МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)

К. В. Таранцев, Н. В. Сорокина

МЕТРОЛОГИЯ

Учебно-методическое пособие

Пенза
Издательство ПГУ
2025

УДК 681.2.08
Т19

Р е ц е н з е н т

кандидат технических наук, начальник конструкторского
отдела специальных систем и измерительных приборов
АО «НИКИРЭТ» (г. Заречный)
А. В. Понукалин

Таранцев, Константин Валентинович.

Т19 Метрология : учеб.-метод. пособие / К. В. Таранцев, Н. В. Сорокина. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2025. – 96 с.

Представлены основные термины и определения, относящиеся к погрешностям измерения. Приведены рекомендации по выявлению характера погрешности и исключению промахов. Даны принципы выбора средств измерений. Материал направлен на приобретение практических навыков обработки результатов многократных прямых равноточных измерений.

Издание подготовлено на кафедре «Технологии и оборудование машиностроения» ПГУ и предназначено для обучающихся по направлениям подготовки 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», 22.03.01 «Материаловедение и технологии материалов», 15.03.01 «Машиностроение», 15.03.02 «Технологические машины и оборудование», 18.03.01 «Химическая технология», 20.03.01 «Техносферная безопасность», а также по специальностям 23.05.01 «Наземные транспортно-технологические средства», 17.05.01 «Боеприпасы и взрыватели» при изучении дисциплины «Метрология».

УДК 681.2.08

© Пензенский государственный
университет, 2025

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4
Практическое занятие № 1. Погрешности измерений 5
Практическое занятие № 2. Обработка результатов однократных прямых равноточных измерений 33
Практическое занятие № 3. Обработка результатов однократных косвенных измерений 43
Практическое занятие № 4. Обработка результатов многократных прямых равноточных измерений 48
Практическое занятие № 5. Обработка результатов многократных косвенных измерений 61
Практическое занятие № 6. Обработка результатов многократных неравноточных измерений 64
Практическое занятие № 7. Выбор средства измерений 69
Практическое занятие № 8. Оценка точности произведенных измерений 88
Список литературы 93

ВВЕДЕНИЕ

Издание рассчитано на студентов механических специальностей дневной и заочной форм обучения, изучающих дисциплину «Метрология, стандартизация, сертификация».

Приведены примеры решения задач по теоретической метрологии. Практические работы по дисциплине «Метрология, стандартизация, сертификация» разработаны в соответствии с ГОСТами и другими нормативными документами на основании работ [8, 12], с учетом материалов, изложенных в современной учебной литературе [5, 9, 15].

К выполнению работы можно приступить при условии полного усвоения соответствующих разделов курса. Исходные данные вариантов заданий даны в таблицах.

Цель – формирование у студентов необходимых знаний в области метрологии, позволяющих использовать современные измерительные технологии, которые представляют собой последовательность действий, направленных на получение измерительной информации требуемого качества.

При проведении работ необходимо пользоваться справочниками и ГОСТами, указанными в списке литературы. Работа оформляется в тетради или на отдельных листах бумаги. Проверенная работа выносится на защиту.

Результаты любого физического эксперимента необходимо уметь проанализировать. В физической лаборатории следует научиться не только измерять физические величины, но и проверять и находить связь между ними, сопоставлять результаты эксперимента с выводами теории.

Практическое занятие № 1.
Погрешности измерений

Цель занятия

Ознакомление с основными терминами и определениями, относящимися к методам измерения и к погрешностям измерения. Приобретение практических навыков выявления характера погрешности и исключения грубых промахов.

Теоретические сведения

Основные понятия

Физическая величина – это характеристика одного из свойств физического объекта (явления или процесса), общая в **качественном** отношении для многих объектов, но в **количественном** отношении индивидуальная для каждого объекта.

Качественно одна и та же физическая величина может иметь различное количественное выражение. Количественная определенность физической величины, присущая конкретному материальному объекту, характеризуется ее размером. Значение физической величины представляет собой оценку размера этой величины в виде некоторого числа принятых для нее единиц.

Измерение физической величины заключается в сравнении измеряемой величины с ее единицей с целью получения значения этой величины в форме, наиболее удобной для использования. Измерение производится с помощью технических средств, хранящих единицу или воспроизводящих шкалу физической величины.

Результат измерения физической величины – значение величины, полученное путем ее измерения.

Средство измерения (СИ) – это техническое средство, имеющее нормированные метрологические характеристики.

Основная физическая величина – физическая величина, входящая в систему и условно принятая в качестве независимой от других величин этой системы.

Производная физическая величина – физическая величина, входящая в систему и определяемая через основные величины этой системы.

Значение физической величины *Q* – это оценка ее величины в виде некоторого числа принятых для нее единиц или числа по

принятой для нее шкале (рис. 1.1). Значение величины получают в результате ее измерения или вычисления и выражают в виде

$$Q = X\,[Q],$$

где X – размер, т.е. числовое значение измеряемой величины в принятых единицах; $[Q]$ – выбранная для измерения единица (размерность).

Обозначение – символ **dim**. Размерность $[Q]$ основных величин: длины – **dim** $l = L$, массы – **dim** $m = M$, времени – **dim** $t = T$.

Размерность производных величин: **dim** $Q = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} \ldots$

Рис. 1.1. Характеристики физической величины

Размер физической величины – количественная характеристика, отражающая связь данной физической величины с физическими величинами, принятыми в данной системе за основные и равными единице.

Единица физической величины – физическая величина фиксированного размера, которой условно присвоено числовое значение, равное единице и применяемое для количественного определения однородных физических величин (например, 1 м – единица длины, 1 с – единица времени).

Результат измерения – это численное значение величины, найденное путем ее измерения (путем сравнения ее с единицей измерения):

$$R = Q / q,$$

где Q – измеряемая величина; q – единица измерения; R – результат измерения.

Виды значений физической величины представлены на рис. 1.2.

Рис. 1.2. Значение физической величины

Истинное значение физической величины – значение физической величины, которое идеальным образом отражало бы в количественном и качественном отношениях соответствующее свойство объекта (ГОСТ 16263–70).

Измеренное значение физической величины – результат измерения отличается от истинного значения физической величины на некоторое значение, зависящее от точности средств и методов измерения, квалификации оператора, условий, в которых проводилось измерение, и т.д.

По способу измерений различают **прямые**, **косвенные**, **совокупные** и **совместные** измерения.

Прямые измерения состоят в том, что искомое значение величины находят из опытных данных путем экспериментального сравнения. К примеру, длину измеряют непосредственно линейкой, температуру – термометром, силу – динамометром.

При ***косвенных измерениях*** результат определяют из прямых измерений, связанных с измеряемой величиной известной зависимостью (**объем** – результат трех линейных измерений, **определение сопротивления** по напряжению и току, измеренным вольтметром и амперметром соответственно):

$$V = f(x1, x2, x3).$$

Поскольку определить истинное значение физической величины в принципе невозможно, так как это потребовало бы применения идеально точного средства измерений, то на практике вместо понятия истинного значения физической величины применяют понятие ***действительного значения измеряемой величины***, которое настолько точно приближается к истинному значению, что может быть использовано вместо него. Это может быть, например, результат измерения физической величины образцовым средством измерения.

Отклонение результата измерения от истинного значения физической величины называется **погрешностью измерения**.

Погрешности измерений

Термин «точность измерений», т.е. степень приближения результатов измерения к некоторому действительному значению, используется для качественного сравнения измерительных операций. Для количественной оценки используется понятие **«погрешность измерения»** – разность между показаниями средства измерения и истинным (действительным) значением измеряемой физической величины (рис. 1.3).

Погрешность	≠	Ошибка
Возникает по *объективным* обстоятельствам, *устранить* ее невозможно, *можно* уменьшить.		**Связана с *субъективными* обстоятельствами. *В результате* проверки результатов *ее* можно устранить.**

Рис. 1.3. Погрешность и ошибка измерений

Погрешности бывают:

1. Погрешность результата измерений – это число, указывающее *возможные границы* неопределенности полученных значений измеряемой величины.

2. Погрешность используемых при этом СИ (инструментальная) – это метрологическая характеристика прибора. Принадлежит данному СИ, определяется при испытаниях и указывается в технической документации на прибор.

При однократных измерениях эти погрешности могут совпадать.

При многократных погрешность измерений может быть существенно меньше погрешности используемых при этом СИ.

Количество факторов, влияющих на точность измерения, достаточно велико, из чего следует классификация погрешностей измерения (рис. 1.4).

Рис. 1.4. Классификация погрешностей измерения

Погрешность измерения $\Delta x_{\text{изм}}$ – это отклонение результата измерения x от истинного $x_{\text{и}}$ значения измеряемой величины, так как *истинное значение физической величины* ***неизвестно***, то на практике пользуются ее действительным значением.

Для рабочего средства измерения за действительное значение принимают показания рабочего эталона низшего разряда; для эталона 4-го разряда – значение физической величины, полученное с помощью рабочего эталона 3-го разряда:

$$\Delta x_{\text{изм}} = x - x_{\text{д}}.$$

Например:

1. При измерении барометром атмосферного давления получено значение $X_{\text{п}}$ = 101 700 Па (паскаль) = 0,101700 МПа.

2. За действительное значение принято показание рабочего эталона, которое равнялось X = 102 000 Па.

3. Следовательно, погрешность измерения барометром составила Δ = 101 700 – 102 000 = –300 Па.

В зависимости от формы выражения различают абсолютную, относительную и приведенную погрешности измерения.

