$  будем искать, положив  $\tilde{b}_n = u_0 + u_1 n + \dots + u_m n^m$ , причем коэффициенты  $u_0, u_1, \dots, u_m$  найдем, подставив  $\tilde{b}_n$  в уравнение (1.6.1).

Если 1 является корнем характеристического многочлена и кратность равна  $s$ , то частное решение  $(\tilde{b}_n)$  будем искать исходя из условия  $\tilde{b}_n = n^s (u_0 + u_1 n + \dots + u_m n^m)$ .

**Пр и м е р.**

Найти последовательность над полем  $R$ , члены которой удовлетворяют соотношению  $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = -4$  и  $a_1 = 1, a_2 = -7$ .

Р е ш е н и е.

Составим однородное рекуррентное уравнение, соответствующее данному неоднородному соотношению,  $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$ . Его характеристическое уравнение имеет вид  $x^2 - 6x + 9 = 0$ . Корнем этого уравнения является 3, его кратность равна 2. Общее решение однородного соотношения, соответствующее данному, запишется в виде  $a_n = c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 3^n \cdot n$ .

По виду правой части  $f(n) = -4$  неоднородного уравнения частное решение  $\tilde{a}_n$  исходного соотношения будем искать в виде многочлена нулевой степени:  $\tilde{a}_n = A$ . Подставим частное решение в неоднородное соотношение и найдем  $A = -1$ .

Окончательно общее решение данного неоднородного рекуррентного соотношения имеет вид  $a_n = -1 + c_1 \cdot 3^n + c_2 \cdot 3^n \cdot n$ .

Для нахождения решения, удовлетворяющего начальным условиям, составим систему

$$\begin{aligned} -1 + c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 3 \cdot n &= 1, \\ -1 + c_1 \cdot 3^2 + c_2 \cdot 3^2 \cdot n &= -7. \end{aligned}$$

Решив ее относительно  $c_1$  и  $c_2$ , получим

$$a_n = -1 + 2 \cdot 3^n - \frac{4}{3} \cdot 3^n \cdot n.$$

**3.2.** Предположим, что  $f(n) = p(n)\lambda^n$ ,  $\lambda \neq 1$ , а  $p(n)$  – многочлен степени  $m$ . Если  $\lambda$  не является корнем характеристического многочлена  $\varphi(x)$ , то частное решение ( $\tilde{b}_n$ ) будем искать, положив  $\tilde{b}_n = q(n)\lambda^n$ , где  $q(n)$  – многочлен степени не выше, чем  $m$ .

Если  $\lambda$  – корень кратности  $s$  характеристического многочлена  $\varphi(x)$ , то частное решение будем искать в виде последовательности ( $\tilde{b}_n$ ), где  $\tilde{b}_n = n^s q(n)\lambda^n$ , где  $q(n)$  – многочлен над  $\mathbf{P}$  степени не выше, чем  $m$ .

**3.3.** К случаям 3.1 и 3.2 можно прийти на основании предложения 1.6.3.

П р и м е р ы.

1. Найдите общее решение над  $R$  уравнения

$$x_{n+2} - x_{n+1} + 3x_n = -2n + 3.$$

Р е ш е н и е.

Составим однородное рекуррентное уравнение, соответствующее данному:

$$x_{n+2} - x_{n+1} + 3x_n = 0.$$

Его характеристическое уравнение  $x^2 - x + 3 = 0$  имеет корни  $\frac{1+i\sqrt{11}}{2}, \frac{1-i\sqrt{11}}{2}$ .

Общее решение однородного уравнения запишем в следующем виде:

$$(\hat{a}_n), \text{ где } \hat{a}_n = C_1 \cdot \left(\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right)^n + C_2 \cdot \left(\frac{1-i\sqrt{11}}{2}\right)^n.$$

По виду правой части  $f(n) = -2n + 3$  частное решение  $\tilde{b}_n$  исходного уравнения будем искать в виде многочлена первой степени:  $\tilde{b}_n = An + B$ , так как 1 не является корнем характеристического уравнения.

Подставим частное решение в исходное уравнение и найдем  $A$  и  $B$ :

$$A(n+2) + b - A(n+1) - B + 3An + 3B = -2n + 3;$$

отсюда, в силу того, что это равенство должно выполняться при любом  $n = 0, 1, 2, \dots$ , находим  $A = -\frac{2}{3}, B = \frac{11}{9}$ .

Окончательно общее решение данного неоднородного уравнения имеет вид

$$a_n = \alpha_1 \cdot \left(\frac{1+i\sqrt{11}}{2}\right)^n + \alpha_2 \cdot \left(\frac{1-i\sqrt{11}}{2}\right)^n - \frac{2}{3}n + \frac{11}{9}.$$

**2. Найдите общее решение рекуррентного уравнения над полем  $\mathbf{R}$ :**

$$x_{n+3} - 6x_{n+2} + 11x_{n+1} - 6x_n = -24n^2 - 4n - 8.$$

Р е ш е н и е.

Общим решением однородного уравнения, соответствующего данному:

$$x_{n+3} - 6x_{n+2} + 11x_{n+1} - 6x_n = 0,$$

является последовательность  $(\hat{a}_n)$ , где  $\hat{a}_n = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot 2^n + \alpha_3 \cdot 3^n$ , поскольку корнями характеристического многочлена  $\varphi(x)$  являются числа 1, 2 и 3.

Так как 1 является корнем кратности 1, то общий член  $\tilde{b}_n$  частного решения будем искать в виде многочлена

$$\tilde{b}_n = An^3 + Bn^2 + Cn.$$

Тогда

$$\tilde{b}_{n+1} = A(n+1)^3 + B(n+1)^2 + C(n+1),$$

$$\tilde{b}_{n+2} = A(n+2)^3 + B(n+2)^2 + C(n+2),$$

$$\tilde{b}_{n+3} = A(n+3)^3 + B(n+3)^2 + C(n+3).$$

Подставим их в исходное рекуррентное уравнение:

$$\begin{aligned} & A(n+3)^3 + B(n+3)^2 + C(n+3) - 6A(n+3)^3 - 6B(n+2)^2 - 6C(n+2) + \\ & + 11A(n+1)^3 + 11B(n+1)^2 + 11C(n+1) - 6An^3 - 6Bn^2 - 6Cn = \\ & = -24n^2 - 4n - 8. \end{aligned}$$

Раскрыв скобки и сгруппировав подобные слагаемые, получим систему уравнений относительно коэффициентов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ :

$$\begin{cases} 6A = -24, \\ -12A - 4B = -4, \\ -10A - 4B + 2C = -8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -4, \\ B = 13, \\ C = 2. \end{cases}$$

Отсюда общее решение определяется условием

$$a_n = C_1 + C_2 \cdot 2^n + C_3 \cdot 3^n - 4n^3 + 13n^2 + 2n.$$

**3. Найти общее решение рекуррентного уравнения над полем  $\mathbf{R}$ :**

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} - 8x_n = -10n + 24 \cdot 2^n.$$

**Р е ш е н и е.**

Характеристический многочлен соответствующего однородного уравнения имеет вид  $\varphi(x) = x^2 + 2x - 8$ . Корнями этого

многочлена являются числа 2 и  $-4$ , поэтому общее решение  $(\hat{a}_n)$  определяется условием

$$\hat{a}_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-4)^n.$$

Составим два неоднородных рекуррентных уравнения

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} - 8x_n = -10n, \quad (1.6.3)$$

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} - 8x_n = 24 \cdot 2^n. \quad (1.6.4)$$

Поскольку 1 не является корнем характеристического уравнения  $\varphi(x) = 0$ , то частное решение  $(b_n^1)$  уравнения (1.6.3) будем искать исходя из условия  $b_n^1 = an + b$ . Тогда, подставив в (1.6.3), получим

$$a(n+2) + b + 2(a(n+1) + b) - 8(an + b) = -12n.$$

Отсюда найдем

$$\begin{cases} -5a = -10, \\ 4a - 5b = 0. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим  $a = 2$ ,  $b = \frac{8}{5}$ . Значит,  $b_n^1 = 2n + \frac{8}{5}$ .

Число 2 является простым корнем характеристического многочлена  $\varphi(x)$ , поэтому частное решение  $(b_n^2)$  уравнения (1.6.4) будем искать исходя из условия  $b_n^2 = An \cdot 2^n$ .

Подставив  $b_n^2$  в (1.6.4), получим

$$A(n+2) \cdot 2^n \cdot 4 + 2A(n+1) \cdot 2^n \cdot 2 - 8An \cdot 2^n = 24 \cdot 2^n.$$

Отсюда,  $A = 2$ .

Тогда общее решение исходного уравнения будет иметь вид

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot (-4)^n + 2n + \frac{8}{5} + 2n \cdot 2^n.$$

### Упражнения

Решите следующие линейные неоднородные рекуррентные уравнения:

1.  $x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = n \cdot 3^n.$

2.  $x_{n+2} + x_{n+1} - 2x_n = n.$

3.  $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 16(n+2)(-2)^n.$

$$4. x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = (20n + 7) \cdot 3^n.$$

$$5. x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = n \cdot 2^n.$$

$$6. x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = -(n + 2) \cdot 2^n.$$

### § 1.7. Рекуррентные уравнения над полем действительных чисел

Поле действительных чисел имеет нулевую характеристику, поэтому все теоремы о линейных рекуррентных уравнениях и их решениях будут иметь место и для уравнений над полем действительных чисел. Любой многочлен из  $\mathbf{R}[x]$  можно разложить на линейные множители над полем комплексных чисел. Это значит, что поле комплексных чисел является полем разложения любого многочлена с действительными коэффициентами. Следовательно, любое линейное рекуррентное уравнение с действительными коэффициентами имеет решение над полем  $\mathbf{C}$  комплексных чисел.

Как известно, если  $\lambda$  — комплексный корень многочлена с действительными коэффициентами, то сопряженное число  $\bar{\lambda}$  также является корнем этого многочлена. Если  $\lambda$  имеет кратность  $\alpha$ , то  $\bar{\lambda}$  также будет иметь кратность  $\alpha$ . На основании этих свойств можно по каждой паре комплексно-сопряженных корней построить линейно независимую систему из  $2\alpha$  вещественных решений. Опишем процесс построения общего решения однородного линейного рекуррентного уравнения над полем действительных чисел в случае, когда среди корней характеристического уравнения есть мнимые корни.

Пусть характеристический многочлен  $\varphi(x)$  рекуррентного уравнения

$$x_{n+k} + p_{k-1}x_{n+k-1} + \dots + p_1x_{n+1} + p_0x_n = 0, \quad (1.7.1)$$

заданного над полем  $\mathbf{R}$ , имеет комплексные корни  $\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2, \dots, \lambda_s, \bar{\lambda}_s$  ( $\lambda_i \neq \bar{\lambda}_i$ ) и вещественные корни  $\lambda_{s+1}, \lambda_{s+2}, \dots, \lambda_m$ , кратности которых  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$  соответственно. Тогда

$$2(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_m) + \alpha_{s+1} + \dots + \alpha_m = k.$$

По теореме 1.5.2 система решений

$$\lambda_t^n, \bar{\lambda}_t^n, n\lambda_t^n, n\bar{\lambda}_t^n, \dots, n^{\alpha_t-1}\lambda_t^n, n^{\alpha_t-1}\bar{\lambda}_t^n, \lambda_j^n, n\lambda_j^n, \dots, n^{\alpha_j-1}\lambda_j^n \quad (1.7.2)$$

$$(t = 1, 2, \dots, s; j = s + 1, \dots, m)$$

образует базис пространства решений рекуррентного уравнения (1.7.1) над полем  $C = R(i)$ . Используя конечную цепочку элементарных преобразований из системы (1.7.2), перейдем к следующей системе решений уравнения (1.7.1):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\lambda_t^n + \bar{\lambda}_t^n), \frac{1}{2i}(\lambda_t^n - \bar{\lambda}_t^n), \frac{1}{2}n(\lambda_t^n + \bar{\lambda}_t^n), \frac{1}{2i}n(\lambda_t^n - \bar{\lambda}_t^n), \dots \\ & \dots, \frac{1}{2}n^{\alpha_t-1}(\lambda_t^n + \bar{\lambda}_t^n), \frac{1}{2i}n^{\alpha_t-1}(\lambda_t^n - \bar{\lambda}_t^n), \lambda_j^n, n\lambda_j^n, \dots, n^{\alpha_j-1}\lambda_j^n \quad (1.7.3) \\ & (t=1, 2, \dots, s; j=s+1, \dots, m). \end{aligned}$$

Система (1.7.3)  $C$ -линейно независима, следовательно, она и  $R$ -линейно независима.

Представим комплексные числа  $\lambda_i$  в тригонометрической форме:

$$\lambda_t = r_t(\cos \varphi_t + i \sin \varphi_t).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_t &= r_t(\cos \varphi_t - i \sin \varphi_t) \text{ и } \lambda_t^n = r_t^n(\cos n\varphi_t + i \sin n\varphi_t), \\ \bar{\lambda}_t^n &= r_t^n(\cos n\varphi_t - i \sin n\varphi_t), \end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{1}{2}(\lambda_t^n + \bar{\lambda}_t^n) = r_t^n \cos n\varphi_t, \quad \frac{1}{2i}(\lambda_t^n - \bar{\lambda}_t^n) = r_t^n \sin n\varphi_t.$$

Отсюда следует, что (1.7.3) представляет собой следующую  $R$ -линейно независимую систему решений уравнения (1.7.1):

$$\begin{aligned} & r_t^n \cos n\varphi_t, r_t^n \sin n\varphi_t, r_t n \cos n\varphi_t, r_t n \sin n\varphi_t, \dots, \\ & \dots, r_t n^{\alpha_t-1} \cos n\varphi_t, r_t n^{\alpha_t-1} \sin n\varphi_t, \\ & \lambda_j^n, n\lambda_j^n, \dots, n^{\alpha_j-1}\lambda_j^n. \end{aligned}$$

Число этих решений равно  $k = \deg \varphi(x)$ , поэтому они образуют базис пространства решений уравнения (1.7.1) над полем действительных чисел.

Общее решение уравнения (1.7.1) над полем действительных чисел является последовательностью, содержащей произвольные вещественные постоянные

$$c_{t0}, c_{t1}, \dots, c_{t\alpha_t-1}, c_{t0}^*, c_{t1}^*, \dots, c_{t\alpha_t-1}^*, c_{j0}, c_{j1}, \dots, c_{j\alpha_j-1},$$

и задается общим членом

$$a_n = \sum_{t=1}^s (r_t^n (c_{t0} + c_{t1}n + \dots + c_{t\alpha_t-1}n^{\alpha_t-1}) \cos n\varphi_t + r_t^n (c_{t0}^* + c_{t1}^*n + \dots + c_{t\alpha_t-1}^*n^{\alpha_t-1}) \sin n\varphi_t) + \\ + \sum_{j=s+1}^m (c_{j0} + c_{j1}n + \dots + c_{j\alpha_j-1}n^{\alpha_j-1}) \lambda_j^n.$$

В более компактной записи это выражение можно представить в виде

$$a_n = \sum_{t=1}^s r_t^n (P^t(n) \cos n\varphi_t + P^{*t}(n) \sin n\varphi_t) + \sum_{j=s+1}^m Q^j(n) \lambda_j^n,$$

где

$$P_{\alpha_t-1}^t(n) = c_{t0} + c_{t1}n + \dots + c_{t\alpha_t-1}n^{\alpha_t-1},$$

$$P_{\alpha_t-1}^{*t}(n) = c_{t0}^* + c_{t1}^*n + \dots + c_{t\alpha_t-1}^*n^{\alpha_t-1},$$

$$Q_{\alpha_j-1}^j(n) = c_{j0} + c_{j1}n + \dots + c_{j\alpha_j-1}n^{\alpha_j-1}.$$

**Пример.**

Решить над полем  $\mathbf{R}$  рекуррентное уравнение

$$x_{n+5} - 2x_{n+4} + 8x_{n+2} - 12x_{n+1} + 8x_n = 0.$$

**Решение.**

Составим характеристическое уравнение

$$x^5 - 2x^4 + 8x^2 - 12x + 8 = 0.$$

Путем испытаний находим, что целые числа  $0, \pm 1, 2$  не являются корнями характеристического уравнения. При помощи схемы Горнера устанавливаем, что  $-2$  является корнем характеристического уравнения:

|    |   |    |   |    |     |   |
|----|---|----|---|----|-----|---|
|    | 1 | -2 | 0 | 8  | -12 | 8 |
| -2 | 1 | -4 | 8 | -8 | 4   | 0 |

Остальные корни характеристического уравнения являются корнями многочлена  $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4$ .

Так как  $x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 8x + 4 = (x^2 - 2x + 2)^2$ , то остальные корни находим как корни уравнения  $(x^2 - 2x + 2)^2 = 0$ .

Отсюда  $x_{1,2} = 1 \pm i$ . Значит,  $\lambda_1 = 1 + i$ ,  $\lambda_2 = 1 - i$  – корни характеристического уравнения, кратности которых равны 2.  $\lambda_3 = -2$  –

простой корень характеристического многочлена. Для нахождения вещественных решений рекуррентного уравнения корни  $\lambda = 1 + i$  и  $\bar{\lambda} = 1 - i$  представляем в тригонометрической форме:

$$1 \pm i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} \pm i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

Тогда получим следующую систему частных решений данного уравнения, которая составляет базис пространства решений:

$$(\sqrt{2})^n \cos \frac{\pi n}{4}, (\sqrt{2})^n \sin \frac{\pi n}{4}, (\sqrt{2})^n n \cos \frac{\pi n}{4}, (\sqrt{2})^n n \sin \frac{\pi n}{4}, (-2)^n.$$

Общее решение представляет собой последовательность  $(a_n)$ , где

$$a_n = (\sqrt{2})^n \left( (c_1 + c_2 n) \cos \frac{\pi n}{4} + (c_1^* + c_2^* n) \sin \frac{\pi n}{4} \right) + c_3 (-2)^n.$$

Пусть нам дано рекуррентное неоднородное уравнение

$$x_{n+k} + p_{k-1} x_{n+k-1} + \dots + p_1 x_{n+1} + p_0 x_n = f(n)$$

над полем действительных чисел, и правая часть  $f(n)$  имеет вид

$$f(n) = r^n (p(n) \cos n\varphi + q(n) \sin n\varphi),$$

где  $p(n)$  и  $q(n)$  – многочлены над  $\mathbf{R}$ ,  $r > 0$ .

Как найти частное решение данного рекуррентного уравнения в этом случае?

Чтобы найти вещественное решение этого уравнения, составим комплексное число (по правой части уравнения):

$$\mu = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Если число  $\mu$  не является корнем характеристического многочлена  $\varphi(x)$ , то частное решение будем искать в виде последовательности  $(b_n)$ , где

$$b_n = r^n (\tilde{p}(n) \cos n\varphi + \tilde{q}(n) \sin n\varphi),$$

где  $\tilde{p}$  и  $\tilde{q}$  – многочлены от  $n$ , степени которых не превышают  $\max \{\deg p, \deg q\}$ .

Если число  $\mu$  является корнем характеристического многочлена  $\varphi(x)$  и  $\alpha$  – кратность этого корня, то частное решение ищется в виде последовательности  $(b_n)$ , где

$$b_n = n^\alpha r^n (\tilde{p}(n) \cos n\varphi + \tilde{q}(n) \sin n\varphi),$$

где  $\tilde{p}$  и  $\tilde{q}$  – многочлены, удовлетворяющие условиям, приведенным выше.

### Упражнения

Решите однородные линейные рекуррентные уравнения:

1.  $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0$ .
2.  $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 8x_n = 0$ .
3.  $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 18x_n = 0$ .
4.  $x_{n+3} + 4x_{n+2} + x_{n+1} + 4x_n = 0$ .
5.  $x_{n+3} + 8x_n = 0$ .
6.  $x_{n+3} + x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$ .
7.  $x_{n+4} + 2x_{n+3} + 3x_{n+2} + 2x_{n+1} + x_n = 0$ .
8.  $x_{n+4} - 2x_{n+3} + 3x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$ .
9.  $x_{n+5} - 6x_{n+4} + 16x_{n+3} - 24x_{n+2} + 20x_{n+1} - 8x_n = 0$ .

Решите неоднородные линейные рекуррентные уравнения:

1.  $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 18x_n = 13n - 4$ .
2.  $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 18x_n = 3^n \sin \frac{\pi n}{4}$ .
3.  $x_{n+2} + x_n = \sin n + \sin(n+2)$ .
4.  $x_{n+2} - x_{n+1} + x_n = (7n+3)(-2)^n$ .
5.  $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = -(7n+5) \cdot 3^n$ .
6.  $x_{n+2} - 7x_{n+1} + 12x_n = (15n+1)(-2)^n$ .
7.  $x_{n+2} + x_n = (5n+3)(-2)^n + 5 \cdot 2^n$ .
8.  $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 2^n \cdot \cos \frac{\pi n}{3} + 8 \cdot 2^n$ .

$$9. x_{n+3} - 3x_{n+2} + 4x_{n+1} - 2x_n = (6n + 11) + (\sqrt{2})^n \sin \frac{\pi n}{4}.$$

$$10. x_{n+3} - x_{n+2} + 4x_{n+1} - 4x_n = 26 \cdot 3^n + (10n + 9).$$

$$11. x_{n+3} - x_{n+2} + 4x_{n+1} - 4x_n = 2^n \left( n \cos \frac{\pi n}{2} + \sin \frac{\pi n}{2} \right).$$

$$12. x_{n+3} + x_{n+2} + 4x_{n+1} + 4x_n = 5 \cdot (-2)^n + 6(n + 2)(-1)^n.$$

Найти частное решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее указанным начальным условиям:

$$1. x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = (7n - 3)(-1)^n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 2 \cos \frac{\pi}{3}.$$

$$2. x_{n+2} + 2x_{n+1} + 4x_n = 3 - 7n, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = -2 \cos \frac{2\pi}{3}.$$

$$3. x_{n+2} - 4x_{n+1} + 8x_n = (13n + 6)(-1)^{n+1}, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

$$4. x_{n+3} - 7x_{n+2} + 14x_{n+1} - 8x_n = 30 \cdot (-1)^n, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 3.$$

## § 1.8. Производящие функции рекуррентных последовательностей

### 1. Алгебра формальных рядов

**Определение 1.8.1.** Формальным рядом назовем степенной ряд

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

где  $a_n$  — элементы поля  $P$ .

Два формальных ряда называются равными, если равны их коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ .

Сумма формальных рядов  $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  и  $B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$

определяется следующим образом:

$$A(x) + B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i.$$

Операция умножения формального ряда  $A(x)$  на скаляр  $\lambda$  из поля  $P$  определяется соотношением

$$\lambda A(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \lambda a_2 x^2 + \dots + \lambda a_n x^n + \dots$$

Введенные таким образом операции задают на множестве  $P[[x]]$  формальных рядов структуру бесконечномерного векторного пространства.

Произведение  $A(x) \cdot B(x)$  формальных рядов определяется как формальный ряд условием

$$A(x) \cdot B(x) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \dots$$

Коэффициент  $c_n$  при  $x^n$  вычисляется по формуле

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0.$$

Векторное пространство формальных степенных рядов с введенной операцией умножения рядов становится линейной алгеброй над полем  $P$ , которая называется алгеброй формальных рядов. Заметим, что эта алгебра ассоциативна, коммутативна и обладает единицей. Единица имеет вид

$$1 + 0 \cdot x + 0 \cdot x^2 + \dots + 0 \cdot x^{n-1} + \dots,$$

где  $1$  – единица поля  $P$ .

**Определение 1.8.2.** Формальный ряд  $A(x)$  называется обратимым, если существует степенной ряд  $B(x)$  такой, что  $A(x) \cdot B(x) = 1$ .

**Предложение 1.8.1.** Формальный ряд  $A(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$  обратим тогда и только тогда, когда  $a_0 \neq 0$ .

*Доказательство.*

1. Пусть  $A(x)$  – обратный ряд. Тогда существует  $B(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$ , причем

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right) \left( \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \right) = 1. \quad (1.8.1)$$

Левую часть можно представить в виде формального ряда  $\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$ , где

$$c_i = a_0 b_i + a_1 b_{i-1} + \dots + a_i b_0, \quad (1.8.2)$$

причем при  $i > 0$ ,  $c_i = 0$ , а  $c_0 = 1$ .

При  $i = 0$  получаем

$$c_0 = a_0 b_0. \quad (1.8.3)$$

Из равенства формальных рядов следует, что  $c_0 = 1$ , поэтому  $a_0 b_0 = 1$ . Следовательно,  $a_0 \neq 0$ .

2. Пусть  $a_0 \neq 0$ . Составим соотношение (1.8.1), где коэффициенты ряда  $B(x)$  подлежат определению. Из равенства (1.8.3) в силу  $a_0 \neq 0$  следует, что  $b_0 = a_0^{-1}$ .

Предположим, что  $b_0, b_1, \dots, b_i$  уже вычислены. Вычислим  $b_{i+1}$ . По формуле (1.8.2) найдем  $c_{i+1}$ :

$$c_{i+1} = a_0 b_{i+1} + a_1 b_i + \dots + a_{i+1} b_0.$$

Отсюда, учитывая, что  $c_{i+1} = 0$ , найдем  $b_{i+1}$ :

$$b_{i+1} = -a_0^{-1} (a_1 b_i + a_2 b_{i-1} + \dots + a_{i+1} b_0).$$

Таким образом, формальный ряд  $B(x)$ , удовлетворяющий условию (1.8.1), существует.

## 2. Определение производящей функции рекуррентной последовательности

Рассмотрим рекуррентную последовательность  $(a_n)$  над полем  $P$ , удовлетворяющую соотношению

$$a_{n+k} + p_{k-1} a_{n+k-1} + \dots + p_0 a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Первые  $k$  членов последовательности  $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$  будем считать фиксированными.

**Определение 1.8.3.** Формальный ряд

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

называется производящей функцией рекуррентной последовательности  $(a_n)$ .

**П р и м е р.**

$A(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + 13x^6 + \dots$  — производящая функция последовательности чисел Фибоначчи.

### 3. Нахождение производящей функции рекуррентной последовательности

Пусть  $(a_n)$  – рекуррентная последовательность, удовлетворяющая соотношению

$$a_{n+k} + p_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + p_0a_n = 0,$$

и пусть через  $A(x)$  обозначена производящая функция этой последовательности. Поставим задачу получения способа построения  $A(x)$ . Из определения производящей функции имеем

$$A(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{k-1}x^{k-1} + a_kx^k + \dots \quad (1.8.4)$$

Умножим равенство (1.8.4) последовательно на  $1, p_{k-1}x, p_{k-2}x^2, \dots, p_1x^{k-1}, p_0x^k$  и затем полученные равенства сложим. Коэффициенты при  $x^{n+k}$  ( $n \geq 0$ ) имеют вид

$$a_{n+k} + p_{k-1}a_{n+k-1} + \dots + p_0a_n,$$

поэтому все они равны нулю. Следовательно, после сложения рассматриваемых равенств, получим следующее равенство:

$$(1 + p_{k-1}x + p_{k-2}x^2 + \dots + p_1x^{k-1} + p_0x^k)A(x) = q(x),$$

где  $q(x) = q_0 + q_1x + \dots + q_{k-1}x^{k-1}$  – многочлен степени  $\leq k-1$ , коэффициенты которого вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} q_0 &= a_0, \\ q_1 &= p_{k-1}a_0 + a_1, \\ q_2 &= p_{k-2}a_0 + p_{k-1}a_1 + a_2, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ q_{k-1} &= p_1a_0 + p_2a_1 + \dots + a_{k-1}. \end{aligned} \quad (1.8.5)$$

Многочлен  $1 + p_{k-1}x + p_{k-2}x^2 + \dots + p_1x^{k-1} + p_0x^k = \varphi^*(x)$  является двойственным характеристическому многочлену  $\varphi(x)$ . Таким образом, производящая функция  $A(x)$  получается при делении многочлена  $q(x)$  на  $\varphi^*(x)$ :

$$A(x) = \frac{q(x)}{\varphi^*(x)}.$$

Многочлен  $q(x)$  называется производящим многочленом рекуррентной последовательности. Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

**ТЕОРЕМА 1.8.1.** Пусть  $a_0, a_1, \dots$  – однородная рекуррентная последовательность порядка  $k$  над полем  $P$ ;  $\varphi(x)$  – характеристический многочлен;  $\varphi^*(x)$  – двойственный многочлен;  $A(x)$  – производящая функция этой последовательности. Тогда имеет место равенство

$$A(x) = \frac{q(x)}{\varphi^*(x)}, \quad (1.8.6)$$

где  $q(x) = \sum_{s=0}^{k-1} q_s x^s$ , а  $q_s$  вычисляются по формулам (1.8.5).

Верно и обратное утверждение: если  $q(x)$  – многочлен степени  $\leq k-1$ ,  $\varphi^*(x)$  задается равенством

$$\varphi^*(x) = 1 + p_{k-1}x + p_{k-2}x^2 + \dots + p_1x^{k-1} + p_0x^k,$$

то формальный степенной ряд  $A(x)$ , задаваемый равенством (1.8.6), является производящей функцией некоторой однородной рекуррентной линейной последовательности, характеристический многочлен которой определяется условием  $\varphi(x) = x^k \varphi^*\left(\frac{1}{x}\right)$ .

Формулам (1.8.5) можно придать другой вид. Для этого введем матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & p_{k-1} & p_{k-2} & \dots & p_2 & p_1 \\ 0 & 1 & p_{k-1} & \dots & p_3 & p_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & p_{k-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

строками которой являются коэффициенты характеристического многочлена: первая строка составлена из коэффициентов характеристического многочлена отбрасыванием коэффициента  $p_0$ , каждая другая строка получается из предыдущей отбрасыванием последнего элемента и добавлением нуля слева от главной диагонали. Умножив начальный вектор  $\bar{a}_0 = (a_0, a_1, \dots, a_{k-1})$

однородной линейной последовательности на матрицу  $Q$ , получим вектор  $\bar{q}_0 = (q_0, q_1, \dots, q_{k-1})$ :

$$\bar{q} = \bar{a}_0 Q = (a_0, p_{k-1}a_0 + a_1, p_{k-2}a_0 + p_{k-1}a_1 + a_2, \dots, p_1a_0 + p_2a_1 + \dots + p_{k-1}a_{k-2} + a_{k-1}).$$

**Пример.**

Найдем производящую функцию для последовательности чисел Фибоначчи.

Члены последовательности Фибоначчи удовлетворяют соотношению

$$a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0, \quad a_0 = a_1 = 1.$$

Составим характеристический многочлен  $\varphi(x) = x^2 - x - 1$ . Двойственным для него будет многочлен  $\varphi^*(x) = 1 - x - x^2$ .

Коэффициенты многочлена  $q(x)$  найдем по формуле  $\bar{q} = \bar{a}_0 Q$ , где  $\bar{a}_0 = (1, 1)$ ,  $Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ :

$$\bar{a}_0 Q = (1, 1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (1, 0).$$

Следовательно,  $q(x) = 1$ . Получим производящую функцию

$$A(x) = \frac{1}{1 - x - x^2}:$$

$$\begin{array}{r} - \frac{1}{1-x-x^2} \left| \frac{1-x-x^2}{1+x+2x^2+3x^3+\dots} \right. \\ - \frac{x+x^2}{x+x^2} \\ - \frac{x-x^2-x^3}{2x^2+x^3} \\ - \frac{2x^2-2x^3-2x^4}{3x^3+2x^4} \\ - \frac{3x^3-3x^4-3x^5}{5x^4-3x^5} \\ \dots \end{array}$$

$$A(x) = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots$$

### Упражнения

1. Пусть  $B(x) = 2 + x^2$ ,  $C(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  —

формальные ряды над полем  $Z_3$ . Найдите произведение этих рядов над данным полем.

2. Найдите ряд, обратный  $B(x) = 3 + x + x^2$  над полем  $Z_5$ .

3. Найдите производящую функцию рекуррентной последовательности, удовлетворяющей соотношению  $a_{n+2} - a_{n+1} + 5a_n = 0$ ,  $a_1 = 2$ ,  $a_2 = -3$  над полем  $R$ .

4. Найдите производящую функцию для последовательности, удовлетворяющей рекуррентному соотношению  $u_{n+4} = u_{n+3} + u_{n+1} + u_n$ ,  $u_1 = u_2 = 1$ ,  $u_3 = 0$ ,  $u_4 = 1$  над полем  $Z_2$ . Определите период этой последовательности.

5. Найдите производящую функцию для рекуррентной последовательности  $u_{n+4} = u_{n+3} + u_{n+1} + u_n + 1$ ,  $u_1 = u_2 = u_4 = 1$ ,  $u_3 = 0$  над полем  $Z_2$ .

*Указание.* Повысив порядок рекуррентности, перейдите к однородному соотношению.

6. Найдите производящую функцию последовательности, удовлетворяющей соотношению  $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = -3$ ,  $a_3 = -29$ .

7. Найдите производящую функцию для рекуррентной последовательности  $u_{n+4} = u_{n+3} + u_{n+1} + u_n$ ,  $u_1 = u_2 = u_4 = 1$ ,  $u_3 = 0$  над полем  $Z_2$ .

8. Докажите, что каждая линейная рекуррентная последовательность порядка  $k$  над полем  $P$  характеристики  $q$  является периодической. При этом ее минимальный период  $r$  (наименьший из всех возможных периодов) удовлетворяет условию:

а)  $r \leq q^k$ , если последовательность неоднородная;

б)  $r \leq q^k - 1$ , если последовательность однородная.

9. Разложите в степенной ряд по возрастающим степеням  $x$  дробь

$$\frac{9}{(x-1)(x+2)^2}.$$

10. Найдите однородное линейное рекуррентное уравнение, которому удовлетворяют коэффициенты разложения дроби задачи 9.

## § 1.9. Многочлены, определяемые рекуррентными соотношениями

Рассмотрим последовательность многочленов  $y_n(x)$  над полем действительных чисел, которые удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$f_1(n)y_n(x) + (f_2(n) - f_3(n)x)y_{n-1}(x) + f_4(n)y_{n-2}(x) = 0, \quad (n \geq 1) \quad (1.9.1)$$

с начальными условиями  $y_{-1}(x) = 0$ ,  $y_0(x) = 1$ , где  $f_i(n)$  – вещественные функции натурального аргумента  $n$ . Предположим, что  $f_1(n)$  и  $f_3(n)$  не обращаются в нуль при каждом значении аргумента  $n$ .

Введем обозначения:

$$a_n = \frac{f_1(n)}{f_3(n)}, \quad b_n = \frac{f_2(n)}{f_3(n)}, \quad c_n = \frac{f_4(n)}{f_3(n)}.$$

Соотношению (1.9.1) поставим в соответствие матрицу (сопровождающую матрицу)

$$Y_n = \begin{pmatrix} b_n & c_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{n-2} & b_{n-2} & c_{n-2} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_2 & b_2 & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & b_1 \end{pmatrix}.$$

Построенная матрица называется матрицей Якоби.

**Предложение 1.9.1.** Корни многочлена  $y_n(x)$  являются собственными числами матрицы  $Y_n$  ( $n \geq 2$ ).

*Доказательство.* Пусть  $\lambda$  – корень многочлена  $y_n(x)$ . Тогда  $y_n(\lambda) = 0$  и  $y_0(\lambda) = 1$ . Подставим  $\lambda$  в (1.9.1), тогда

$$(f_2(n) - f_3(n)\lambda)y_{n-1}(x) + f_4(n)y_{n-2}(x) = 0, \quad (1.9.2)$$

где  $y_k = y_k(\lambda)$ .

Из (1.9.1) получим следующую систему линейных однородных соотношений

$$\left\{ \begin{array}{l} (b_n - \lambda)y_{n-1} + c_n y_{n-2} + \dots = 0, \\ a_{n-1}y_{n-1} + (b_{n-1} - \lambda)y_{n-2} + c_n y_{n-3} + \dots = 0, \\ a_{n-2}y_{n-2} + (b_{n-2} - \lambda)y_{n-3} + c_{n-2}y_{n-4} + \dots = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_2 y_2 + (b_2 - \lambda)y_1 + c_2 y_0 = 0, \\ a_1 y_1 + (b_1 - \lambda)y_0 = 0. \end{array} \right.$$

Так как  $y_0 = 1$ , то определитель этой системы равен нулю:  $\det(Y_n - \lambda E) = 0$ . Отсюда следует, что  $\lambda$  – собственное число матрицы  $Y_n$ .

*Следствие.* Сумма всех корней многочлена  $y_n(x)$  равна  $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ .

К числу многочленов, определяемых соотношениями вида (1.9.1), относятся многочлены, возникающие в математической физике. Отметим некоторые из них.

### 1. Многочлены Лагерра $L_n^a(x)$ .

Эти многочлены определяются рекуррентными соотношениями вида (1.9.1) при условиях

$$\begin{aligned} f_1(n) &= n, \quad f_2(n) = -(2n - 1 + \alpha - x), \\ f_3(n) &= -1, \quad f_4(n) = n + \alpha - 1 \quad (n \geq 1; \alpha > -1). \end{aligned}$$

$$L_{-1}^a(x) = 0, \quad L_0^a(x) = 1:$$

$$nL_n^a(x) - (2n - 1 + \alpha - x)L_{n-1}^a(x) + (n + \alpha - 1)L_{n-2}^a(x) = 0. \quad (1.9.3)$$

### 2. Многочлены Лежандра $P_n(x)$ .

Многочлены Лежандра  $P_n(x)$  определяются соотношениями

$$nP_n(x) - (2n - 1)xP_{n-1}(x) + (n - 1)P_{n-2}(x) = 0, \quad (n \geq 1), \quad (1.9.4)$$

$$P_{-1}(x) = 0, \quad P_0(x) = 1.$$

Сопровождающая матрица рекуррентного соотношения (1.9.4) имеет вид

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{n-1}{2n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n-1}{2n-3} & 0 & \frac{n-2}{2n-3} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а ее определитель  $\det B_n$  ( $n \geq 2$ ) вычисляется по формуле

$$\det B_n = \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot (n-1)^2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}, & \text{если } n - \text{четное;} \\ 0, & \text{если } n - \text{нечетное.} \end{cases} \quad (1.9.5)$$

### 3. Многочлены Эрмита $H_n(x)$ .

Многочлены Эрмита  $H_n(x)$  определяются соотношениями

$$H_n(x) - xH_{n-1}(x) + (n-1)H_{n-2}(x) = 0, \quad (n \geq 1),$$

$$H_{-1}(x) = 0, \quad H_0(x) = 1.$$

Эти соотношения получаются из (1.9.1) при  $f_1(n)=1$ ,  $f_2(n)=0$ ,  $f_3(n)=1$ ,  $f_4(n)=n-1$ , ( $n=1, 2, \dots$ ).

### Упражнения

1. Докажите следующие утверждения:

а) если  $a_{k-1}c_k > 0$  ( $k=2, 3, \dots, n$ ), то все характеристические числа матрицы  $Y_n$  вещественны;

б) если  $a_{k-1}c_k > 0$  ( $k=2, 3, \dots, n$ ), то все корни многочлена  $y_n(x)$  вещественны;

в) для того чтобы все характеристические числа матрицы  $Y_n$  были вещественны, необходимо и достаточно, чтобы  $a_nc_n > 0$  для всех  $n=1, 2, 3, \dots$ ;

г) если  $b_n = 0$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ), то:

–  $\Delta_n = \det Y_n$  удовлетворяет уравнению  $x_{n+2} + a_{n+1}c_{n+2}x_n = 0$ ;

$$- \det Y_{2k} = (-1)^k a_1 a_2 \dots a_{2k-1} c_2 c_4 \dots c_{2k} \quad (k \geq 2);$$

$$- \det Y_{2k+1} = 0 \quad (k \geq 3);$$

д) пусть  $b_n = 0$ . Используя результаты задачи (г), докажите, что произведение корней многочлена  $y_n(x)$  равно

$$(-1)^k a_1 a_2 \dots a_{2k-1} c_2 c_4 \dots c_{2k} \quad (k \geq 2)$$

при  $n = 2k$  и равно нулю при  $n = 2k + 1$ ;

е) если  $b_n = 0$  при всех  $n = 1, 2, 3, \dots$  и  $a_n c_{n+1} > 0$ , то характеристические числа матрицы  $Y_n$  (а значит, и все корни  $y_n(x)$ ) являются чисто мнимыми.

2. Составьте матрицу  $A_n^\alpha$ , соответствующую соотношению (1.9.3).

3. Докажите, что все корни многочлена  $L_n^\alpha(x)$  вещественны.

4. Докажите, что все корни многочлена  $L_n^\alpha(x)$  неотрицательны.

5. Найдите сумму корней многочлена  $L_n^\alpha(x)$ .

6. Найдите рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет определитель сопровождающей матрицы  $A_n^\alpha$ .

7. Используя результаты задачи 6, найдите значение определителя сопровождающей матрицы  $A_n^\alpha$ .

8. Найдите многочлены Лагерра  $L_1^\alpha(x)$ ,  $L_2^\alpha(x)$ ,  $L_3^\alpha(x)$ .

9. Докажите, что все корни многочлена Лежандра вещественны.

10. Докажите, что сумма корней многочлена Лежандра равна нулю.

11. Докажите, что произведение корней многочлена Лежандра равно  $\det B_n$ .

**12.** Найдите рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют члены последовательности, составленной из  $\det B_n$ .

**13.** Докажите равенство (1.8.5).

**14.** Найдите многочлены Лежандра  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$ ,  $P_3(x)$ ,  $P_4(x)$ .

**15.** Составьте сопровождающую матрицу рекуррентного соотношения, определяющего многочлены Эрмита.

**16.** Докажите, что все корни многочлена  $H_n(x)$  вещественны.

**17.** Докажите, что сумма всех корней многочлена  $H_n(x)$  равна нулю.

**18.** Найдите рекуррентное соотношение, которому удовлетворяет последовательность определителей сопровождающей матрицы.

**19.** Найдите произведение всех корней многочлена  $H_n(x)$ .

## Г л а в а 2

### ОПЕРАТОР КОНЕЧНОЙ РАЗНОСТИ

---

#### § 2.1. Конечные разности

Рассмотрим функцию  $f$ , которая определена для всех значений аргумента, имеющих вид

$$x_n = x_0 + nh,$$

где  $x_0, h$  – некоторые фиксированные числа;  $n$  – переменная, принимающая целые значения. Число  $h$  называется приращением аргумента, иначе – шагом.

**Определение 2.1.1.** Выражение  $f(x_0 + (n + 1)h) - f(x_0 + nh)$  называется конечной разностью функции  $f$  в точке  $x_n$ , соответствующей шагу  $h$ .

Конечная разность обозначается символом

$$\Delta_h f(x_n).$$

Таким образом,

$$\Delta_h f(x_n) = f(x_0 + (n + 1)h) - f(x_0 + nh).$$

В частности, в точке  $x_0$  конечная разность имеет вид

$$\Delta_h f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0). \quad (2.1.1)$$

По индукции можно определить конечные разности произвольного порядка.

**Определение 2.1.2.** Конечной разностью порядка  $k$  ( $k \in \{0, 1, 2, \dots, n, \dots\}$ ) в точке  $x_0$  с шагом  $h$  называется число, обозначаемое символом  $\Delta_h^k f(x_0)$ , удовлетворяющее условиям:

- 1)  $\Delta_h^0 f(x_0) = f(x_0)$ ;
- 2)  $\Delta_h^k f(x_0) = \Delta_h(\Delta_h^{k-1} f)(x_0)$ ,  $k \in \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ .

**П р и м е р ы.**

1. Пусть  $f(x) = c$ ,  $c = \text{const}$ . Тогда

$$\Delta_h f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) = c - c = 0.$$

Таким образом,  $\Delta_h c = 0$ .

2. Найдем явное выражение для конечных разностей  $\Delta_h^1 f(x_0)$ ,  $\Delta_h^2 f(x_0)$ . По определению имеем

$$\begin{aligned}\Delta_h^1 f(x_0) &= \Delta_h(\Delta_h^0 f)(x_0) = \Delta_h^0 f(x_0 + h) - \Delta_h^0 f(x_0) = \\ &= f(x_0 + h) - f(x_0) = \Delta_h f(x_0).\end{aligned}$$

Для конечной разности второго порядка имеем

$$\begin{aligned}\Delta_h^2 f(x_0) &= \Delta_h(\Delta_h^1 f)(x_0) = \Delta_h^1 f(x_0 + h) - \Delta_h^1 f(x_0) = \\ &= \Delta_h f(x_0 + h) - \Delta_h f(x_0) = \\ &= f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h) - f(x_0 + h) + f(x_0) = \\ &= f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0).\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta_h^2 f(x_0) = f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0). \quad (2.1.2)$$

3. Аналогично можно доказать, что

$$\Delta_h^3 f(x_0) = f(x_0 + 3h) - 3f(x_0 + 2h) + 3f(x_0 + h) - f(x_0). \quad (2.1.3)$$

Действительно, из определения 2.1.2 следует, что

$$\Delta_h^3 f(x_0) = \Delta_h(\Delta_h^2 f)(x_0) = \Delta_h^2 f(x_0 + h) - \Delta_h^2 f(x_0).$$

Далее, учитывая формулу (2.1.2), получим

$$\begin{aligned}\Delta_h^3 f(x_0) &= f(x_0 + h + 2h) - 2f(x_0 + h + h) + f(x_0 + h) - \\ &\quad - f(x_0 + 2h) + 2f(x_0 + h) - f(x_0).\end{aligned}$$

Отсюда следует равенство (2.1.3).

4. Найдем конечные разности функции  $f(x) = x^3$  в точке  $x_0$  с шагом  $h$ :

$$\Delta_h x^3(x_0) = (x_0 + h)^3 - x_0^3 = x_0^3 + 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3 - x_0^3.$$

Отсюда

$$\Delta_h x^3(x_0) = 3x_0^2h + 3x_0h^2 + h^3.$$

Далее

$$\begin{aligned}\Delta_h^2 x^3(x_0) &= \Delta_h(\Delta_h x^3)(x_0) = \Delta_h x^3(x_0 + h) - \Delta_h x^3(x_0) = \\ &= 3(x_0 + h)^2h + 3(x_0 + h)h^2 + h^3 - 3x_0^2h - 3x_0h^2 - h^3 = \\ &= 6x_0h^2 + 6h^3.\end{aligned}$$

Найдем конечную разность третьего порядка:

$$\begin{aligned}\Delta_h^3 x^3(x_0) &= \Delta_h(\Delta_h^2 x^3)(x_0) = \Delta_h^2 x^3(x_0 + h) - \Delta_h^2 x^3(x_0) = \\ &= 6(x_0 + h)h^2 + 6h^3 - 6x_0h^2 - 6h^3 = 6h^3.\end{aligned}$$

Так как  $\Delta_h^3 x^3(x_0) = \text{const}$ , то

$$\Delta_h^k x^3(x_0) = 0$$

при  $k > 3$ .

Обозначим через  $\mathfrak{Z}(\mathbf{R})$  множество всех функций, заданных на  $\mathbf{R}$ . Две функции  $f$  и  $g$  будем называть равными и обозначать  $f = g$ , если совпадают их области определения и для каждого числа  $x_0$  из области определения  $f(x_0) = g(x_0)$ . Если функции  $f$  и  $g$  нигде не определены, т.е.  $D(f) = D(g) = \emptyset$ , то их будем считать равными.

На множестве  $\mathfrak{Z}(\mathbf{R})$  введем операции сложения, умножения на числа и умножения функций условиями:

1.  $\forall a \in D(f) \cap D(g) \quad (f + g)(a) = f(a) + g(a).$
2.  $\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall a \in D(f) \quad (\lambda f)(a) = \lambda(f(a)).$
3.  $\forall a \in D(f) \cap D(g) \quad (fg)(a) = f(a)g(a).$

Множество  $\mathfrak{Z}(\mathbf{R})$  с введенной операцией сложения является полугруппой с нейтральным элементом. Операция умножения на числа удовлетворяет тождествам:

$$\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g,$$

$$(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f,$$

$$\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f,$$

$$1 \cdot f = f,$$

а операция умножения линейна по каждому аргументу. Будем говорить, что множество  $\mathfrak{Z}(\mathbf{R})$  с введенными выше операциями является алгеброй функций.

Определим в алгебре  $\mathfrak{Z}(\mathbf{R})$  оператор  $\Delta_h: f \rightarrow \Delta_h f$  условиями

$$\Delta_h f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$$

для каждого  $x_0, x_0 + h \in D(f)$ .

Аналогично определим операторы  $\Delta_h^k$  условиями определения 2.1.2.

Отметим основные свойства операторов  $\Delta_h^k$ .

**Предложение 2.1.1.** Для любых функций  $f, g$  и  $\lambda \in \mathbf{R}$  имеют место тождества:

$$\text{а) } \Delta_h^k(f+g) = \Delta_h^k f + \Delta_h^k g;$$

$$\text{б) } \Delta_h^k(\lambda f) = \lambda \Delta_h^k f;$$

$$\text{в) } \Delta_h^k(\Delta_h^l(f)) = \Delta_h^{k+l} f.$$

*Доказательство.* Доказательство этих свойств проведем методом математической индукции по  $k$ .

$$\text{Условие (а). Пусть } k = 0, \text{ тогда } \Delta_h^0(f+g) = f+g = \Delta_h^0 f + \Delta_h^0 g.$$

Предположим, что для каждого фиксированного значения порядка, не превосходящего  $k$ , равенство (а) выполняется. Докажем, что оно выполняется и для конечных разностей порядка  $k+1$ :

$$\Delta_h^{k+1}(f+g)(x_0) = \Delta_h(\Delta_h^k(f+g))(x_0).$$

Далее, используя индуктивное предположение, получаем

$$\Delta_h(\Delta_h^k(f+g))(x_0) = \Delta_h(\Delta_h^k f + \Delta_h^k g)(x_0).$$

Для разности первого порядка выполняется равенство

$$\begin{aligned} \Delta_h(\Delta_h^k f + \Delta_h^k g)(x_0) &= \Delta_h(\Delta_h^k f)(x_0) + \Delta_h(\Delta_h^k g)(x_0) = \\ &= \Delta_h^{k+1}(f)(x_0) + \Delta_h^{k+1}(g)(x_0). \end{aligned}$$

Таким образом, условие (а) данного предложения верно для разности любого порядка.

Условие (б) доказывается аналогично. По определению 2.1.1:

$$\Delta_h(\lambda f)(x_0) = (\lambda f)(x_0+h) - (\lambda f)(x_0) = \lambda(f(x_0+h)) - \lambda(f(x_0)) = \lambda \Delta_h f(x_0).$$

$$\begin{aligned} \Delta_h^{k+1}(\lambda f)(x_0) &= \Delta_h(\Delta_h^k(\lambda f))(x_0) = \Delta_h(\Delta_h^k(\lambda f))(x_0) = \Delta_h(\lambda \Delta_h^k f)(x_0) = \\ &= \lambda \Delta_h(\Delta_h^k f)(x_0) = \lambda \Delta_h^{k+1} f(x_0). \end{aligned}$$

Соотношение (в) докажем также методом математической индукции по  $k$ . Пусть  $k = 0$ . Из определения 2.1.2 следует, что

$$\Delta_h^{0+l} f = \Delta_h^l f = \Delta_h^0(\Delta_h^l f).$$

Отсюда получаем, что равенство (в) верно при  $k = 0$ .

Предположим, что для любого фиксированного значения  $k$  выполняется (в).

Проверим справедливость равенства (в) для  $k+1$ :

$$\Delta_h^{k+1}(\Delta_h^l f) = \Delta_h(\Delta_h^k(\Delta_h^l f)) = \Delta_h(\Delta_h^{k+l} f) = \Delta_h^{1+k+l} f.$$

Тождество (в) доказано.

Формулы, полученные в примерах 2 и 3, а также формула (2.1.1) допускают обобщения, а именно имеет место предложение 2.1.2.

**Предложение 2.1.2.** Пусть  $x_0 + th \in D(f)$  ( $t = 0, 1, \dots, n$ ). Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_h^k f(x_0) &= f(x_0 + kh) - \binom{k}{1} f(x_0 + (k-1)h) + \\ &+ \binom{k}{2} f(x_0 + (k-2)h) + \dots + (-1)^k f(x_0), \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

где  $\binom{k}{m}$  – биномиальные коэффициенты, определенные по форму-

ле  $\binom{k}{m} = \frac{k!}{m!(k-m)!}$ .

Доказательство проведем методом математической индукции по  $k = 0, 1, \dots$

При  $k = 0$  формула примет вид

$$\Delta_h^0 f(x_0) = f(x_0) = (-1)^0 \binom{0}{0} f(x_0).$$

Пусть для каждого фиксированного значения  $k$  верно равенство (2.1.4). Докажем, что оно имеет место и для  $k + 1$ :

$$\Delta_h^{k+1} f(x_0) = \Delta_h(\Delta_h^k f)(x_0) = \Delta_h^k f(x_0 + h) - (\Delta_h^k f)(x_0).$$

В силу индуктивного предположения конечные разности  $\Delta_h^k f(x_0 + h)$  и  $\Delta_h^k f(x_0)$  представим по формуле (2.1.4). Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_h^{k+1} f(x_0) &= f(x_0 + (k+1)h) - \binom{k}{1} f(x_0 + kh) + \binom{k}{2} f(x_0 + (k-1)h) + \dots \\ &\dots + (-1)^k f(x_0 + h) - f(x_0 + kh) + \binom{k}{1} f(x_0 + (k-1)h) - \binom{k}{2} f(x_0 + (k-2)h) + \dots \\ &\dots + (-1)^{k+1} f(x_0) = f(x_0 + (k+1)h) - \left( \binom{k}{0} + \binom{k}{1} \right) f(x_0 + kh) + \\ &+ \left( \binom{k}{1} + \binom{k}{2} \right) f(x_0 + (k-1)h) - \left( \binom{k}{2} + \binom{k}{3} \right) f(x_0 + (k-2)h) + \dots \\ &\dots + (-1)^k \left( \binom{k}{k-1} + \binom{k}{k} \right) f(x_0 + h) + (-1)^{k+1} f(x_0). \end{aligned}$$

На основании тождества

$$\binom{k}{m-1} + \binom{k}{m} = \binom{k+1}{m}$$

получим

$$\begin{aligned} \Delta_h^{k+1} f(x_0) &= f(x_0 + (k+1)h) - \\ &- \binom{k+1}{1} f(x_0 + kh) + \binom{k+1}{2} f(x_0 + (k-1)h) + \dots + (-1)^{k+1} f(x_0). \end{aligned}$$

Таким образом, равенство (2.1.4) имеет место и для  $k + 1$ .  
Предложение 2.1.2 доказано.

$$\text{Следствие. } \Delta_h^k x^m = \sum_{t=0}^k (-1)^t \binom{k}{t} (x + th)^m.$$

Пример 4 допускает обобщение.

**Предложение 2.1.3.** Имеет место тождество

$$\Delta_h x^m = mhx^{m-1} + P_{m-2}(x),$$

где  $P_{m-2}(x)$  – многочлен степени  $m - 2$ .

*Доказательство.* Из определения конечной разности и формулы бинома Ньютона получим

$$\begin{aligned} \Delta_h x^m &= (x + h)^m - x^m = \\ &= \binom{m}{0} x^m + \binom{m}{1} x^{m-1} h + \dots + \binom{m}{m} h^m - x^m = \\ &= mhx^{m-1} + P_{m-2}(x). \end{aligned}$$

*Следствие.* Пусть  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  – многочлен над полем действительных чисел со старшим коэффициентом  $a_n \neq 0$ , тогда  $\Delta_h f(x)$  – многочлен степени  $n - 1$  со старшим коэффициентом  $a_n nh$ .

Из предложения 2.1.3 следует, что

$$\Delta_h^2 x^m = m(m-1)h^2 x^{m-2} + P_{m-3}(x), \dots,$$

$$\Delta_h^k x^m = m(m-1)\dots(m-k+1)h^k x^{m-k} + P_{m-k-1}(x), (k \leq m-1).$$

При  $k = m - 1$  получим

$$\Delta_h^{m-1} x^m = m(m-1)\dots 2h^{m-1}x + P_0(x),$$

где  $P_0$  – многочлен нулевой степени. Отсюда

$$\Delta_h^m x^m = m!h^m,$$

$$\Delta_h^k x^m = 0 \text{ при } k > m.$$

Таким образом, имеет место формула

$$\Delta_h^k x^m = \begin{cases} m(m-1)\dots(m-k+1)h^k x^{m-k} + P_{m-k-1}(x), & k < m, \\ m!h^m, & k = m, \\ 0, & k > m. \end{cases} \quad (2.1.5)$$

В случае, когда  $f(x)$  – многочлен степени  $n$  со старшим коэффициентом  $a_n$ , получим

$$\Delta_h^k f(x) = \begin{cases} a_k k! h^k, & k = n, \\ 0, & k > n. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Рассмотрим обратную задачу. Выразим  $f(x_0 + nh)$  через конечные разности  $\Delta_h^k f(x_0)$ . Для  $n = 1$  из определения конечной разности следует, что

$$f(x_0 + h) = \Delta_h^0 f(x_0) + \Delta_h^1 f(x_0) = \sum_{t=0}^1 \binom{1}{t} \Delta_h^t f(x_0);$$

для  $n = 2$  из соотношения

$$\Delta_h^2 f(x_0) = f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)$$

получим

$$\begin{aligned} f(x_0 + 2h) &= -f(x_0) + 2(\Delta_h^0 f(x_0) + \Delta_h^1 f(x_0)) + \Delta_h^2 f(x_0) = \\ &= \Delta_h^0 f(x_0) + 2\Delta_h^1 f(x_0) + \Delta_h^2 f(x_0) = \sum_{t=0}^2 \binom{2}{t} \Delta_h^t f(x_0). \end{aligned}$$

Методом математической индукции докажем, что для любого  $n$  имеет место равенство

$$f(x_0 + nh) = \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \Delta_h^t f(x_0). \quad (2.1.7)$$

При  $n = 0$  формула (2.1.7) верна.

Предположим, что формула (2.1.7) имеет место для всех  $k \leq n$ . Докажем справедливость формулы для  $k = n + 1$ . При этом воспользуемся формулами  $\binom{n}{s} + \binom{n}{s-1} = \binom{n+1}{s}$ ,  $\binom{n}{m} = 0$  для  $m > n$  или  $m = -1, -2, \dots$ , получим

$$\begin{aligned}
f(x_0 + (n+1)h) &= f(x_0 + nh) + h = \Delta_h^0 f(x_0 + nh) + \Delta_h^1 f(x_0 + nh) = \\
&= \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \Delta_h^t (\Delta_h^0 f)(x_0) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \Delta_h^t (\Delta_h^1 f)(x_0) = \\
&= \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \Delta_h^t f(x_0) + \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \Delta_h^{t+1} f(x_0) = \\
&= \Delta_h^0 f(x_0) + \sum_{s=1}^n \binom{n}{s} \Delta_h^s f(x_0) + \sum_{s=1}^n \binom{n}{s-1} \Delta_h^s f(x_0) + \binom{n}{n} \Delta_h^{n+1} f(x_0) = \\
&= \binom{n+1}{0} \Delta_h^0 f(x_0) + \sum_{s=1}^n \left( \binom{n}{s-1} + \binom{n}{s-1} \right) \Delta_h^s f(x_0) + \binom{n+1}{n+1} \Delta_h^{n+1} f(x_0) = \\
&= \sum_{t=0}^{n+1} \binom{n+1}{t} \Delta_h^t f(x_0).
\end{aligned}$$

Соотношение (2.1.7) доказано. Оно называется обращением соотношения (2.1.4). Равенство (2.1.7) символически можно записать следующим образом:

$$f(x_0 + nh) = (\Delta_h^0 + \Delta_h)^n f(x_0),$$

где  $(\Delta_h^0 + \Delta_h)^n$  вычисляется формально по формуле бинома Ньютона.

В случае  $h = 1$  формула (2.1.7) примет вид

$$f(x_0 + n) = \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \Delta^t f(x_0). \quad (2.1.8)$$

Если  $f(x) = x^m$ , то из (2.1.7) следует

$$(x_0 + nh)^m = \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \Delta_h^t x^m(x_0).$$

Из этого равенства при  $h = 1$  получим

$$(x_0 + n)^m = \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \Delta^t x^m(x_0). \quad (2.1.9)$$

В частности, для  $x_0 = 0$  имеем

$$n^m = \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} \Delta^t x^m(0). \quad (2.1.10)$$

**Определение 2.1.3.** Числа  $\Delta_h^m x^k(0)$  обозначаются через  $\Delta_h^m 0^k$ , называются **числами Моргана**, соответствующими шагу  $h$ .

**5.** Прямыми вычислениями можно установить следующие равенства:

1.  $\Delta_h 0^2 = h^2$ .
2.  $\Delta_h 0^3 = h^3$ .
3.  $\Delta_h 0^n = h^n$ .
4.  $\Delta_h^2 0^2 = 2h^2$ .
5.  $\Delta_h^2 0^n = (2^n - 2)h^n$ .
6.  $\Delta_h^3 0^n = (3^n - 3 \cdot 2^n + 3)h^n$ .

### Упражнения

**1.** Докажите, что  $\Delta f g = \Delta f (g \circ s) + f \Delta g$ , где  $s(x) = x + 1$ .

**2.**  $\Delta_h f g = \Delta_h f (g \circ s_h) + f \Delta_h g$ , где  $s_h(x) = x + h$ .

**3.** Найдите конечные разности:

- |                                 |                        |                                             |
|---------------------------------|------------------------|---------------------------------------------|
| 1) $\Delta_2 x^2$ ;             | 7) $\Delta_h x^x$ ;    | 13) $\Delta_h \operatorname{sh} \alpha x$ ; |
| 2) $\Delta_{\frac{1}{2}} x^3$ ; | 8) $\Delta_h^2 x^2$ ;  | 14) $\Delta_h \operatorname{ch} \alpha x$ ; |
|                                 | 9) $\Delta_h^2 x^3$ ;  | 15) $\Delta_h \frac{1}{x}$ ;                |
| 3) $\Delta_h \sin \alpha x$ ;   | 10) $\Delta_h 0^m$ ;   |                                             |
| 4) $\Delta_h \cos \alpha x$ ;   | 11) $\Delta_h^2 0^m$ ; | 16) $\Delta_h^2 \frac{1}{x}$ ;              |
| 5) $\Delta_h \arctg x$ ;        | 12) $\Delta_h^3 0^m$ ; |                                             |
| 6) $\Delta_h 3^x$ ;             |                        | 17) $\Delta_h \frac{1}{x(x+h)}$ ;           |
|                                 |                        | 18) $\Delta_h x(x+h)$ .                     |

**4.** Используя тождество  $\Delta_h^m (\Delta_h^k f) = \Delta_h^{m+k} f$ , докажите, что

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{t=0}^k \binom{m}{t} \binom{n}{k-t}.$$

**5.** Дана функция  $f$ , определенная условием

$$f(x) = (2x + 1)5^x.$$

Найдите числа  $\alpha, \beta, \gamma$  такие, чтобы

$$\alpha \Delta_h^2 f + \beta \Delta_h^1 f + \gamma \Delta_h^0 f = 0$$

в случаях:

- а)  $h = 1$ ;
- б)  $h = -1$ ;
- в)  $h = 2$ ;
- г)  $h = \frac{1}{2}$ .

6. Докажите равенства примера 5.

## § 2.2. Обобщенные степени

В задачах интерполирования, суммирования функций используются обобщенные степени.

**Определение 2.2.1.** Обобщенной  $k$ -й степенью ( $k$ -натуральное число) с шагом  $h$  числа  $x$  называется число

$$x(x-h)(x-2h) \dots (x-(k-1)h).$$

Обобщенная степень обозначается символом  $x^{(k;h)}$ . При  $h = 1$  обобщенная степень обозначается символом  $x^{(k)}$ . Заметим, что

$$n^{(k)} = \begin{cases} n! & \text{при } k = n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

Из определения следует, что обобщенная степень с показателем  $k$  представляет собой произведение  $k$  сомножителей. При  $h = 0$   $x^{(k;0)} = x^k$ . По определению считается  $x^{(0;h)} = 1$  для  $x \neq 0$ .

**Предложение 2.2.1.** Конечная разность первого порядка обобщенной степени удовлетворяет тождеству

$$\Delta_h x^{(k;h)} = khx^{(k-1;h)}.$$

*Доказательство.* По определению конечной разности первого порядка найдем

$$\begin{aligned} \Delta_h x^{(k;h)} &= (x+h)^{(k;h)} - x^{(k;h)} = \\ &= (x+h)x(x-h) \dots (x+h-(k-1)h) - x(x-h) \dots (x-(k-1)h) = \\ &= x(x-h) \dots (x-(k-2)h)(x+h-x+(k-1)h) = khx^{(k-1;h)}. \end{aligned}$$

**Следствие 2.2.1.** Конечная разность порядка  $s$  обобщенной степени удовлетворяет тождеству

$$\Delta_h^s x^{(k;h)} = k^{(s)} h^s x^{(k-s;h)}, \quad (s \leq k). \quad (2.2.1)$$

Доказательство проведем методом математической индукции по  $s$ .

При  $s = 0$  утверждение очевидно. При  $s = 1$  из предложения 2.2.1 следует, что

$$\Delta_h x^{(k;h)} = k h x^{(k-1;h)} = k^{(1)} h^1 x^{(k-1;h)}.$$

Предположим, что равенство (2.2.1) верно при фиксированном значении  $s$ .

Докажем, что равенство (2.2.1) имеет место и для  $s + 1$ . Используя индуктивное предположение и свойство линейности конечной разности первого порядка, получим

$$\begin{aligned} \Delta_h^{s+1} x^{(k;h)} &= \Delta_h^1 (\Delta_h^s x^{(k;h)}) = \Delta_h (k^{(s)} h^s x^{(k-s;h)}) = \\ &= k^{(s)} h^s \Delta_h x^{(k-s;h)} = k^{(s)} h^s (k-s) h x^{(k-(s+1);h)}. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$k^{(s)} (k-s) = k(k-1)\dots(k-(s-1))(k-s) = k^{(s+1)},$$

придем к равенству

$$\Delta_h^{s+1} x^{(k;h)} = k^{(s+1)} h^{s+1} x^{(k-(s+1);h)}.$$

Таким образом, равенство (2.2.1) верно для всех  $s \leq k$ .

*Следствие 2.2.2.* Если  $s > k$ , то

$$\Delta_h^s x^{(k;h)} = 0.$$

*Доказательство.* Из формулы (2.2.1) при  $k = s$  получим

$$\Delta_h^k x^{(k;h)} = k^{(k)} h^k x^{(0;h)} = k^{(k)} h^k = \text{const}.$$

Отсюда следует, что

$$\Delta_h^{k+1} x^{(k;h)} = \Delta_h (\Delta_h^k x^{(k;h)}) = \Delta_h (\text{const}) = 0.$$

Таким образом, на основании результатов этих следствий приходим к выводу:

$$\Delta_h^k x^{(m;h)} = \begin{cases} m^{(k)} h^k x^{(m-k;h)}, & k < m, \\ m! h^m, & k = m, \\ 0, & k > m. \end{cases}$$

Наряду с обобщенной степенью  $x^{(k; h)}$  рассмотрим еще одну степень.

**Определение 2.2.2.** Символом Похгаммера называется обобщенная степень, обозначаемая  $x^{[k; h]}$ , определенная условием

$$x^{[k; h]} = x(x+h)\dots(x+(k-1)h).$$

Если  $k = 0$ , по определению  $x^{[0; h]} = 1$ ; если  $h = 1$ , то символ обозначается через  $x^{[k]}$ .

Имеют место следующие тождества:

$$\Delta_h x^{[k; h]} = kh(x+h)^{[k-1; h]}, \quad (2.2.2)$$

$$\Delta_h^m x^{[k; h]} = k^{(m)} h^m (x+mh)^{[k-m; h]}. \quad (2.2.3)$$

Введем обобщенную степень с отрицательным целым показателем.

**Определение 2.2.3.** Обобщенной степенью числа  $x \neq 0$  с показателем  $-k$  ( $k = 1, 2, \dots, n, \dots$ ) и шагом  $h$  называется число

$$\frac{1}{x(x+h)(x+2h)\dots(x+(k-1)h)}$$

и обозначается символом  $x^{(-k; h)}$ .

Если  $h = 0$ , то  $x^{(-k; 0)} = x^{-k}$ , т.е. обобщенная степень совпадает с обычной степенью. При  $h = 1$  обобщенная степень с показателем  $-k$  обозначается символом  $x^{(-k)}$ .

Для конечной разности первого порядка обобщенной степени с отрицательным показателем имеет место предложение 2.2.2.

**Предложение 2.2.2.** Конечная разность первого порядка  $\Delta_h x^{(-k; h)}$  удовлетворяет тождеству

$$\Delta_h x^{(-k; h)} = -kh \cdot x^{(-k-1; h)}.$$

*Доказательство.* На основании определения обобщенной степени с отрицательным показателем и определения конечной разности первого порядка имеем

$$\begin{aligned} \Delta_h x^{(-k; h)} &= \frac{1}{(x+h)(x+2h)\dots(x+h+(k-1)h)} - \frac{1}{x(x+h)\dots(x+(k-1)h)} = \\ &= \frac{1}{(x+h)(x+2h)\dots(x+(k-1)h)} \left( \frac{1}{x+kh} - \frac{1}{x} \right) = \\ &= \frac{-kh}{(x+h)\dots(x+(k-1)h)(x+kh)} = -khx^{(-k-1; h)}. \end{aligned}$$

Доказанные свойства обобщенных степеней будут в дальнейшем использоваться при суммировании функций.

Введем символ  $x^{[-k; h]}$  условием

$$x^{[-k; h]} = \frac{1}{x(x-h)(x-2h)\dots(x-(k-1)h)}.$$

При  $k = 1$  введенную обобщенную степень обозначим через  $x^{[-k]}$ .

Непосредственными вычислениями можно установить, что

$$\Delta_h x^{[-k; h]} = -kh (x+h)^{[-k-1; h]}.$$

Разложим обобщенную степень  $x^{(n)}$  по степеням  $x^k$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ):

$$x^{(n)} = \sum_{k=0}^n s(n, k) x^k.$$

**Определение 2.2.4.** Коэффициенты  $s(n, k)$  этого разложения называются **числами Стирлинга первого рода**. По определению полагаем  $s(0, 0) = 1$  и  $s(n, k) = 0$   $n < k$ .

**Определение 2.2.5.** Числа Стирлинга второго рода определяются как коэффициенты разложения степени  $x^n$  по обобщенным степеням  $x^{(k)}$  ( $k = 0, 1, \dots, n$ ):  $x^n = \sum_{k=0}^n \sigma(n, k) x^{(k)}$ .

### Упражнения

1. Докажите тождество (2.2.2).
2. Докажите тождество (2.2.3).
3. Докажите следующие тождества:

а)  $1^{[k]} = k!$ ;

б)  $n^{[k]} = \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!}$ ;

в)  $\left(\frac{1}{2}\right)^{[k]} = 2^{-2k} \frac{(2k)!}{k!}$ ;

г)  $\left(\frac{3}{2}\right)^{[k]} = 2^{-2k} \frac{(2k+1)!}{k!}$ ;

д)  $a^{[n+k]} = a^{[n]} (a+n)^{[k]}$ ;

$$\text{е) } a^{[n-k]} = \frac{(-1)^k (a)^{[n]}}{(1-a-n)^{[k]}};$$

$$\text{ж) } a^{[nk]} = \left(\frac{a}{n}\right)^{[k]} \left(\frac{a+1}{n}\right)^{[k]} \dots \left(\frac{a+n-1}{n}\right)^{[k]} n^{nk};$$

$$\text{з) } (a+m)^{[k]} = \frac{a^{[k]}(a+k)^{[m]}}{a^{[m]}}.$$

**4.** Введем символы  $x_{(n)}, x_{[n]}$  условиями

$$x_{(n)} = \frac{x^{(n)}}{n!}, \quad x_{[n]} = \frac{x^{[n]}}{n!} \text{ соответственно.}$$

Проверьте, что имеют место равенства

$$(a+b)_{(n)} = \sum_{t=0}^n a_{(t)} b_{(n-t)},$$

$$(a+b)_{[n]} = \sum_{t=0}^n a_{[t]} b_{[n-t]}$$

для  $n = 0, 1, 2, 3$ .

Докажите указанные тождества методом математической индукции.

**5.** Найдите значения выражений:

$$\text{а) } \left(\frac{1}{2}\right)^{[-3]}; \left(\frac{1}{2}\right)^{(-3)};$$

$$\text{б) } \left(\frac{1}{3}\right)^{[-3]}; \left(\frac{1}{3}\right)^{(-3)};$$

$$\text{в) } \Delta_{\frac{1}{2}} x^{[-1;2]}; \Delta_{\frac{1}{2}} x^{(-1;2)}.$$

**6.** Найдите значения выражений:

$$\text{а) } \Delta_h^m x^{(-k;h)};$$

$$\text{б) } \Delta^m x^{(-k)};$$

$$\text{в) } \Delta_h^m x^{[-k;h]};$$

$$\text{г) } \Delta^m x^{[-k]}.$$

7. Докажите равенство  $\left(\frac{1}{2}\right)^{(-k)} = \frac{2^{2k} \cdot k!}{(2k)!}$ .