Абсолютная погрешность определяется по формуле

$$\Delta = x - x_{\text{и}}.$$

Относительная погрешность – погрешность средства измерений, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерений к результату измерений или к действительному значению измеренной физической величины:

$$\delta = \pm\frac{\Delta}{x}100\ \% \text{ или } \delta = \pm\frac{\Delta}{x_{\text{д}}}100\ \%.$$

Приведенная погрешность – это относительная погрешность, выраженная отношением абсолютной погрешности средства измерений к условно принятому значению величины (нормирующему значению), постоянному во всем диапазоне измерений или в части диапазона. Она определяется по формуле

$$\gamma = \pm\frac{\Delta}{x_N}100\ \%,$$

где x_N – нормирующее значение, которое зависит от типа шкалы измерительного прибора и определяется по его градуировке:

– если шкала прибора односторонняя и нижний предел измерений равен нулю (например, диапазон измерений 0...100), то x_N определяется равным верхнему пределу измерений (x_N = 100);

– если шкала прибора односторонняя, нижний предел измерений больше нуля, то x_N определяется как разность между максимальным и минимальным значениями диапазона (для прибора с диапазоном измерений 30...100, $x_N = X_{\max} - X_{\min} = 100 - 30 = 70$);

– если шкала прибора двухсторонняя, то нормирующее значение равно ширине диапазона измерений прибора (диапазон измерений – 50...+50, $x_N = 100$).

Приведенная погрешность является безразмерной величиной либо измеряется в процентах.

Приведенная погрешность пропорциональна абсолютной погрешности, поэтому если абсолютная погрешность измерительного прибора постоянна во всем диапазоне измерения, то приведенная будет также постоянной. Следовательно, она характеризует точность измерительного прибора независимо от значения измеряемого параметра и ее считают основной метрологической характеристикой измерительного прибора.

Приведенная погрешность изменяется под действием изменения окружающей температуры, давления, вибрации и т.д. В связи с этим для каждого прибора регламентируют нормальные условия эксплуатации (температуру, влажность, напряжение питания и т.д.).

Когда в результате измерения получена группа результатов измерений величин $x_1, x_2, ..., x_n$ (не менее четырех, $n \geq 4$) при измерениях одной и той же величины, выполненных с одинаковой тщательностью, одним и тем же средством измерений, одним и тем же методом и одним и тем же оператором, то в **качестве истинного значения при многократных измерениях** параметра выступает среднее арифметическое значение $\bar{x}$:

$$x_{\text{и}} \approx \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \qquad (1.1)$$

Абсолютной погрешностью *i*-го измерения принимают

$$\Delta x_i = x_i - \bar{x}. \qquad (1.2)$$

Относительную погрешность *i*-го измерения рассчитывают по формуле

$$\varepsilon_i = \frac{\Delta x_i}{\bar{x}}. \qquad (1.3)$$

Случайные ошибки могут быть количественно оценены *при математической обработке экспериментальных данных.*

Для оценки случайной погрешности полагают, что наиболее близким к истинному значению измеряемой величины является **среднеарифметическое** значение результатов измерений.

Это положение справедливо, если выполняется **нормальный закон распределения случайных ошибок (закон Гаусса)**:

1. Ошибки расположены в определенном интервале (относительно истинного значения величины) и могут принимать непрерывный ряд значений.

2. Большие (по абсолютной величине) ошибки встречаются реже, чем меньшие, т.е. вероятность появления ошибки уменьшается с ростом ее абсолютной величины.

3. При достаточно большом числе измерений случайные ошибки одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто.

Функция распределения непрерывной случайной величины x, если выполняется **нормальный закон распределения случайных ошибок (закон Гаусса)**:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

где μ и σ – параметры распределения; μ – матожидание случайной величины; σ^2 – дисперсия случайной величины.

Графики представлены на рис. 1.5.

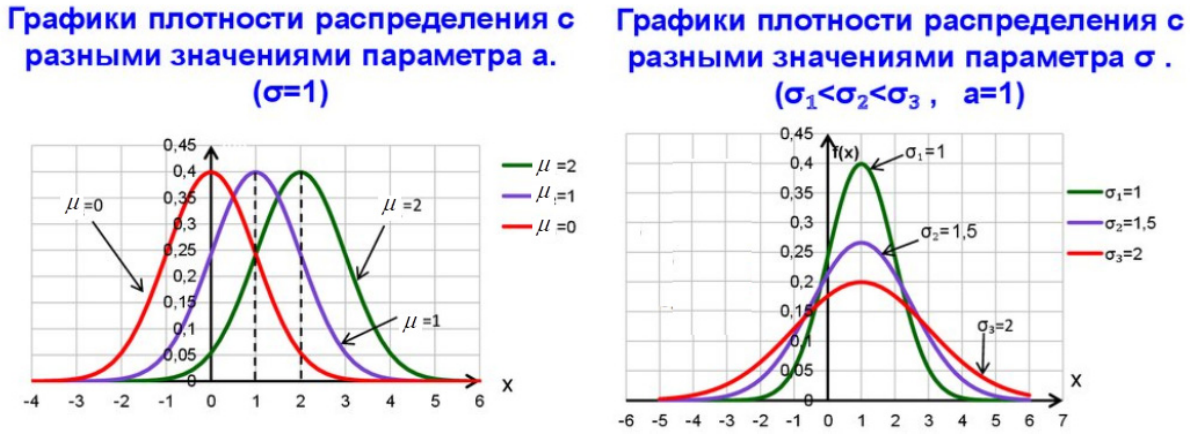


Рис. 1.5. Графики плотности

Величина x, полученная в одной серии измерений, является случайным приближением к $x_и$. Для оценки ее возможных отклонений от $x_и$ определяют опытное среднее квадратическое отклонение (СКО):

$$S_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n(n-1)}}. \qquad (1.4)$$

Для оценки **рассеяния отдельных результатов** x_i измерения относительно среднего $\bar{x}$ определяют СКО:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \quad \text{при } n \geq 20 \tag{1.5}$$

или

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} \quad \text{при } n < 20, \tag{1.6}$$

где n – число измерений.

Термины трактуются авторами немного по-разному. Предлагается использовать обозначение ГОСТ Р 8.736–2011. Генеральную совокупность следует описывать *параметрами теории вероятности*, обозначаемыми греческими буквами: математическое ожидание μ и дисперсия $D = \sigma^2$. Выборки необходимо описывать *статистическими параметрами*, обозначаемыми латинскими буквами: среднее арифметическое $\bar{x}$ и среднеквадратичное отклонение S.

В реальной жизни ни матожидание μ, ни дисперсия $D = \sigma^2$ генеральной совокупности неизвестны. Но, извлекая выборку, мы кое-что узнаем о матожидании и среднеквадратичном отклонении. Говорят, что среднее $\bar{x}$ является *оценкой* матожидания μ, а среднеквадратичное отклонение S – *оценкой* дисперсии σ^2. **Ограниченное число результатов измерений позволяет получать лишь оценки этих характеристик.** Если при генерации случайной величины задать $\sigma_1 = 1$ и $\sigma_2 = 2$, для выборок на рис. 1.6 получается $s_1 = 0{,}985$, $s_2 = 1{,}824$. Чем меньше s, тем кучнее значения располагаются вокруг среднего. Итак, стандартное отклонение – мера разброса данных в выборке.

В зависимости от характера проявления, причин возникновения и возможностей устранения различают систематическую и случайную составляющие погрешности измерений, а также грубые погрешности (промахи).

К систематическим Δ_C погрешностям относят составляющую погрешности измерений, которая остается постоянной или закономерно изменяется при повторных измерениях одной и той же величины, проведенных с одинаковой тщательностью.

К случайным $\overset{\circ}{\Delta}$ погрешностям относят составляющие погрешности измерений, которые изменяются случайным образом (по знаку и значению) при повторных измерениях одной и той же величины, проведенных с одинаковой тщательностью.

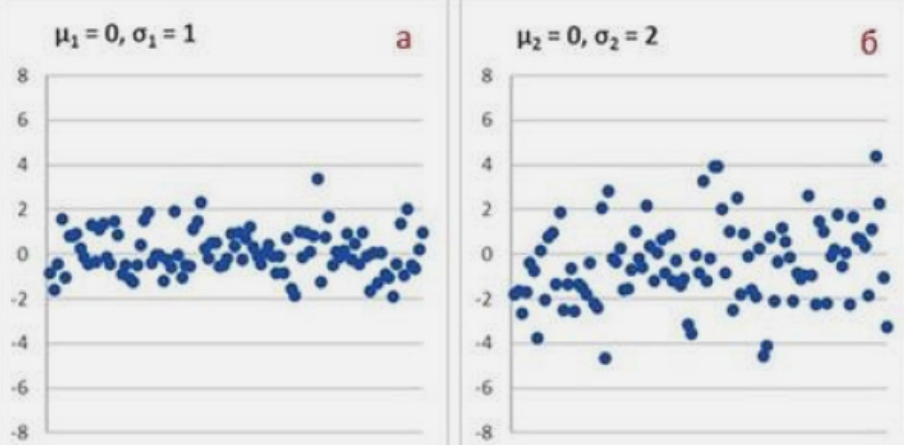


Рис. 1.6. Нормально распределенные случайные величины. По оси абсцисс – номер элемента в выборке, по оси ординат – значение нормально распределенной случайной величины. Видно, что увеличение среднеквадратичного отклонения приводит к большему разбросу точек

Промах (грубая ошибка) – погрешность измерения, существенно превышающая (зависящие от объективных условий измерений) значения систематической и случайной погрешностей. Возникает из-за ошибочных действий оператора, неисправности СИ или резких изменений условий измерения.

Случайная и систематическая составляющие погрешности измерения проявляются одновременно, так что общая погрешность при их независимости $\Delta = \Delta_C + \overset{\circ}{\Delta}$ или через СКО $S_\Delta = \sqrt{S^2_{\Delta_C} + S^2_{\overset{\circ}{\Delta}}}$.

Влияние случайных погрешностей может быть уменьшено путем обработки результатов измерений, для этого должны быть известны вероятностные и статистические характеристики (закон распределения, закон математического ожидания, СКО, доверительная вероятность и доверительный интервал) [15].

Рассмотренные выше точечные оценки параметров распределения дают оценку в виде числа, наиболее близкого к значению неизвестного параметра. Для практики важно не только получить точечную оценку, **но и определить с заданной вероятностью интервал**, где находится истинное значение оцениваемого параметра. Если P означает вероятность α того, что $\bar{x}$ результата измерения отличается от истинного на величину не более $\overset{\circ}{\Delta}$, т.е.

$$P = \alpha\left\{\left(\bar{x} - \overset{\circ}{\Delta}\right) < x_{\text{и}} < \left(\bar{x} + \overset{\circ}{\Delta}\right)\right\}, \qquad (1.7)$$

то в этом случае P – доверительная вероятность, означающая вероятность того, что среднее значение отличается от истинного на величину не более чем $\overset{o}{\Delta}$, а интервал от $\bar{x} - \overset{o}{\Delta}$ до $\bar{x} + \overset{o}{\Delta}$ – доверительный интервал. Таким образом, для характеристики случайной погрешности надо обязательно задать два числа – величину самой погрешности (или доверительный интервал) и доверительную вероятность.

Если распределение случайной погрешности подчиняется нормальному закону (это, как правило, так), то вместо значения $\overset{o}{\Delta}$ указывается σ_x. Одновременно это уже определяет и доверительную вероятность P. Например: при $\overset{o}{\Delta} = \sigma_x$ значение $P = 0{,}68$; при $\overset{o}{\Delta} = 2\sigma_x$ $P = 0{,}95$; при $\overset{o}{\Delta} = 3\sigma_x$ $P = 0{,}99$.

Для определения доверительных границ погрешности оценки измеряемой величины доверительную вероятность принимают равной 0,95.

Если распределение случайной погрешности подчиняется нормальному закону, то вместо значения $\overset{o}{\Delta}$ указывают $S_{\bar{x}}$ среднее квадратическое отклонение среднего арифметического, одновременно это уже определяет и доверительную вероятность P [15].

Доверительная вероятность по формуле (1.7) характеризует вероятность того, что отдельное измерение x_i не будет отклоняться от истинного значения более чем на $\overset{o}{\Delta}$. Безусловно, важнее знать отклонение от истинного значения среднего арифметического ряда измерений.

До сих пор рассматривались оценки СКО по «необходимому» (достаточно большому) числу измерений. В этом случае σ^2 называется ***генеральной дисперсией***. При малом числе измерений (менее 10–20) получают так называемую выборочную дисперсию $\bar{\sigma}^2$. Причем $\bar{\sigma}^2 = \sigma^2$ лишь при $n \to \infty$. Следовательно, если считать, что $\bar{\sigma}^2 = \sigma^2$, то надежность оценки уменьшается с уменьшением n, а значения доверительной вероятности P завышаются.

В связи с этим при ограниченном числе измерений n вводят коэффициент Стьюдента t_p, определяемый по специальным таблицам в зависимости от числа измерений n и принятой доверительной вероятности P.

Выявление характера погрешности

Систематические погрешности рассматривают по составляющим в зависимости от источника ее возникновения, причем различают методическую, инструментальную и субъективную составляющие погрешности.

Субъективные систематические погрешности измерения обусловлены погрешностью отсчета оператором показания по шкале средства измерений.

Методическая составляющая погрешности обусловлена несовершенством метода измерения, приемами использования СИ, некорректностью расчетных формул и округлением результатов измерений.

Если взять два ряда измерений одной и той же величины, то средние результаты этих рядов, как правило, будут различны. Это расхождение может быть определено случайной или систематической составляющей.

Учет и исключение (или уменьшение) систематической погрешности представляют одну из самых сложных задач теории измерений. Способы решения этой задачи зависят от конкретных видов измерений, и не существует общей методики ее решения. Часто используется подход, основанный на всестороннем теоретическом анализе процедуры измерения и характеристик применяемой аппаратуры. Такой анализ может дать оценку границ систематической погрешности. При точных измерениях оценка систематической погрешности производится по результатам измерения искомой величины принципиально независимыми методами с применением различной аппаратуры. Многие современные способы анализа систематической погрешности используют аппарат математической статистики (дисперсионный, регрессионный, корреляционный, спектральный анализ), теории принятия решений, теории игр и др.

В зависимости от числа измерений рассмотрим **два способа для выявления характера погрешности**.

Способ 1

Методика выявления характера погрешности при числе измерений $\boldsymbol{n \le 20}$ заключается в следующем:

1. Из двух рядов n_1 и n_2 независимых измерений находят средние арифметические значения $\overline{x}_1$ и $\overline{x}_2$.

2. Определяют значение выражения

$$S = \sqrt{\frac{1}{n_1 + n_2 - 2}\left[\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_i - \overline{x}_1\right)^2 + \sum_{i=1}^{n_2}\left(x_i - \overline{x}_2\right)^2\right]}.$$

3. Вычисляют $\sigma = S\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}$.

4. Вероятность того, что разность $\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right| \geq \varepsilon$ является случайной величиной, определяется равенством $P\left(\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right| \geq \varepsilon\right) = 1 - P_{t_p n}$, где $t_p = \frac{\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right|}{\sigma}$; $n = n_1 + n_2 - 2$.

Величина P определяется для коэффициента Стьюдента.

Если полученная вероятность $P \geq 0{,}95$, то разность $\left|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\right|$ носит систематический характер [15].

Способ 2

Методика выявления характера погрешности при числе измерений $\boldsymbol{n \geq 30}$ заключается в следующем:

1. Из двух рядов n_1 и n_2 независимых измерений находят средние арифметические $\bar{x}_1$ и $\bar{x}_2$.

2. Вычисляют $\sigma^2_{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} = \frac{\sigma^2_{x_1}}{n_1} + \frac{\sigma^2_{x_2}}{n_2}$.

3. Если $\left|\bar{x}_2 - \bar{x}_1\right| > t\sigma_{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}$, где t – коэффициент Стьюдента для вероятности P, то в результате измерений с вероятностью P содержится систематическая погрешность [15].

Исключение известных систематических погрешностей

Исключение известных систематических погрешностей из результатов наблюдений или измерений выполняем введением поправок к этим результатам.

Поправки по абсолютному значению равны этим погрешностям и противоположны им по знаку.

Введением поправок исключаем:

– погрешность, возникающую из-за отклонений действительной температуры окружающей среды при измерении от нормальной;

– погрешность, возникающую из-за отклонений атмосферного давления при измерении от нормального;

– погрешность, возникающую из-за отклонений относительной влажности окружающего воздуха при измерении от нормальной;

– погрешность, возникающую из-за отклонений относительной скорости движения внешней среды при измерении от нормальной;

– погрешность, возникающую вследствие искривления светового луча (рефракции);

– погрешность шкалы средства измерения;

– погрешность, возникающую вследствие несовпадения направлений линии измерения и измеряемого размера.

Поправки по указанным погрешностям вычисляем в соответствии с указаниями табл. 1.1.

Обозначения, принятые в таблице: L – непосредственно измеряемый размер, мм; $l_{\text{ном}}$ – номинальная длина мерного прибора, мм; l_i – действительная длина мерного прибора, мм; $\Delta l = l_i - l_{\text{ном}}$; α_1, α_2 – коэффициенты линейного расширения средства измерения и объекта, 10^{-6} град$^{-1}$; t_1, t_2 – температура средства измерения и объекта, °С; h – величина отклонения направления измерения от направления измеряемого размера, мм; Q – предельное значение допустимой силы ветра, Н; P – сила натяжения мерного прибора (рулетки, проволоки), Н.

Таблица 1.1

Поправки для исключения систематических погрешностей

Поправка	Указания по определению поправок
1. Поправка на температуру окружающей среды	$\theta x_{\text{кор},t} = -L\left[\alpha_1\left(t_1 - 20\,^{\circ}\text{C}\right) - \alpha_2\left(t_2 - 20\,^{\circ}\text{C}\right)\right]$
2. Поправка на атмосферное давление	Определяется при применении электронно-оптических средств измерений в соответствии с эксплуатационной документацией
3. Поправка на относительную влажность окружающего воздуха	$\theta x_{\text{кор},w}$ определяется: а) при применении электронно-оптических средств измерений в соответствии с эксплуатационной документацией; б) при измерении объектов, изменяющих размеры в зависимости от влажности воздуха в соответствии со свойствами материала
4. Поправка на относительную скорость внешней среды	$\theta x_{\text{кор},c} = \dfrac{Q^2 l_{\text{ном}}}{24P^2}$
5. Поправка на длину шкалы средства измерения	$\theta x_{\text{кор},l} = -\dfrac{L}{l_{\text{ном}}}\Delta l$
6. Поправка на несовпадение направлений линии измерения и измеряемого размера	$\theta x_{\text{кор},h} = \dfrac{h^2}{2L}$
7. Поправка на рефракцию	$\theta x_{\text{кор},r}$ определяется при применении оптических или электронно-оптических приборов в зависимости от условий измерения по специальной методике

Поправки могут не вноситься, если действительная погрешность измерения не превышает предельной.