8. Докажите, что

а)  $\sigma(n, k) = \frac{\Delta^k 0^n}{k!};$

б)  $\Delta^k x^{(n)} = \sum_{j=k}^n s(n, j) \Delta^k x^j.$

9. Покажите, что  $\sum_{t=0}^n \sigma(n, t) s(t, m) = \delta_{nm}.$

10. Пусть  $(a_n), (b_n)$  – последовательности. Сделайте следующее:

а) докажите, что если  $a_n = \sum_t^{\infty} s(n, t) b_t$ , то  $b_n = \sum_t^{\infty} \sigma(n, t) a_t$ ;

б) докажите утверждение, обратное (а);

в) покажите, что  $a_k = 0$  при  $k > n$ ; аналогично  $b_k = 0$  при  $k > n$ .

11. Используя тождество  $x^{(n+1)} = (x - n)x^{(n)}$ , выведите тождества:

а)  $s(n + 1, r) = s(n, r - 1) - ns(n, r);$

б)  $\sigma(n + 1, r) = \sigma(n, r - 1) + r\sigma(n, r).$

12. Докажите, что числа  $s(n, k)$  удовлетворяют тождеству

$$\frac{1}{k!} (\ln(1+t))^k = \sum_{n=k}^{\infty} s(n, k) \frac{t^n}{n!}.$$

Указание. Воспользуйтесь биномиальным рядом

$$(1+t)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} t^k,$$

где  $\binom{x}{k} = \frac{x^{(k)}}{k!}$ , и разложением в ряд функции  $(1+t)^x = e^{x \ln(1+t)}$ .

13. Докажите, что числа  $\sigma(n, k)$  удовлетворяют тождеству

$$\frac{1}{k!} (e^t - 1)^k = \sum_{n=k}^{\infty} \sigma(n, k) \frac{t^n}{n!}.$$

Указание. Используйте соотношения  $\Delta^k e^{xt} = (e^t - 1)^k e^{xt}$  (проверьте!) и  $\Delta^k x^{(n)} = n^{(k)} x^{(n-k)}$ .

## § 2.3. Формула Ньютона

Рассмотрим следующую задачу. Пусть функция  $y = f(x)$  определена в точках  $x_t = x_0 + th$  ( $t = 0, 1, \dots, n$ ), где  $h$  – фиксированное число (шаг интерполяции) и  $y_t = f(x_t)$ . Найти многочлен  $P_n(x)$  степени не выше  $n$ , принимающий в точках  $x_t$  значения  $P_n(x_t) = f(x_t)$  ( $t = 0, 1, \dots, n$ ).

Прежде чем перейти к отысканию многочлена  $P_n(x)$ , заметим, что на основании предложения 2.1.2 находим  $\Delta_h^k P_n(x_0) = \Delta_h^k f(x_0)$ .

Ньютоном был предложен следующий способ построения многочлена  $P_n(x)$ .

Будем искать  $P_n(x)$  в виде

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1}). \quad (2.3.1)$$

Коэффициенты  $a_0, a_1, \dots, a_n$  подлежат определению. Прежде чем перейти к нахождению этих коэффициентов, преобразуем выражение

$$(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_l), \quad (l = 0, 1, \dots, n - 1).$$

Так как  $x_t = x_0 + th$ , то

$$(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{l-1}) = \\ = (x - x_0)((x - x_0) - h)((x - x_0) - 2h)\dots((x - x_0) - (l - 1)h).$$

Отсюда, используя понятие обобщенной степени с положительным показателем, получим

$$(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{l-1}) = (x - x_0)^{(l;h)}.$$

Теперь равенство (2.3.1) можно представить следующим образом:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0)^{(1;h)} + a_2(x - x_0)^{(2;h)} + \dots + a_n(x - x_0)^{(n;h)}. \quad (2.3.2)$$

В равенстве (2.3.2) положим  $x = x_0$ . Тогда

$$P_n(x) = a_0 = f(x_0).$$

Для определения коэффициента  $a_1$  найдем конечную разность первого порядка многочлена  $P_n(x)$ . При этом воспользуемся предложением 2.2.1 и его следствием 2.2.1.

Получаем

$$\Delta_h P_n(x) = a_1 h + 2a_2 h(x-x_0)^{(1;h)} + 3a_3 h(x-x_0)^{(2;h)} + \dots + na_n h(x-x_0)^{(n-1;h)}.$$

Положим в этом равенстве  $x = x_0$ :

$$\Delta_h P_n(x_0) = a_1 h = \Delta_h f(x_0).$$

Отсюда находим  $a_1$ :

$$a_1 = \frac{1}{1!h} \Delta_h f(x_0).$$

Для конечной разности порядка  $s$  в точке  $x_0$  многочлена  $P_n(x)$  на основании следствия 2.2.2 будем иметь

$$\Delta_h^s P_n(x_0) = s^{(s)} h^s a_s.$$

Но  $\Delta_h^s P_n(x_0) = \Delta_h^s f(x_0)$ , поэтому

$$a_s = \frac{1}{s!h^s} \Delta_h^s f(x_0) \quad (s = 1, 2, \dots, n).$$

Эта формула может быть использована и для  $a_0$ :

$$a_0 = f(x_0),$$

$$a_0 = \frac{1}{0!h^0} \Delta_h^0 f(x_0).$$

Таким образом, все коэффициенты многочлена  $P_n(x)$  найдены, а сам многочлен примет вид

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{s=1}^n \frac{\Delta_h^s f(x_0)}{s!h^s} (x-x_0)^{(s;h)}. \quad (2.3.3)$$

Этот многочлен называется интерполяционным многочленом Ньютона.

Для практического использования формулу Ньютона записывают в преобразованном виде. Для этого введем переменную

$$z = \frac{x-x_0}{h}.$$

Тогда

$$\frac{(x-x_0)^{(s)}}{h^s} = \frac{x-x_0}{h} \frac{(x-x_0-h)}{h} \frac{(x-x_0-2h)}{h} \cdot \dots \cdot \frac{(x-x_0-(s-1)h)}{h} =$$

$$= z(z-1)(z-2)\dots(z-(s-1)) = z^{(s)}.$$

Учитывая это, равенство (2.3.3) примет вид

$$P_n(x) = f(x_0) + \sum_{s=1}^n \frac{\Delta^s f(x_0)}{s!} z^{(s)}. \quad (2.3.4)$$

В таком виде будем использовать формулу Ньютона. Из полученной формулы следует, что  $x^n = \sum_{s=1}^n \frac{\Delta^s 0^n}{s!} x^{(s)}$ .

### Упражнения

1. Выразите  $x^2, x^3, x^4$  через обобщенные степени  $x^{(s)}$ :
2. Выразите  $x^{(2)}, x^{(3)}, x^{(4)}$  через  $x^k$ .

## § 2.4. Числа Бернулли

Рассмотрим функцию  $f(t) = \frac{t}{e^t - 1}$ . В окрестности нуля эту функцию можно разложить в степенной ряд

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k, \quad |t| < 2\pi. \quad (2.4.1)$$

**Определение 2.4.1.** Коэффициенты  $B_k$  ряда (2.4.1) называются числами Бернулли.

Опишем алгоритм вычисления чисел Бернулли. Сначала равенство (2.4.1) представим в следующем виде:

$$t = (e^t - 1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k. \quad (2.4.2)$$

Используя разложение  $e^t$  в ряд Маклорена, получим

$$e^t - 1 = \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots$$

Учитывая это, равенство (2.4.2) после сокращения на  $t$  примет вид

$$1 = \left(1 + \frac{1}{2!}t + \frac{1}{3!}t^2 + \dots\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k.$$

Полученное тождество изучим подробнее:

$$1 = \left(1 + \frac{1}{2!}t + \frac{1}{3!}t^2 + \dots\right) \left(B_0 + \frac{B_1}{1!}t + \frac{B_2}{2!}t^2 + \dots\right).$$

По правилу умножения степенных рядов правую часть этого равенства представим в виде степенного ряда

$$\begin{aligned} 1 = B_0 + \left(\frac{B_0}{0!2!} + \frac{B_1}{1!1!}\right)t + \left(\frac{B_0}{0!3!} + \frac{B_1}{1!2!} + \frac{B_2}{2!1!}\right)t^2 + \\ + \left(\frac{B_0}{0!4!} + \frac{B_1}{1!3!} + \frac{B_2}{2!2!} + \frac{B_3}{3!1!}\right)t^3 + \dots \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Легко установить, что коэффициент при  $t^s$  имеет вид

$$\frac{B_0}{0!(s+1)!} + \frac{B_1}{1!s!} + \frac{B_2}{2!(s-1)!} + \dots + \frac{B_s}{s!1!} \quad (s > 0). \quad (2.4.4)$$

Сравнивая коэффициенты при  $t$  из тождества (2.4.3), получим (в силу единственности разложения функции в ряд)

$$B_0 = 1;$$

$$\frac{B_0}{0!(s+1)!} + \frac{B_1}{1!s!} + \frac{B_2}{2!(s-1)!} + \dots + \frac{B_s}{s!1!} = 0 \quad (s > 0). \quad (2.4.5)$$

Равенства (2.4.5) могут быть использованы для вычисления чисел Бернулли.

Равенство (2.4.5) можно преобразовать таким образом, чтобы получить формулу, удобную для запоминания. Для этого к обеим частям равенства (2.4.5) прибавим  $\frac{B_{s+1}}{(s+1)!0!}$  и затем обе части по-

лученного равенства умножим на  $(s+1)!$ . В результате чего придем к равенству

$$\binom{s+1}{0}B_0 + \binom{s+1}{1}B_1 + \dots + \binom{s+1}{s}B_s + \binom{s+1}{s+1}B_{s+1} = B_{s+1}. \quad (2.4.6)$$

Рассмотрим степень  $(B+1)^{s+1}$ . По формуле бинома Ньютона разложим

$$(B+1)^{s+1} = \binom{s+1}{0}B^0 + \binom{s+1}{1}B^1 + \dots + \binom{s+1}{s+1}B^{s+1}.$$

Правая часть полученного равенства отличается от левой части равенства (2.4.6) тем, что у переменной  $B$  показатели степеней

совпадают с индексами в равенстве (2.4.6). В связи с этим равенство (2.4.6) можно условно записать в виде равенства

$$(B+1)^{s+1} = B^{s+1}, \quad (2.4.7)$$

которое после развертывания левой части преобразованием, приводящим показатель степени в соответствующий индекс, приведет к равенству (2.4.6).

**Пример.**

Рассмотрим задачу о вычислении нескольких первых чисел Бернулли.

При  $s = 1$  формула (2.4.6) имеет вид  $(B+1)^2 = B^2$ . Отсюда

$$B^2 + 2B^1 + B^0 = B^2.$$

Из этого равенства на основании соглашения о показателях степеней и индексах получим  $2B_1 + B_0 = 0$ . Значит,  $2B_1 + 1 = 0$ . Отсюда следует, что

$$B_1 = -\frac{1}{2}.$$

При  $s = 2$   $(B+1)^3 = B^3$ . По формуле бинома Ньютона получим  $B^3 + 3B^2 + 3B^1 + B^0 = B^3$ . Значит,  $3B_2 + 3B_1 + B_0 = 0$ . Отсюда  $3B_2 = \frac{3}{2} - 1$ . Тогда

$$B_2 = \frac{1}{6}.$$

Пусть  $s = 3$ ,  $(B+1)^4 = B^4$ ,  $B^4 + 4B^3 + 6B^2 + 4B^1 + B^0 = B^4$ . Отсюда находим следующее соотношение, связывающее числа Бернулли:  $4B_3 + 6B_2 + 4B_1 + B_0 = 0$ . Подставив в это равенство найденные числа  $B_0$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ , получим  $4B_3 + 1 - 2 + 1 = 0$ . Отсюда находим, что

$$B_3 = 0.$$

Аналогичными рассуждениями можно найти  $B_4$ ,  $B_5$ , ...  
Отметим некоторые свойства чисел Бернулли.

**Предложение 2.4.1.** Числа Бернулли с нечетными номерами, за исключением числа  $B_1 = -\frac{1}{2}$ , равны 0.

*Доказательство.* Рассмотрим соотношение

$$\frac{t}{e^t - 1} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s}{s!} t^s, \quad |t| < 2\pi. \quad (2.4.8)$$

Заменим в этом равенстве  $t$  на  $-t$ . Тогда

$$\frac{-t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k B_k}{k!} t^k. \quad (2.4.9)$$

С другой стороны,

$$\frac{-t}{e^{-t} - 1} = -\frac{te^t}{1 - e^t} = \frac{te^t}{e^t - 1} = \frac{t(e^t - 1) + t}{e^t - 1} = t + \frac{t}{e^t - 1}.$$

Из этого равенства и равенств (2.4.8) и (2.4.9) получим

$$t + \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s}{s!} t^s = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s B_s}{s!} t^s.$$

Более подробно это равенство имеет вид

$$t + B_0 + \frac{B_1}{1!} t + \frac{B_2}{2!} t^2 + \dots + \frac{B_k}{k!} t^k + \dots = B_0 - \frac{B_1}{1!} t + \frac{B_2}{2!} t^2 - \frac{B_3}{3!} t^3 + \dots$$

Отсюда на основании равенства рядов получим

$$1 + B_1 = -B_1,$$

$$B_k = (-1)^k B_k \quad (k \neq 1). \quad (2.4.10)$$

Первое равенство выполняется в силу того, что  $B_1 = -\frac{1}{2}$ .

Из равенств (2.4.10) при  $k = 2m + 1$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) имеем

$$B_{2m+1} = -B_{2m+1}.$$

Отсюда

$$B_{2m+1} = 0.$$

Если  $k = 2m$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ), то (2.4.10) принимает вид  $B_{2m} = B_{2m}$ .

Таким образом, предложение 2.4.1 доказано.

Отметим без доказательства свойство чисел Бернулли с четными номерами.

**Предложение 2.4.2.** Для чисел Бернулли с четными номерами верно равенство

$$\text{sign } B_{2m} = (-1)^{m-1} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Здесь

$$\text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0, \\ -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$$

Из предложения 2.4.2 следует, что если  $m$  – положительное четное число, то

$$B_{2m} < 0,$$

если  $m$  – положительное нечетное число, то

$$B_{2m} > 0.$$

Таким образом,  
при  $m = 2p$  имеет место неравенство

$$B_{4p} < 0 \quad (p = 1, 2, \dots),$$

при  $m = 2q + 1$  ( $q = 0, 1, 2, \dots$ ) – неравенство

$$B_{4q+2} > 0, \text{ т.е.}$$

$$B_0 = 1 > 0, B_2 > 0, B_4 < 0, B_6 > 0, B_8 < 0, \dots$$

Отметим еще одно свойство чисел Бернулли.

**Предложение 2.4.3.** Имеет место следующее представление чисел Бернулли через числа Моргана:

$$B_0 = 1, B_k = \sum_{s=1}^k \frac{(-1)^s \Delta^s 0^k}{s+1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

## § 2.5. Многочлены Бернулли

Рассмотрим функцию  $f(t, x) = \frac{te^{tx}}{e^t - 1}$ . Известно, что в окрестности точки  $t = 0$  эта функция может быть разложена в степенной ряд

$$f(t, x) = B_0(x) + \frac{B_1(x)}{1!}t + \frac{B_2(x)}{2!}t^2 + \dots \quad (2.5.1)$$

Выясним строение функций  $B_k(x)$ . Для этого используем разложение по степеням  $t$  функций  $\frac{t}{e^t - 1}$  и  $e^{tx}$ :

$$\frac{t}{e^t - 1} = B_0 + \frac{B_1}{1!}t + \frac{B_2}{2!}t^2 + \dots,$$

$$e^{tx} = 1 + \frac{x}{1!}t + \frac{x^2}{2!}t^2 + \frac{x^3}{3!}t^3 + \dots$$

Используя правило умножения степенных рядов, получим

$$\begin{aligned} \frac{te^{tx}}{e^t - 1} &= B_0 + \left( \frac{B_0}{0!1!}x + \frac{B_1}{1!0!} \right)t + \left( \frac{B_0}{0!2!}x^2 + \frac{B_1}{1!1!}x + \frac{B_2}{2!0!} \right)t^2 + \dots \\ &\dots + \left( \frac{B_0}{0!n!}x^n + \frac{B_1}{1!(n-1)!}x^{n-1} + \dots + \frac{B_n}{n!0!} \right)t^n + \dots \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Коэффициенты при  $t$  в разложениях (2.5.1) и (2.5.2) равны, поэтому

$$B_0(x) = B_0,$$

$$\frac{B_n(x)}{n!} = \frac{B_0}{0!n!}x^n + \frac{B_1}{1!(n-1)!}x^{n-1} + \dots + \frac{B_n}{n!0!} \quad (n > 0).$$

Умножив обе части последнего соотношения на  $n!$ , получим

$$B_n(x) = \binom{n}{0}B_0x^n + \binom{n}{1}B_1x^{n-1} + \dots + \binom{n}{n}B_nx^0.$$

Таким образом, в разложении (2.5.1) функции  $B_n(x)$  представляют собой многочлены степени  $n$  относительно  $x$ .

**Определение 2.5.1.** Многочлены  $B_n(x)$  называются многочленами Бернулли.

Коэффициентами многочлена Бернулли являются произведения биномиальных коэффициентов и чисел Бернулли.

**Примеры.**

**1.** Многочлен Бернулли первой степени имеет вид

$$B_1(x) = B_0x + B_1,$$

т.е.  $B_1(x) = x - \frac{1}{2}.$

2. Многочлен Бернулли второй степени:

$$B_2(x) = x^2 + 2B_1x + B_2,$$

или  $B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$

3. Многочлен Бернулли третьей степени имеет вид

$$B_3(x) = x^3 + 3B_1x^2 + 3B_2x + B_3.$$

Значит,  $B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.$

Для конечной разности первого порядка многочлена Бернулли имеет место предложение 2.5.1.

**Предложение 2.5.1.** Конечная разность первого порядка многочлена Бернулли удовлетворяет тождеству

$$\Delta B_n(x) = nx^{n-1}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим разность  $f(t, x+1) - f(t, x)$ . Вычислим ее двумя способами. По формуле (2.5.1) найдем

$$f(t, x+1) - f(t, x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s(x+1)}{s!} t^s - \sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s(x)}{s!} t^s = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta B_s(x)}{s!} t^s. \quad (2.5.3)$$

Из определения функции  $f$  имеем

$$f(t, x+1) - f(t, x) = \frac{te^{t(x+1)}}{e^t - 1} - \frac{te^{tx}}{e^t - 1} = \frac{te^{tx}}{e^t - 1} (e^t - 1) = te^{tx}. \quad (2.5.4)$$

Используя разложение (2.5.4), получим

$$te^{tx} = t + \frac{x}{1!} t^2 + \frac{x^2}{2!} t^3 + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{x^s}{s!} t^{s+1},$$

поэтому

$$f(t, x+1) - f(t, x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} t^{k+1}. \quad (2.5.5)$$

Равенства (2.5.3) и (2.5.5) приводят к равенству

$$\sum_{s=0}^{\infty} \frac{\Delta B_s(x)}{s!} t^s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} t^{k+1}. \quad (2.5.6)$$

Так как  $B_0(x) = B_0$ , то  $\Delta B_0(x) = 0$ , поэтому равенство (2.5.6) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Delta B_s(x)}{s!} t^s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} t^{k+1}.$$

В полученном равенстве в правой части в качестве индекса суммирования возьмем  $s = k + 1$ . Тогда

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\Delta B_s(x)}{s!} t^s = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{x^{s-1}}{(s-1)!} t^s.$$

Отсюда из единственности разложения функций в ряд получим

$$\frac{\Delta B_s(x)}{s!} = \frac{x^{s-1}}{(s-1)!}.$$

Значит,  $\Delta B_s(x) = s x^{s-1}$  ( $s = 1, 2, \dots$ ).

Это равенство остается в силе и при  $s = 0$ . Предложение 2.5.1 доказано.

Из доказанного предложения следует формула

$$\Delta \frac{B_{s+1}(x)}{s+1} = x^s. \quad (2.5.7)$$

Пусть  $f(x)$  – многочлен степени  $n$ :

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0.$$

Тогда, используя равенство (2.5.7), это равенство можно представить следующим образом:

$$f(x) = a_n \Delta \frac{B_{n+1}(x)}{n+1} + a_{n-1} \Delta \frac{B_n(x)}{n} + \dots + a_1 \Delta \frac{B_2(x)}{2} + a_0 \frac{B_1(x)}{1}.$$

В силу линейности оператора  $\Delta$  получим

$$\Delta \left( \frac{a_n B_{n+1}(x)}{n+1} + \frac{a_{n-1} B_n(x)}{n} + \dots + \frac{a_1 B_2(x)}{2} + a_0 B_1(x) \right) = f(x).$$

Эта формула используется при суммировании функций.

### Упражнения

1. Определите знаки чисел Бернулли  $B_{26}, B_{28}, B_{2012}$ .
2. Докажите, что  $B'_n(x) = n B_{n-1}(x)$ .

3. Проверьте тождество  $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$ .

4. Докажите, что имеет место тождество

$$B_n(mx) = m^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(x + \frac{k}{m}\right)$$

для значений  $m = 1, 2, 3$  и для произвольного  $m$ .

5. Рассмотрим разности

$$B_n(x) - B_n. \quad (2.5.8)$$

Докажите:

а) если  $n$  – нечетное, то разность (2.5.8) на отрезке  $[0, 1]$  обращается в нуль только в точках  $0, \frac{1}{2}, 1$ ;

б) в точке  $\frac{1}{2}$  разность (2.5.8) меняет знак;

в) если  $n$  – четное, то разность (2.5.8) обращается в нуль только на концах отрезка  $[0, 1]$ , а на интервале  $(0, 1)$  сохраняет свой знак;

г) при четном  $n$  (2.5.8) принимает наибольшее по абсолютной величине значение в точке  $\frac{1}{2}$ .

6. Докажите, что на интервале  $(0, 1)$  многочлены  $B_{2n}(x) - B_{2n}$  и  $B_{2(n+1)}(x) - B_{2(n+1)}$  имеют противоположные знаки.

7. Докажите, что  $B_n(1) = (-1)^n B_n$ .

8. Имеет место тождество

$$B_{2n} = -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2} - \sum_{k=2}^{2(n-1)} \frac{(2n)^{(2k-1)}}{k!} B_k,$$

$$(2n)^{(2k-1)} = 2n(2n-1)\dots(2n-(2k-1-1)) = 2n(2n-1)\dots(2n-2k+2).$$

Проверьте справедливость этого равенства при  $n = 1, 2, 3$ .  
Докажите для любого  $n$ .

9. Докажите, что число  $\frac{\Delta^k 0^n}{k}$  – целое ( $n \neq 0$ ).

10. Имеет место более сильное утверждение: число  $\frac{\Delta^k 0^n}{k!}$  — целое.

11. Докажите, что  $\frac{\Delta^k x^n}{k!}$  — многочлен с целыми коэффициентами.

## § 2.6. Задача о суммировании и задача нахождения суммирующей функции

В теории конечных разностей одной из важнейших задач является задача суммирования функций.

**Задача о суммировании.** Пусть дана функция  $f(x)$ . Найти в конечном виде (точно или приближенно) сумму

$$S(n, x_0) = f(x_0) + f(x_0 + h) + \dots + f(x_0 + nh) \quad (2.6.1)$$

при фиксированных  $x_0$  и  $h$  и большом  $n$ , если известны аналитические свойства функции  $f(x)$ .

Большое значение имеет исследование суммы  $S(n, x_0)$  при неограниченном росте переменной  $n$ .

В равенстве (2.6.1) можно положить  $x_0 = 0$ ,  $h = 1$ . Тогда получим

$$S(n) = f(0) + f(1) + \dots + f(n). \quad (2.6.2)$$

Такое ограничение не влияет на общность рассуждений. Действительно, положив  $\varphi(x) = f(x_0 + hx)$ , мы получим

$$f(x_0) + f(x_0 + h) + \dots + f(x_0 + nh) = \varphi(0) + \varphi(1) + \dots + \varphi(n).$$

Таким образом, задачу о суммировании можно свести к нахождению суммы

$$S(n) = \varphi(0) + \varphi(1) + \dots + \varphi(n).$$

С задачей суммирования связана следующая задача о нахождении суммирующей функции.

**Задача о суммирующей функции.** Дана функция  $\varphi(x)$ . Найти функцию  $F(x)$ , такую, что

$$\Delta F(x) = \varphi(x), \quad (2.6.3)$$

где  $\Delta F(x) = F(x+1) - F(x)$ .

Отметим связь между этими задачами. Предположим, что задача о суммирующей функции решена, т.е. мы нашли функцию  $F(x)$ ,

удовлетворяющую условию (2.6.3). Покажем, что задачу о суммировании мы решили.

Действительно, придавая переменной  $x$  последовательно значения  $0, 1, \dots, n$ , из равенства (2.6.3) найдем

$$\begin{aligned} F(1) - F(0) &= \varphi(0), \\ F(2) - F(1) &= \varphi(1), \\ &\dots \\ F(n+1) - F(n) &= \varphi(n). \end{aligned}$$

Складывая эти равенства, получим

$$F(n+1) - F(0) = \varphi(0) + \varphi(1) + \dots + \varphi(n). \quad (2.6.4)$$

Таким образом,

$$S(n) = F(n+1) - F(0).$$

Предположим, что нужно найти сумму

$$\varphi(k) + \varphi(k+1) + \dots + \varphi(n) = S(k; n).$$

Прибавим к обеим частям этого равенства сумму

$$S(k-1) = \varphi(0) + \varphi(1) + \dots + \varphi(k-1).$$

Тогда

$$\varphi(0) + \varphi(1) + \dots + \varphi(k-1) + \varphi(k) + \dots + \varphi(n) = S(k; n) + S(k-1).$$

По формуле (2.6.4) получим

$$F(n+1) - F(0) = S(k; n) + F(k) - F(0).$$

Отсюда

$$S(k; n) = F(n+1) - F(k). \quad (2.6.5)$$

Функция  $F(x)$  называется суммирующей функцией для  $f(x)$ .

Предположим, что задача о суммировании решена, т.е. мы можем найти сумму

$$S(n; x) = f(x) + f(x+h) + \dots + f(x+nh)$$

при любом значении  $x$  и  $h$ . Покажем, что задача о суммирующей функции может быть решена. Положим  $h = 1$ . Тогда

$$S(n; x) = f(x) + f(x+1) + \dots + f(x+n).$$

Рассмотрим функцию  $F(x)$ , заданную условием

$$F(x) = S([x] - 1; \{x\}), \quad (2.6.6)$$

где  $[x]$  – целая часть числа  $x$ , а  $\{x\} = x - [x]$  – дробная часть  $x$ .

Найдем конечную разность  $\Delta F(x)$ :

$$\Delta F(x) = F(x+1) - F(x) = S([x+1] - 1; \{x+1\}) - S([x] - 1; \{x\}).$$

Поскольку  $[x+1] = [x] + 1$ ,  $\{x+1\} = \{x\}$ , то

$$\begin{aligned} \Delta F(x) &= S([x]; \{x\}) - S([x] - 1; \{x\}) = \\ &= f(\{x\}) + f(\{x\} + 1) + \dots + f(\{x\} + [x]) - \\ &- f(\{x\}) - f(\{x\} + 1) - \dots - f(\{x\} + [x] - 1) = \\ &= f(\{x\} + [x]) = f(x). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta F(x) = f(x).$$

Это значит, что функция  $F(x)$ , определенная условием (2.6.6), является суммирующей функцией для  $f(x)$ .

**П р и м е р ы.**

**1.** Найти сумму  $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n$ . Эта сумма является суммой значений функции  $f(x) = 2^x$  при  $x = 0, 1, \dots, n$ . Найдем конечную разность  $\Delta 2^x$ :

$$\Delta 2^x = 2^{x+1} - 2^x = 2^x.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае имеет место тождество

$$\Delta f(x) = f(x).$$

В качестве суммирующей функции  $F(x)$  можно взять саму функцию  $f(x)$ .

По формуле (2.6.4) находим

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

**2.** Обобщением рассмотренной задачи является задача о нахождении суммы

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n, \quad a \neq 1.$$

В этом случае  $f(x) = a^x$ . Найдем  $\Delta f(x)$ :

$$\Delta a^x = a^{x+1} - a^x = a^x (a - 1).$$

Отсюда в силу линейности  $\Delta$  получим

$$\Delta \frac{a^x}{a-1} = a^x.$$

Из этого тождества следует, что суммирующей функцией для  $a^x$  является функция

$$F(x) = \frac{a^x}{a-1}.$$

Значит, на основании формулы (2.6.4) получим

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}.$$

**3.** Как было отмечено выше, для обобщенных степеней имеют место тождества

$$\Delta x^{(-k)} = -k x^{(-k-1)},$$

поэтому

$$\Delta \frac{x^{(k+1)}}{k+1} = x^{(k)},$$

$$\Delta \frac{x^{(-k+1)}}{1-k} = x^{(-k)}.$$

Отсюда следует, что суммирующей функцией для  $f(x) = x^{(k)}$  является функция  $F(x) = \frac{x^{(k+1)}}{k+1}$ , а для функции  $f(x) = x^{(-k)}$  — функ-

ция  $F(x) = \frac{x^{(-k+1)}}{1-k}$ .

Тогда

$$1^{(k)} + 2^{(k)} + \dots + n^{(k)} = \frac{(n+1)^{(k+1)}}{k+1} - \frac{1^{(k+1)}}{k+1}.$$

При  $k \geq 1$  имеем  $1^{(k+1)} = 0$ , поэтому

$$1^{(k)} + 2^{(k)} + \dots + n^{(k)} = \frac{(n+1)^{(k+1)}}{k+1}. \quad (2.6.7)$$

Из формулы (2.6.7), в частности, получим:

при  $k = 1$   $n^{(1)} = n$ , поэтому

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)n}{2};$$

при  $k = 2$  имеем

$$1^{(2)} = 0, 2^{(2)} = 2 \cdot 1, 3^{(2)} = 2 \cdot 3, \dots, n^{(2)} = n(n-1).$$

Равенство (2.6.7) примет вид

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n-1)n = \frac{(n+1)n(n-1)}{3}.$$

Для случая суммирования функции  $f(x) = x^{(-k)}$  получим

$$1^{(-k)} + 2^{(-k)} + \dots + n^{(-k)} = \frac{(n+1)^{(-k+1)}}{1-k} - \frac{1^{(-k+1)}}{1-k}, (k \neq 1).$$

В частности, из полученного равенства имеем:

$$\text{при } k = 2 \quad x^{(-2)} = \frac{1}{x(x+1)},$$

поэтому

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = -\frac{1}{n+1} + 1;$$

при  $k = 3$  получим

$$x^{(-3)} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)},$$

поэтому

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}.$$

## § 2.7. Тождество Абеля

Пусть  $u(x)$ ,  $v(x)$  – функции, определенные для натуральных значений аргумента. Положим

$$U(n) = u(1) + u(2) + \dots + u(n).$$

ТЕОРЕМА 2.7.1. Имеет место тождество (тождество Абеля)

$$\sum_{k=m}^n u(k+1)v(k+1) = U(n+1)v(n+1) - U(m)v(m) - \sum_{k=m}^n U(k)\Delta v(k). \quad (2.7.1)$$

*Доказательство.* Найдем конечную разность  $\Delta(U(x)v(x))$  и преобразуем ее:

$$\begin{aligned}\Delta(U(x)v(x)) &= U(x+1)v(x+1) - U(x)v(x) = \\ &= (U(x+1) - U(x))v(x+1) + U(x)v(x+1) - U(x)v(x) = \\ &= \Delta U(x)v(x+1) + U(x)\Delta v(x).\end{aligned}\quad (2.7.2)$$

В полученном тождестве  $x$  принимает натуральные значения. Из определения функции  $U(x)$  имеем

$$\Delta U(x) = u(x+1). \quad (2.7.3)$$

Из соотношений (2.7.2) и (2.7.3) следует, что

$$u(x+1)v(x+1) = \Delta(U(x)v(x)) - U(x)\Delta v(x).$$

Придадим  $x$  значения от  $m$  до  $n$ . Тогда получим равенства

$$\begin{aligned}u(m+1)v(m+1) &= U(m+1)v(m+1) - U(m)v(m) - U(m)\Delta v(m), \\ u(m+2)v(m+2) &= U(m+2)v(m+2) - U(m+1)v(m+1) - U(m+1)\Delta v(m+1), \dots \\ u(n+1)v(n+1) &= U(n+1)v(n+1) - U(n)v(n) - U(n)\Delta v(n).\end{aligned}$$

Сложив эти равенства, получим тождество (2.7.1).

**П р и м е р.**

Найти сумму

$$S(n) = 1 \cdot a + 2 \cdot a^2 + \dots + n \cdot a^n.$$

Рассмотрим функции  $u(x) = a^{x-1}$  и  $v(x) = x-1$ . Тогда

$$\begin{aligned}U(x) &= \frac{a^x - 1}{a - 1}, \\ \Delta v(x) &= 1.\end{aligned}$$

На основании тождества Абеля получим

$$S(n) = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \cdot n - U(1)v(1) - \sum_{k=1}^n \frac{a^k - 1}{a - 1}.$$

Поскольку  $v(1) = 0$ , а

$$\sum_{k=1}^n \frac{a^k - 1}{a - 1} = \frac{1}{a - 1} \sum_{k=1}^n a^k - \frac{n}{a - 1} = \frac{1}{(a - 1)^2} (a^{n+1} - a) - \frac{n}{a - 1},$$

то

$$S(n) = \frac{na^{n+1}}{a-1} - \frac{a^{n+1} - a}{(a-1)^2}.$$

## § 2.8. О решениях уравнения $\Delta F(x) = f(x)$

Исследуем вопрос о степени неопределенности решений уравнения  $\Delta F(x) = f(x)$ .

Пусть  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  – решения этого уравнения. Рассмотрим функцию  $u(x) = F_1(x) - F_2(x)$  и найдем конечную разность  $\Delta u(x)$ :

$$\begin{aligned}\Delta u(x) &= \Delta(F_1(x) - F_2(x)) = F_1(x+1) - F_2(x+1) - F_1(x) + F_2(x) = \\ &= \Delta F_1(x) - \Delta F_2(x) = f(x) - f(x) = 0.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$u(x+1) = u(x).$$

Таким образом,  $u(x)$  – периодическая функция с периодом, равным единице.

С другой стороны, если  $F_1(x)$  является решением уравнения  $\Delta F(x) = f(x)$ , а  $C(x)$  – произвольная периодическая функция с периодом единица, то функция  $F_1(x) + C(x)$  также является решением уравнения  $\Delta F(x) = f(x)$ .

Действительно,

$$\Delta(F_1(x) + C(x)) = \Delta F_1(x) + \Delta C(x) = f(x).$$

Рассмотрим подробнее уравнение

$$\Delta F(x) = f(x), \tag{2.8.1}$$

когда  $f(x)$  является многочленом и решением уравнения (2.8.1) является многочлен.

**Предложение 2.8.1.** Если  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  – два решения уравнения (2.8.1), где  $f(x)$  – многочлен, то  $F_1(x) = F_2(x) + C$ , где  $C$  – постоянная.

*Доказательство.* Пусть  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  – решения уравнения (2.8.1). Поскольку  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  – многочлены, то их разность  $F_1(x) - F_2(x) = u(x)$  также будет многочленом, удовлетворяющим условию  $\Delta u(x) = 0$ . Рассмотрим многочлен  $p(x)$ , определенный условием

$$p(x) = u(x) - u(0).$$

Так как  $\Delta u(x) = 0$ , то

$$p(0) = 0,$$

$$p(1) = \Delta u(0) = 0,$$

$$p(2) = u(2) - u(0) = (u(2) - u(1)) + (u(1) - u(0)) = \Delta u(1) + p(1) = 0.$$

Если  $p(k) = 0$ , то  $p(k+1) = 0$ . Действительно,

$$\begin{aligned} p(k+1) &= u(k+1) - u(0) = (u(k+1) - u(k)) + u(k) - u(0) = \\ &= \Delta u(k) + p(k) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$p(x) = 0$$

для всех  $x$ . Значит,  $u(x) = u(0) = C$ , т.е.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Пусть уравнение (2.8.1) имеет вид

$$\Delta F(x) = U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}. \quad (2.8.2)$$

Рассмотрим уравнения

$$\Delta F(x) = \{u_i, u_j\}, \quad (2.8.3)$$

$$\Delta F(x) = u_i. \quad (2.8.4)$$

Если  $F_1(x)$  – решение уравнения (2.8.3), а  $F_2(x)$  – решение уравнения (2.8.4), то функция  $u_j$  будет решением уравнения (2.8.1).