Пример

Определить систематические погрешности и записать результат с учетом различных параметров.

Получен результат измерения длины стальной фермы $x_i = 24\,003$ мм. Измерение выполнялось трехметровой рулеткой из нержавеющей стали при $t = -20\ ^\circ$C. При этом $\alpha_1 = 20{,}5 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$, $\alpha_2 = 12{,}5 \cdot 10^{-6}$ град$^{-1}$, $t_1, = t_2 = -20\ ^\circ$C, $l_{\text{ном}} = 3000$ мм, $l_i = 3002$ мм, $h = 35$ мм; $Q = 1{,}2$ Н, $P = 9$ Н.

Решение

1. Поправка на температуру окружающей среды:

$$\theta x_{\text{кор},t} = -L\left[\alpha_1\left(t_1 - 20\ ^\circ\text{C}\right) - \alpha_2\left(t_2 - 20\ ^\circ\text{C}\right)\right] =$$

$$= -24\,003\left[20{,}5 \cdot 10^{-6}\left(-20 - 20\right) - 12{,}5 \cdot 10^{-6}\left(-20 - 20\right)\right] \approx 7{,}7 \text{ мм}.$$

Действительную длину x_i фермы с учетом поправки на температуру окружающей среды принимаем равной

$$x_i + \theta x_{\text{кор},t} = 24\,003 + 7{,}7 = 24\,010{,}7 \text{ мм}.$$

2. Поправка на относительную скорость внешней среды

$$\theta x_{\text{кор},c} = \frac{Q^2 l_{\text{ном}}}{24P^2} = \frac{1{,}2^2 \cdot 3000}{24 \cdot 9^2} = 2{,}22 \text{ мм}.$$

Действительную длину x_{i} фермы с учетом поправки на относительную скорость внешней среды принимаем равной

$$x_i + \theta x_{\text{кор,с}} = 24\,003 + 2{,}22 = 24\,005{,}22 \text{ мм}.$$

3. Поправка на длину шкалы средства измерения:

$$\theta x_{\text{кор},l} = \frac{L}{l_{\text{ном}}}\Delta l;$$

$$\Delta l = l_i - l_{\text{ном}} = 3002 - 3000 = 2 \text{ мм};$$

$$\theta x_{\text{кор},l} = \frac{24\,003}{3000} \cdot 2 = 16{,}002 \text{ мм}.$$

Действительную длину x_i фермы с учетом поправки на длину шкалы средства измерения принимаем равной

$$x_i + \theta x_{\text{кор},l} = 24\,003 + 16{,}002 = 24\,019{,}002 \text{ мм}.$$

4. Поправка на несовпадение направлений линии измерения и измеряемого размера:

$$\theta x_{\text{кор},h} = \frac{h^2}{2L} = \frac{35^2}{2 \cdot 24\,003} = 0,025 \text{ мм}.$$

Действительную длину x_i фермы с учетом поправки несовпадения направлений линии измерения и измеряемого размера принимаем равной

$$x_i + \theta x_{\text{кор},h} = 24\,003 + 0,025 = 24\,003,025 \text{ мм}.$$

Действительную длину x_i фермы с учетом всех поправок принимаем равной

$$x_i + \theta x_{\text{кор},t} + \theta x_{\text{кор},c} + \theta x_{\text{кор},l} + \theta x_{\text{кор},h} =$$

$$= 24\,003 + 7,7 + 2,22 + 16,002 + 0,025 = 24\,028,9 \text{ мм}.$$

Задание 1.1

Определить систематические погрешности и записать результат с учетом различных параметров. Данные результатов измерений приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Исходные данные

Вариант	L, мм	$l_{\text{ном}}$, мм	l_i, мм	t, °С	t_1=t_2, °С	h, мм	P, Н	Q, Н
1	17 983	3000	3001	–15	–15	27	8	0,7
2	13 005	3000	3002	13	13	32	12	0,3
3	24 153	3000	3001	24	24	15	10	1,5
4	59 670	10 000	10 001	–19	–19	39	9	0,9
5	40 309	5000	5002	7	7	21	11	0,2
6	28 012	3000	3001	9	9	24	7	1,2
7	45 180	3000	5001	4	4	40	12	0,4
8	67 000	10 000	10 002	–8	–8	11	7	1,4
9	31 500	5000	5002	–12	–12	18	12	1,3
10	18 021	3000	3000	–3	–3	35	10	0,6

Окончание табл. 1.2

Вариант	L, мм	$l_{ном}$, мм	l_i, мм	t, °С	$t_1=t_2$, °С	h, мм	P, Н	Q, Н
11	12 908	10 000	10 002	–4	–4	28	9	1,1
12	23 061	5000	5001	11	11	12	11	0,8
13	60 054	3000	3001	8	8	31	10	0,3
14	40 720	5000	4999	–7	–7	19	9	1,5
15	28 030	10 000	10 001	24	24	26	11	0,9
16	45 002	3000	3003	–19	–19	13	7	0,2
17	66 002	10 000	10 004	7	7	34	12	1,2
18	31 207	5000	5002	9	9	23	10	0,4
19	23 948	3000	3002	4	4	17	9	1,4
20	60 376	5000	5001	–8	–8	38	11	0,6
21	28 012	10 000	10 001	–12	–12	25	8	1,1
22	45 180	5000	5002	–3	–3	33	12	0,8
23	67 000	3000	3002	–4	–4	16	10	0,3
24	31 500	10 000	10 003	–15	–15	30	9	1,5
25	18 021	5000	5001	13	13	22	11	0,9
26	12 908	3000	3001	24	24	37	7	0,2
27	23 061	5000	5002	–19	–19	29	12	1,2
28	60 054	10 000	10 002	7	7	20	11	0,4
29	40 720	5000	5001	9	9	36	7	1,4
30	28 030	3000	3001	4	4	10	12	1,2
31	45 002	10 000	10 002	–8	–8	34	10	0,4
32	66 002	5000	5002	–12	–12	23	9	1,4
33	31 207	3000	3001	–3	–3	17	11	1,3
34	23 948	10 000	10 001	–4	–4	38	8	0,6
35	60 376	3000	3001	–5	–5	25	10	1,1

Выявление и исключение грубых погрешностей (промахов)

Промахи относятся к аномальным результатам измерений, которые могут быть следствием кратковременного воздействия на процесс измерения некоторого мешающего фактора, преобладающего над остальными. Промах может быть вызван ошибкой оператора, проводящего измерение, или сбоем измерительной аппаратуры. В этих случаях аномальный результат должен быть отброшен. Однако отбрасывание аномальных данных является спорным вопросом, по которому у специалистов нет единого мнения. Например, из истории физики известно, что именно аномальные результаты экспериментов привели к великим открытиям, поэтому при научных исследованиях и в большинстве технических измерений необходимо тщательно проанализировать причину промаха, многократно повторив эксперимент. Тем не менее в хорошо изученной ситуации, если не удается найти внешнюю причину промаха, вопрос об отбрасывании аномального отсчета должен быть решен на основе обработки всех данных эксперимента.

Грубая погрешность (промах) – это погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда. При однократных измерениях обнаружить промах невозможно. При многократных измерениях для обнаружения промахов используют статистические критерии, такие как критерий 3σ, критерий Романовского, критерий Шарлье, критерий Диксона, в соответствии с ГОСТ Р 8.736–2011 используют критерий Граббса.

При использовании ***критерия*** 3σ считается, что результат, возникающий с вероятностью $P \leq 0{,}003$, малореален и его можно квалифицировать промахом, т.е. сомнительный результат x_i отбрасывается, если

$$\left|\overline{x} - x_i\right| > 3\sigma .$$

Величины x_i и σ вычисляют без учета x_i. Данный критерий надежен при числе измерений $n \geq 20$.

Критерий Романовского применяется, если число измерений $\boldsymbol{n < 20}$. При этом вычисляется отношение

$$\beta = \left|\frac{(\overline{x} - x_i)}{S_x}\right|,$$

где x_i – проверяемое значение; $\overline{x}$ – среднее арифметическое значение; S_x – среднее квадратическое отклонение.

Далее расчетное значение β сравнивается с критерием $\beta_т$, выбранным по табл. 1.3. Если $\beta \geq \beta_т$, то результат x_i считается промахом и отбрасывается.

Таблица 1.3

Уровень значимости критерия Романовского $\beta_т = f(n)$

P	Число измерений						
	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$	$n = 12$	$n = 15$	$n = 20$
0,01	1,73	2,16	2,43	2,62	2,75	2,90	3,08
0,02	1,72	2,13	2,37	2,54	2,6	2,80	2,96
0,05	1,71	2,10	2,27	2,41	2,52	2,64	2,78
0,10	1,69	2,00	2,17	2,29	2,39	2,49	2,62

Пример

При шестикратном измерении расстояний между ориентирами осей здания получены следующие результаты: 25,155; 25,150; 25,165; 25,165; 25, 160; 25,180 м. Последний результат вызывает сомнения. Производим проверку по критерию Романовского, не является ли он промахом.

Найдем среднее арифметическое значение

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{150,975}{6} = 25,163 \text{ м.}$$

Определяем среднее квадратическое отклонение. Для удобства вычислений составим табл. 1.4.