Действительно, в силу линейности оператора  $\Delta$  имеем

$$\Delta V = \left\{ \{u_i, u_j\} \mid u_i, u_j \in U \right\} \{u_i, u_j\} u_i, u_j.$$

Опишем два способа решения уравнения (2.8.1), в случае, когда  $f(x)$  – многочлен и решение ищется также в виде многочлена  $F(x)$ .

**I способ.** По формуле Ньютона имеем

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \Delta^k f(0) \frac{x^{(k)}}{k!}.$$

Так как

$$x^{(k)} = \Delta \frac{x^{(k+1)}}{k+1},$$

то

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \Delta^k f(0) \frac{1}{k!} \Delta \frac{x^{(k+1)}}{k+1}.$$

В силу линейности оператора  $\Delta$  это равенство можно представить следующим образом:

$$f(x) = \Delta \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f(0)}{(k+1)!} x^{(k+1)}.$$

Отсюда получим, что общее решение уравнения (2.8.1) имеет вид

$$F(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\Delta^k f(0)}{(k+1)!} x^{(k+1)} + C, \quad (2.8.5)$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

**II способ.** Пусть  $f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ . Пользуясь первым способом, найдем многочлен  $P_k(x)$ , удовлетворяющий условиям

$$\Delta P_k(x) = x^k, \quad P_k(0) = 0.$$

Тогда в силу линейности оператора  $\Delta$  искомым многочлен  $F(x)$  можно записать в виде

$$F(x) = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_n P_n(x).$$

**Примеры.**

**1.** По формуле Ньютона найдем суммирующий многочлен для многочлена  $f(x) = x^2$ .

По формуле (2.8.5) имеем

$$F(x) = \sum_{k=0}^2 \frac{\Delta^k x^2(0)}{(k+1)!} x^{(k+1)} + C.$$

Будем считать, что  $C = 0$ . Последовательно вычислим конечные разности  $\Delta^0 x^2(0)$ ,  $\Delta^1 x^2(0)$ ,  $\Delta^2 x^2(0)$ :

$$\Delta^0 x^2(0) = x^2(0) = 0;$$

$$\Delta^1 x^2(0) = ((x+1)^2 - x^2)(0) = 1;$$

$$\Delta^2 x^2(0) = ((x+2)^2 - 2(x+1) + x^2)(0) = 4 - 2 = 2.$$

Значит,

$$F(x) = \frac{1}{2!}x^{(2)} + \frac{1}{3!}x^{(3)} = \frac{3x(x-1) + 2x(x-1)(x-2)}{6} = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}.$$

2. Решим аналогичную задачу для  $f(x) = x^3$ . Вычислим:

$$\Delta^0 x^3(0) = x^3(0) = 0;$$

$$\Delta^1 x^3(0) = 1;$$

$$\Delta^2 x^3(0) = ((x+2)^3 - 2(x+1)^3 + x^3)(0) = 8 - 2 = 6;$$

$$\Delta^3 x^3(0) = ((x+3)^3 - 3(x+2)^3 + 3(x+1)^3 - x^3)(0) = 3^3 - 3 \cdot 2^3 + 3 = 6.$$

Следовательно, по формуле (2.8.5) имеем

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2!}x^{(2)} + \frac{6}{3!}x^{(3)} + \frac{6}{4!}x^{(4)} = \\ &= \frac{1}{2}x(x-1) + x(x-1)(x-2) + \frac{1}{4}x(x-1)(x-2)(x-3) = \\ &= \frac{x(x-1)(2+4x-8+x^2-5x+6)}{4} = \frac{x(x-1)(x^2-x)}{4} = \frac{x^2(x-1)^2}{4}. \end{aligned}$$

3. Для функции  $f(x) = x^4$  имеем

$$\Delta^0 x^4(0) = 0;$$

$$\Delta^1 x^4(0) = 1;$$

$$\Delta^2 x^4(0) = 2^4 - 2 = 14;$$

$$\Delta^3 x^4(0) = 3^4 - 3 \cdot 2^4 + 3 \cdot 1^4 = 3(27 - 15) = 36;$$

$$\Delta^4 x^4(0) = 4^4 - 4 \cdot 3^4 + 6 \cdot 2^4 - 4 = 4(64 - 81 + 24 - 1) = 24.$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2!}x^{(2)} + \frac{14}{3!}x^{(3)} + \frac{36}{4!}x^{(4)} + \frac{24}{5!}x^{(5)} = \\ &= \frac{1}{2}x(x-1) + \frac{7}{3}x(x-1)(x-2) + \frac{3}{2}x(x-1)(x-2)(x-3) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{5}x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = \\
& = \frac{x(x-1)(15 + 70x - 140 + 45(x-2)(x-3) + 6(x-2)(x-3)(x-4))}{30} = \\
& = \frac{x(x-1)(70x - 125 + (x-2)(x-3)(45 + 6x - 24))}{30} = \\
& = \frac{x(x-1)(70x - 125 + (x^2 - 5x + 6)(6x + 21))}{30} = \\
& = \frac{x(x-1)(70x - 125 + 6x^3 + 21x^2 - 30x^2 - 105x + 36x + 126)}{30} = \\
& = \frac{x(x-1)(6x^3 - 9x^2 + x + 1)}{30} = \frac{x(x-1)(2x-1)(3x^2 - 3x - 1)}{30}.
\end{aligned}$$

## § 2.9. Суммирование прогрессий

### 1. Сумма первых $n$ членов арифметической прогрессии

Пусть

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (n-1)d, \dots$$

арифметическая прогрессия. Найдем сумму

$$S(n) = a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n-1)d) = \sum_{x=0}^{n-1} (a + xd).$$

В нашем случае суммируется функция  $f(x) = a + xd$ . Как известно,

$$\Delta x = 1,$$

$$\Delta x^{(2)} = 2x,$$

поэтому

$$f(x) = a\Delta x + d \frac{\Delta x^{(2)}}{2} = \Delta \frac{(2ax + dx(x-1))}{2}.$$

Суммирующей функцией для  $a + xd$  является функция

$$F(x) = \frac{x(2a + d(x-1))}{2}.$$

Отсюда следует, что

$$S(n) = \sum_{x=0}^{n-1} (a + xd) = F(n) - F(0) = \frac{n(2a + d(n-1))}{2}.$$

Таким образом,

$$a + (a + d) + (a + 2d) + \dots + (a + (n-1)d) = \frac{n(2a + d(n-1))}{2}. \quad (2.9.1)$$

Если заметить, что  $a + d(n-1) = a_n$ , то получим известную формулу для суммы первых  $n$  членов арифметической прогрессии с первым членом  $a$  и разностью  $d$ :

$$S_n = \frac{(a + a_n)n}{2}.$$

В частности, по формуле (2.9.1) получим

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2.$$

## 2. Сумма первых $n$ членов геометрической прогрессии

Рассмотрим геометрическую прогрессию с первым членом  $a$  и знаменателем  $q \neq 1$

$$a, aq, \dots, aq^{n-1}, \dots$$

Найдем сумму

$$S(n) = a + aq + \dots + aq^{n-1}.$$

Здесь  $S(n)$  является суммой значений функции  $f(x) = aq^x$  при  $x = 0, 1, \dots, n-1$ :

$$S(n) = \sum_{x=0}^{n-1} aq^x.$$

Поскольку

$$\Delta aq^x = aq^{x+1} - aq^x = aq^x(q-1),$$

то

$$\Delta \frac{aq^x}{q-1} = aq^x,$$

поэтому суммирующая функция имеет вид

$$F(x) = \frac{aq^x}{q-1}.$$

Следовательно,

$$S(n) = F(n) - F(0),$$

значит,

$$S(n) = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

### 3. Сумма первых $n$ членов арифметико-геометрической прогрессии

Арифметико-геометрической прогрессией с первым членом  $a$ , разностью  $d$  и знаменателем  $q \neq 1$  называется функция  $f: N \rightarrow R$ , определенная условием

$$f(x) = (a + xd)q^x. \quad (2.9.2)$$

Вычислим сумму

$$S(n) = a + (a + d)q + (a + 2d)q^2 + \dots + (a + (n-1)d)q^{n-1}.$$

Сначала найдем суммирующую функцию для  $f(x)$ . Из равенства (2.9.2) следует, что

$$f(x) = af_1(x) + df_2(x),$$

где

$$f_1(x) = q^x,$$

$$f_2(x) = xq^x.$$

В пункте 2 мы установили, что суммирующей функцией для  $f_1(x)$  является

$$F_1(x) = \frac{q^x}{q-1}.$$

Чтобы определить суммирующую функцию для  $f_2(x)$ , вычислим конечную разность  $\Delta xq^x$ :

$$\Delta xq^x = (x+1)q^{x+1} - xq^x = (q-1)xq^x + q^{x+1}.$$

Как было отмечено выше,

$$q^{x+1} = \Delta \frac{q^{x+1}}{q-1},$$

поэтому

$$\Delta xq^x = (q-1)xq^x + \Delta \frac{q^{x+1}}{q-1}.$$

Отсюда получим, что

$$\Delta \left( \frac{xq^x}{q-1} - \frac{xq^{x+1}}{(q-1)^2} \right) = xq^x.$$

Значит, суммирующей функцией для  $f_2(x) = xq^x$  является функция

$$F_2(x) = \frac{xq^x}{q-1} - \frac{q^{x+1}}{(q-1)^2}.$$

В силу линейности оператора  $\Delta$  получим, что для функции  $f(x) = af_1(x) + df_2(x)$  суммирующей является функция

$$\begin{aligned} F(x) &= aF_1(x) + dF_2(x) = \frac{aq^x}{q-1} + d \left( \frac{xq^x}{q-1} - \frac{q^{x+1}}{(q-1)^2} \right) = \\ &= \frac{(a+xd)q^x}{q-1} - \frac{q^{x+1}d}{(q-1)^2}. \end{aligned}$$

Используя эту суммирующую функцию, найдем  $S(n)$ :

$$\begin{aligned} S(n) &= F(n) - F(0) = \\ &= \frac{(a+nd)q^n}{q-1} - \frac{q^{n+1}d}{(q-1)^2} - \frac{a}{q-1} + \frac{qd}{(q-1)^2} = \\ &= \frac{(a+nd)q^n - a}{q-1} + \frac{qd(1-q^n)}{(q-1)^2}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$S(n) = \frac{(a+nd)q^n - a}{q-1} + \frac{qd(1-q^n)}{(q-1)^2}. \quad (2.9.3)$$

*Замечание.* В параграфе 2.2.7 при помощи тождества Абеля установили равенство

$$a + 2a^2 + \dots + na^n = \frac{na^{n+1}}{a-1} - \frac{a^{n+1} - a}{(a-1)^2}.$$

Отсюда, положив  $a = q$ , найдем

$$q + 2q^2 + \dots + (n-1)q^{n-1} = \frac{(n-1)q^n}{q-1} - \frac{q^n - q}{(q-1)^2}.$$

По формуле (2.9.3) при  $a = 0$ ,  $d = 1$  получим

$$\begin{aligned} q + 2q^2 + \dots + (n-1)q^{n-1} &= \frac{nq^n}{q-1} + \frac{q - q^{n+1}}{(q-1)^2} = \\ &= \frac{nq^{n+1} - nq^n + q - q^{n+1}}{(q-1)^2} = \frac{(n-1)q^{n+1} - (n-1)q^n - q^n + q}{(q-1)^2} = \\ &= \frac{(n-1)q^n(q-1)}{(q-1)^2} - \frac{q^n - q}{(q-1)^2} = \frac{(n-1)q^n}{(q-1)^2} - \frac{q^n - q}{(q-1)^2}. \end{aligned}$$

Пришли к одному и тому же результату.

## § 2.10. Суммы степеней натуральных чисел

1. Рассмотрим следующую задачу. Найдем сумму

$$S^k(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k.$$

Таким образом, задача состоит в суммировании значений функции

$$f(x) = x^k$$

при  $x = 1, 2, \dots, n$ .

Эта задача будет решена, если найдем какую-нибудь суммирующую функцию  $F(x)$  для  $x^k$ . Такая функция может быть построена. В качестве  $F(x)$  можно взять функцию

$$F(x) = \frac{B_{k+1}(x)}{k+1},$$

где  $B_{k+1}(x)$  — многочлен Бернулли с номером  $k+1$ . Действительно,

$$\Delta F(x) = F(x+1) - F(x) = \frac{B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x)}{k+1} = \frac{\Delta B_{k+1}(x)}{k+1}.$$

Поскольку

$$\Delta B_{k+1}(x) = (k+1)x^k, \text{ то}$$

$$\Delta F(x) = x^k.$$

Таким образом,

$$S^k(n) = F(n+1) - F(1) = \frac{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}(1)}{k+1}.$$

Рассмотрим частные случаи рассматриваемой задачи.

**1.1.** При  $k = 1$  имеем

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{B_2(n+1) - B_2(1)}{2}.$$

Как известно,

$$B_2(x) = B_2 + 2B_1x + B_0x^2, \quad B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6},$$

поэтому

$$B_2(x) = \frac{1}{6} - x + x^2.$$

Значит,

$$B_2(n+1) - B_2(1) = (n+1)^2 - (n+1) - 1 + 1 = (n+1)n.$$

Отсюда следует, что

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**1.2.** При  $k = 2$  имеем

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{B_3(n+1) - B_3(1)}{3}.$$

Мы знаем, что

$$B_3(x) = B_3 + 3B_2x + 3B_1x^2 + B_0x^3, \quad B_3 = 0,$$

поэтому

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{6}x = \frac{x(2x^2 - 3x + 1)}{6}.$$

Отсюда,

$$B_3(x) = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6}, \quad B_3(1) = 0,$$

и, следовательно,

$$S^2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Таким образом,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**1.3.** При  $k = 3$  имеем

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{B_4(n+1) - B_4(1)}{4},$$

$$B_4(x) = B_4 + 4B_3x + 6B_2x^2 + 4B_1x^3 + B_0x^4 =$$

$$= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} = x^2(x-1)^2 - \frac{1}{30},$$

$$B_4(1) = -\frac{1}{30}.$$

Из этих равенств следует, что

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

Аналогичным образом можно вычислить  $S^k(n)$  при любых натуральных значениях  $k$ .

**2.** При небольших значениях  $k$  суммы  $S^k(n)$  можно найти, используя суммирующие функции, найденные с помощью конечных разностей для  $x^k$ :

**2.1.** Мы знаем, что при  $k = 1$

$$x = \Delta \frac{x^{(2)}}{2},$$

поэтому суммирующей функцией является  $\frac{x^{(2)}}{2}$ . Тогда

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{(n+1)^{(2)} - 1^{(2)}}{2}.$$

Отсюда, учитывая определение обобщенной степени, получим

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

**2.2.** Для функции  $f(x) = x^2$  на основании формулы Ньютона мы в примере 5 §2.8 получили суммирующий многочлен

$$F(x) = \frac{x(x-1)(2x-1)}{6},$$

поэтому

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = F(n+1) - F(1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**2.3.** Для функции  $f(x) = x^3$  суммирующий многочлен  $F(x)$  был получен в примере 6 §2.8:

$$F(x) = \frac{x^2(x-1)^2}{4},$$

поэтому

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

*Замечание.* Этот результат можно получить, используя следующие несложные вычисления. Найдем конечную разность функции  $\left(x^{(2)}\right)^2$ :

$$\begin{aligned} \Delta \left(x^{(2)}\right)^2 &= \left((x+1)^{(2)}\right)^2 - \left(x^{(2)}\right)^2 = ((x+1)^{(2)} - x^{(2)})((x+1)^{(2)} + x^{(2)}) = \\ &= 2x((x+1)x + x(x-1)) = 4x^3. \end{aligned}$$

Отсюда следует тождество

$$\Delta \frac{\left(x^{(2)}\right)^2}{4} = x^3.$$

Значит,

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{(n+1)^{(2)} - 1^{(2)}}{2} \right)^2$$

или

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

**2.4.** Для функции  $f(x) = x^4$  суммирующая функция  $F(x)$  имеет вид (пример 7 §2.8)

$$F(x) = \frac{x(x-1)(2x-1)(3x^2-3x-1)}{30},$$

следовательно,

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = F(n+1) - F(1).$$

Поскольку  $F(1) = 0$ ,

а 
$$F(n+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},$$

то 
$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}.$$

**3.** При небольших  $k$  для нахождения  $S^k(n)$  можно использовать интерполяционную формулу Ньютона:

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-(n-1))}{n!}\Delta^n y_0,$$

где  $y_0 = f(x_0)$ ,  $q = \frac{x-x_0}{h}$  — число шагов, необходимых для достижения  $x$  с шагом  $h$ , исходя из точки  $x_0$ .

**3.1.** Пусть требуется найти сумму

$$S^1(n) = 1 + 2 + \dots + n.$$

Функцией, которая суммируется, является  $y = S(x) = S^1(x)$ ,  $x_0 = 1$ . Найдем  $\Delta S^1(n)$ :

$$\Delta S^1(n) = S^1(n) - S^1(n-1) = n + 1,$$

отсюда

$$\Delta^2 S^1(n) = \Delta(n+1) = n+2 - n - 1 = 1,$$

$$\Delta^3 S^1(n) = 0.$$

Эти равенства указывают на то, что  $S^1(n)$  следует искать по формуле Ньютона в виде многочлена второй степени, т.е.

$$S^1(n) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0.$$

В нашем случае  $y_0 = S(x_0) = S^1(1) = 1$ ,  $h = 1$ ,

$$q = \frac{n-1}{1} = n-1.$$

Найдем

$$\Delta y(1) = \Delta y_0, \Delta^2 y_0 = \Delta^2 y(1);$$

$$\Delta y_0 = S^1(2) - S^1(1) = (1+2) - 1 = 2;$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_0 &= \Delta^2 y(1) = \Delta^2 S^1(1) = S^1(1+2) - 2S^1(1+1) + S^1(1) = \\ &= S^1(3) - 2S^1(2) + S^1(1) = S^1(2) + 3 - 2S^1(2) + S^1(1) = 4 - S^1(2) = 4 - 3 = 1. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} S^1(n) &= 1 + (n-1) \cdot 2 + \frac{(n-1)(n-1)}{2!} = \\ &= \frac{2 + 4n - 4 + n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

**3.2.** Найдем сумму квадратов первых  $n$  натуральных чисел:

$$S^2(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2.$$

Рассмотрим функцию  $y(x) = S^2(x)$ . Тогда

$$\Delta y(x) = S^2(x+1) - S^2(x) = (x+1)^2,$$

$$\Delta^2 y(x) = \Delta(\Delta y)(x) = (x+2)^2 - (x+1)^2 = 2x+3,$$

$$\Delta^3 y(x) = 2.$$

Отсюда следует, что по формуле Ньютона  $S^2(n)$  представляет собой многочлен третьей степени. В рассматриваемом случае  $x_0 = 1$ ,  $h = 1$ ,  $y_0 = 1$ ,

$$q = \frac{n-1}{1} = n-1.$$

По формуле Ньютона имеем

$$\begin{aligned}
 S^2(n) &= y_0 + q\Delta y(1) + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y(1) + \frac{q(q-1)\dots(q-2)}{3!}\Delta^3 y(1) = \\
 &= 1 + (n-1) \cdot 4 + \frac{(n-1)(n-2)}{2!} \cdot 5 + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3!} \cdot 2 = \\
 &= \frac{6 + (n-1)(24 + 15n - 30 + 2n^2 - 10n + 12)}{6} = \\
 &= \frac{6 + (n-1)(2n^2 + 5n + 6)}{6} = \frac{6 + (n-1)n(2n+5) + 6n - 6}{6} = \\
 &= \frac{n((n-1)(2n+5) + 6)}{6} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{6}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$S^2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Аналогичным образом можно найти  $S^3(n)$ ,  $S^4(n)$ , ...

## § 2.11. Вычисление суммы степеней членов арифметической прогрессии

Пусть  $\{a_k\}$  – арифметическая прогрессия с общим членом

$$a_k = a + kd \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Рассмотрим задачу суммирования квадратов первых  $n$  членов этой прогрессии, т.е. необходимо вычислить сумму

$$S(n) = \sum_{k=1}^n (a + kd)^2.$$

Для решения этой задачи воспользуемся известными результатами о суммах степеней натуральных чисел. Прежде всего отметим, что

$$(a + kd)^2 = a^2 + 2adk + k^2 d^2,$$

поэтому

$$\begin{aligned}
 S(n) &= \sum_{k=1}^n (a^2 + 2adk + k^2 d^2) = \\
 &= a^2 n + 2ad \sum_{k=1}^n k + d^2 \sum_{k=1}^n k^2 = \\
 &= a^2 n + \frac{2adn(n+1)}{2} + \frac{d^2 n(n+1)(2n+1)}{6} = \\
 &= \frac{n(6a^2 + 6ad(n+1) + d^2(n+1)(2n+1))}{6}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$S(n) = a^2 n + \frac{d(n+1)(6a + d + 2dn)n}{6}. \quad (2.11.1)$$

Приведем частные случаи полученного результата:

**1.** Рассмотрим арифметическую прогрессию, первый член которой 1, а разность  $d = 2$ , т.е. 1, 3, 5, ... Тогда общий член этой прогрессии  $a_k$  будет иметь вид

$$a_k = 1 + (k-1) \cdot 2 = 2k - 1,$$

поэтому  $a = -1$ ,  $d = 2$ . По формуле (2.11.1) найдем

$$\begin{aligned}
 S(n) &= 1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2, \\
 S(n) &= n + \frac{2(n+1)(-6 + 2 + 4n)n}{6} = \frac{n(6 + 2(n+1)(4n-4))}{6} = \\
 &= \frac{n(6 + 8(n^2 - 1))}{6} = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(4n^2 - 1)}{3}.$$

**2.** Пусть  $\{a_k\}$  – арифметическая прогрессия,  $a_1 = 1$ ,  $d = 3$ :

$$1, 4, 7, 11, \dots$$

Тогда общий член этой прогрессии будет иметь вид

$$a_k = 3k - 2.$$

Отсюда

$$a = -2, d = 3.$$

По формуле (2.11.1) найдем  $S(n) = 1^2 + 4^2 + 7^2 + \dots + (3n-2)^2$  :

$$\begin{aligned} S(n) &= 4n + \frac{3n(n+1)(-12+3+6n)}{6} = \\ &= \frac{n(8+(n+1)(6n-9))}{2} = \frac{n(6n^2-3n-1)}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда получим

$$1^2 + 4^2 + 7^2 + \dots + (3n-2)^2 = \frac{n(6n^2-3n-1)}{2}.$$

Решим задачу суммирования степеней членов арифметической прогрессии с произвольным показателем  $m$  ( $m \geq 2$ ):

$$S^m(n) = \sum_{k=1}^n (a + kd)^m.$$

По формуле бинома Ньютона имеем

$$\begin{aligned} (a + kd)^m &= \binom{m}{0} a^0 d^m k^m + \binom{m}{1} a d^{m-1} k^{m-1} + \dots + \binom{m}{m} a^m = \\ &= \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} a^l d^{m-l} k^{m-l} = \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} a^{m-l} d^l k^l. \end{aligned}$$

Отсюда получим, что

$$\begin{aligned} S^m(n) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} a^{m-l} d^l k^l = \\ &= \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} a^{m-l} d^l \sum_{k=1}^n k^l = \\ &= \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} a^{m-l} d^l \frac{B_{l+1}(n+1) - B_{l+1}(1)}{l+1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} (a + d)^m + (a + 2d)^m + \dots + (a + nd)^m &= \\ &= \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} a^{m-l} d^l \frac{B_{l+1}(n+1) - B_{l+1}(1)}{l+1}. \end{aligned} \quad (2.11.2)$$

Примеры.

1. Найдем сумму

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3.$$

Числа  $1, 3, 5, \dots, 2n-1$  являются членами арифметической прогрессии, первый член которой  $1$ , разность  $d = 2$ , поэтому общий член  $a_k$  имеет вид

$$a_k = 1 + 2(k-1) = 2k-1,$$

значит, в равенстве  $a_k = a + kd$  имеем  $a = -1$ .

По формуле (2.11.2) получим

$$\begin{aligned} 1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 &= \sum_{l=0}^3 \binom{3}{l} (-1)^{m-l} 2^l \frac{B_{l+1}(n+1) - B_{l+1}(1)}{l+1} = \\ &= \frac{\binom{3}{0} (-1)^3 (B_1(n+1) - B_1(1))}{1} + \binom{3}{1} (-1)^2 \cdot 2 \cdot \frac{B_2(n+1) - B_2(1)}{2} + \\ &+ \binom{3}{2} (-1) \cdot 2^2 \cdot \frac{B_3(n+1) - B_3(1)}{3} + \binom{3}{3} (-1)^0 \cdot 2^3 \cdot \frac{B_4(n+1) - B_4(1)}{4} = \\ &= -B_1(n+1) + B_1(1) + 3(B_2(n+1) - B_2(1)) - \\ &- 4(B_3(n+1) - B_3(1)) + 2(B_4(n+1) - B_4(1)). \end{aligned}$$

Выпишем многочлены Бернулли  $B_1(x), B_2(x), B_3(x), B_4(x)$ :

$$B_1(x) = B_1 + B_0 x = -\frac{1}{2} + x,$$

$$B_2(x) = B_2 + 2B_1 x + B_0 x^2 = \frac{1}{6} - x + x^2,$$

$$B_3(x) = B_3 + 3B_2 x + 3B_1 x^2 + B_0 x^3 = \frac{1}{2} x - \frac{3}{2} x^2 + x^3,$$

$$B_4(x) = B_4 + 4B_3 x + 6B_2 x^2 + 4B_1 x^3 + B_0 x^4 = -\frac{1}{30} + x^2 - 2x^3 + x^4.$$

Отсюда найдем

$$B_1(1) = \frac{1}{2}, \quad B_1(n+1) = n + \frac{1}{2}, \quad B_1(n+1) - B_1(1) = n,$$

$$B_2(n+1) - B_2(1) = \frac{1}{6} - (n+1) + (n+1)^2 - \frac{1}{6} + 1 - 1^2 = n(n+1),$$

$$B_3(n+1) - B_3(1) = ((n+1)^3 - 1^3) - \frac{3}{2}((n+1)^2 - 1^2) + \frac{1}{2}(n+1-1) =$$

$$= n(n^2 + 2n + 1 + n + 1 + 1) - \frac{3}{2}(n+2) + \frac{1}{2} = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2},$$

$$B_4(n+1) - B_4(1) = ((n+1)^4 - 1) - 2((n+1)^3 - 1) + (n+1)^2 - 1 =$$

$$= n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - 2n^3 - 6n^2 - 6n + n^2 + 2n = n^4 + 2n^3 + n^2.$$

Используя эти равенства, получим

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 =$$

$$= -n + 3(n^2 + n) - 2(2n^3 + 3n^2 + n) + 2n^4 + 4n^3 + 2n^2 = 2n^4 - n^2.$$

Отсюда

$$1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2 - 1).$$

Этот же результат можно получить другим способом, используя суммы степеней натуральных чисел. Общий член  $a_k$  возведем в куб:

$$a_k^3 = (2k-1)^3 = 8k^3 - 3 \cdot 2^2 \cdot k^2 + 3 \cdot 2 \cdot k - 1 =$$

$$= 8k^3 - 12k^2 + 6k - 1.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^n (2k-1)^3 = 8 \sum_{k=1}^n k^3 - 12 \sum_{k=1}^n k^2 + 6 \sum_{k=1}^n k - \sum_{k=1}^n k^0.$$

Мы знаем, что

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad (2.11.3)$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$\sum_{k=1}^n k^0 = n,$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n (2k-1)^3 &= 2n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)(2n+1) + 3n(n+1) - n = \\
 &= n(n+1)(2n^2 + 2n - 4n - 2 + 3) - n = \\
 &= n((n+1)(2n^2 - 2n + 1) - 1) = \\
 &= n(2n^3 - 2n^2 + n + 2n^2 - 2n) = n^2(2n^2 - 1).
 \end{aligned}$$

2. Рассмотрим сумму

$$S^3(n) = 1^3 + 4^3 + 7^3 + \dots + (3n-2)^3.$$

Для общего члена этой суммы  $a_k^3$  имеет место равенство

$$a_k^3 = (3k-2)^3 = 27k^3 - 54k^2 + 36k - 8.$$

Отсюда на основании формул (2.11.3) найдем

$$\begin{aligned}
 S^3(n) &= 27 \sum_{k=1}^n k^3 - 54 \sum_{k=1}^n k^2 + 36 \sum_{k=1}^n k - 8 \sum_{k=1}^n k^0 = \\
 &= 27 \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} - 54 \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 36 \frac{n(n+1)}{2} - 8n = \\
 &= n(n+1) \left( \frac{27}{4} n(n+1) - 9(2n+1) + 18 \right) - 8n = \\
 &= \frac{n(n+1)(27n^2 + 27n - 72n - 36 + 72) - 32n}{4} = \\
 &= \frac{n((n+1)(27n^2 - 45n + 36) - 32)}{4} = \\
 &= \frac{n(27n^3 - 18n^2 - 9n + 4)}{4}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, получили тождество

$$1^3 + 4^3 + 7^3 + \dots + (3n-2)^3 = \frac{n(27n^3 - 18n^2 - 9n + 4)}{4}.$$

## § 2.12. Суммы произведений членов арифметической прогрессии

Пусть  $\{a_k\}$  – арифметическая прогрессия с общим членом

$$a_k = a + kd, (k = 1, 2, \dots).$$

Вычислим сумму

$$S_{n,m} = a_1 a_2 a_3 \dots a_m + a_2 a_3 \dots a_{m+1} + \dots + a_n a_{n+1} \dots a_{n+m-1}. \quad (2.12.1)$$

Общий член  $b_{k,m-1}$  суммы (2.12.1) имеет вид

$$\begin{aligned} b_{k,m-1} &= a_k a_{k+1} \dots a_{k+m-1} = \\ &= (a + kd)(a + (k+1)d) \dots (a + (k+m-1)d). \end{aligned} \quad (2.12.2)$$

Из равенства (2.12.2) следует, что  $b_{k,m-1}$  можно выразить через обобщенную степень. Действительно,

$$\begin{aligned} b_{k,m-1} &= (a + kd)(a + (k+1)d) \dots (a + (k+m-1)d) = \\ &= (a + kd)((a + dk) + d) \dots ((a + kd) + (m-1)d). \end{aligned}$$

Положим,

$$x(k) = (a + kd) + (m-1)d,$$

тогда

$$b_{k,m-1} = x(x-d) \dots (x-(m-1)d) = x(k)^{(m;d)}.$$

Таким образом,

$$b_{k,m-1} = ((a + kd) + (m-1)d)^{(m;d)}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \Delta x^{(m+1;d)}(k) &= (x(k+1))^{(m+1;d)} - (x(k))^{(m+1;d)} = \\ &= (x(k) + d)^{(m+1;d)} - (x(k))^{(m+1;d)} = \Delta x^{(m+1;d)} = (m+1)dx(k)^{(m;d)}, \end{aligned}$$

то

$$x^{(m;d)} = \Delta \frac{x^{(m+1;d)}}{(m+1)d}.$$

Отсюда следует, что суммирующей функцией для  $f(k) = b_{k,m-1}$  является функция

$$F(k) = \frac{(a + kd + (m-1)d)^{(m+1;d)}}{(m+1)d},$$

поэтому искомая сумма будет равна  $F(n+1) - F(1)$ :

$$S_{n,m} = \frac{(a + (n+m)d)^{(m+1;d)} - (a + md)^{(m+1;d)}}{(m+1)d}. \quad (2.12.3)$$

**Примеры.**

**1.** Найдем сумму  $1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (2n-1)(2n+1)$ .

Числа  $1, 3, 5, \dots, 2n+1$  являются членами арифметической прогрессии с первым членом  $1$  и разностью  $d = 2$ . Общий член  $a_k$  этой прогрессии имеет вид  $a_k = -1 + 2k$ . Значит,  $a = -1$ . Каждое слагаемое искомой суммы является произведением двух последовательных членов данной прогрессии, поэтому  $m = 2$ . По формуле (2.12.3) имеем

$$\begin{aligned} S_{n,2} &= \frac{(-1 + (n+2)2)^{(3;2)} - (-1 + 4)^{(3;2)}}{6} = \\ &= \frac{(2n+3)^{(3;2)} - 3^{(3;2)}}{6} = \frac{(2n+3)(2n+1)(2n-1) - 3 \cdot 1 \cdot (-1)}{6} = \\ &= \frac{(4n^2 + 8n + 3)(2n-1) + 3}{6} = \frac{8n^3 + 12n^2 - 2n}{6} = \frac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$1 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + (2n-1)(2n+1) = \frac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}.$$

**2.** Рассмотрим сумму

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \dots + (2n-1)(2n+1)(2n+3) = S(n).$$

Можно эту сумму вычислить по формуле (2.12.3), как в предыдущем примере, или эту же сумму можно найти рассуждениями, примененными для получения этой формулы. Общий член  $b_k$  искомой суммы имеет вид

$$b_k = (2k-1)(2k+1)(2k+3) = (2k+3)^{(4;2)}.$$

Рассмотрим функцию  $h(k)$ , заданную условием

$$h(k) = (2k-3)(2k-1)(2k+1)(2k+3) = (2k+3)^{(4;2)},$$

и найдем конечную разность  $\Delta h(k)$ :

$$\Delta h(k) = 4 \cdot 2(2k+3)^{(3;2)}.$$

Отсюда следует, что

$$(2k+3)^{(3;2)} = \Delta \frac{h(k)}{8}.$$

Значит, суммирующей функцией для функции  $b_k$  является функция

$$F(k) = \frac{(2k+3)^{(3;2)}}{8},$$

поэтому

$$\begin{aligned} S(n) &= F(n+1) - F(1) = \\ &= \frac{(2n+5)^{(4;2)} - 5^{(4;2)}}{8} = \\ &= \frac{(2n+5)(2n+3)(2n+1)(2n-1) - 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-1)}{8} = \\ &= \frac{(4n^2 + 16n + 15)(4n^2 - 1) + 15}{8} = \\ &= \frac{16n^4 + 64n^3 + 56n^2 - 16n}{8} = n(2n^3 + 8n^2 + 7n - 2). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$1 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 7 + \dots + (2n-1)(2n+1)(2n+3) = n(2n^3 + 8n^2 + 7n - 2).$$

### § 2.13. Суммы произведений чисел, обратных членам арифметической прогрессии

Рассмотрим последовательность  $\{a_k\}$  с общим членом

$$a_k = a + kd.$$

Составим сумму

$$S^{(-m;d)}(n) = \frac{1}{a_1 a_2 \dots a_m} + \frac{1}{a_2 a_3 \dots a_{m+1}} + \dots + \frac{1}{a_n a_{n+1} \dots a_{n+m-1}}.$$

Для нахождения этой суммы выясним строение ее общего члена

$$b_{k,m} = \frac{1}{(a+kd)(a+kd+d)(a+kd+(m-1)d)}.$$

Отсюда заключаем, что

$$b_{k,m} = (a+kd)^{(-m;d)},$$

т.е. общий член суммы  $S^{(-m;d)}(n)$  является обобщенной степенью с отрицательным показателем с шагом  $d$ .

Найдем конечную разность  $\Delta(a+sd)^{(-m+1;d)}$ :

$$\begin{aligned} \Delta(a+sd)^{(-m+1;d)} &= (a+(s+1)d)^{(-m+1;d)} - (a+sd)^{(-m+1;d)} = \\ &= \frac{1}{(a+(s+1)d)(a+(s+1)d)\dots(a+(s+1)d+(m-2)d)} - \\ &\quad - \frac{1}{(a+sd)(a+(s+1)d)\dots(a+sd+(m-2)d)} = \\ &= \frac{1}{(a+(s+1)d)\dots(a+(s+1)d+(m-3)d)} \left( \frac{1}{a+(s+m-1)d} - \frac{1}{a+sd} \right) = \\ &= \frac{1}{(a+(s+1)d)\dots(a+(s+1)d+(m-3)d)} \cdot \frac{a+sd-a-sd-(m-1)d}{(a+sd)(a+sd+(m-1)d)} = \\ &= \frac{-(m-1)d}{(a+sd)\dots(a+sd+d)\dots(a+sd+(m-2)d)(a+sd+(m-1)d)} = \\ &= -(m-1)d(a+sd)^{(-m;d)}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Delta(a+sd)^{(-m+1;d)} = (-m+1)d(a+sd)^{(-m;d)}.$$

Из полученного равенства следует, что

$$(a+sd)^{(-m;d)} = \Delta \frac{(a+sd)^{(-m+1;d)}}{(-m+1)d}.$$

Таким образом, для функции  $b_{k,m} = (a+kd)^{(-m;d)}$  суммирующей является функция

$$F(k) = \frac{(a+kd)^{(-m+1;d)}}{(-m+1)d}.$$

Теперь искомую сумму можно представить следующим образом:

$$S^{(-m;d)}(n) = F(n+1) - F(1)$$

или

$$S^{(-m;d)}(n) = \frac{(a + (n+1)d)^{(-m+1;d)} - (a+d)^{(-m+1;d)}}{(-m+1)d}. \quad (2.13.1)$$

**Пример.**

Найдем сумму

$$S^{(-2)}(n) = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Последовательность 1, 3, 5, ... является арифметической прогрессией с общим членом  $a_k = 2k - 1$ , поэтому  $a = -1$ ,  $d = 2$ . По формуле (2.13.1) найдем сумму

$$\begin{aligned} S^{(-2)}(n) &= \\ &= \frac{(-1 + 2(n+1))^{(-1;2)} - (2-1)^{(-1;2)}}{-2} = -\frac{1}{2}((2n+1)^{(-1;2)} - 1^{(-1;2)}) = \\ &= -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{1} \right) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

## § 2.14. Суммирование тригонометрических функций

При суммировании тригонометрических функций используются следующие тождества:

$$\sin(a + kb) = \Delta \left( -\frac{\cos(a + kb - \frac{b}{2})}{2 \sin \frac{b}{2}} \right), \quad (2.14.1)$$

$$\cos(a + kb) = \Delta \frac{\sin\left(a + kb - \frac{b}{2}\right)}{2 \sin \frac{b}{2}}. \quad (2.14.2)$$

В справедливости этих тождеств можно убедиться прямыми вычислениями.

**П р и м е р ы.**

**1. Найдем сумму**

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kb) = \sin a + \sin(a + b) + \sin(a + 2b) + \dots + \sin(a + (n-1)b).$$

Равенство (2.14.1) показывает, что функция

$$F(k) = -\frac{\cos\left(a + kb - \frac{b}{2}\right)}{2 \sin \frac{b}{2}}$$

является суммирующей для функции  $\sin(a + kb)$ , поэтому

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kb) = -\frac{1}{2 \sin \frac{b}{2}} \left( \cos\left(a + nb - \frac{b}{2}\right) - \cos\left(a - \frac{b}{2}\right) \right).$$

Так как

$$\begin{aligned} \cos\left(a + nb - \frac{b}{2}\right) - \cos\left(a - \frac{b}{2}\right) &= -2 \sin\left(a - \frac{b}{2} + \frac{nb}{2}\right) \sin \frac{nb}{2} = \\ &= -2 \sin\left(a + \frac{n-1}{2}b\right) \sin \frac{nb}{2}, \end{aligned}$$

то искомая сумма будет иметь вид

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(a + kb) = \frac{\sin\left(a + \frac{n-1}{2}b\right) \sin \frac{nb}{2}}{\sin \frac{b}{2}}.$$

**2. Вычислим сумму**

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \dots + \cos(a + (n-1)b).$$

Из равенства (2.14.2) следует, что функция

$$F(k) = \frac{\sin\left(a + kb - \frac{b}{2}\right)}{2 \sin \frac{b}{2}}$$

является суммирующей для функции  $\cos(a + kb)$ , значит,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) &= \frac{1}{2 \sin \frac{b}{2}} \left( \sin\left(a + nb - \frac{b}{2}\right) - \sin\left(a - \frac{b}{2}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{b}{2}} \left( 2 \sin \frac{nb}{2} \cos\left(a + \frac{n-1}{2}b\right) \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \cos(a + kb) = \frac{\sin \frac{nb}{2} \cos\left(a + \frac{n-1}{2}b\right)}{\sin \frac{b}{2}}.$$

### 3. Найдем сумму

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sin(a + kb) = \sin a - \sin(a + b) + \dots + (-1)^{n-1} \sin(a + (n-1)b).$$

Умножим обе части тождества (2.14.1) на  $(-1)^k$ . Тогда

$$(-1)^k \sin(a + kb) = \Delta \frac{(-1)^{k+1} \cos\left(a + kb - \frac{b}{2}\right)}{2 \sin \frac{b}{2}}.$$

Отсюда следует, что функция

$$F(k) = \frac{(-1)^{k+1} \cos\left(a + kb - \frac{b}{2}\right)}{2 \sin \frac{b}{2}}$$

является суммирующей функцией, поэтому

$$\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \sin(a + kb) = \frac{1}{2 \sin \frac{b}{2}} \left( (-1)^{n+1} \cos \left( a + nb - \frac{b}{2} \right) - (-1) \cos \left( a - \frac{b}{2} \right) \right).$$

Если  $n = 2m$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2m-1} (-1)^k \sin(a + kb) &= -\frac{1}{2 \sin \frac{b}{2}} \left( \cos \left( a + 2mb - \frac{b}{2} \right) - \cos \left( a - \frac{b}{2} \right) \right) = \\ &= -\frac{1}{2 \sin \frac{b}{2}} \left( -2 \sin \left( a - \frac{b}{2} + mb \right) \sin mb \right) = \\ &= \frac{\sin \left( a - \frac{b}{2} + mb \right) \sin mb}{\sin \frac{b}{2}}. \end{aligned}$$

Если  $n = 2m - 1$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2m-2} (-1)^k \sin(a + kb) &= \frac{1}{2 \sin \frac{b}{2}} \left( \cos \left( a - \frac{b}{2} + (2m-1)b \right) + \cos \left( a - \frac{b}{2} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{2 \sin \frac{b}{2}} \cdot 2 \cos \left( a - \frac{b}{2} + \frac{2m-1}{2}b \right) \cos \frac{2m-1}{2}b = \\ &= \frac{\cos(a + (m-1)b) \cos \frac{2m-1}{2}b}{\sin \frac{b}{2}}. \end{aligned}$$

### Упражнения

Докажите тождества:

$$1. \sum_{k=1}^{n-1} k \sin kx = \frac{\sin nx}{4 \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{n \cos \frac{2n-1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

$$2. \sum_{k=1}^{n-1} k \cos kx = \frac{n \sin \frac{2n-1}{2}x}{2 \sin \frac{x}{2}} - \frac{1 - \cos nx}{4 \sin^2 \frac{x}{2}}.$$

$$3. \sum_{k=1}^n \sin^2 kx = \frac{1}{4} \frac{((2n+1) \sin x - \sin(2n+1)x)}{\sin x}.$$

$$4. \sum_{k=1}^n \cos^2 kx = \frac{n-1}{2} + \frac{\cos nx \cdot \sin(n+1)x}{2 \sin x}.$$

$$5. \sum_{k=1}^n \sin^3 kx = \frac{3 \sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{4 \sin \frac{x}{2}} - \frac{\sin \frac{3(n+1)x}{2} \sin \frac{3nx}{2}}{4 \sin \frac{3x}{2}}.$$

$$6. \sum_{k=1}^n \cos^3 kx = \frac{3 \cos \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}}{4 \sin \frac{x}{2}} + \frac{\cos \frac{3(n+1)x}{2} \sin \frac{3nx}{2}}{4 \sin \frac{3x}{2}}.$$

$$7. \sum_{k=1}^{n-1} a^k \sin kx = \frac{a \sin x - a^n \sin nx + a^{n+1} \sin(n-1)x}{1 - 2a \cos x + a^2}.$$

$$8. \sum_{k=1}^{n-1} a^k \cos kx = \frac{1 - a \cos x - a^n \cos nx + a^{n+1} \cos(n-1)x}{1 - 2a \cos x + a^2}.$$

## § 2.15. Суммирование гиперболических функций

Гиперболические функции определяются следующим образом:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Эти функции удовлетворяют тождествам, аналогичным для тригонометрических функций. Приведем несколько таких тождеств:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1, \\ \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x &= \operatorname{ch} 2x, \\ 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x &= \operatorname{sh} 2x, \\ \operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, \\ \operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y, \\ \operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y &= 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2}, \end{aligned} \quad (2.15.1)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y &= 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}, \\ \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y &= 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}. \end{aligned} \quad (2.15.2)$$

**Пример.**

Найдем сумму

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{sh}(x + ky).$$

Вычислим конечную разность  $\Delta \operatorname{ch} \left( x + \left( k - \frac{1}{2} \right) y \right)$ :

$$\Delta \operatorname{ch} \left( x + \left( k - \frac{1}{2} \right) y \right) = \operatorname{ch} \left( x + \left( k + \frac{1}{2} \right) y \right) - \operatorname{ch} \left( x + \left( k - \frac{1}{2} \right) y \right).$$

Используя тождество (2.15.2), получим

$$\Delta \operatorname{ch} \left( x + \left( k - \frac{1}{2} \right) y \right) = 2 \operatorname{sh}(x + ky) \operatorname{sh} \frac{y}{2},$$

отсюда

$$\operatorname{sh}(x + ky) = \Delta \frac{\operatorname{ch} \left( x + \left( k - \frac{1}{2} \right) y \right)}{2 \operatorname{sh} \frac{y}{2}}.$$

Из этого тождества следует, что суммирующей функцией для  $\text{sh}(x + ky)$  является функция

$$F(k) = \frac{\text{ch}\left(x + \left(k - \frac{1}{2}\right)y\right)}{2\text{sh}\frac{y}{2}}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \text{sh}(x + ky) &= F(n) - F(0) = \\ &= \frac{\text{ch}\left(x + \left(n - \frac{1}{2}\right)y\right)}{2\text{sh}\frac{y}{2}} - \frac{\text{ch}\left(x - \frac{y}{2}\right)}{2\text{sh}\frac{y}{2}} = \frac{2\text{sh}\left(x + \frac{n-1}{2}y\right)\text{sh}\frac{ny}{2}}{2\text{sh}\frac{y}{2}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \text{sh}(x + ky) = \frac{\text{sh}\left(x + \frac{n-1}{2}y\right)\text{sh}\frac{ny}{2}}{\text{sh}\frac{y}{2}}.$$

### Упражнения

Докажите тождества:

$$1. \sum_{k=0}^{n-1} \text{ch}(x + ky) = \text{ch}\left(x + \frac{n-1}{2}y\right)\text{sh}\frac{ny}{2} \cdot \frac{1}{\text{sh}\frac{y}{2}}.$$

$$2. \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\frac{\text{th}x}{n \sin^2 \frac{2k+1}{4n}\pi}}{1 + \frac{\text{th}^2 x}{\text{tg}^2 \frac{2k+1}{4n}\pi}} = \text{th}2nx.$$

$$3. \sum_{k=0}^{n-1} \text{sh}bx = \frac{\text{sh}\frac{n-1}{2}b\text{sh}\frac{ny}{2}}{\text{sh}\frac{y}{2}}.$$

## § 2.16. О суммах значений функций

Пусть  $f$  – числовая функция, определенная на множестве целых неотрицательных чисел. Сумму

$$f(a) + f(a+1) + \dots + f(b)$$

кратко записывают, используя символ  $\Sigma$ , в виде выражения

$$\sum_{i=a}^b f(i).$$

При этом предполагается, что  $b \geq a$ . Если  $b = a$ , то  $\sum_{i=a}^a f(i) = f(a)$ . Полагают по определению, что  $\sum_{i=a}^b f(i) = 0$ , если  $b < a$ .

Имеют место следующие равенства:

- 1)  $\sum_{i=a}^b f(i) = \sum_{i=a}^{b-1} f(i) + f(b), (b \geq a);$
- 2)  $\sum_{i=a}^b f(i) = f(a) + \sum_{i=a+1}^b f(i), (b \geq a);$
- 3)  $\sum_{i=a}^b (\lambda f(i)) = \lambda \sum_{i=a}^b f(i), \lambda \in \mathbf{R};$
- 4)  $\sum_{i=a}^b f(i) + \sum_{i=a}^b g(i) = \sum_{i=a}^b (f(i) + g(i));$
- 5)  $\sum_{i=a}^b f(i) = \sum_{j=a}^b f(j);$
- 6)  $\sum_{i=a}^b f(i) = \sum_{j=c-b}^{c-a} f(c-j).$

### Упражнения

1. Проверьте справедливость равенств 1–6.

Пусть  $f$  – двуместная функция, определенная на множестве целых неотрицательных чисел.

Рассмотрим сумму  $\sum_{j=a}^b f(x, j)$ , которая представляет собой

одноместную функцию, зависящую от  $x$ . Ее можно просуммировать по  $x$ :

$$\sum_{x=c}^d \sum_{j=a}^b f(x, j). \quad (2.16.1)$$

Можно поступить иначе: сначала найти сумму  $\sum_{x=c}^d f(x, j)$ , затем сумму

$$\sum_{j=a}^b \sum_{x=c}^d f(x, j). \quad (2.16.2)$$

Числа, полученные в результате суммирования первым и вторым способом, оказываются равными:

$$\sum_{x=c}^d \left( \sum_{j=a}^b f(x, j) \right) = \sum_{j=a}^b \left( \sum_{x=c}^d f(x, j) \right).$$

Действительно, из определения символа суммирования получим

$$\begin{aligned} \sum_{x=c}^d \left( \sum_{j=a}^b f(x, j) \right) &= \sum_{j=a}^b f(c, j) + \sum_{j=a}^b f(c+1, j) + \dots + \sum_{j=a}^b f(d, j) = \\ &= (f(c, a) + f(c, a+1) + \dots + f(c, b)) + \\ &+ (f(c+1, a) + f(c+1, a+1) + \dots + f(c+1, b)) + \\ &+ \dots + (f(d, a) + f(d, a+1) + \dots + f(d, b)). \end{aligned}$$

В силу коммутативности и ассоциативности операции сложения полученную сумму можно представить иначе:

$$\begin{aligned} \sum_{x=c}^d \left( \sum_{j=a}^b f(x, j) \right) &= (f(c, a) + f(c+1, a) + \dots + f(d, a)) + (f(c, a+1) + \\ &+ f(c+1, a+1) + \dots \\ &\dots + f(d, a+1)) + (f(c, b) + f(c+1, b) + \dots + f(d, b)) = \\ &= \sum_{x=c}^d f(x, a) + \sum_{x=c}^d f(x, a+1) + \dots + \sum_{x=c}^d f(x, b) = \sum_{j=a}^b \left( \sum_{x=c}^d f(x, j) \right). \end{aligned}$$

Вместо выражений (2.16.1) и (2.16.2) используют запись

$$\sum_{x=c}^d \sum_{j=a}^b f(x, j).$$

Полученная сумма называется двойной или двукратной суммой. Имеют место следующие равенства:

$$\sum_{i=a}^n \sum_{j=b}^m (f(i)g(i, j)) = \sum_{i=a}^n \left( f(i) \sum_{j=b}^m g(i, j) \right), \quad (2.16.3)$$

$$\sum_{i=a}^n \left( f(i) \sum_{j=b}^m (g(j)h(i, j)) \right) = \sum_{j=b}^m \left( g(j) \sum_{i=a}^n (f(i)h(i, j)) \right). \quad (2.16.4)$$

2. Докажите формулы (2.16.3) и (2.16.4).

Аналогично определяются  $k$ -кратные суммы  $k \geq 3$ .

## § 2.17. Задача о кратной сумме

Рассмотрим  $k$ -кратную сумму

$$\sum_{t_k=1}^n \sum_{t_{k-1}=1}^{t_k} \dots \sum_{t_1=1}^{t_2} f(t_1).$$

Представим эту сумму как сумму вида

$$\sum_{t=1}^n g(t).$$

Прежде чем перейти к решению задачи, докажем предложение 2.17.1.

**Предложение 2.17.1.** Имеет место тождество

$$\sum_{\tau=1}^n \left( g(\tau) \sum_{s=1}^{\tau} f(s) \right) = \sum_{v=1}^n \left( f(v) \sum_{t=v}^n g(t) \right).$$

*Доказательство:*

$$\begin{aligned} \sum_{\tau=1}^n \left( g(\tau) \sum_{s=1}^{\tau} f(s) \right) &= g(1) \sum_{s=1}^1 f(s) + g(2) \sum_{s=1}^2 f(s) + \dots + g(n) \sum_{s=1}^n f(s) = \\ &= (g(1) + g(2) + \dots + g(n))f(1) + (g(2) + g(3) + \dots \\ &\quad \dots + g(n))f(2) + \dots + g(n)f(n) = \\ &= f(1) \sum_{t=1}^n g(t) + f(2) \sum_{t=2}^n g(t) + \dots + f(n) \sum_{t=n}^n g(t) = \sum_{v=1}^n \left( f(v) \sum_{t=v}^n g(t) \right). \end{aligned}$$

Предложение доказано.

**Предложение 2.17.2.** Имеет место тождество

$$\sum_{t=v}^n (a-t)^{(m)} = \frac{(a+1-v)^{(m+1)}}{m+1} - \frac{(a-n)^{(m+1)}}{m+1}.$$

*Доказательство.* Рассмотрим функцию  $g(\tau) = (a - \tau)^{(m)}$ .  
Найдем конечную разность первого порядка этой функции:

$$\begin{aligned}\Delta g(\tau) &= g(\tau + 1) - g(\tau) = (a - (\tau + 1))^{(m)} - (a - \tau)^{(m)} = (b - 1)^{(m)} - b^{(m)} = \\ &= (b - 1)(b - 2) \dots (b - 1 - (m - 1)) - b(b - 1) \dots (b - (m - 1)) = \\ &= (b - 1)(b - 2) \dots (b - m) - b(b - 1) \dots (b - m + 1) = \\ &= (b - 1)(b - 2) \dots (b - m + 1)(b - m - b) = -m(b - 1)^{(m-1)} = \\ &= -m(a - 1 - \tau)^{(m-1)}.\end{aligned}$$

Из последнего равенства следует

$$\Delta(n + 1 - \tau)^{(m+1)} = -(m + 1)(n - \tau)^{(m)}.$$

Пользуясь линейностью оператора конечной разности, получим равенство

$$(a - \tau)^{(m)} = \Delta \left( -\frac{(a + 1 - \tau)^{(m+1)}}{m + 1} \right).$$

Обозначим суммирующую функцию  $F(\tau) = -\frac{(a + 1 - \tau)^{(m+1)}}{m + 1}$ .

Тогда получим

$$\begin{aligned}\sum_{t=v}^n (a - t)^{(m)} &= F(n + 1) - F(v) = -\frac{(a + 1 - n - 1)^{(m+1)}}{m + 1} + \frac{(a + 1 - v)^{(m+1)}}{m + 1} = \\ &= \frac{(a + 1 - v)^{(m+1)}}{m + 1} - \frac{(a - n)^{(m+1)}}{m + 1}.\end{aligned}$$

Предложение доказано.

Теперь задачу о кратной сумме рассмотрим для частных случаев.

Пусть  $k = 2$ . Тогда имеем

$$\begin{aligned}\sum_{t_2=1}^n \sum_{t_1=1}^{t_2} f(t_1) &= \sum_{t_1=1}^1 f(t_1) + \sum_{t_1=1}^2 f(t_1) + \dots + \sum_{t_1=1}^n f(t_1) = \\ &= f(1) + (f(1) + f(2)) + (f(1) + f(2) + f(3)) + \dots \\ &\quad \dots + (f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n)) = \\ &= n f(1) + (n - 1) f(2) + (n - 2) f(3) + \dots + 2 f(n - 1) + f(n) = \\ &= \sum_{t=1}^n (n + 1 - t) f(t) = \sum_{t=1}^n \frac{(n + 1 - t)}{1!} f(t).\end{aligned}$$

При  $k = 3$ , учитывая предыдущий результат, получим

$$\sum_{t_3=1}^n \sum_{t_2=1}^{t_3} \sum_{t_1=1}^{t_2} f(t_1) = \sum_{t_3=1}^n \sum_{t'=1}^{t_3} (t_3 - t' + 1) f(t') = \sum_{t_3=1}^n \sum_{t_2=1}^{t_3} h(t_2) = \sum_{\tau=1}^n (n - \tau + 1) h(\tau) =$$

$$= \sum_{\tau=1}^n (n - \tau + 1) \sum_{t_1=1}^{\tau} f(t_1) = \sum_{\tau=1}^n \sum_{t_1=1}^{\tau} (n - \tau + 1) f(t_1) =$$

$$= \sum_{\tau=1}^n (n - \tau + 1) (f(1) + f(2) + \dots + f(\tau)) =$$

$$= n \cdot f(1) + (n - 1) \cdot (f(1) + f(2)) + (n - 2) \cdot (f(1) + f(2) + f(3)) + \dots$$

$$\dots + (f(1) + f(2) + \dots + f(n)) = (n + (n - 1) + \dots + 1) \cdot f(1) + ((n - 1) +$$

$$+ (n - 2) + \dots + 1) \cdot f(2) + \dots + 1 \cdot f(n) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} f(1) + \frac{(n-1)n}{2} f(2) + \dots + (2+1) f(n-1) + f(n) =$$

$$= \frac{(n+1)^{(2)}}{2!} f(1) + \frac{n^{(2)}}{2!} f(2) + \dots + \frac{2^{(2)}}{2!} f(n) = \sum_{t=1}^n \frac{(n+2-t)^{(2)}}{2!} f(t).$$

Методом математической индукции докажем тождество

$$\sum_{t_k=1}^n \sum_{t_{k-1}=1}^{t_k} \dots \sum_{t_1=1}^{t_2} f(t_1) = \sum_{t=1}^n \frac{(n+k-1-t)^{(k-1)}}{(k-1)!} f(t). \quad (2.17.1)$$

При  $k = 2$  тождество имеет место.

Предположим, что тождество имеет место для любого фиксированного  $k$ . Докажем справедливость тождества (2.17.1) для  $k + 1$ . Из определения суммы имеем

$$\sum_{t_{k+1}=1}^n \sum_{t_k=1}^{t_{k+1}} \dots \sum_{t_1=1}^{t_2} f(t_1) = \sum_{t_{k+1}=1}^n \sum_{t_k=1}^{t_{k+1}} \dots \sum_{t_2=1}^{t_3} h(t_2),$$

где  $h(t_2) = \sum_{t_1=1}^{t_2} f(t_1).$

В силу индуктивного предположения

$$\begin{aligned} \sum_{t_{k+1}=1}^n \sum_{t_k=1}^{t_{k+1}} \dots \sum_{t_2=1}^{t_3} h(t_2) &= \sum_{\tau=1}^n \frac{(n+k-1-\tau)^{(k-1)}}{(k-1)!} \sum_{t_1=1}^{\tau} f(t_1) = \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\tau=1}^n (a-\tau)^{(k-1)} \sum_{t_1=1}^{\tau} f(t_1), \end{aligned}$$

где  $a = n + k - 1$ .

На основании предложений 2.17.1, 2.17.2 последнее выражение примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{(k-1)!} \sum_{\tau=1}^n (a-\tau)^{(k-1)} \sum_{t_1=1}^{\tau} f(t_1) &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{v=1}^n f(v) \sum_{t=v}^n (a-t)^{(k-1)} = \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{v=1}^n f(v) \left( (a+1-v)^{(k)} - (a-n)^{(k)} \right) = \frac{1}{k!} \sum_{v=1}^n f(v) \left( (n+k-v)^{(k)} - (k-1)^{(k)} \right) = \\ &= \sum_{v=1}^n \frac{(n+k-v)^{(k)}}{k!} f(v). \end{aligned}$$

Здесь мы учли равенство  $(k-1)^{(k)} = 0$ . Утверждение доказано.

## Г л а в а 3

### ТЕОРИЯ ГРАФОВ

---

#### § 3.1. Основные понятия теории графов

Рассмотрим  $U$  – непустое конечное множество элементов произвольной природы  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ . Будем называть элементы этого множества точками или вершинами. Неупорядоченную пару  $\{u_i, u_j\}$  элементов множества  $U$  назовем ребром, соединяющим вершины  $u_i$  и  $u_j$ , эти вершины называют концами или началом и концом данного ребра. Обозначим ребро  $\{u_i, u_j\} = u_i u_j$ . Множество ребер обозначим  $V = \{\{u_i, u_j\} \mid u_i, u_j \in U\}$ .

**Определение 3.1.1.** Графом  $G$  называется совокупность, состоящая из непустого множества вершин и множества ребер, соединяющих некоторые из этих вершин. Множество ребер может быть пустым.

Если количество вершин равно  $p$ , а число ребер равно  $q$ , то соответствующий граф называется  $(p, q)$ -графом.

При пустом множестве ребер  $V = \emptyset$ , граф  $(p, 0)$  называется ноль-графом.

**Определение 3.1.2.** Если в графе существует ребро  $\{u_i, u_j\}$ , то вершины  $u_i, u_j$  называются смежными. И в этом случае говорят, что вершины и ребро – инцидентны. Возможно, что в графе несколько ребер соединяют вершины  $u_i$  и  $u_j$ :  $\{u_i, u_j\}_1, \{u_i, u_j\}_2, \dots, \{u_i, u_j\}_m$ . Эти ребра называются кратными. Сам граф называется мультиграфом при  $m > 1$ .

**Определение 3.1.3.** Матрицей смежности графа  $G$  с  $p$  вершинами  $u_1, \dots, u_p$  называется квадратная матрица  $A = \|a_{ij}\|$ ,  $i, j = 1, \dots, p$ , порядка  $p$ , с элементами:

$$a_{ij} = \begin{cases} m, & \text{если вершины } u_i \text{ и } u_j \text{ соединяются } m \text{ ребрами;} \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

**П р и м е р.** Для графа  $G = (\{u_1, u_2, u_3\}, \{u_1 u_2, u_2 u_3\})$  матрица смежности имеет вид  $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

**Определение 3.1.4.** Матрицей инцидентности графа  $G=(U,V)$  с  $p$  вершинами  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$  и  $q$  ребрами  $V = \{v_1, \dots, v_q \mid v_k = \{u_i, u_j\}\}$  называется  $p \times q$ -матрица  $B = ||b_{ij}||$  с элементами

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } u_i \text{ инцидентна ребру } v_j; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

**Пр и м е р.**

Для графа  $G = (U, V)$ ,  $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ ,  $V = \{v_1 = u_1u_2, v_2 = u_2u_3\}$

матрица инцидентности имеет вид  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Граф удобно иллюстрировать в виде диаграммы, изображая вершины точками, ребра – дугами кривых. Расположение точек и «кривизна» ребра при этом не имеют существенного значения.

**Пр и м е р.**

$U = \{u_1, u_2, u_3\}$  – множество вершин. Совокупность ребер  $V = \{\{u_1, u_2\}, \{u_1, u_3\}, \{u_2, u_3\}\}$ .

Диаграмма, соответствующая графу  $G = (U, V)$ , имеет вид, представленный на рис. 1.

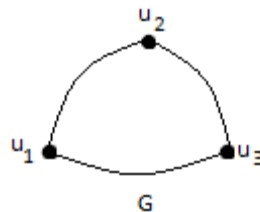


Рис. 1. Граф

Следующая диаграмма  $G_1$  соответствует мультиграфу (рис. 2), так как в ней содержатся кратные ребра  $\{u_1, u_3\}_1, \{u_1, u_3\}_2$ .

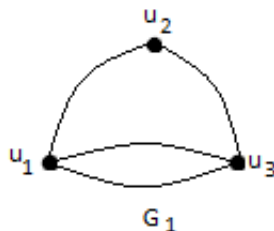


Рис. 2. Мультиграф

Следующий граф  $G_2$  является псевдографом (рис. 3), так как здесь содержится петля – ребро, концы которого совпадают в вершине  $u_3$ .

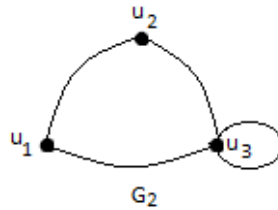


Рис. 3. Псевдограф

**Определение 3.1.5.** Ориентированным графом (орграфом) называется совокупность, состоящая из непустого множества вершин и множества упорядоченных пар вершин, называемых дугами орграфа.

На диаграмме ориентированного графа дуги изображаются направленными отрезками кривых.

П р и м е р.

$U = \{u_1, u_2, u_3\}$  – непустое множество. Совокупность упорядоченных пар  $V = \{(u_1, u_2), (u_2, u_3)\}$  является множеством дуг орграфа. Для дуги  $(u_1, u_2)$  вершина  $u_1$  называется началом дуги, вершина  $u_2$  – концом дуги. Диаграмма орграфа  $V$  представлена на рис. 4.

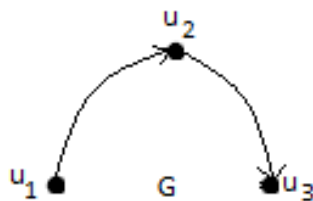


Рис. 4. Орграф

**Определение 3.1.6.** Орграф называется направленным, если он не содержит симметричных дуг, т.е. дуг вида  $(u_i, u_j)$  и  $(u_j, u_i)$ .

Направленный граф представлен на рис. 5, ненаправленный граф – на рис. 6.

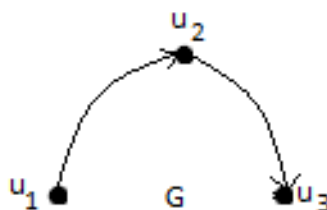


Рис. 5. Направленный граф

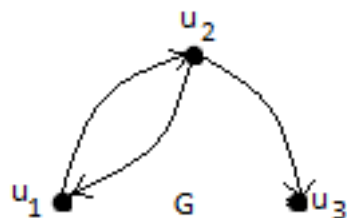


Рис. 6. Ненаправленный граф

Далее будут рассматриваться только неориентированные графы без кратных ребер и петель, если не оговаривается иначе.

**Определение 3.1.7.** Граф называется помеченным или пронумерованным, если его вершинам сопоставляются какие-либо метки.

Непомеченный ноль-граф представлен на рис. 7, помеченные графы – на рис. 8.



Рис. 7. Непомеченный ноль-граф с тремя вершинами

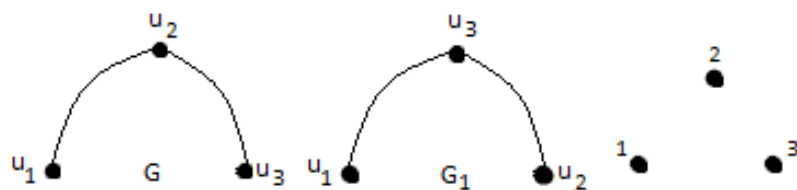


Рис. 8. Помеченные графы

**Определение 3.1.8.** Подграфом графа  $G = (U, V)$  называется граф  $G'$ , множество вершин и ребер которого являются соответствующими подмножествами графа  $G$ .

**Примеры.**

Рассмотрим графы, представленные на рис. 9.

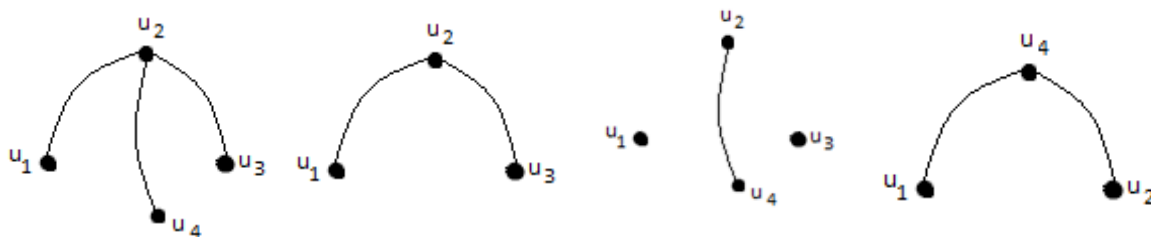


Рис. 9. Графы и их подграфы

Из четырех представленных графов второй и третий графы являются подграфами первого. Четвертый не является подграфом ни первого, ни второго, ни третьего, так как ребро  $u_4u_1$  не принадлежит ни одному из указанных графов.

**Определение 3.1.9.** Остовным подграфом графа  $G$  называется его подграф, содержащий все вершины графа  $G$ .

В предыдущем примере третий граф является остовным подграфом первого графа.

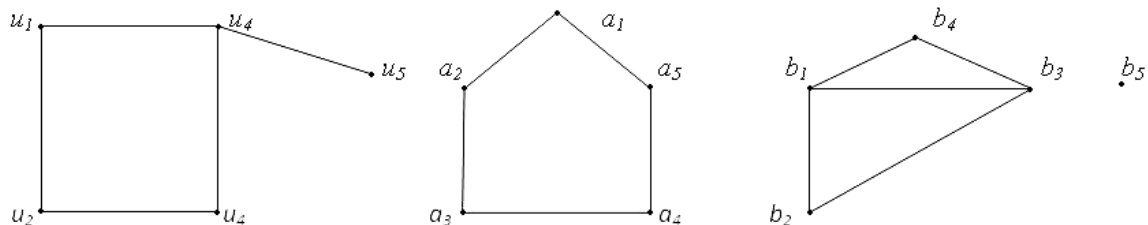
**З а д а ч а.**

Приведите примеры графов:

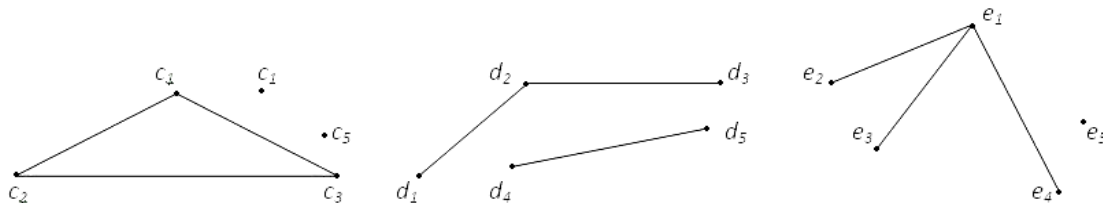
- а) с пятью вершинами и пятью ребрами;
- б) с пятью вершинами и тремя ребрами.

**Р е ш е н и е.**

а)



б)



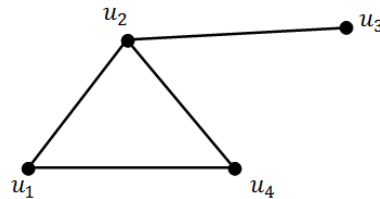
## § 3.2. Пути, маршруты, циклы в графе. Связные и несвязные графы

**Определение 3.2.1.** Путем в графе называется такая последовательность его ребер, в которой начало каждого следующего ребра совпадает с концом предыдущего.

**Определение 3.2.2.** Маршрутом в графе из вершины  $u_\alpha$  в вершину  $u_\beta$  называется такая чередующаяся последовательность вершин и ребер этого графа, которая начинается в  $u_\alpha$  и заканчивается  $u_\beta$  и в которой два соседних элемента инцидентны друг другу.

Пример.

Последовательность ребер  $u_2u_4; u_4u_1; u_1u_2; u_2u_3$  является путем в данном графе из вершины  $u_2$  в вершину  $u_3$ .



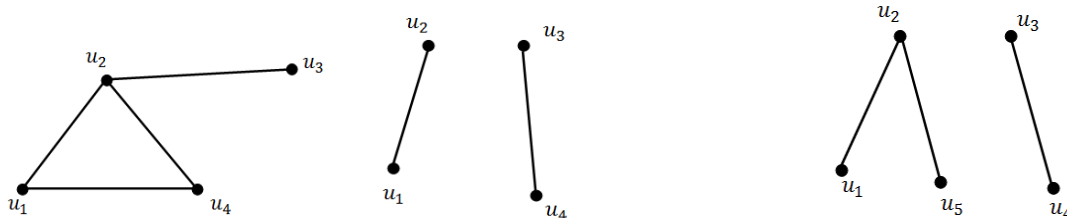
Последовательность  $u_1, u_1u_2, u_2, u_2u_3, u_3$  — маршрут из вершины  $u_1$  в  $u_3$ .

**Определение 3.2.3.** Циклом называется путь, который начинается и заканчивается в одной и той же вершине.

Путь называется простым, если он проходит по каждому ребру ровно один раз. Простой путь иногда называют цепью. Простой путь, проходящий по каждой вершине ровно один раз, называется элементарным.