Таблица 1.4

Обработка результатов измерений

Номер п/п	x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
1	2	3	4
1	25,155	–0,008	0,000064
2	25,150	–0,013	0,000169
3	25,165	0,002	0,000004

Окончание табл. 1.4

1	2	3	4
4	25,165	0,002	0,000004
5	25,160	–0,003	0,000009
6	25,180	0,017	0,000289
	$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 25{,}163$ м		$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = 0{,}000539$

Оценка СКО: $S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = 0{,}0107$ м.

Вычисляем β для сомнительного результата:

$$\beta = \frac{\left|\left(x_i - \bar{x}\right)\right|}{S_x} = \frac{0{,}017}{0{,}0107} = 1{,}58.$$

Критическое значение β при уровне значимости 0,05 и n = 6 составляет 2,1. Поскольку 1,58 < 2,1, результат не является промахом и не исключается из результатов измерений.

Критерий Шарлье используется, если число измерений велико (n > 20). Пользуясь данным критерием, отбрасываем результат, для значения которого выполняется неравенство

$$\left|\left(x_i - \bar{x}\right)\right| = K_{\text{ш}} \cdot S_x.$$

Пример

При измерении расстояний между колоннами были получены следующие результаты (табл. 1.5).

Таблица 1.5

Обработка исходных данных

Номер п/п	x_i	$x_i - \bar{x}$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$
1	2	3	4
1	23,67	0	0
2	23,68	0,01	0,0001

Продолжение табл. 1.5

1	2	3	4
3	23,66	–0,01	0,0001
4	23,67	0	0
5	23,67	0	0
6	23,68	0,01	0,0001
7	23,67	0	0
8	23,68	0,01	0,0001
9	23,67	0	0
10	23,68	0,01	0,0001
11	23,66	–0,01	0,0001
12	23,67	0	0
13	23,67	0	0
14	23,68	0,01	0,0001
15	23,68	0,01	0,0001
16	23,68	0,01	0,0001
17	23,67	0	0
18	23,68	0,01	0,0001
19	23,68	0,01	0,0001
20	23,67	0	0
21	23,68	0,01	0,0001
22	23,67	0	0
23	23,67	0	0
24	23,67	0	0
25	23,68	0,01	0,0001
26	23,66	–0,01	0,0001

Окончание табл. 1.5

1	2	3	4
27	23,68	0,01	0,0001
28	23,67	0	0
29	23,67	0	0
30	23,68	0,01	0,0001
	$\bar{x} = 23,67$ м		$\sum_{i=1}^{n} = 0,0016$

Обработка результатов измерений

Находим СКО $S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2} = \sqrt{\frac{0,0016}{29}} = 0,0074$ м.

Проверяем сомнительный результат измерения – 23,66. Для этого значения не выполняется неравенство $\left|\left(x_i - \bar{x}\right)\right| > K_{\text{ш}} \cdot S_x$, где $K_{\text{ш}} = 2,13$ (табл. 1.6), т.е. $\left|23,66 - 23,67\right| < 2,13 \cdot 0,0074$. Таким образом, проверяемое значение 23,66 не является промахом и не отбрасывается.

Таблица 1.6

Значения критерия Шарлье

n	5	10	20	30	40	50	100
$K_{\text{ш}}$	1,3	1,65	1,96	2,13	2,24	2,32	2,58

При использовании **критерия Диксона** полученные результаты измерений записываются в вариационный возрастающий ряд $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Расчетное значение критерия определяется как

$$K_{\text{Д}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}.$$

В случае, если расчетное значение критерия будет больше критического значения Z_q, то проверяемое значение считается промахом и отбрасывается. Критические значения критерия приведены в табл. 1.7.

Таблица 1.7

Значения критерия Диксона Z_q

n	q			
	0,1	0,05	0,02	0,01
4	0,68	0,76	0,85	0,89
6	0,48	0,56	0,64	0,70
8	0,40	0,47	0,54	0,59
10	0,35	0,41	0,48	0,53
14	0,29	0,35	0,41	0,45
16	0,28	0,33	0,39	0,43
18	0,26	0,31	0,37	0,41
20	0,26	0,30	0,36	0,39
30	0,22	0,26	0,31	0,34

Пример

Было произведено шесть измерений расстояний. Получены следующие результаты: 25,1; 25,2; 24,9; 25,6; 25,1; 25,2 мм. Результат 25,6 мм существенно отличается от остальных. Произведем проверку, не является ли он промахом.

Составим вариационный возрастающий ряд из результатов измерений: 24,9; 25,1; 25,1; 25,2; 25,2; 25,6 м. Для крайнего члена этого ряда 25,6 мм расчетный критерий Диксона равен

$$K_{\text{Д}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1} = \frac{25,6 - 25,2}{25,6 - 24,9} = 0,57.$$

Как следует из табл. 1.7, по этому критерию результат 25,6 мм может быть отброшен как промах при уровне значимости $q = 0,05$.

Задание 1.2

Определить наличие грубых погрешностей в результатах измерений, используя данные табл. 1.8.

Таблица 1.8

Исходные данные

Номер п/п	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
1	484	485	484	485	483	492	485	484	485	482	481	484	494	485	484	483
2	15,1	15,2	15,5	15,4	15,5	15,6	15,3	15,4	15,4	15,5	15,3	15,5	15,4	15,6	16,2	15,4
3	5,8	6,1	5,7	5,6	5,4	5,6	5,5	5,4	5,6	5,5	5,3	5,1	5,6	5,4	5,5	5,4
4	1,6	1,5	1,7	1,5	1,4	1,6	1,5	1,8	2,2	1,5	1,6	1,7	1,4	1,5	1,4	1,5
5	6,6	6,5	6,5	6,8	6,9	6,4	6,5	6,6	6,5	6,7	6,5	7,3	6,4	6,5	6,5	6,6
6	10,3	10,1	10,2	10,1	10,3	10,2	10,9	11,2	10,4	10,3	10,4	10,3	10,2	10,1	10,3	10,2
7	15,5	15,3	15,3	15,4	15,3	15,2	15,6	15,4	15,3	15,2	15,8	15,4	16,2	15,5	15,3	15,4
8	11,8	11,7	11,8	11,9	11,6	11,5	11,8	11,7	11,8	11,6	11,9	11,7	11,5	10,6	11,6	11,9
9	5,6	5,5	5,8	5,3	5,5	5,6	5,4	5,9	5,5	5,6	5,7	5,4	5,5	5,7	6,3	5,4
10	4,8	4,6	4,7	4,8	4,6	4,8	4,9	4,6	4,8	4,7	4,8	4,6	4,8	3,9	4,7	4,5
11	2,5	2,7	2,8	2,5	2,3	2,2	2,5	2,3	2,4	2,5	2,6	2,9	3,2	2,6	2,1	2,5
12	4,5	4,3	4,1	4,8	4,6	4,5	4,4	4,6	4,3	4,5	4,3	4,4	4,5	4,7	5,2	4,2
13	12,6	12,8	12,4	12,5	12,5	12,2	12,4	12,6	12,2	12,4	11,5	12,3	12,5	12,7	12,4	12,3
14	9,3	9,4	9,1	9,2	9,5	9,2	9,4	9,3	9,4	9,5	10,6	9,4	9,2	9,5	9,3	9,2
15	5,8	5,9	6,2	5,8	5,6	5,8	5,7	6,1	5,9	5,8	6,9	5,8	5,7	5,8	5,7	5,9
16	4,3	4,4	4,6	4,2	4,3	4,6	4,5	4,3	4,6	4,9	4,3	4,6	4,5	4,7	4,8	4,5
17	3,1	3,4	3,2	3,5	3,1	3,6	3,2	3,3	3,4	3,3	3,2	3,4	3,3	3,5	3,3	3,4
18	10,6	10,2	10,5	10,3	10,4	10,3	10,5	10,3	10,6	10,1	10,5	10,4	10,3	10,5	11,4	10,4

Окончание табл. 1.8

Номер п/п	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	x_{16}
19	4,3	4,4	4,5	4,6	4,2	4,1	4,3	4,5	4,4	4,3	4,6	4,8	4,2	4,7	4,6	5,3
20	6,3	6,8	6,5	6,4	6,7	6,6	6,5	6,4	6,2	6,1	6,4	6,7	6,5	6,4	6,7	7,4
21	2,1	2,2	2,1	2,3	2,1	2,4	2,3	2,6	2,1	2,3	2,4	2,6	2,3	2,7	3,5	2,4
22	7,4	7,3	7,2	7,6	7,4	7,5	7,4	7,6	7,9	7,4	7,2	7,1	7,4	7,5	7,6	7,7
23	4,5	4,3	4,4	4,6	4,7	4,9	4,5	4,3	4,5	4,5	4,6	4,3	5,6	4,6	4,4	4,5
24	11,1	11,3	11,3	11,2	11,5	11,3	11,1	11,3	11,5	11,2	11,6	12,3	11,2	11,3	11,4	11,3
25	10,6	10,7	10,4	10,9	11,8	10,6	10,5	10,6	10,4	10,6	10,4	10,5	10,7	10,4	10,6	10,5
26	54	55	54	55	53	62	55	54	55	52	51	54	54	55	54	53
27	5,1	5,2	5,5	5,4	5,5	5,6	5,3	5,4	5,4	5,5	5,3	5,5	5,4	5,6	6,2	5,4
28	45,8	46,1	45,7	45,6	45,4	45,6	45,5	45,4	45,6	45,5	45,3	45,1	45,6	45,4	45,5	45,4
29	51,6	51,5	51,7	51,5	51,4	51,6	51,5	51,8	52,2	51,5	51,6	51,7	51,4	51,5	51,4	51,5
30	0,3	0,1	0,2	0,1	0,3	0,2	0,9	1,2	0,4	0,3	0,4	0,3	0,2	0,1	0,3	0,2
31	55,5	55,3	55,3	55,4	55,3	55,2	55,6	55,4	55,3	55,2	55,8	55,4	56,2	55,5	55,3	55,4
32	1,8	1,7	1,8	1,9	1,6	1,5	1,8	1,7	1,8	1,6	1,9	1,7	1,5	0,6	1,6	1,9
33	25,6	25,5	25,8	25,3	25,5	25,6	25,4	25,9	25,5	25,6	25,7	25,4	25,5	25,7	26,3	25,4
34	54,8	54,6	54,7	54,8	54,6	54,8	54,9	54,6	54,8	54,7	54,8	54,6	54,8	53,9	54,7	54,5

В соответствии с ГОСТ Р 8.736–2011 используют критерий Граббса.