**Определение 3.2.4.** Граф называется связным, если для любых его вершин существует соединяющий их путь. В противном случае граф называется несвязным.

Примеры.



Первый граф в этом примере является связным, второй и третий — несвязные.

**Определение 3.2.5.** Максимально связный подграф данного графа называется компонентой связности этого графа.

**Определение 3.2.6.** Ребро графа называется мостом, если после его удаления граф становится несвязным.

На рис. 10 ребра  $u_1u_4, u_1u_2, u_4u_2$  не являются мостами. Ребро  $u_2u_3$  является мостом.

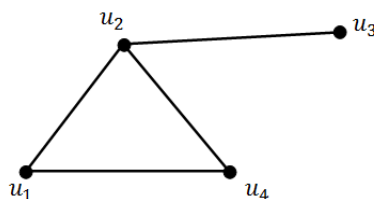


Рис. 10. Граф с мостом

**Определение 3.2.7.** Расстоянием между вершинами  $u_1$  и  $u_2$  в графе называется длина (количество ребер) кратчайшего пути, проходящего по каждой вершине не более одного раза. Если  $u_1$  и  $u_2$  не соединены путем, то расстояние между  $u_1, u_2$  принимается равным бесконечности.

Обозначение для расстояния  $d(u_1, u_2)$ .

**ТЕОРЕМА 3.2.1.** Расстояние между вершинами графа является метрикой в связном графе.

*Доказательство.*

1. Докажем, что  $d(u, v) > 0$  и  $d(u, v) = 0$  тогда и только тогда, когда вершина  $u$  совпадает с вершиной  $v$ , т.е.  $u = v$ . Так,  $d(u, v) \geq 0$  следует из определения длины пути: количество ребер не может быть отрицательным числом. В определении сказано, что  $d(u, v) = \infty$ , если  $u$  и  $v$  не связаны путем. Эта ситуация невозможна, так как граф связный. Если  $u \neq v$ , то существует либо ребро  $uv$ , соединяющее их, либо путь из вершины  $u$  в вершину  $v$ . В каждом из этих случаев  $d(u, v) \neq 0$ . Следовательно,  $d(u, v) = 0$ , когда  $u = v$ .

2. Если  $d(u, v)$  определено, то  $d(u, v) = d(v, u)$ .

3. Для любых вершин  $u, v, t$  выполняется  $d(u, v) + d(v, t) \geq d(u, t)$ . Докажем это методом от противного. Предположим, что  $d(u, v) + d(v, t) < d(u, t)$ . Так как расстояние между вершинами  $u$  и  $v$  определено, то существует путь, проходящий по вершинам:  $u = u_1, u_2, \dots, u_k = v$ . Аналогично между вершинами  $v$  и  $t$  существует путь, проходящий по вершинам:  $u_k = v, u_{k+1}, \dots, u_{k+r} = t$ . Тогда рассмотрим первый путь вершины  $u$  до вершины  $t$ :  $u_k = u_1, \dots, u_k, \dots, u_{k+r} = t$ . Его длина равна сумме соответствующих длин составляющих его путей. Так как определено расстояние между вершинами  $u$  и  $t$ , то существует второй путь, и в силу неравенства  $d(u, v) + d(v, t) < d(u, t)$  он длиннее первого, а это противоречит определению расстояния, так как расстояние – это длина кратчайшего пути. Значит, выполняется нужное нам неравенство.

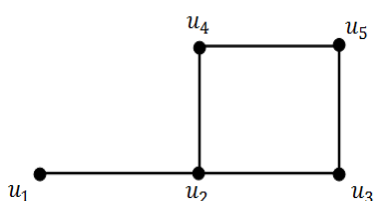
**Определение 3.2.8.** Кратчайший путь от вершины  $u$  к вершине  $v$ , проходящий по каждому ребру не более одного раза, называется геодезической, соединяющей эти вершины.

**Определение 3.2.9.** Длина самой длинной геодезической в графе называется его диаметром. Обозначается диаметр графа  $G$  символом  $d(G)$ .

**Определение 3.2.10.** Обхватом графа называется длина самого короткого простого цикла. Обхват графа  $G$  определен не для всех графов, обозначается  $g(G)$ .

**Определение 3.2.11.** Длина самого длинного цикла, все вершины которого различны, называется окружением графа. Окружение графа  $G$  определено не для всех графов, обозначается  $c(G)$ .

П р и м е р.

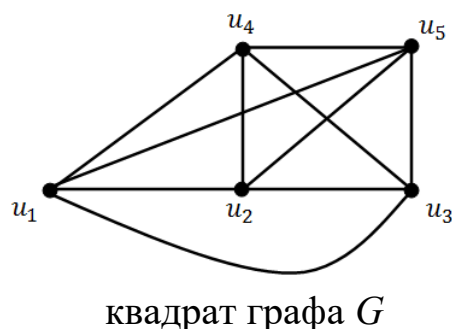
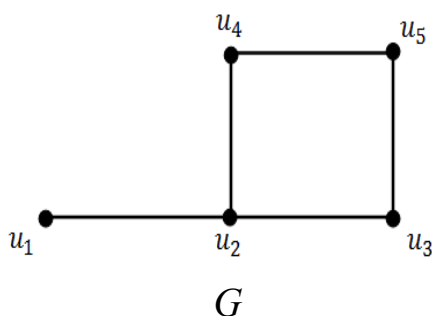


$$\begin{aligned} d(u_1, u_2) &= 1, d(u_2, u_3) = 1, d(u_2, u_4) = 1, \\ d(u_3, u_5) &= 1, d(u_4, u_5) = 1, d(u_1, u_3) = 2, \\ d(u_1, u_4) &= 2, d(u_2, u_5) = 2, d(u_1, u_5) = 3. \\ d(G) &= 2, g(G) = 4, c(G) = 4. \end{aligned}$$

Примером графа, для которого не определен обхват и окружение, является любой граф без цикла.

**Определение 3.2.12.** Квадратом графа  $G$  называется граф, обозначаемый  $G^2$ , множество вершин которого совпадает со множеством вершин графа  $G$ , вершины  $u$  и  $v$  которого смежны тогда и только тогда, когда расстояние между этими вершинами в графе  $G$  меньше или равно двум.

П р и м е р.



### § 3.3. Степени вершин графа и их свойства

**Определение 3.3.1.** Количество ребер, инцидентных данной вершине графа, называется ее степенью. Обозначение  $st(u_i)$  – степень вершины  $u_i$ .

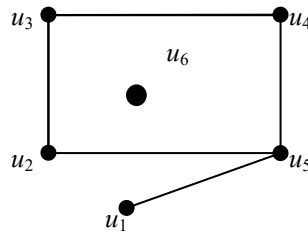
**Определение 3.3.2.** Вершина графа называется четной, если степень этой вершины четная. В противном случае вершина называется нечетной.

**Определение 3.3.3.** Вершина, степень которой равна нулю, называется изолированной вершиной.

**Определение 3.3.4.** Вершина, степень которой равна единице, называется висячей.

**Пр и м е р.**

Вершина  $u_1$  — висячая, вершина  $u_6$  — изолированная.



### Свойства степеней вершин графа

1. Сумма степеней всех вершин графа является числом четным, равным удвоенному числу ребер. Для  $(p, q)$ -графа

$$\sum_{i=1}^p st(u_i) = 2q.$$

*Доказательство.* Рассмотрим  $(p, q)$ -граф с вершинами  $u_1, u_2, u_3, \dots, u_p$ . Каждому ребру графа инцидентны две вершины, т.е. при суммировании степеней каждое ребро учитывается дважды. Получаем удвоенное число ребер.

2. В любом связном графе количество нечетных вершин четно.

*Доказательство.* Сумма степеней вершин четна, это возможно только в том случае, если граф содержит четное число нечетных вершин.

3. В любом связном графе с не менее чем двумя вершинами, существует хотя бы две вершины одинаковой степени.

*Доказательство.* Пусть дан  $(p, q)$ -граф  $G$ . Если граф имеет  $p$  вершин, то каждая из них может иметь степень  $0, 1, 2, \dots, (p-1)$ . Предположим, что в некотором графе все его вершины имеют различную степень.

Если  $st(u_1) = 0$ , то это значит, что  $u_1$  — изолированная вершина, и поэтому в графе не найдется вершины  $u_i$  со степенью  $st(u_i) = p-1$ .

Иначе, эта вершина должна быть соединена с остальными  $(p - 1)$  вершиной, в том числе и с  $u_1$ , но  $u_1$  – изолированная. Следовательно, в графе, имеющем  $p$  вершин, не могут быть одновременно вершины степени 0 и  $(p - 1)$ . Степени вершин принимают значение либо из множества  $\{0; 1; \dots; p - 2\}$ , либо  $\{1; 2; \dots; p - 1\}$ , в которых  $p - 1$  элемент. Это значит, что из  $p$  вершин найдутся две, имеющие одинаковые степени.

**Определение 3.3.5.** Если степени всех вершин графа одинаковые, то он называется однородным (регулярным) графом соответствующей степени. Степень однородного графа обозначается символом  $\deg G$ .

**Примеры:**

1. Однородный граф нулевой степени  $\deg G = 0$  является  $(p, 0)$ -графом.

2. Однородный граф первой степени  $\deg G = 1$  является  $(2k, k)$ -графом.

3. Однородные графы второй степени  $\deg G = 2$  состоят из компонент связности, каждый из которых является простым циклом.

**Определение 3.3.6.** Однородные графы третьей степени называются кубическими.

**Пример.**

Граф  $G_1$  является кубическим.



4. Каждый кубический граф имеет четное количество вершин.

**Доказательство.** Рассмотрим кубический граф  $G = (U, V)$ ,  $\deg G = 3$ . По свойству 1 степеней вершин графа  $\sum_{i=1}^p st(u_i) = 2q$ , получаем  $3p = 2q$ . Отсюда,  $p$  – четное число.

### § 3.4. Гомоморфизм и изоморфизм графов

Пусть  $G$  и  $G'$  – произвольные графы. Обозначим через  $\varphi$  отображение множества  $U$  вершин одного графа во множество  $U'$

вершин второго графа и  $\psi$  отображение множества  $V$  ребер одного графа во множество  $V'$  ребер другого.

**Определение 3.4.1.** Графы  $G(U, V)$  и  $G'(U', V')$  называются гомоморфными, если существует пара отображений  $\phi: U \rightarrow U'$  и  $\psi: V \rightarrow V'$ , сохраняющих смежность вершин  $\psi(\{u_i, u_j\}) = \{\phi(u_i), \phi(u_j)\}$ .

Образом ребра при отображении  $\psi$ , соединяющего вершины  $u_i$  и  $u_j$  в графе  $G$ , является ребро, соединяющее образы при отображении  $\phi$  этих вершин. На рис. 11 представлена пара гомоморфных графов.

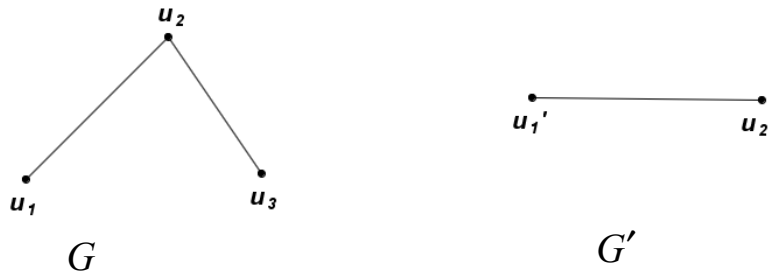


Рис. 11. Гомоморфные графы

Граф  $G$  гомоморфен  $G'$ , так как существует пара отображений

$$\begin{aligned} u_1 &\rightarrow u_1' \\ \phi: u_2 &\rightarrow u_2', \quad \psi: \begin{aligned} u_1 u_2 &\rightarrow u_1' u_2' \\ u_2 u_3 &\rightarrow u_1' u_2' \end{aligned} \\ u_3 &\rightarrow u_1' \end{aligned}$$

**Определение 3.4.2.** Два гомоморфных графа называются изоморфными, если существует пара взаимно однозначных биекций множеств их вершин и ребер, сохраняющих отношение смежности. Изоморфизм графов обозначается символом  $\cong$ .

$G(U, V) \cong G'(U', V')$ , если существуют биекции  $\phi: U \rightarrow U'$  и  $\psi: V \rightarrow V'$  такие, что  $\psi(\{u_i, u_j\}) = \{\phi(u_i), \phi(u_j)\}$ .

### Свойства изоморфных графов

1. Если графы изоморфны, то множества наборов степеней вершин графов совпадают.

*Доказательство.* Рассмотрим графы  $G(U, V) \cong G'(U', V')$ . Множества вершин этих графов  $U = \{u_1, \dots, u_k\}$  и  $U' = \{u_1', \dots, u_k'\}$ . Множества наборов степеней этих графов  $s_G$  и  $s_{G'}$ . Из определения изоморфных графов следует существование пары биекций  $\phi$  и  $\psi$ . Рассмотрим вершину  $u_i$  в графе  $G$ , степени  $st(u_i)$ , обозначим образ этой вершины  $u_i' = \phi(u_i)$ . Допустим, что степень образа

не совпадает со степенью прообраза  $st(u_i) \neq st(u'_i)$ . При отображении  $\psi$  всем ребрам, исходящим из  $u_i$ , однозначно сопоставятся ребра, исходящие из  $u'_i$ , так как их разное количество, то биекция невозможна. Из этого следует, что степени образов и прообразов совпадают. Следовательно, сформулированное утверждение верно.

Утверждение, обратное данному, неверно.

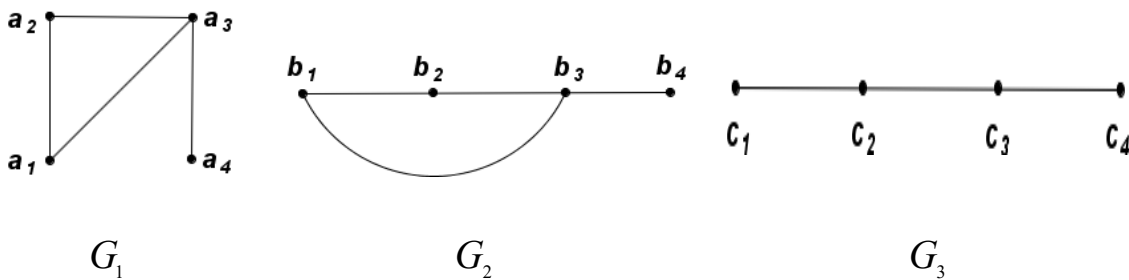
2. Если несвязные графы изоморфны, то:

- 1) количество компонент связности этих графов совпадает;
- 2) для каждой компоненты связности одного графа существует изоморфная ей компонента другого графа.

3. Графы  $G$  и  $G'$  являются изоморфными, если путем перестановки строк и столбцов матрицы смежности графа  $G$  удастся получить матрицу смежности графа  $G'$ .

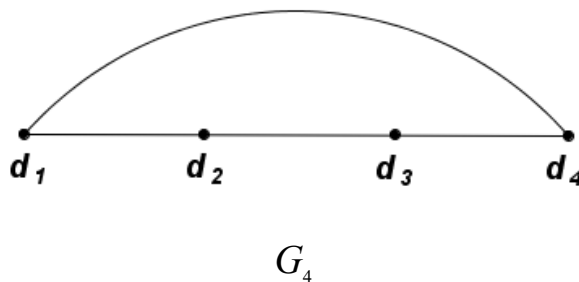
4. У изоморфных графов совпадает число вершин, ребер и наборы степеней.

Пример.



$$G_1 \cong G_2 : \varphi : \begin{array}{l} a_1 \rightarrow b_1 \\ a_2 \rightarrow b_2 \\ a_3 \rightarrow b_3 \\ a_4 \rightarrow b_4 \end{array} \quad \psi : \begin{array}{l} a_1 a_2 \rightarrow b_1 b_2 \\ a_1 a_3 \rightarrow b_1 b_3 \\ a_2 a_3 \rightarrow b_2 b_3 \\ a_3 a_4 \rightarrow b_3 b_4 \end{array}$$

Графы  $G_1$  и  $G_3$  не изоморфны, так как количество ребер различно.



Выясним, изоморфны ли графы  $G_1$  и  $G_4$ . Данные графы не могут быть изоморфными, так как степень вершины  $a_3$  равна трем, а в графе  $G_4$  вершин со степенью 3 нет.

**З а д а ч а.**

Нарисовать и охарактеризовать все графы  $(p, q)$  при  $p \leq 5$ ,  $q \leq 10$ .

**Р е ш е н и е.**

Количество  $(p, q)$ -графов представлено в табл. 1.

Таблица 1

Количество  $(p, q)$ -графов

| $q$               | $p$ |   |   |    |    |
|-------------------|-----|---|---|----|----|
|                   | 1   | 2 | 3 | 4  | 5  |
| 0                 | 1   | 1 | 1 | 1  | 1  |
| 1                 | —   | 1 | 1 | 1  | 1  |
| 2                 | —   | — | 1 | 2  | 2  |
| 3                 | —   | — | 1 | 3  | 4  |
| 4                 | —   | — | — | 2  | 6  |
| 5                 | —   | — | — | 1  | 6  |
| 6                 | —   | — | — | 1  | 6  |
| 7                 | —   | — | — | —  | 3  |
| 8                 | —   | — | — | —  | 2  |
| 9                 | —   | — | — | —  | 1  |
| 10                | —   | — | — | —  | 1  |
| Количество графов | 1   | 2 | 4 | 11 | 33 |

I.  $p = 1$ ,  
 $q = 0$



II.  $p = 2$ ,  
 $q = 0$



Несвязный граф

$q = 1$

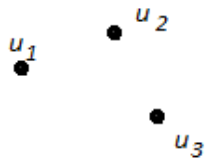


Связный граф.

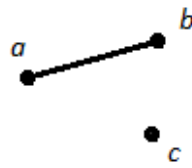
$K_2$  – полный двухвершинный граф

### III. $p = 3$

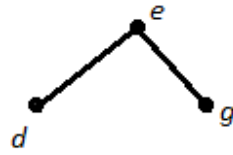
$q = 0$



$q = 1$



$q = 2$

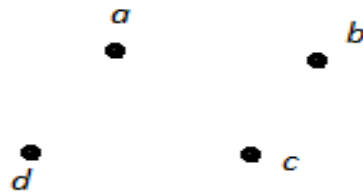


$q = 3$

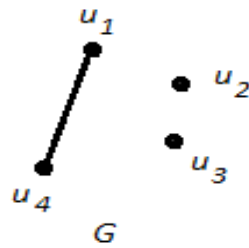


### IV. $p = 4$

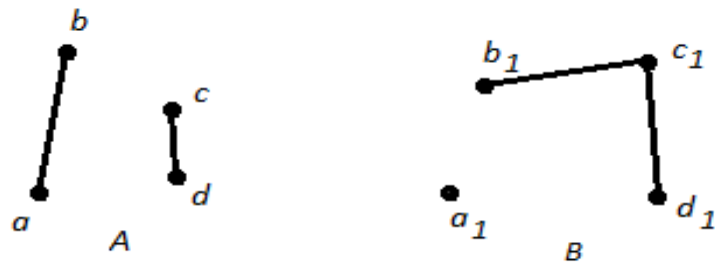
$q = 0$



$q = 1$

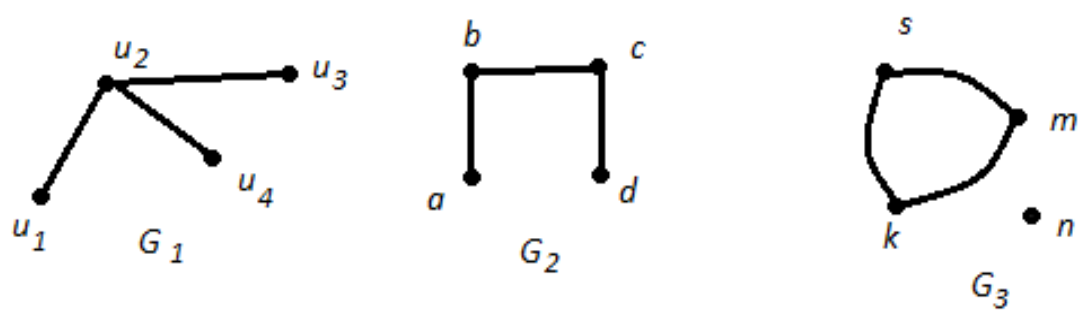


$q = 2$

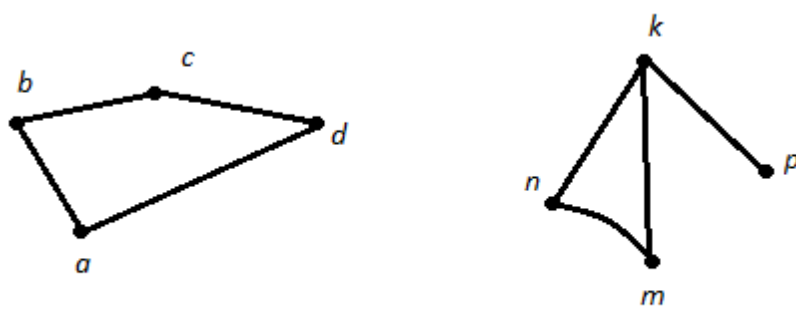


Графы неизоморфны.

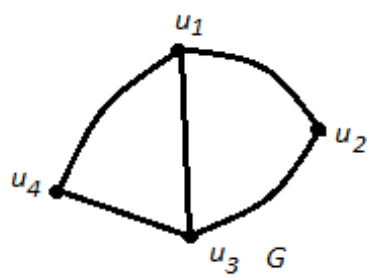
$$q = 3$$



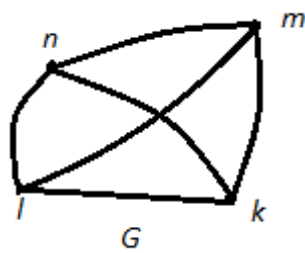
$$q = 4$$



$$q = 5$$

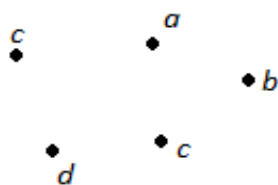


$$q = 6$$

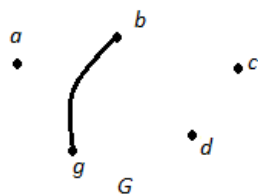


$$V.p = 5$$

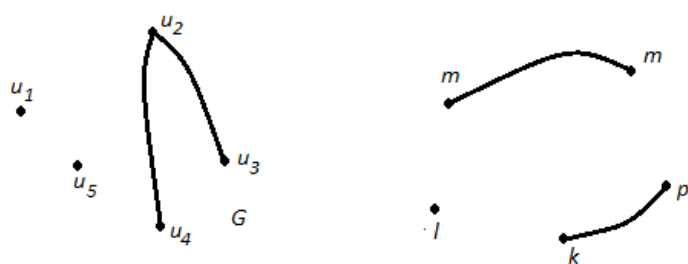
$$q = 0$$



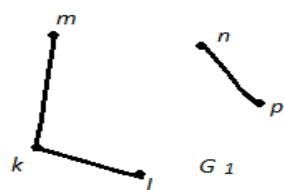
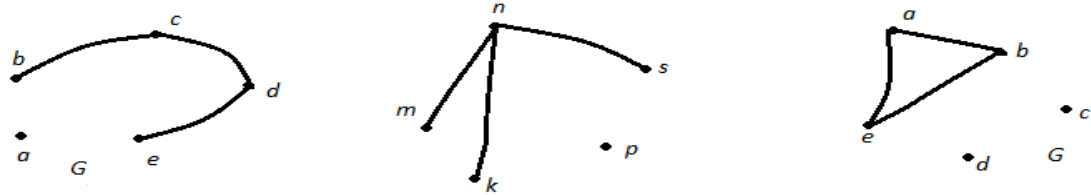
$$q = 1$$



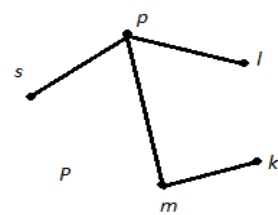
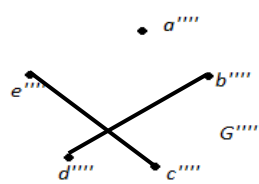
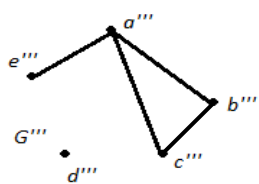
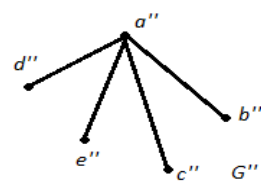
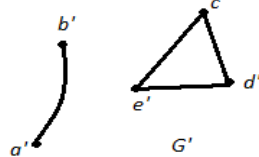
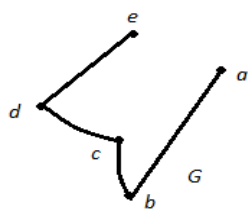
$$q = 2$$



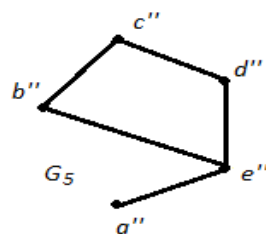
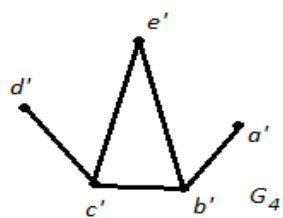
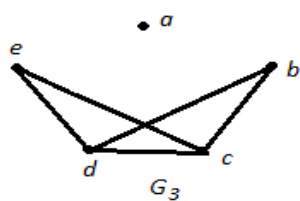
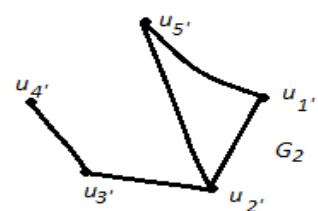
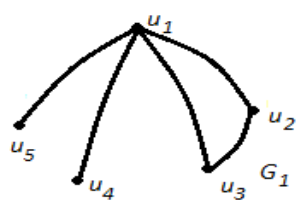
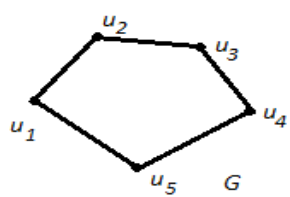
$$q = 3$$



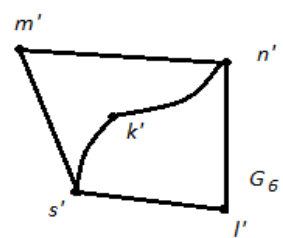
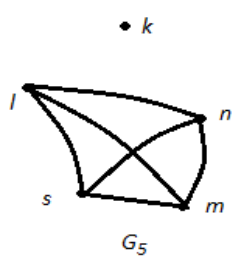
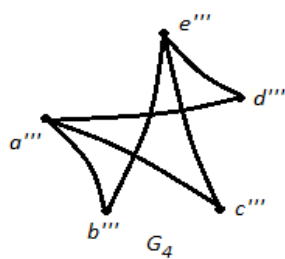
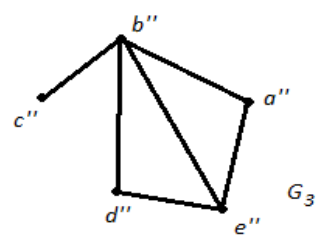
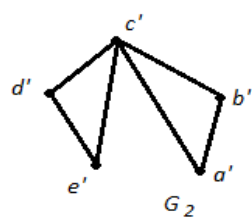
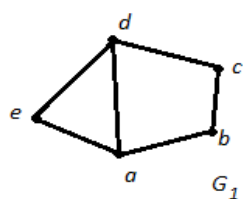
$$q = 4$$



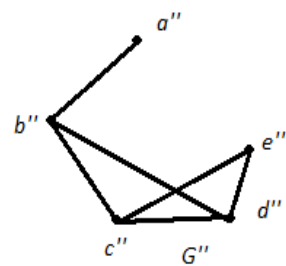
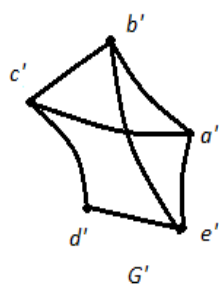
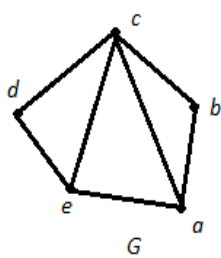
$$q = 5$$



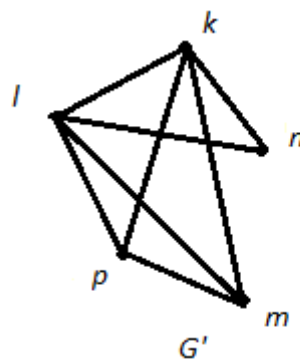
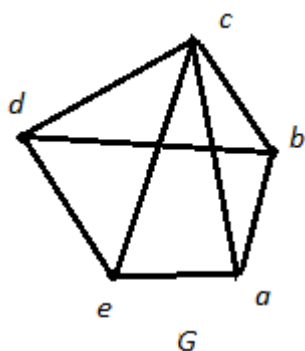
$$q = 6$$



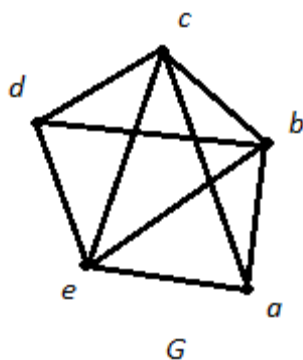
$$q = 7$$



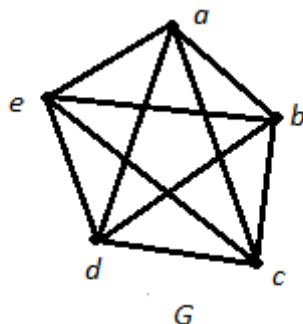
$$q = 8$$



$$q = 9$$



$$q = 10$$



### § 3.5. Полные графы. Дополнение графа

**Определение 3.5.1.** Граф  $G$  называется полным, если каждая его вершина смежна с любой другой вершиной этого графа.

$K_p$  – полный граф с  $p$  вершинами.

*Свойство 1.* Количество ребер полного графа равно

$$q = \frac{p(p-1)}{2},$$

где  $p$  – количество вершин;  $(p-1)$  – степень каждой вершины.

*Доказательство.*  $K_p$  является однородным и  $\deg K_p = p - 1$ .

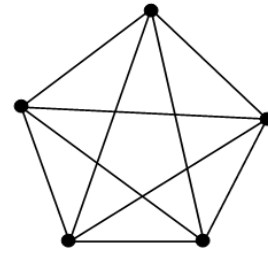
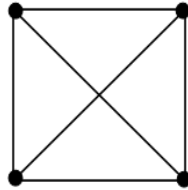
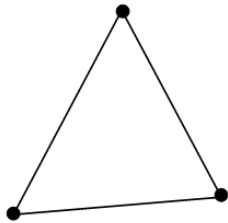
Тогда  $\sum_{i=1}^p st(u_i) = p(p-1) = 2q$ .

**П р и м е р ы.**

1.  $K_3, q = 3$

2.  $K_4, q = 6$

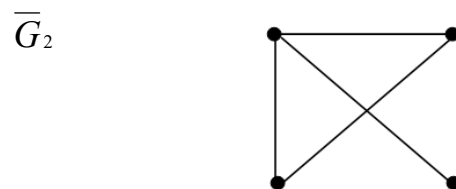
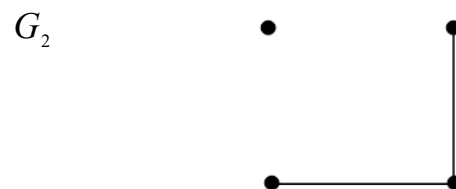
3.  $K_5, q = 10$



**Определение 3.5.2.** Граф  $\overline{G}$  называется дополнением графа  $G$ , если выполняются условия:

- множества вершин этих графов совпадают;
- вершины  $u$  и  $v$  в  $\overline{G}$  смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в  $G$ .

**П р и м е р.**



**Свойство 2.** Сумма количества ребер графа и его дополнения равна количеству ребер полного графа с тем же количеством вершин.

**Определение 3.5.3.** Граф, изоморфный своему дополнению, называется самодополнительным графом.

Пример.



*Свойство 3.* Количество вершин самодополнительного графа равно  $p = 4k$  или  $p = 4k + 1$ , где  $k$  – натуральное число.

### § 3.6. Эйлеровы и гамильтоновы графы

**Определение 3.6.1.** Граф называется эйлеровым, если в нем существует цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз. Соответствующий цикл называется эйлеровым циклом.

**ТЕОРЕМА 3.6.1.** Для того чтобы связный граф был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы все его вершины были четными (утверждение верно и для мультиграфа).

*Доказательство.*

**Необходимость.** Если связный граф  $G$  является эйлеровым, то все его вершины четные.

Рассмотрим эйлеров цикл, проходящий в графе по каждому ребру ровно один раз:  $u_\alpha u_{\alpha_1}, u_{\alpha_1} u_{\alpha_2}, \dots, u_{\alpha_{i-1}} u_{\alpha_i}, u_{\alpha_i} u_\alpha$ . Из этого цикла видно, что количество ребер, инцидентных любой вершине  $u_{\alpha_i}$ , четно. Следовательно, степень каждой вершины  $u_{\alpha_i}$  четная.

**Достаточность** (алгоритм построения эйлерова цикла).

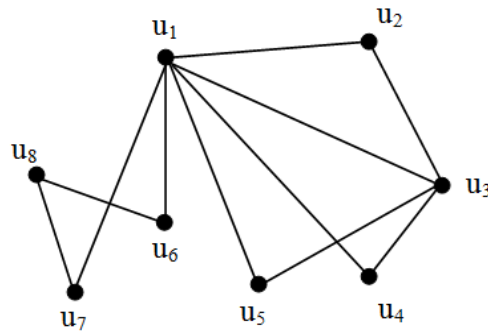
Если все вершины графа  $G$  четны, то он является эйлеровым. Так как степени вершин графа четные и он является связным, то степени вершин не меньше двух. Следовательно, в  $G$  существует простой цикл. Удалим его из графа. Если в графе не осталось ребер, то теорема доказана, т.е. граф содержит цикл, проходящий по каждому ребру ровно один раз, иначе говоря граф  $G$  является эйлеровым графом.

Если ребра остались, то степени вершин остались четными и в оставшемся графе существует простой цикл, проходящий по каждой вершине ровно один раз. Удалим его.

Если в оставшемся графе нет ребер, то эйлеровым циклом будет являться объединение предыдущих циклов. Иначе повторяем процедуру, пока все ребра не будут удалены. Процесс конечен, так как степени графа конечны. Теорема доказана.

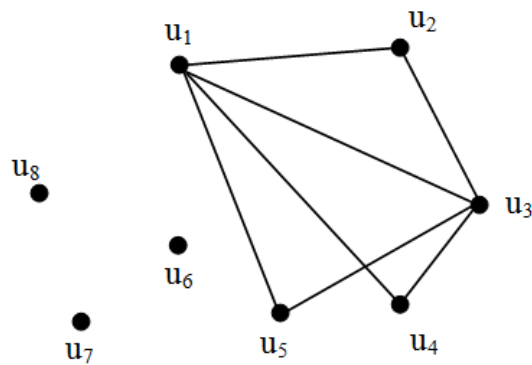
П р и м е р.

Найти эйлеров цикл данного графа.

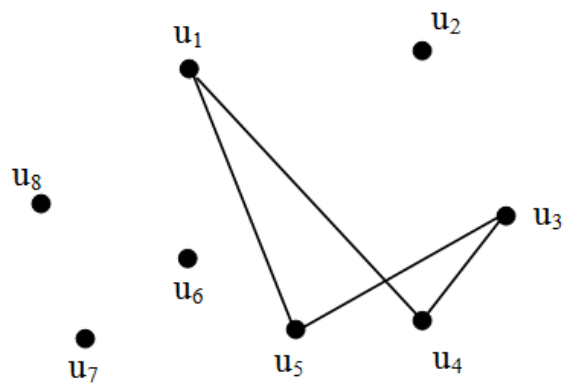


Находим простые циклы:

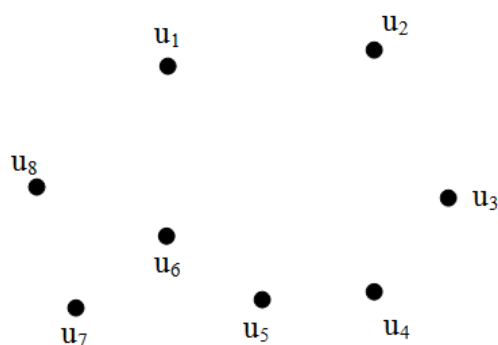
1.  $u_1, u_6, u_8, u_7, u_1$ . Удалим его:



2.  $u_1, u_2, u_3, u_1$ . Также удалим его:



3.  $u_1, u_5, u_3, u_4, u_1$ . И тоже удалим его:

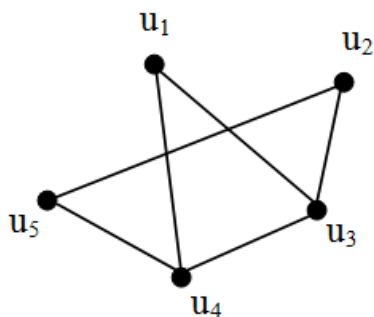


В оставшемся графе нет ребер, значит, согласно алгоритму построения эйлерова цикла, эйлеровым циклом будет объединение предыдущих простых циклов, т.е.