Статистический критерий Граббса исключения грубых погрешностей основан на предположении о том, что группа результатов измерений принадлежит нормальному распределению. Для этого вычисляют критерии Граббса G_1 и G_2, предполагая, что наибольший $x_{\max}$ или наименьший $x_{\min}$ результат измерений вызван грубыми погрешностями:

$$G_1 = \frac{\left|x_{\max} - \overline{x}\right|}{S}, \qquad G_2 = \frac{\left|\overline{x} - x_{\min}\right|}{S}. \tag{1.8}$$

Сравнивают G_1 и G_2 с теоретическим значением G_T критерия Граббса при выбранном уровне значимости q. Критические значения критерия Граббса приведены в табл. 1.9.

Если $G_1 > G_T$, то $x_{\max}$ исключают как маловероятное значение. Если $G_2 > G_T$, то $x_{\min}$ исключают как маловероятное значение. Далее вновь вычисляют среднее арифметическое и среднее квадратическое отклонения ряда результатов измерений и процедуру проверки наличия грубых погрешностей повторяют.

Если $G_1 \le G_T$, то $x_{\max}$ не считают промахом и его сохраняют в ряду результатов измерений.

Если $G_2 \le G_T$, то $x_{\min}$ не считают промахом и его сохраняют в ряду результатов измерений.

Таблица 1.9

Критические значения G_T для критерия Граббса

n	Одно наибольшее или одно наименьшее значение при уровне значимости	
	свыше 1 %	свыше 5 %
3	1,155	1,155
4	1,496	1,481
5	1,764	1,715
6	1,973	1,887
7	2,139	2,020
8	2,274	2,126
9	2,387	2,215
10	2,482	2,290
11	2,564	2,355

Окончание табл. 1.9

n	Одно наибольшее или одно наименьшее значение при уровне значимости	
	свыше 1 %	свыше 5 %
12	2,636	2,412
13	2,699	2,462
14	2,755	2,507
15	2,806	2,549
16	2,852	2,585
17	2,894	2,620
18	2,932	2,651
19	2,968	2,681
20	3,001	2,709

Задание 1.3

Выполнены два ряда независимых измерений n_1 и n_2 одной и той же величины (табл. 1.10). Какой характер (систематический или случайный) имеет погрешность измерения?

Таблица 1.10

Исходные данные

Результаты измерений									
1 вариант		2 вариант		3 вариант		4 вариант		5 вариант	
n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2
55,990	55,947	55,947	55,948	55,989	55,954	55,986	55,947	55,987	55,947
55,985	55,971	55 945	55,951	55,988	55,950	55,987	55 950	55,988	55 948
55,995	55,962	55,950	55,944	55,987	55,947	55,985	55,955	55,990	55,947
55,945	55,943	55,952	55,948	55,990	55,958	55,989	55,959	55,985	55,950
55,975	55,959	55,949	55,950	55,991	55,949	55,990	55,960	55,985	55,949
55,966	55,964	55,946	55 947	55,985	55,950	55,991	55 962	55,986	55,946
55,989	55,988	55,948	55 955	55,986	55,953	55,984	55 961	55,989	55,950
55,960	–	55,951	–	55,957	–	55,988	–	55,991	–
6 вариант		7 вариант		8 вариант		9 вариант		10 вариант	
n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2
56,992	56,947	56,991	56,943	60,980	60,953	62,982	62,953	50,861	50,760
56,990	56,945	56,990	56,940	60,986	60,947	62,986	62,951	50,863	50,765
56,989	56,948	56,986	56,950	60,983	60,948	62,981	62,950	50,867	50,763
56,988	56,950	56,987	56,941	60,972	60,950	62,986	62,948	50,863	50,762
56,990	56,946	56,988	56,946	60,975	60,952	62,983	62,948	50,868	50,760
56,991	56,948	56,986	56,947	60,986	60,951	62,990	62,950	50,870	50,759
56,987	56,947	56,987	56,950	60,981	60,949	62 989	62,947	50,864	50,762
56,993	–	56,984	–	60,990	–	62,985	–	50,865	–

Окончание табл. 1.10

Результаты измерений									
11 вариант		12 вариант		13 вариант		14 вариант		15 вариант	
n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2
45,632	45,700	49,987	49,850	47,350	47,455	48,632	48,523	46,863	48,763
45,634	45,703	49,984	49,853	47,352	47,458	48,635	48,531	46,862	48,764
45,632	45,701	49,986	49,856	47,356	47,459	48,634	48,536	48,864	48,768
45,635	45,704	49,983	49,851	47,354	47,456	48,632	48,534	48,862	48,764
45,624	45,706	49,982	49,852	47,357	47,452	48,634	48,537	48,861	48,763
45,636	45,700	49,985	49,850	47,358	47,453	48,634	48,539	48,860	48,762
45,634	45,702	49,986	49,854	47,356	47,452	48,636	48,534	48,865	48,765
45,632	–	49,980	–	47,359	–	48,638	–	48,860	–
16 вариант		17 вариант		18 вариант		19 вариант		20 вариант	
n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2
48,963	48,987	53,763	53,689	60,603	60,553	72,232	72,452	55,324	55,231
48,960	48,986	53,765	53 685	60,604	60,558	72,236	72,456	55,326	55,230
48,965	48,983	53,761	53,683	60,600	60,553	72,236	72,458	55,327	55,237
48,967	48,982	53,760	53,687	60,605	60,554	72,234	72,455	55,329	55,238
48,968	48,980	53,767	53,689	60,602	60,552	72,239	72,451	55,324	55,237
48,965	48,985	53,764	53,685	60,600	60,551	72,234	72,450	55,328	55,234
48,964	48,986	53,764	53,683	60,607	60,550	72,235	72,453	55,321	55 230
48,962	–	53,762	–	60,609	–	72,236	–	55,327	–
21 вариант		22 вариант		23 вариант		24 вариант		25 вариант	
n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2
23,234	23,103	56,654	56,648	63,135	63,200	49,987	49,850	55,987	55,947
23,236	23,106	56,658	56,647	63,134	63,203	49,984	49,853	55,988	55,948
23,234	23,110	56,657	56,649	63,138	63,204	49,986	49,856	55,990	55,947
23,237	23,109	56,651	56,642	63,134	63,209	49,983	49,851	55,985	55,950
23,239	23,105	56,653	56,647	63,136	63,207	49,982	49,852	55,985	55,949
23,234	23,106	56,650	56,642	63,139	63,205	49,985	49,850	55,986	55,946
23,237	23,104	56,651	56,640	63,138	63,200	49,986	49,854	55,989	55,950
23,235	–	56,650	–	63,135	–	49,980	–	55,991	–

Задание 1.4

При измерении диаметра вала было выполнено 16 наблюдений (n = 16), результаты которых приведены в табл. 1.11. Необходимо исключить грубые погрешности (промахи) результатов, если таковые имеются.

Таблица 1.11

Исходные данные

Вариант	Результаты измерений							
1	2							
1	27,994	27,993	27,989	27,988	27,994	27,995	27,994	27,993
	27,992	27,996	27,993	27,998	27,769	27,990	27,995	27,990
2	51,990	51,899	51,994	51,990	52,100	51,985	51 ,992	51,991
	51,986	51,991	51,995	51,993	51,990	51,987	51,993	51,986
3	94,973	94,971	94,975	94,978	94,974	94,981	94,968	94,971
	94,970	97,973	94,968	94,980	94,975	94,972	94,984	94,989

Окончание табл. 1.11

1	2							
4	84,948	84,944	84,946	84,719	84,946	84,948	84,942	84,945
	84,941	84,945	84,950	84,945	84,944	84,943	84,948	84,946
5	105,238	105,234	105,231	105,210	105,236	105,239	105,237	105,235
	105,236	105,230	105,232	105,233	105,235	105,440	105,238	105,236
6	15 995	15,992	l5,994	15,955	15,996	15,996	15,996	15,997
	15,998	16,110	15,995	15,995	15,993	15,997	15,995	15,996
7	20,028	20,027	20,010	20,027	20,028	20,029	20,026	20,024
	20,024	20,021	20,022	20,024	20,026	20,023	20,027	20,026
8	44,930	44,935	44,928	45,190	44,933	44,938	44,942	44,940
	44,937	44,940	44,934	44,940	44,931	44,933	44,945	44,920
9	125,040	125,038	125,041	125,037	125,172	125,039	125,042	125,041
	125,042	125,043	125,044	125,039	125,038	125,037	l25,039	125,042
10	18,001	17,998	18,015	17,893	17,998	18,000	17,999	17,990
	18,000	18,025	17,997	18,000	18,001	18,001	17,998	17,998
11	22,008	22,011	22,007	22,125	22,006	22,007	22,010	22,008
	22,010	22,009	22,008	22,007	22,008	22,010	22,009	22,006
12	55,55	55,55	55,56	55,56	55,50	55,54	55,56	55,57
	55,54	55,53	55,52	55,41	55,55	55,54	55,53	55,59
13	64,706	64,075	64,078	64,075	64,076	64,010	64,077	64,073
	64,710	64,074	64,080	64,076	64,074	64,073	64,076	64,072
14	49,990	49,980	49,985	49,979	49,983	49,979	49,985	49,983
	49,981	49,977	49,982	49,752	49,991	49,986	49,987	49,986
15	64,990	64,990	94,988	64,771	64,991	64,992	64,993	64,988
	64,992	64,991	64,989	64,987	64,990	64,989	64,990	64,986

Контрольные вопросы

1. Что такое погрешность?
2. Назовите основные виды погрешностей.
3. Назовите составляющие систематической погрешности.
4. Какие погрешности называются грубыми и в чем опасность их присутствия в выборке?
5. Назовите известные вам критерии выявления грубых погрешностей.
6. Дайте характеристику критерия 3σ.
7. Какова последовательность операций при статистической обработке группы результатов прямых многократных независимых измерений?
8. Какое количество опытов необходимо и достаточно для получения результата с заданной точностью?