$u_1, u_6, u_8, u_7, u_1 \cup u_1, u_2, u_3, u_1 \cup u_1, u_5, u_3, u_4, u_1$  — эйлеров цикл.

Если в графе есть две нечетные вершины, а остальные все четные, то в нем существует эйлеров путь (проходящий по каждому ребру ровно один раз), начинающийся и заканчивающийся в нечетных вершинах.

**П р и м е р.**



$u_3 u_1 u_4 u_3 u_2 u_5 u_4$  — эйлеров путь

**Определение 3.6.2.** Граф называется гамильтоновым графом, если в нем существует гамильтонов цикл, проходящий по каждой вершине ровно один раз.

*Свойства гамильтоновых графов:*

1. Любой полный граф является гамильтоновым.
2. Если в  $(p, q)$ -графе  $p \geq 3$  и для любой пары несмежных вершин  $u$  и  $v$  выполняется условие  $st(u) + st(v) \geq p$ , то  $(p, q)$ -граф гамильтонов.

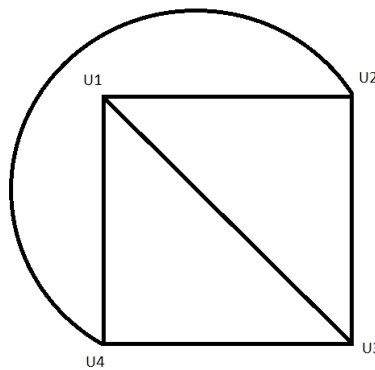
3. Если для любой вершины графа  $st(u_i) \geq \frac{p}{2}$  (при  $p > 3$ ), то  $(p, q)$ -граф является гамильтоновым графом.

### § 3.7. Планарность графов

**Определение 3.7.1.** Граф  $G$  называется планарным, если существует изоморфный ему граф  $G'$ , который называется плоской реализацией графа  $G$ , такой, что ребра графа  $G'$  пересекаются только в вершинах.

**Пример.**

$K_4$  – планарный, так как имеет плоскую реализацию, представленную ниже.



**Определение 3.7.2.** Эйлеровой характеристикой графа  $G$  называется число

$$\chi(G) = S_0 - S_1 + S_2,$$

где  $S_0$  – количество вершин  $G$ ;  $S_1$  – количество ребер  $G$ ;  $S_2$  – количество граней (областей) в плоской реализации  $G$ , включая внешнюю грань.

**Определение 3.7.3.** Граф  $G$  получен наложением графов  $G_1$  и  $G_2$ , если:

- 1) его вершинами являются все вершины графа  $G_1$ , все вершины графа  $G_2$  и все точки пересечения ребер плоских реализаций графов  $G_1$  и  $G_2$ ;
- 2) его ребрами являются все непересеченные ребра графов  $G_1$  и  $G_2$  и все возможные отрезки, образующиеся при пересечении ребер плоских реализаций графов  $G_1$  и  $G_2$ .

**ЛЕММА 3.7.1.** Если граф  $G$  получен наложением графа  $G_1$  и ребра  $l$ , то  $\chi(G) = \chi(G_1)$ .

*Доказательство.*

*Случай 1.* Пусть точки  $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n\}$  пересечения ребра  $l$  с ребрами графа  $G_1$  не совпадают с вершинами графа  $G_1$ . Тогда

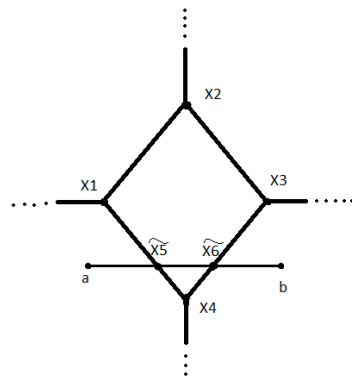
$$\chi(G_1) = S_0 - S_1 + S_2;$$

$$S_0^G = S_0 + n + 2;$$

$$S_1^G = S_1 - n + 2n + n + 1;$$

$$S_2^G = S_2 + (n + 1 - 2) = S_2 + n - 1;$$

$$\begin{aligned} \chi(G) &= S_0^G - S_1^G + S_2^G = S_0 + n + 2 - S_1 + n - 2n - n - 1 + S_2 + n - 1 = \\ &= S_0 - S_1 + S_2 = \chi(G_1). \end{aligned}$$



*Случай 2.* Некоторые из точек  $\{\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n\}$  пересечения ребра  $l$  с ребрами графа  $G_1$  совпали с вершинами графа.

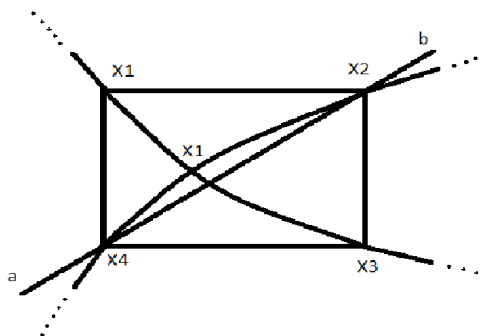
Количество совпавших обозначим  $k$ . Тогда

$$^2S_0^G = S_0 + n + 2 - k;$$

$$^2S_1^G = S_1 + 2n + 1 - k - k;$$

$$^2S_2^G = S_2 + (n - 1) - k;$$

$$\chi(G) = \chi(G_1).$$



*Случай 3.* Пусть один из концов  $a$  или  $b$  ребра  $l$  совпадает с вершиной графа  $G$ ;

$$^3S_0^G = ^2S_0^G - 1;$$

$$^3S_1^G = ^2S_1^G - 1;$$

$$^3S_2^G = ^2S_0^G;$$

$$\chi(G) = \chi(G_1).$$

**ЛЕММА 3.7.2.** Если граф  $G$  получен наложением графа  $G_1$  на граф  $G_2$ , то  $\chi(G) = \chi(G_2)$ .

*Доказательство* (методом математической индукции по количеству ребер накладываемого графа  $G_1$ ):

1. Если в графе  $G_1$  одно ребро, то утверждение доказано в предыдущей лемме 3.7.1.

2. Пусть утверждение верно для графа  $G_1$ , содержащего не более  $n$  ребер.

3. Докажем, что утверждение верно для графа  $G_1$ , содержащего  $n+1$  ребро.

Удалим из графа  $G_1$  одно ребро. Получим граф, удовлетворяющий индуктивному предположению. Если его наложим на граф  $G_2$ , получим граф  $G'$ . В силу индуктивного предположения следует, что эйлеровы характеристики графов  $G'$  и  $G_2$  совпадут:

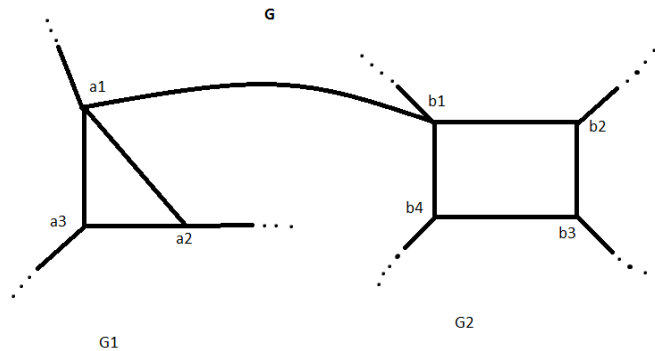
$$\chi(G') = \chi(G_2).$$

Вернем удаленное ребро в граф  $G_1$ . Получим новый граф  $G''$ , совпадающий с графом  $G$ , и по лемме 3.7.1 следует, что  $\chi(G'') = \chi(G')$ , тогда  $\chi(G) = \chi(G_2)$ .

Из пунктов 1–3 следует, что утверждение верно для графа  $G_1$  с любым количеством ребер.

**ТЕОРЕМА 3.7.1.** Эйлерова характеристика любого планарного связного графа равна 2.

*Доказательство.*



1. Пусть графы  $G_1$  и  $G_2$  – планарные связные графы.

Доказать, что эйлерова характеристика графа  $G_1$  равна эйлеровой характеристике графа  $G_2$ :

$$\chi(G_1) = \chi(G_2).$$

Соединим любые две вершины этих графов ребром так, чтобы граф оставался планарным. Обозначим полученный граф  $G$ , он является связным планарным графом. Ребро  $a_1b_1$  назовем  $l$ .

Граф  $G'_1$  получен наложением ребра  $l$  на граф  $G_1$ . По лемме 3.7.1 следует, что  $\chi(G'_1) = \chi(G_1)$ . Наложение графа  $G'_1$  на  $G_2$  обозначим  $G'_2$  и по лемме 3.7.2 следует, что  $\chi(G'_2) = \chi(G)$ ,  $G'_2 = G$ .

Граф  $G''_2$  получен наложением ребра  $l$  на  $G_2$ . По лемме 3.7.1 следует, что  $\chi(G''_2) = \chi(G_2)$ . Граф  $G''_1$  получен наложением графа  $G''_2$  на граф  $G_1$ . По лемме 3.7.2 следует, что  $\chi(G''_1) = \chi(G_1)$ .  $G''_1 = G$ :

$$1) \chi(G''_1) = \chi(G) = \chi(G'_2);$$

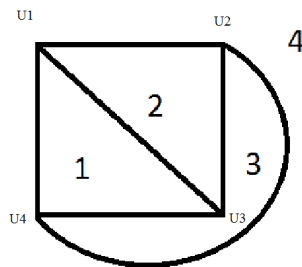
$$2) \chi(G''_1) = \chi(G_1);$$

$$3) \chi(G'_2) = \chi(G_2).$$

Из 1–3 следует, что  $\chi(G_1) = \chi(G_2)$ .

2.  $G = K_4$ .

Вычислим его эйлерову характеристику:



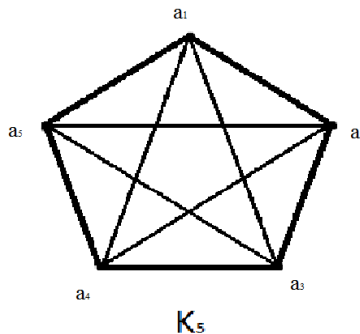
$$S_0 = 4, S_1 = 6, S_2 = 4, \chi(G) = \chi(K_4) = 4 - 6 + 4 = 2.$$

Из 1–2 следует, что утверждение верно.

**Утверждение 3.7.1.** Граф  $K_5$  не является планарным.

*Доказательство.*

Предположим, что он планарен, тогда его эйлерова характеристика  $\chi(K_5) = 2$ .



$$S_0 = 5; S_1 = 10; \text{ тогда } S_2 = 7.$$

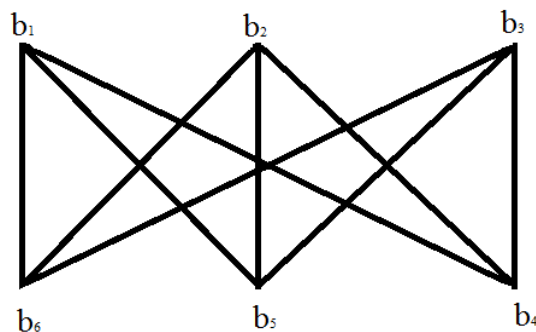
Каждая область (грань) ограничивается не менее чем тремя ребрами. Каждое ребро участвует в ограничении ровно двух областей.

Следовательно, количество ребер  $S_1 \geq \frac{3S_2}{2}$ , подставим числовые значения,  $10 \geq \frac{21}{2}$ , получим  $10 \geq 10,5$  – противоречие, следовательно, наше предположение неверно,  $K_5$  не является планарным.

**Утверждение 3.7.2.** Граф  $K_{33}$  не является планарным.

*Доказательство* (от противного), схема та же самая.

$\chi(G) = 2$ ,  $G$  – плоская реализация  $K_{33}$ .



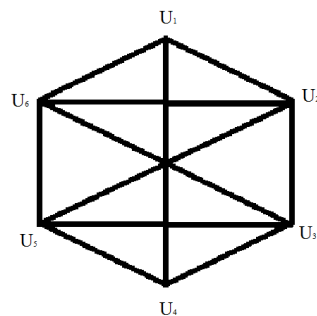
$$S_0 = 6, S_1 = 9, S_2 = 5.$$

Каждая область ограничена не менее чем четырьмя ребрами.  $S_1 \geq \frac{4S_2}{2}$ , тогда  $9 \geq 10$ . Получили противоречие, следовательно, наше предположение неверно,  $K_{33}$  не является планарным.

**ТЕОРЕМА 3.7.2** (Понтрягина – Куратовского).

Граф  $G$  планарен тогда и только тогда, когда он не содержит подграфов гомоморфных  $K_5$  и  $K_{33}$ .

**П р и м е р.**



$K_5$  – подграф графа  $K_6$ , следовательно,  $K_6$  не планарный.

ТЕОРЕМА 3.7.3 (Фари). Если граф планарен, то у него существует плоская реализация, все ребра которой прямолинейны.

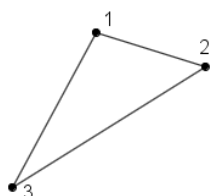
## § 3.8. Раскраска графа

**Определение 3.8.1.** Говорят, что граф правильно раскрашиваемый  $\lambda$ -красками, если его вершины можно раскрасить  $\lambda$ -красками таким образом, чтобы никакие две смежные вершины не были покрашены одним цветом.

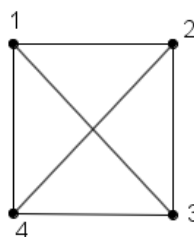
Наименьшее число красок, необходимых для правильной раскраски графа, называется хроматическим числом графа.

Пр и м е р:

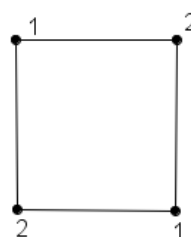
- 1)  $K_3$  – треххроматический граф;
- 2)  $K_4$  – четыреххроматический граф;
- 3)  $C_4$  – двуххроматический граф.



$K_3$

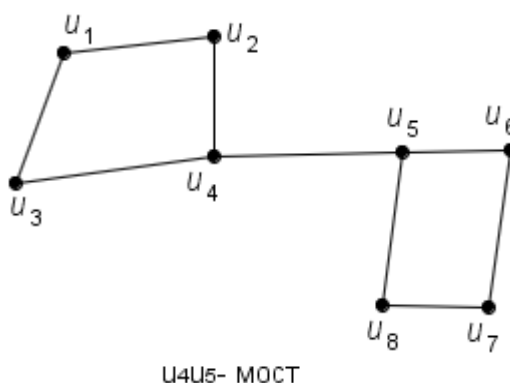
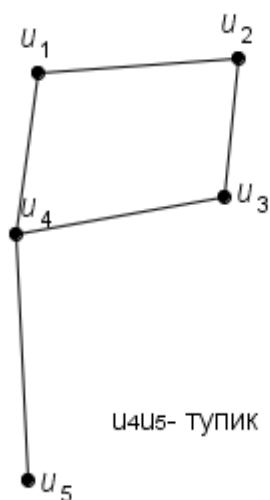


$K_4$



$C_4$

ЛЕММА 3.8.1. В любом плоском связном графе без тупиков и мостов существует вершина, степень которой не превосходит 5.



*Доказательство* (методом от противного).

Пусть существует  $G$  – плоский связный граф, без тупиков и мостов, в котором степень любой вершины больше 5, следовательно, она больше или равна 6.

$G$  – плоский связный, из этого следует, что

$$\chi(G) = S_0 - S_1 + S_2 = 2.$$

В любом  $G$ -связном графе  $\sum_{i=1}^{S_0} st(u_i) = 2S_1$ , тогда  $2S_1 \geq 6 \cdot S_0$ , получим  $S_0 \leq \frac{S_1}{3}$ . Каждая грань ограничена не менее чем тремя ребрами и каждое ребро участвует в ограничении ровно двух граней, тогда  $S_1 \geq \frac{3S_2}{2}$ , следовательно,  $S_2 \geq \frac{2}{3}S_1$ , получим  $\chi(G) \leq \frac{S_1}{3} - S_1 + \frac{2}{3}S_1$ , отсюда  $2 \leq 0$  (противоречие). Из этого следует, что наше предположение неверно, значит, в любом графе существует вершина, степень которой не больше 5.

**ТЕОРЕМА 3.8.1.** (о пятихроматичности плоского графа).

Любой плоский граф пятихроматичен.

*Доказательство.*

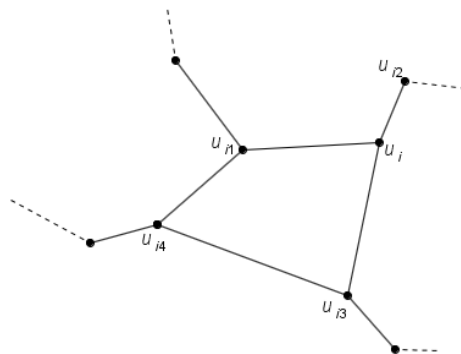
I.I. Пусть  $G$  – плоский связный без тупиков и мостов. В этом случае, по лемме 3.8.1, существует вершина  $u_i$  в  $G$ , степень которой не больше 5,  $st(u_i) \leq 4$ .

Доказательство проведем методом математической индукции по числу  $s_1$  ребер в  $G$ .

1.  $s_1 = 3$ .

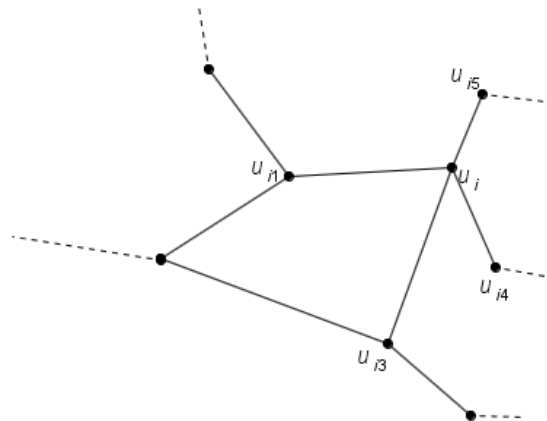
2. Допустим, что для любого  $G$ , в котором  $s_1 \leq n$ , условие выполнено.

3. Рассмотрим  $G$ , в котором  $s_1 = n + 1$ , и докажем, что его можно раскрасить пятью красками.



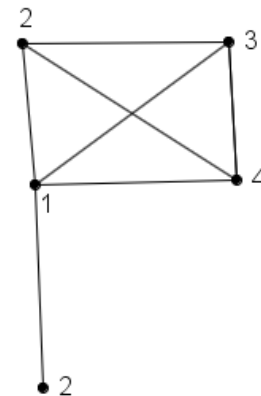
Удалим из  $G$  вершину  $u_i$ , получим граф, в котором количество ребер не больше  $n$ . Этот граф удовлетворяет индуктивному предположению.

Если в этой раскраске  $u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}, u_{i_4}$  раскрашены разными красками, то  $u_i$  раскрашена 5-й краской. А если имеются одинаково раскрашенные, то  $u_i$  можно раскрасить неиспользованными красками, следовательно, граф  $G$  – пятихроматичный.



I. II. Рассмотрим случай, когда  $st(u_i) = 5$ .

Существует хотя бы одна пара несмежных вершин. Иначе  $K_5$  является подграфом  $G$ , что противоречит теореме Понтрягина – Куратовского. Склеим несмежные вершины, получим граф, в котором количество ребер не больше  $n$ . По индуктивному предположению он правильно раскрашивается пятью красками. Тогда не смежные вершины будут покрашены одним цветом. Использовано не более четырех цветов для  $u_{i_1}, u_{i_2}, u_{i_3}, u_{i_4}$ , следовательно, пятый цвет на  $u_i$  и  $G$  – пятихроматичный граф.



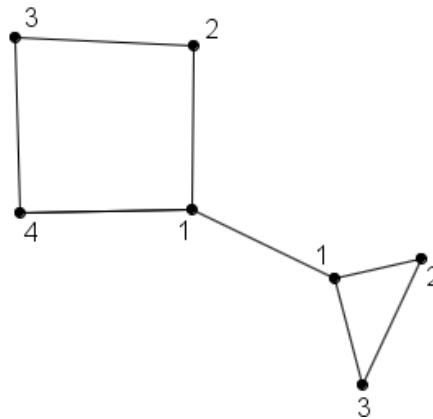
II.  $G$  – плоский связный и с тупиком.

Удалим тупик из графа. Получим пятихроматичный граф, удовлетворяющий индуктивному предположению. При возвращении тупика висячая вершина может быть покрашена в один из четырех цветов.

III.  $G$  – плоский связный с мостом.

После удаления моста у каждой комплексной связности будет правильная раскраска. Причем при соответственной перенумерации

цветов можно добиться, чтобы концы моста были раскрашены разными цветами.



### Упражнения

1. Можно ли из полного графа с 11 вершинами удалить часть ребер так, чтобы степень каждой вершины была равна 7?

Р е ш е н и е.

Предположим, что из полного графа с 11 вершинами удалить часть ребер можно. Тогда степень каждой вершины станет равна 7.

Так как количество ребер в любом графе равно половине суммы степеней его вершин, в нашем случае степень каждой вершины графа равна 7, значит, сумма степеней всех вершин равна  $7 \cdot 11 = 77$ . Это нечетное число, поэтому его половина – число нецелое. Пришли к противоречию. Таким образом, в нашем графе нецелое число ребер, чего быть не может.

О т в е т: нельзя.

2. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы каждый телефон был соединен ровно с 5 другими?

Р е ш е н и е.

Допустим, что такое соединение телефонов возможно. Тогда представим себе граф, в котором вершины обозначают телефоны, а ребра – провода, их соединяющие. Подсчитаем, сколько всего получится проводов. К каждому телефону подключено ровно 5 проводов, т.е. степень каждой вершины нашего графа – 5. Чтобы найти число проводов, надо просуммировать степени всех вершин графа и полученный результат разделить на 2.

Но тогда количество проводов получится равным  $15 \cdot \frac{5}{2} = 37,5$ .

Но это число не целое. Значит наше предположение о том, что можно соединить каждый телефон ровно с пятью другими, оказалось неверным.

О т в е т: соединить телефоны таким образом невозможно.

3. В деревне 9 домов. Известно, что у Гоши соседи Иван и Роман, Максим сосед Ивану и Михаилу, Виктор – Алексею и Андрею, а также по соседству живут Константин с Андреем, Иван с Михаилом, Константин с Алексеем, Михаил с Романом, и больше соседей в означенной деревне нет (соседними считаются дворы, у которых есть общий участок забора). Может ли Гоша огородами пробраться к Андрею за яблоками?

4. Докажите, что не существует графа с 5 вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.

Р е ш е н и е.

Пусть степень каждой из четырех вершин равна 4. Это значит, что каждая из них соединена со всеми остальными вершинами (в том числе и с пятой). Значит, степень пятой вершины также равна 4.

5. Могут ли степени вершин в графе быть равны:

- а) 8, 6, 5, 4, 4, 3, 2, 2;
- б) 7, 7, 6, 5, 4, 2, 2, 1;
- в) 6, 6, 6, 5, 5, 3, 2, 2?

Р е ш е н и е:

- а) в графе из 8 вершин степень 8 встретиться не может;
- б) если есть 2 вершины, связанные со всеми, то степень каждой из остальных вершин не меньше 2;
- в) сумма степеней вершин должна быть четной.

О т в е т: а–в – не могут.

6. В стране Цифра есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если сумма цифр-названий этих городов делится на 4. Можно ли добраться из города 2 в город 8?

7. В Исландии 24 города. Сколько в ней дорог, если:

- а) из каждого города выходит 5 дорог;
- б) каждый город связан дорогой с каждым?

8. На Кубе из каждого города выходит по 5 дорог и всего дорог 140. Сколько на Кубе городов?

9. Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

10. Из столицы Тридевятого царства выходит 39 дорог, из крепости Дальняя выходит одна дорога, а из всех остальных городов царства выходит по 20 дорог (любые два города соединяются не более чем одной дорогой, и дорог с началом и концом в одном и том же городе нет). Докажите, что гонец царя может проехать по дорогам из столицы в крепость Дальнюю.

11. В некотором государстве 6 городов и 10 автодорог, каждая из которых связывает какие-то два города. Между городами устанавливается авиационное сообщение, исходя из принципа экономии: авиационная линия между двумя городами устанавливается тогда и только тогда, когда автомобильная дорога между этими городами отсутствует. Сколько авиалиний будет проведено?

12. Вася считает, что в его классе у всех разное число друзей-одноклассников. Не ошибается ли он?

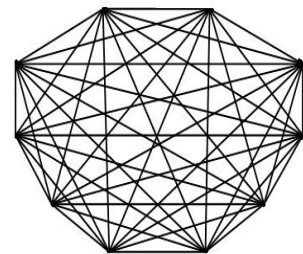
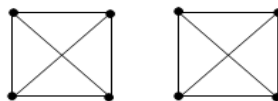
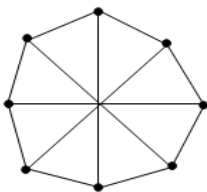
13. Верно ли, что два графа изоморфны, если:

- а) у них по 10 вершин, степень каждой из которых равна 9;
- б) у них по 8 вершин, степень каждой из которых равна 3;
- в) они связны, без циклов и содержат по 6 ребер?

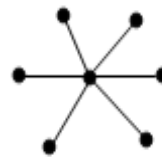
Р е ш е н и е:

а) в таком графе каждая вершина соединена со всеми остальными. Это полный десятивершинник  $K_{10}$ .

б) контрпример:



в) контрпример:



О т в е т: а – верно; б–в – неверно.

**14.** Докажите, что существует граф с  $2n$  вершинами, степени которых равны  $1, 1, 2, 2, \dots, n, n$ .

*Подсказка.* Используйте индукцию по  $n$ .

*Р е ш е н и е.*

Будем строить граф по индукции.

1. Для  $n = 1$  такой граф существует: две вершины, соединенные ребром.

2. Пусть граф с  $2n$  вершинами и указанными степенями уже построен. Добавим к нему две вершины  $A$  и  $B$ . Вершину  $A$  соединим с  $n$  старыми вершинами со степенями  $1, \dots, n$ , а также с вершиной  $B$ . В результате у половины старых вершин степени не изменятся, у оставшихся – увеличатся на 1, степень  $A$  будет равна  $n + 1$ , а степень  $B$  будет равна 1. Это и есть искомый граф с  $2n + 2$  вершинами.

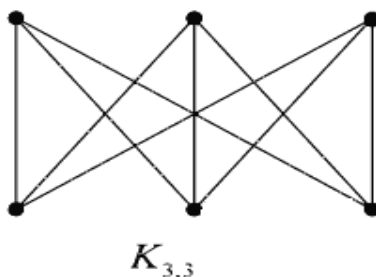
**15.** Каждый граф с диаметром  $d$  и обхватом  $2d + 1$  регулярен.

**16.** Построить кубический граф с  $2n$  вершинами ( $n \geq 3$ ), не имеющий треугольников для некоторых значений  $n$ .

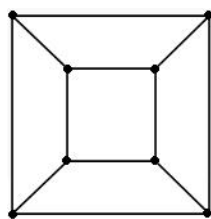
*Р е ш е н и е.*

Примеры данного графа:

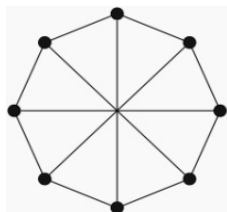
1. Пусть  $n = 3$ , тогда кубический граф имеет вид



2. Пусть  $n = 4$ , тогда кубический граф имеет следующий вид.

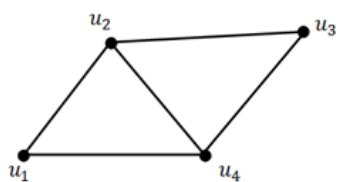


Примером такого графа также может служить граф Вагнера.

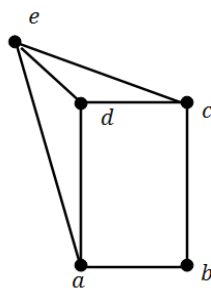


17. Найдите диаметр, обхват и окружение следующих графов.

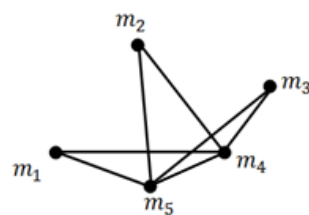
а)



б)



в)



Р е ш е н и е:

$$\text{а) } d(u_1, u_2) = 1; d(u_1, u_3) = 2; d(u_1, u_4) = 1; d(u_2, u_3) = 1; d(u_2, u_4) = 1; \\ d(u_3, u_4) = 2. d(G) = 2; g(G) = 3; c(G) = 4;$$

$$\text{б) } d(a, b) = 1; d(a, c) = 2; d(a, d) = 1; d(a, e) = 1; d(b, c) = 1; \\ d(b, d) = 2; d(b, e) = 2; d(c, d) = 1; d(c, e) = 1; d(d, e) = 1; d(G) = 2; \\ g(G) = 3; c(G) = 5;$$

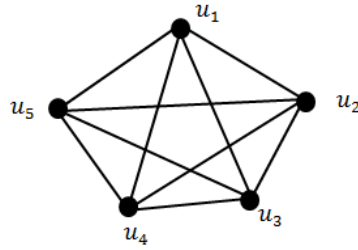
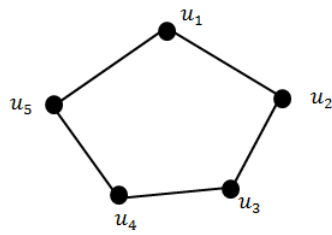
$$\text{в) } d(m_1, m_2) = 2, d(m_1, m_3) = 2, d(m_1, m_4) = 1, d(m_1, m_5) = 1, d(m_2, m_3) = 2, \\ d(m_2, m_4) = 1, d(m_2, m_5) = 1, d(m_3, m_4) = 1, d(m_3, m_5) = 1, d(m_4, m_5) = 1, \\ d(G) = 2, g(G) = 3, c(G) = 7.$$

18. Найти квадрат графа:

- 1)  $C_5$ ;
- 2)  $P_4$  (простая цепь через 4 вершины);
- 3)  $K_5$ .

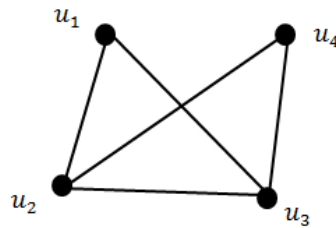
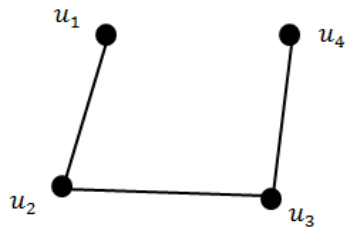
Р е ш е н и е:

1)



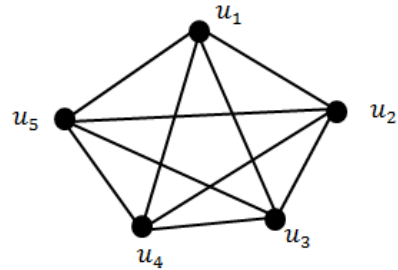
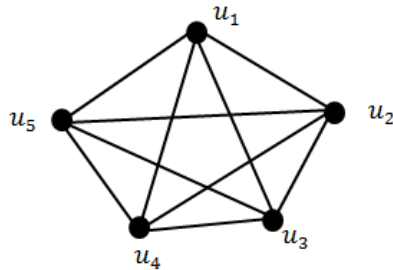
Между всеми вершинами расстояние меньше или равно двум. Следовательно, все вершины попарно смежны;

2)



Расстояние между вершинами  $u_1$  и  $u_2$ ,  $u_1$  и  $u_3$ ,  $u_2$  и  $u_3$ ,  $u_2$  и  $u_4$ ,  $u_3$  и  $u_4$  меньше или равно двум, следовательно, они в квадрате графа будут смежными;

3)



Расстояние между всеми вершинами равно одному, следовательно, все вершины данного графа в квадрате графа будут смежными.

**19.** Докажите, что замкнутый маршрут нечетной длины содержит простой цикл.

Р е ш е н и е.

Маршрут называется замкнутым, если его начальная и конечная вершины одинаковы.

Рассмотрим произвольный граф  $G$  и замкнутый маршрут из вершины  $u_1$  в  $u_1$ . Если в данном маршруте ребра все различны,

то утверждение доказано. Пусть в данном маршруте некоторые ребра повторяются. Например, маршрут имеет вид

$$u_1, u_1u_2, u_2, u_2u_3, u_3, u_3u_4, u_4, u_4u_3, u_3, \dots, u_1.$$

В данном маршруте видно, что повторяется ребро  $u_3u_4$ . Удалим данное ребро и его повторение. Если повторяющихся ребер больше нет, то получим простой цикл. Пусть есть ребро  $u_iu_{i+1}$ , которое тоже повторяется. Прделаем ту же самую процедуру. Если повторяющихся ребер больше нет, получим простой цикл. Иначе повторяем проделанную процедуру, пока не останется повторяющихся ребер. Данный процесс конечен. В итоге получим простой цикл. Следовательно, замкнутый маршрут содержит простой цикл.

**20.** Граф  $G$  связан тогда и только тогда, когда для любого разбиения множества  $V$  на два подмножества  $V_1$  и  $V_2$  существует ребро графа  $G$ , соединяющее некоторую вершину из  $V_1$  с некоторой вершиной из  $V_2$ .

*Доказательство.*

**Необходимость.** По условию граф  $G$  связан. Предположим, что существует разбиение, для которого не существует ребра между любой вершиной множества  $V_1$  и любой вершиной из  $V_2$ . Тогда какую бы вершину из  $V_1$  мы не взяли, не существует пути, соединяющего эту вершину с любой вершиной множества  $V_2$ . Но это невозможно, так как граф  $G$  связан. Получили противоречие. Следовательно, для любого разбиения множества вершин графа  $G$  на два подмножества существует ребро, соединяющее некоторую вершину из первого подмножества с некоторой вершиной из второго подмножества.

**Достаточность.** Разобьем все множество вершин графа  $G$  на два подмножества следующим образом: во множество  $V_1$  входит некоторая вершина графа  $G$ , а все оставшиеся вершины – это множество  $V_2$ . Тогда по условию существует ребро, соединяющее некоторую вершину множества  $V_1$  с некоторой вершиной из множества  $V_2$ . Объединим эти вершины во множество  $V_{11}$ , а оставшиеся вершины останутся во множестве  $V_2$ . Тогда по условию задачи существует ребро, соединяющее некоторую вершину множества  $V_{11}$  с некоторой вершиной множества  $V_2$ . Теперь объединим эти три вершины в новое множество  $V_{12}$ , а оставшиеся вершины – это множество  $V_2$ . Повторяем данную процедуру, пока во множестве  $V_2$  не останется одна вершина. И по условию она тоже будет

соединяться с некоторой вершиной из другого множества. Получается, что для каждой вершины существует путь, соединяющий ее с любой другой вершиной. Следовательно, граф  $G$  связан.

**21.** Если  $d(u, v) = m$  в графе  $G$ , то чему равно  $d(u, v)$  в графе  $G^n$ ?

**22.** Конечное метрическое пространство  $(S, d)$  изоморфно пространству расстояний некоторого графа тогда и только тогда:

1) когда расстояние между любыми двумя вершинами из  $S$  есть целое число;

2) если  $d(u, v) \geq 2$ , то найдется такая третья вершина  $w$ , то  $d(u, w) + d(w, v) = d(u, v)$ .