Практическое занятие № 2.
Обработка результатов однократных прямых равноточных измерений

Цель занятия

Ознакомление с методами представления результатов однократных измерений. Приобретение практических навыков обработки результатов однократных прямых равноточных измерений.

Теоретические сведения

Основные понятия. Виды измерений

По числу выполненных наблюдений или снятых показаний средств измерений все измерения делят на **однократные** и **многократные**.

Однократные измерения – это измерения, выполненные один раз.

Многократные измерения – это измерения одного и того же размера физической величины, результат которых получен из нескольких следующих друг за другом измерений, т.е. состоящие из ряда однократных измерений ($n > 3$ – многократное измерение).

В зависимости от способа получения результата измерений или числового значения измеряемой величины все измерения делятся на **прямые**, **косвенные**, **совокупные** и **совместные**.

Прямые измерения – измерения, при которых искомое значение величины находят непосредственно по показаниям средства измерения.

Косвенные измерения – измерения, в которых значение величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и другими величинами, подвергаемыми прямым измерениям.

Совокупные измерения – измерения, в которых значения измеряемых величин находят решением системы уравнений, составленной по данным повторных измерений нескольких одноименных величин при различных сочетаниях этих величин [14].

Совместные измерения – производимые одновременно измерения двух или нескольких разноименных величин для установления функциональной зависимости между ними.

По характеру зависимости измеряемой величины от времени все измерения разделяют на **статические** и **динамические**.

Статические измерения – измерения, при которых измеряемая величина принимается за неизменную, по крайней мере, на время, необходимое для измерений.

Динамические измерения – измерения изменяющейся по размеру физической величины.

По особенностям обработки результатов все измерения делятся на **равноточные** и **неравноточные**.

Равноточные измерения – это ряд измерений физической величины, выполненных одинаковыми по точности средствами измерений и в одних и тех же условиях.

Неравноточные измерения – это ряд измерений физической величины, выполненных различающимися по точности средствами измерений и/или в разных условиях [14].

Прямые многократные измерения в большей мере относятся к лабораторным измерениям. Для производственных процессов более характерны однократные измерения. **Однократные прямые измерения** проводятся, если при измерении (испытании) происходит разрушение объекта измерения, отсутствует возможность повторных измерений, имеет место экономическая целесообразность.

Необходимым условием проведения однократного измерения служит наличие априорной информации. К ней относится информация о виде закона распределения вероятности показания; мера его рассеивания, полученная из опыта предшествующих измерений; класс точности средства измерения и т.д.

Инструментальная составляющая погрешности возникает из-за собственной погрешности СИ, определяемой классом точности, влиянием СИ на результат и ограниченной разрешающей способностью СИ [14].

Методика определения погрешности прибора приводится в его паспорте. Для характеристики большинства приборов часто используют понятие ***приведенной погрешности***, равной абсолютной погрешности в процентах диапазона шкалы измерений.

По приведенной погрешности приборы разделяются на классы точности. **Класс точности** указан на панели прибора и может принимать следующий ряд значений: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5 – *прецизионные*; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0 – *технические приборы*.

Наибольшая абсолютная инструментальная погрешность:

$$\Delta_a = \frac{K \cdot A}{100}, \qquad (2.1)$$

где K – класс точности; A – наибольшее значение шкалы прибора.

Из формулы (2.1) следует, что относительная погрешность будет минимальной, если измеряемая величина дает отброс стрелки индикатора на всю шкалу. В связи с этим для оптимального использования прибора его предел выбирают так, чтобы значение измеряемой величины попадало в конец шкалы.

Классификация измерений приведена на рис. 2.1.

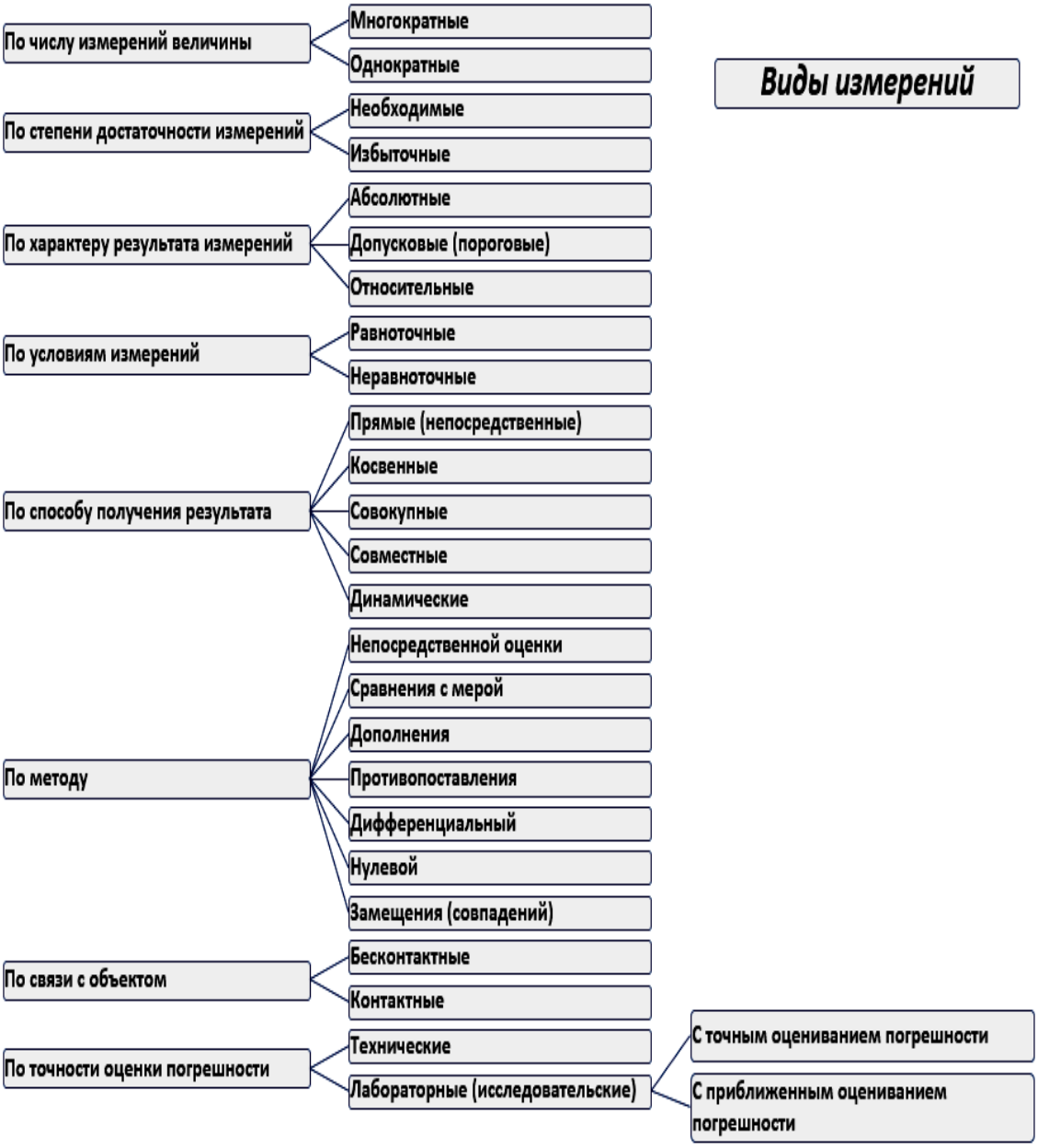


Рис. 2.1. Виды измерений

Инструментальная погрешность приборов для измерения линейных размеров указана на самом приборе в виде абсолютной погрешности или в виде цены деления. Если на приборе не указаны ни класс точности, ни абсолютная погрешность, то она принимается равной половине цены наименьшего деления.

Для приборов с цифровым отсчетом измеряемых величин метод вычисления погрешности приводится в паспортных данных прибора. Если эти данные отсутствуют, то в качестве абсолютной погрешности принимается значение, равное половине последнего цифрового разряда индикатора.

Инструментальную погрешность невозможно уменьшить статистической обработкой отсчетов.

Примеры считывания со шкал различных приборов показаны на рис. 2.2–2.6.