**23.** В связном графе любые две длиннейшие простые цепи имеют общую вершину.

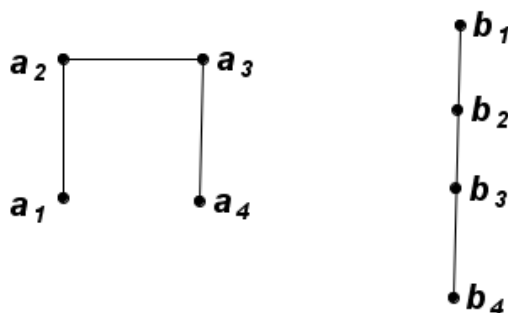
**Решение.**

Пусть нам дан граф  $G$  и  $P_1$  и  $P_2$  – длиннейшие простые цепи. Предположим обратное. Так как граф  $G$  связный, то существует путь  $P$ , соединяющий одну из вершин  $x$  пути  $P_1$  с одной из вершин  $y$  пути  $P_2$  и не имеющий с  $P_1$  и  $P_2$  никаких других общих вершин. Пусть  $Q_1$  – наибольший из двух путей, на который вершина  $x$  делит  $P_1$ , а  $Q_2$  – наибольший из двух путей, на который  $y$  делит  $P_2$ . Тогда объединение  $Q_1 \cup P \cup Q_2$  – простая цепь, длина которой больше длины любого из двух путей  $P_1$  и  $P_2$ , что невозможно. Значит, наше предположение неверно. Следовательно, в связном графе любые две длиннейшие простые цепи имеют общую вершину.

**24.** Верно ли, что в каждом связном графе все длиннейшие простые цепи имеют общую вершину?

**25.** Докажите изоморфизм графов:

а)



Доказательство.

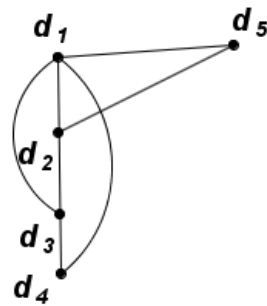
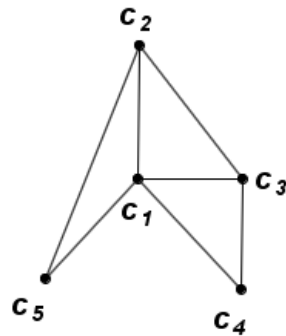
$a_1 \rightarrow b_1$   
 $a_2 \rightarrow b_2$   
 $a_3 \rightarrow b_3$   
 $a_4 \rightarrow b_4$

Построим биекции  $\varphi$ :  $a_1 a_2 \rightarrow b_1 b_2$ ,  $\psi: a_2 a_3 \rightarrow b_2 b_3$ .

$a_3 a_4 \rightarrow b_3 b_4$

Отсюда следует, что графы изоморфны;

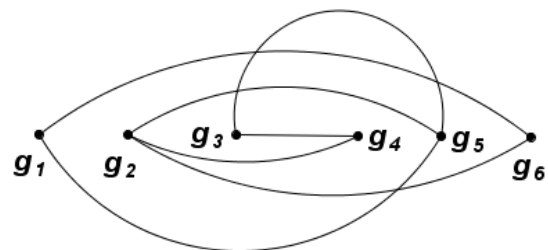
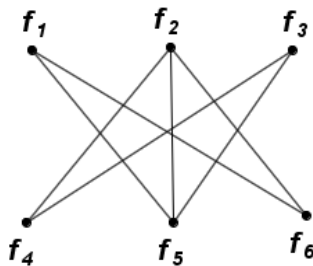
б)



$c_1 c_2 \rightarrow d_1 d_2$   
 $c_1 \rightarrow d_1$   
 $c_2 \rightarrow d_2$   
 $c_1 c_3 \rightarrow d_1 d_3$   
 $c_1 c_4 \rightarrow d_1 d_4$   
 $c_3 c_4 \rightarrow d_3 d_4$   
 $c_2 c_3 \rightarrow d_2 d_3$   
 $c_2 c_5 \rightarrow d_2 d_5$   
 $c_3 c_5 \rightarrow d_3 d_5$

Построим биекции:  $\varphi: c_3 \rightarrow d_4$ ,  $\psi: c_1 c_5 \rightarrow d_1 d_5$ ;

в)



Доказательство.

Построим биекции:  $\varphi$ :

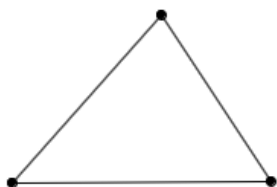
|                       |
|-----------------------|
| $f_1 \rightarrow g_1$ |
| $f_2 \rightarrow g_2$ |
| $f_3 \rightarrow g_3$ |
| $f_4 \rightarrow g_4$ |
| $f_5 \rightarrow g_5$ |
| $f_5 \rightarrow g_5$ |

,  $\psi$ :

|                               |
|-------------------------------|
| $f_1 f_5 \rightarrow g_1 g_5$ |
| $f_1 f_6 \rightarrow g_1 g_6$ |
| $f_2 f_4 \rightarrow g_2 g_4$ |
| $f_2 f_5 \rightarrow g_2 g_5$ |
| $f_2 f_6 \rightarrow g_2 g_6$ |
| $f_3 f_4 \rightarrow g_3 g_4$ |
| $f_3 f_5 \rightarrow g_3 g_5$ |

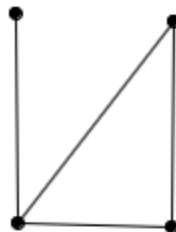
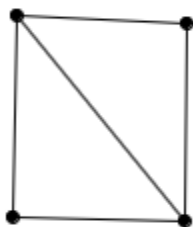
26. Изоморфны ли графы?

а)



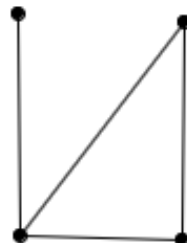
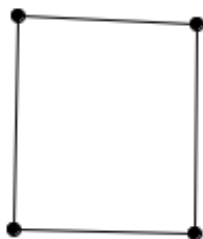
О т в е т: нет, так как данные графы содержат различное количество вершин;

б)



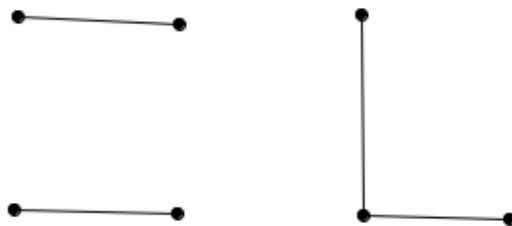
О т в е т: нет, так как данные графы содержат различное количество ребер;

в)



О т в е т: нет, так как данные графы содержат различные наборы степеней вершин;

г)



О т в е т: нет, так как первый граф несвязный, а второй связный;

д)



О т в е т: нет, так как компоненты связности данных графов не изоморфны по количеству ребер.

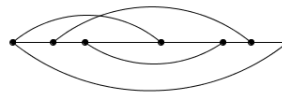
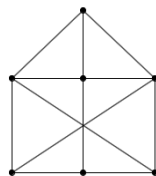
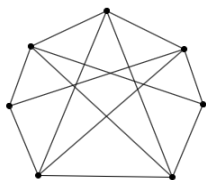
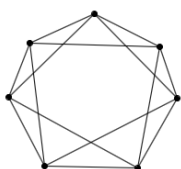
27. Проверьте, изоморфны ли попарно графы.

а)

б)

в)

г)



Р е ш е н и е.

Графы из пунктов а) и б) не изоморфны, так как они содержат разные наборы вершин.

Графы а) и в) не изоморфны, так как они содержат разное количество ребер.

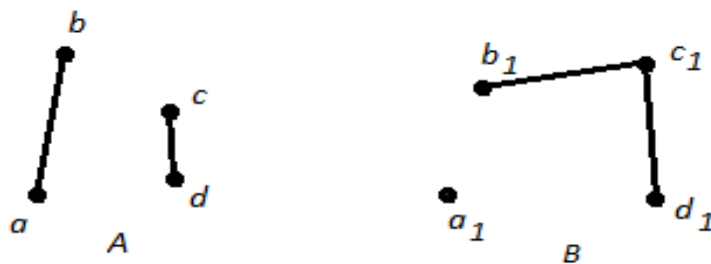
Графы а) и г) не изоморфны, так как они содержат разное количество ребер.

Графы б) и в) не изоморфны, так как содержат разное количество ребер, б) и г) не изоморфны по той же причине.

Графы в) и г) тоже не изоморфны из-за разного количества ребер.

Таким образом, попарно изоморфных графов нет.

28. Докажите, что графы  $A$  и  $B$  не изоморфны.



Пусть  $A$  изоморфно  $B$ . Из этого следует, что существует  $\varphi: B \rightarrow A$ .

$\varphi: \{a_1, b_1, c_1, d_1\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$ . Не нарушая общности, можно считать, что вершина  $a_1$  сопоставлена  $a$ .  $a_1 \rightarrow a$ ,  $b \rightarrow b_1$ , если  $b = \varphi(b_1) \Rightarrow (a, b) = \psi(a_1, b_1)$ , но это невозможно, так как нет ребра  $(a_1, b_1)$ ; пусть  $b = \varphi(c_1) \Rightarrow (a, b) = \psi(a_1, c_1)$  – невозможно, так как нет ребра  $(a_1, c_1)$ , пусть  $b = \varphi(d_1) \Rightarrow (a, b) = \psi(a_1, d_1)$  – невозможно, так как нет ребра  $(a_1, d_1)$ .

Следовательно, построение изоморфизма графов невозможно. Графы не изоморфны.

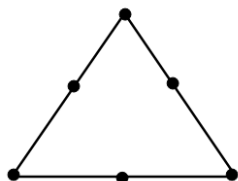
29. Докажите, что в полном графе с  $n$  вершинами  $\frac{n(n-1)}{2}$  ребер.

Р е ш е н и е.

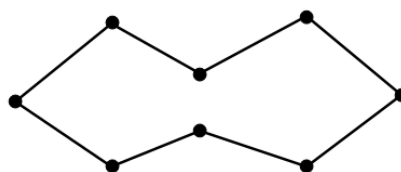
Так как граф полный, то каждая его вершина соединена со всеми остальными  $n-1$  вершинами (сама с собой она соединена быть не может). Значит, всего ребер будет  $n(n-1)$ . Но каждое ребро соединяет две вершины, следовательно, мы посчитали каждое ребро дважды. Значит, число ребер в полном графе с  $n$  вершинами равно  $\frac{n(n-1)}{2}$ .

30. Найдите дополнения графов

1)

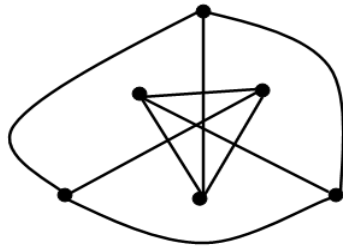


2)

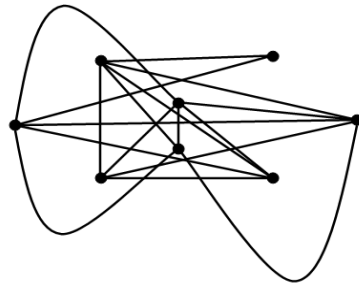


Р е ш е н и е.

1)



2)



**31.** Докажите, что любого графа либо он сам, либо его дополнение является связным.

Р е ш е н и е.

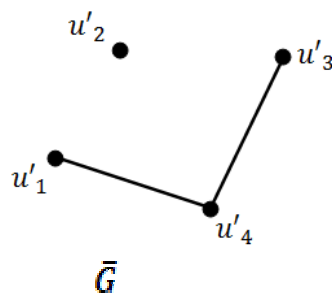
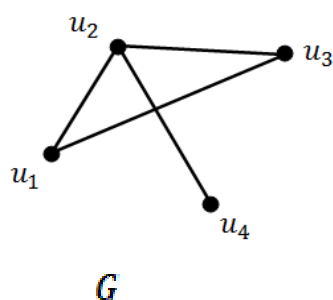
Пусть  $G$  – некоторый граф, а  $\bar{G}$  – его дополнение.

Когда  $G$  связный, утверждение очевидно. Пусть  $G$  – несвязный граф.  $G_1$  – одна из компонент связности  $G$ , а  $G_2$  – вторая компонента связности графа  $G$ . Возьмем произвольную вершину  $u$  графа  $G_1$ . Тогда для любой вершины  $u'$  из графа  $G_2$  в  $\bar{G}$  есть ребро  $uu'$ . Следовательно, любая вершина из  $G_2$  соединена с  $u$ . Возьмем отличную от  $u$  вершину  $u_1$  из  $G_1$ . Тогда для любой вершины  $u'$  из графа  $G_2$  в дополнении графа  $G$  также найдется ребро  $u_1u'$ . Таким образом, найдется путь из вершины  $u$  в  $u_1$  через вершину  $u'$ . Следовательно, из вершины  $u$  в графе  $\bar{G}$  достижима любая вершина. Значит,  $\bar{G}$  – связный граф.

**32.** Какая связь между матрицами смежности графа и его дополнениями?

Р е ш е н и е.

Рассмотрим следующий граф и его дополнение.



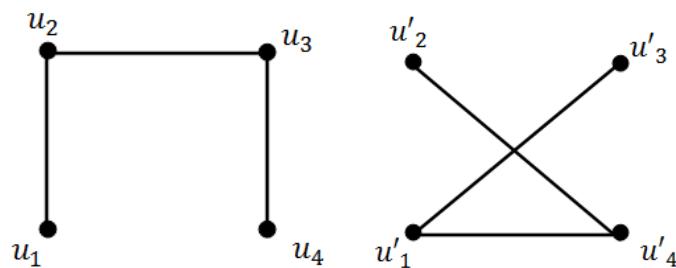
Составим их матрицы смежности:

$$A_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A'_{4 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если в матрице смежности графа  $G$  единицы изменить нули, а нули на единицы, исключая элементы главной диагонали, то получится матрица смежности дополнения графа  $G$ .

**33.** Изобразите граф, который изоморфен своему дополнению до полного графа.

Р е ш е н и е.



Докажем их изоморфизм:

$$\begin{aligned} & u_1 \rightarrow u'_3 & u_1 u_2 & \rightarrow u'_1 u'_3 \\ \varphi: & u_2 \rightarrow u'_1 & \psi: u_2 u_3 & \rightarrow u'_1 u'_4 \\ & u_3 \rightarrow u'_4 & & u_3 u_4 \rightarrow u'_4 u'_3 \\ & u_4 \rightarrow u'_2 & & \end{aligned}$$

Следовательно, граф  $G$  изоморфен своему дополнению.

**34.** Докажите, что каждый самодополнительный граф имеет  $4h$  или  $4h + 1$  вершину.

Р е ш е н и е.

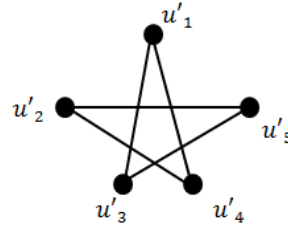
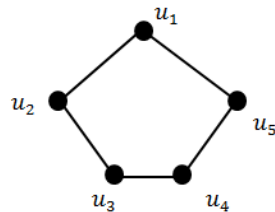
Число ребер самодополнительного графа равно половине числа ребер полного графа, т.е.  $\frac{p(p-1)}{4}$ , где  $p$  — количество вершин.

Значит,  $p$  кратно 4 или  $p - 1$  кратно 4. Следовательно,  $p = 4h$  или  $p = 4h + 1$ .

**35.** Нарисуйте два самодополнительных графа с 5 вершинами, 4 самодополнительных графа с 8 вершинами.

Р е ш е н и е.

1)



Докажем их изоморфизм:

$$u_1 \rightarrow u'_1 \quad u_1 u_2 \rightarrow u'_1 u'_3$$

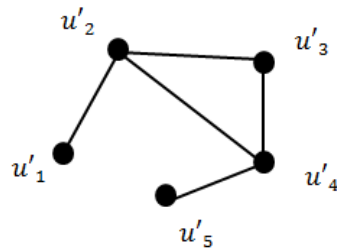
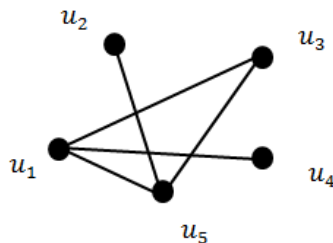
$$u_2 \rightarrow u'_3 \quad u_2 u_3 \rightarrow u'_3 u'_5$$

$$\varphi : u_3 \rightarrow u'_5 \quad \psi : u_3 u_4 \rightarrow u'_5 u'_2 ;$$

$$u_4 \rightarrow u'_2 \quad u_4 u_5 \rightarrow u'_2 u'_4$$

$$u_5 \rightarrow u'_4 \quad u_1 u_5 \rightarrow u'_1 u'_4$$

2)



Докажем их изоморфизм:

$$u_1 \rightarrow u'_2 \quad u_1 u_3 \rightarrow u'_2 u'_3$$

$$u_2 \rightarrow u'_5 \quad u_1 u_4 \rightarrow u'_2 u'_1$$

$$\varphi : u_3 \rightarrow u'_3 \quad \psi : u_1 u_5 \rightarrow u'_2 u'_4$$

$$u_4 \rightarrow u'_1 \quad u_2 u_5 \rightarrow u'_5 u'_4$$

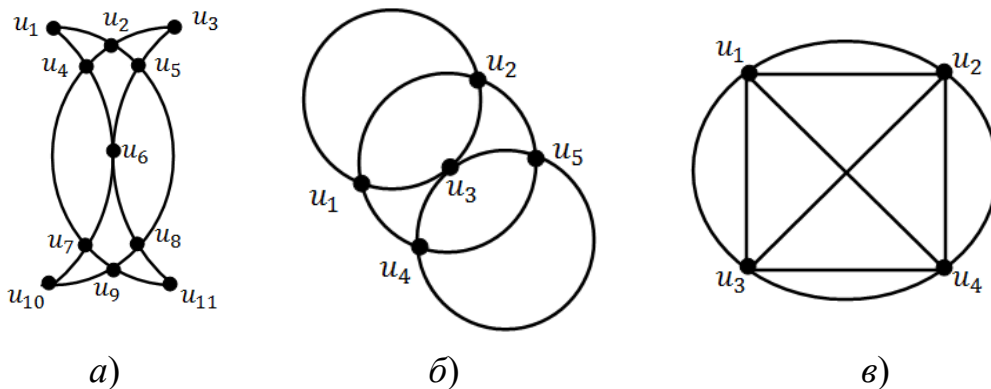
$$u_5 \rightarrow u'_4 \quad u_3 u_5 \rightarrow u'_3 u'_4$$

**36.** Каково должно быть число вершин в полном графе, чтобы он был эйлеровым?

**Решение.**

Пусть нам дан граф  $K_p$  с  $p$  вершинами. Каждая его вершина соединяется с  $p - 1$  вершиной. Для того чтобы граф был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы степень его вершины была четным числом, т.е. каждая вершина графа соединяется с четным числом вершин. Следовательно, число  $p - 1$  должно быть четным, а это возможно только тогда, когда  $p$  – нечетное число. Следовательно, в полном графе должно быть нечетное число вершин, чтобы он был эйлеровым.

**37.** Существует ли эйлеров цикл (путь) в данных графах? Если существует, найдите его.



**Решение:**

а) эйлеров путь существует, так как степени всех вершин четны

$u_1 u_4 u_6 u_7 u_{10} u_9 u_7 u_4 u_2 u_3 u_5 u_6 u_8 u_{11} u_9 u_8 u_5 u_2 u_1$  – эйлеров путь;

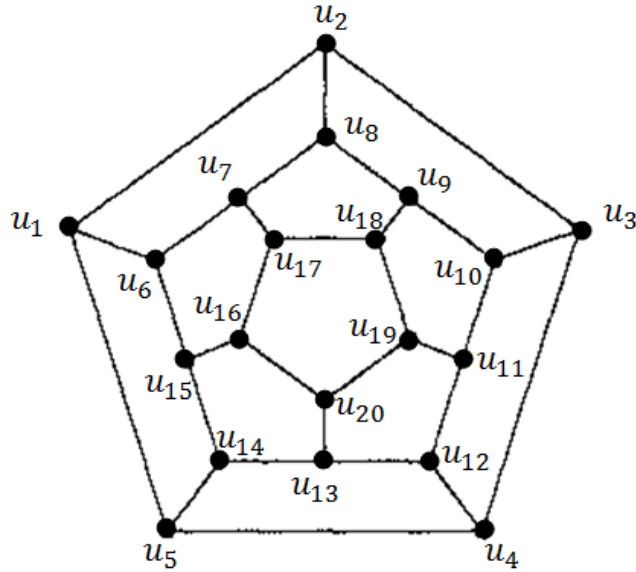
б) эйлеров путь существует, так как степени всех вершин четны

$u_1 u_2 u_3 u_1 u_2 u_5 u_4 u_5 u_3 u_4 u_1$  – эйлеров путь;

в) эйлеров путь не существует, так как степени всех вершин нечетны.

**38.** Имеется кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая его, сделать из него каркас куба со стороной 10 см? И если нельзя, то в скольких местах придется эту проволоку сломать?

**39.** Найдите гамильтонов цикл в графе, являющемся плоским представлением додекаэдра



Р е ш е н и е.

Гамильтонов цикл — это цикл, проходящий по каждой вершине ровно один раз.

$u_{17}u_7u_8u_9u_{10}u_{11}u_{12}u_{13}u_{14}u_5u_4u_3u_2u_1u_6u_{15}u_{16}u_{20}u_{19}u_{18}u_{17}$  — ГАМИЛЬТОНОВ ЦИКЛ.

**40.** Докажите, что каждый нетривиальный самодополнительный граф имеет диаметр 2 или 3.

**41.** Покажите, что формула Эйлера неверна для графа, не являющегося связным.

Р е ш е н и е.

Пусть граф  $G$  имеет  $p$  вершин,  $q$  ребер и  $K$  связных компонентов. Тогда для любой плоской реализации его на плоскости справедлива формула  $p - q + r = K + 1$ , где  $r$  — число граней.

*Доказательство.*

$$G = G_i, G_i = (V_i, E_i).$$

Пусть  $|V_i| = p_i$ ,  $|E_i| = q_i$  и для графа  $G_i$  справедлива формула Эйлера  $p_i - q_i + r_i = 2$ .

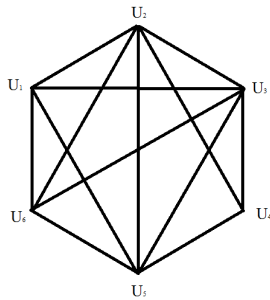
Просуммируем обе части по  $K$ :

$$2k = p - q + r + k - 1.$$

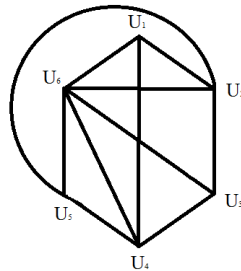
Так как бесконечная грань в  $K$ -связном графе должна учитываться только один раз, а в  $\sum_{i=1}^k r_i$  мы учли ее  $K$  раз, то в  $\sum_{i=1}^k r_i = r + K - 1$ .

Отсюда  $p - q + r = K + 1$ .

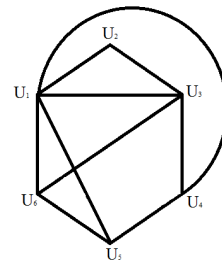
42. Приведите примеры неплоских графов с шестью вершинам.



Граф  $G$



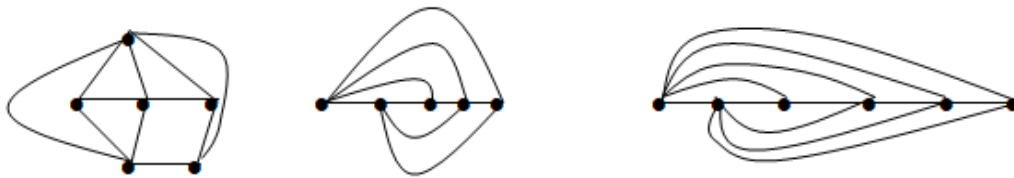
Граф  $G_1$



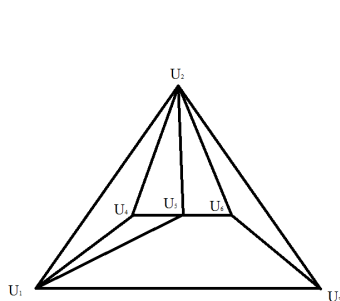
Граф  $G_2$

43. Покажите, что граф  $K_5$  не допускает плоской реализации.

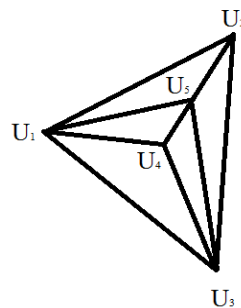
44. Нарисуйте плоское представление графов с прямолинейными ребрами.



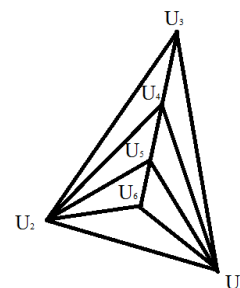
Р е ш е н и е.



Граф  $G'$



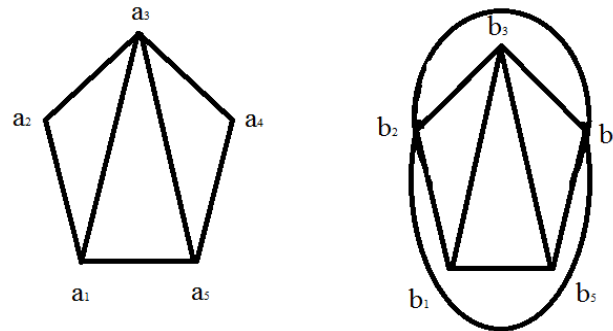
Граф  $G''$



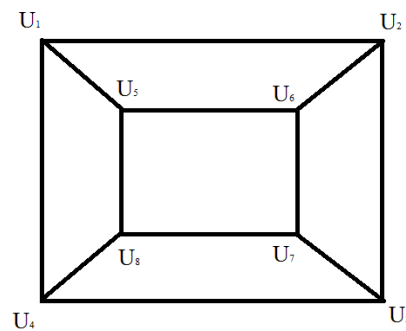
Граф  $G'''$

**45.** Операция добавления новых ребер, в результате которой в плоском представлении каждая грань имеет ровно три вершины, называется триангуляцией графа. Приведите пример различных триангулированных графов с одинаковым числом вершин.

Р е ш е н и е.

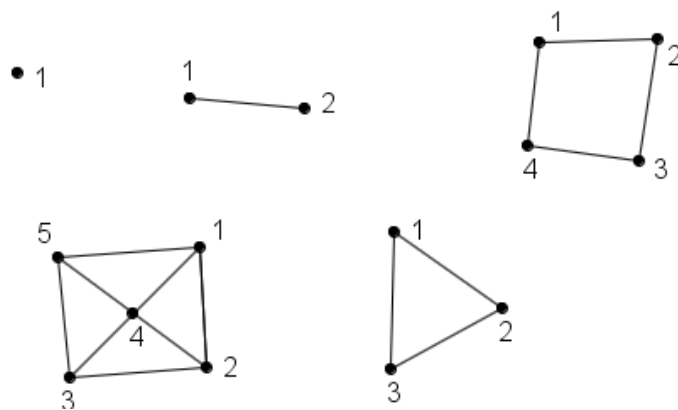


**46.** Нарисуйте граф куба.



**47.** Приведите примеры графов, которые можно правильно раскрасить 1, 2, 3, 4, 5 красками.

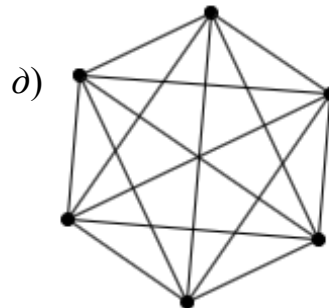
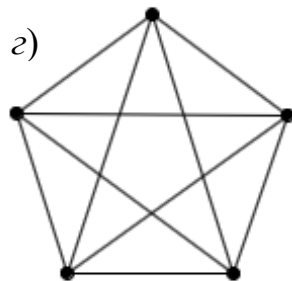
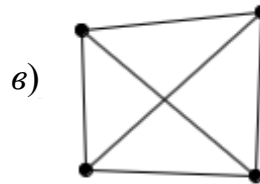
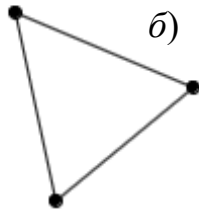
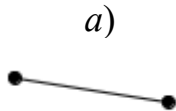
Р е ш е н и е.



**48.** Приведите примеры графов, которые нельзя правильно раскрасить  $\lambda$  красками:

а)  $\lambda = 1$ ; б)  $\lambda = 2$ ; в)  $\lambda = 3$ ; г)  $\lambda = 4$ ; д)  $\lambda = 5$ .

**Р е ш е н и е.**



**49.** Докажите необходимое и достаточное условие двухроматичности графа.

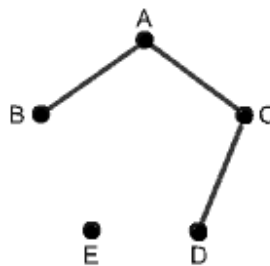
*Доказательство.* Рассмотрим связный граф  $G$  и частичное дерево этого графа – остов графа. Очевидно, что оно может быть раскрашено двумя красками. Если в начальном графе  $G$  был некоторый цикл нечетной длины, то концы одного из ребер, которое участвует в этом цикле, окажутся раскрашенными одинаково, ибо путь по дереву, соединяющий эти две вершины, состоит из четного количества ребер. Таким образом, если бы граф  $G$  мог быть правильно раскрашен двумя красками, то эта раскраска была бы правильной и для остова, следовательно,  $G$  не содержит циклов нечетной длины.

Обратно, если граф  $G$  не содержит циклов нечетной длины, то для любой правильной раскраски остова концы любого из ребер закрашены по-разному, а следовательно, индуцированная раскраска графа  $G$  правильна.

**50.** Докажите, что если в графе с пятью вершинами и ребрами двух цветов нет треугольника с одноцветными сторонами, то граф можно изобразить в виде «пятиугольника» с красными сторонами и синими диагоналями.

*Доказательство.* По условию среди трех ребер, соединяющих любые три вершины, одно ребро – красное, второе – синее, а это означает, что в графе нет ни одного треугольника с одноцветными сторонами. Остается показать, что в графе с пятью вершинами и ребрами двух цветов каждая вершина принадлежит двум красным и двум синим ребрам, причем красные ребра образуют замкнутую линию, проходящую через каждую вершину только один раз, или, иначе, в таком графе найдется «пятиугольник», все стороны которого – красные, а все диагонали – синие.

Теперь выберем одну из вершин, например  $A$ , а красными будут, скажем, ребра  $AB$  и  $AC$ .



Ясно, что из каждой вершины графа выходят два красных ребра и два синих, поскольку в противном случае образовался бы треугольник с одноцветными сторонами.

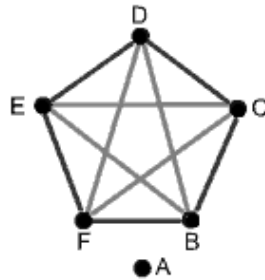
Ребро  $CB$  не может быть красным, следовательно, красным является одно из ребер: либо  $CD$ , либо  $CE$ . Пусть красное –  $CD$ . Если теперь соединить красным ребром вершины  $B$  и  $D$ , то вершина  $E$  должна быть соединена красными ребрами с вершинами, которые принадлежат уже двум красным ребрам. По условию это невозможно. Остается соединить красными ребрами вершины  $D$  и  $E$ ,  $B$  и  $E$ . Остальные ребра должны быть синими.

**51.** Докажите, что в любом графе с шестью или более вершинами и ребрами двух цветов всегда найдутся два треугольника с одноцветными сторонами. Эти два треугольника могут иметь общую вершину или даже общее ребро.

*Доказательство.* Пусть у графа с шестью вершинами  $A, B, C, D, E, F$  красные и синие ребра. Тогда найдется хотя бы один

треугольник с одноцветными сторонами, например треугольник  $ABF$  с красными сторонами. Временно исключим из рассмотрения одну из его вершин, скажем  $A$ , вместе с выходящими из нее ребрами. Найдется ли в оставшемся графе с пятью вершинами треугольник с одноцветными сторонами?

Если найдется, то он содержится и в исходном графе. В противном случае получаем пятиугольник с красными сторонами и синими диагоналями.



Теперь восстановим шестую вершину  $A$  с ее ребрами. Ребра  $AF$  и  $AB$  – красные. Если ребро  $AE$  или  $AC$  будет тоже красным, то образуется еще хотя бы один треугольник с красными сторонами  $AEF$  или  $ABC$ . Если оба эти ребра будут синего цвета, то появится треугольник  $ACE$  с синими сторонами.

**52.** Докажите, что в полном графе с 17 или более вершинами и ребрами трех цветов всегда найдется по меньшей мере один треугольник с одноцветными сторонами.

*Доказательство.* Условиям задачи соответствует граф с 17 вершинами и ребрами трех цветов. Из каждой его вершины выходят 16 ребер, причем всегда не менее шести одного цвета (доказать это нетрудно.) Если противоположные концы хотя бы двух из них соединены ребром того же цвета, то образуется треугольник с одноцветными сторонами. Если нет, то 6 вершин будут соединены попарно ребрами не более чем двух цветов, а тогда, как мы уже знаем (см. задачу 50), в этом графе с шестью вершинами найдется треугольник с одноцветными сторонами.

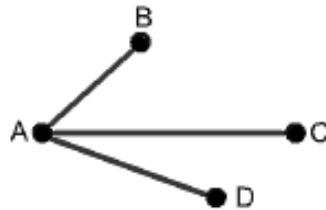
**53.** Докажите:

а) что из любой вершины графа с шестью или более вершинами и ребрами двух цветов выходит, по меньшей мере, три ребра одного цвета;

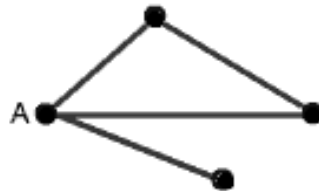
б) что в любом графе с шестью или более вершинами и ребрами двух цветов найдется по меньшей мере один треугольник с одноцветными сторонами.

*Доказательство.* Соединим вершины графа  $G$  попарно ребрами двух цветов. Пусть ребро красного и синего цветов. Мы получили граф с шестью вершинами и ребрами двух цветов. Теперь для решения задачи достаточно доказать, что в таком графе обязательно найдется «треугольник» с одноцветными сторонами.

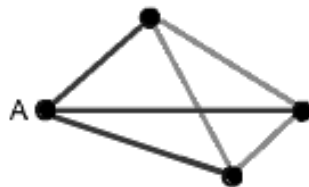
Заметим, что из произвольной вершины нашего графа к пяти остальным непременно выйдут по меньшей мере три ребра одного цвета. Пусть, например, из вершины  $A$  выходят три ребра красного цвета.



Какого цвета ребра могут соединять вершины  $B$ ,  $C$  и  $D$ ? Если хотя бы одно из них окажется красным, как на рисунке, то получится треугольник с красными сторонами.



Если же все эти ребра синие, как на рисунке, то они образуют треугольник с синими сторонами.



**54.** Докажите, что не найдется 9 человек таких, чтобы каждый был знаком ровно с тремя другими.

*Доказательство.* Предположим, что каждый человек знаком с тремя другими. Тогда вершина графа обозначает людей,

а отношения между ними – ребра. Тогда степень каждой вершины равна трем. Следовательно, сумма степеней всех вершин равна 27, что противоречит свойству о сумме степеней вершин (сумма степеней вершин – четное число).

**55.** Докажите, что всегда среди шести острых углов найдутся три угла такие, что их попарные суммы одновременно либо больше  $90^\circ$ , либо одновременно не больше  $90^\circ$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

---

1. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей. М. : Наука, 1967. 375 с.
2. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. : Физматгиз, 1963. 1100 с.
3. Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. М. : Наука, 1975. 47 с.
4. Математическая энциклопедия. М. : Советская энциклопедия, 1984. Т. 4. С. 506–507.
5. Моденов П. С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. М. : Высшая школа, 1960. С. 120–128.
6. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. М. : Наука, 1967. 800 с.

*Учебное издание*

**Султанов Адгам Яхиевич,  
Султанова Галия Алиевна,  
Монахова Оксана Александровна**

## **Избранные вопросы математики**

Редактор *В. В. Устинская*  
Технический редактор *Н. В. Иванова*  
Компьютерная верстка *Н. В. Ивановой*  
Дизайн обложки *И. В. Шваревой*

Подписано в печать 14.11.2023.  
Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Усл. печ. л. 10,58.  
Тираж 43. Заказ № 622.

---

Издательство ПГУ  
440026, г. Пенза, ул. Красная, 40.  
Тел.: (8412) 66-60-49, 66-67-77; e-mail: iic@pnzgu.ru