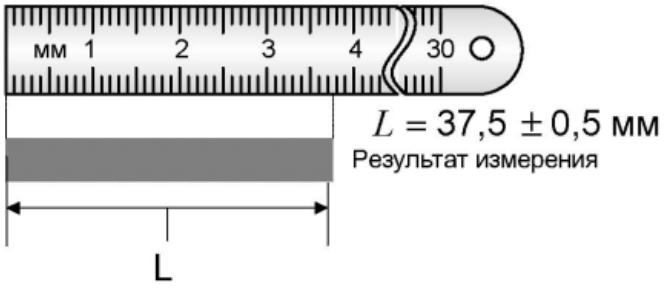


Рис. 2.2. Измерительная линейка

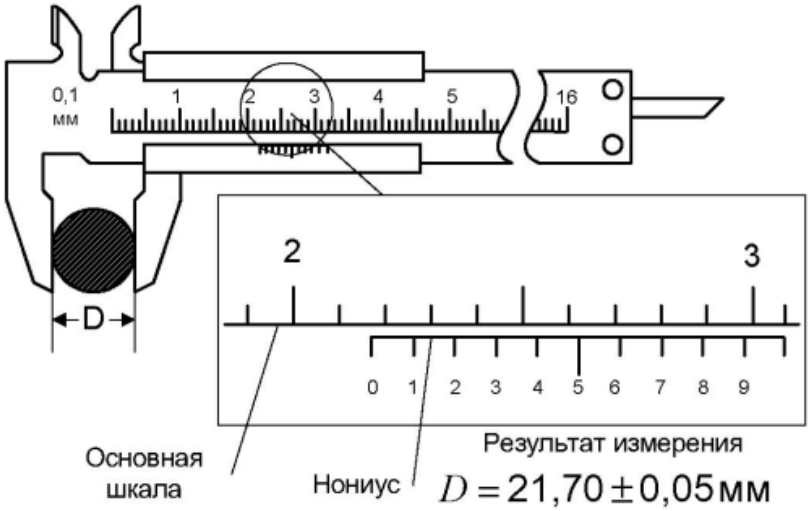


Рис. 2.3. Штангенциркуль

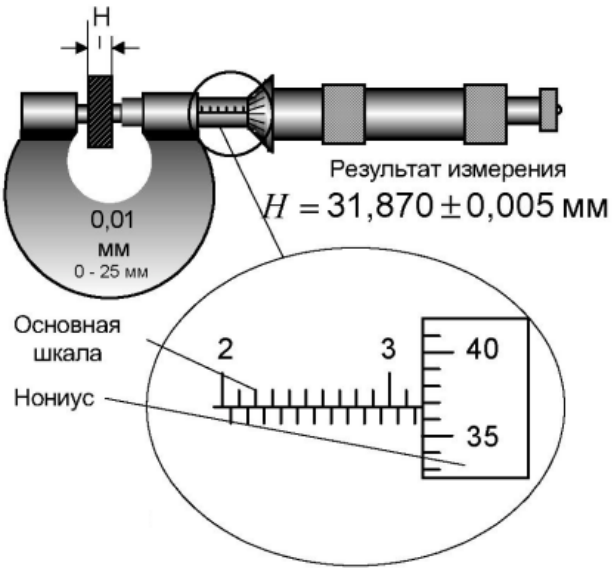
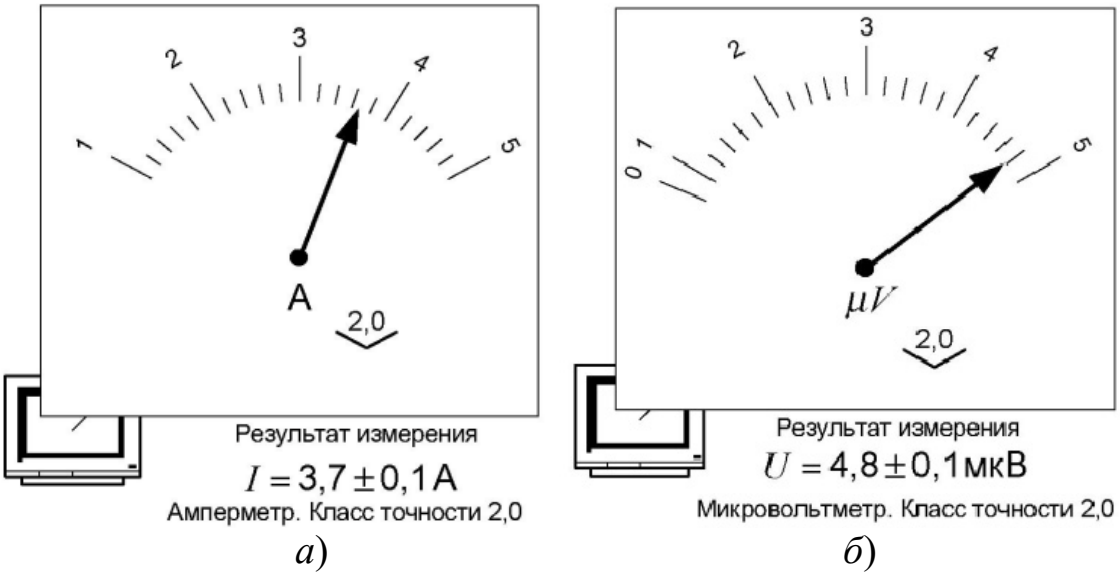


Рис. 2.4. Микрометр



а) *б*)

Рис. 2.5. Амперметр (*а*) и вольтметр (*б*)

Рис. 2.6. Цифровой омметр

Методика – это технология выполнения измерений с целью наилучшей реализации метода.

Прямые измерения – основа более сложных измерений, поэтому целесообразно рассмотреть методы прямых измерений. В соответствии с РМГ 29-99 различают следующие методы:

1. *Метод непосредственной оценки*, при котором значение величины определяют непосредственно по отсчетному устройству измерительного прибора; например, измерение давления – пружинным манометром, массы – весами, силы электрического тока – амперметром.

2. *Метод сравнения с мерой*, где измеряемую величину сравнивают с величиной, воспроизводимой мерой. Например, измерение массы на рычажных весах с уравновешиванием гирей; измерение напряжения постоянного тока на компенсаторе сравнением с ЭДС параллельного элемента.

3. *Метод дополнения*, если значение измеряемой величины дополняется мерой этой же величины с таким расчетом, чтобы на прибор сравнения воздействовала их сумма, равная заранее заданному значению.

4. *Дифференциальный метод* характеризуется измерением разности между измеряемой величиной и известной величиной, воспроизводимой мерой. Метод позволяет получить результат высокой точности при использовании относительно грубых средств измерения.

5. *Нулевой метод* аналогичен дифференциальному, но разность между измеряемой величиной и мерой сводится к нулю. При этом нулевой метод имеет то преимущество, что мера может быть во много раз меньше измеряемой величины.

За результат прямого однократного измерения принимается полученная величина. До измерения должна быть проведена априорная оценка составляющих погрешности с использованием всех доступных данных.

Поскольку измерения выполняются без повторных наблюдений, то нельзя отделить случайную от систематической составляющей, поэтому для оценки погрешности дают лишь ее границы с учетом возможных влияющих величин. Последние лишь оцениваются своими границами, но не измеряются.

Данная методика обработки результатов прямых однократных измерений применима при выполнении следующих условий: составляющие погрешности известны, случайные составляющие распределены по нормальному закону, а неисключенные систематические, заданные своими границами θ_i, – равномерно.

Составляющими погрешности прямых однократных измерений являются:

– погрешности СИ, рассчитываемые по их метрологическим характеристикам;

– погрешность используемого метода измерений, определяемая на основе анализа в каждом конкретном случае;

– личная погрешность, вносимая конкретным оператором.

Если последние две составляющие не превышают 15 % погрешности СИ, то за погрешность результата однократного измерения принимают погрешность используемого СИ.

Названые составляющие могут состоять из неисключенных систематических и случайных погрешностей [15].

Способы оценивания погрешностей

Прямые однократные измерения с точным оцениванием погрешностей

При наличии нескольких систематических погрешностей, заданных своими границами либо доверительными границами, доверительная

граница *неисключенной систематической погрешности* результата измерения определяется по формуле

$$\theta(P) = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\theta_i^2} \text{ или } \theta(P) = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\frac{\theta_i^2(P_j)}{k_j^2}},$$

где θ_i – граница *i*-й систематической погрешности; $\theta_i(P_i)$ – доверительная граница *i*-й неисключенной систематической погрешности; k_j – коэффициент, зависящий от P_j.

При $P = 0{,}90$ $k = 0{,}95$ и при $P = 0{,}95$ $k = 1{,}10$. При других доверительных вероятностях он определяется в соответствии с ГОСТ Р 8.736-2011 [3].

Случайная составляющая погрешности результата измерения может выражаться через СКО или доверительными границами.

Если случайная составляющая погрешности результата измерения выражается через СКО, то доверительная граница погрешности вычисляется по формуле

$$\varepsilon(P) = z_p\sigma_x = z_p\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\sigma_{x_i}^2},$$

где z_p – точка нормированной функции Лапласа, отвечающей вероятности *P*. При $P = 0{,}95$ $z_p = 2$.

Если СКО σ_{x_i} определены экспериментально при $n < 30$, то вместо коэффициента z_p следует использовать коэффициент Стьюдента, соответствующий числу степеней свободы *i*-й составляющей.

Если случайная составляющая погрешности результата измерения выражается доверительными границами $\pm\varepsilon_i(P)$, то доверительная граница случайной погрешности результатов прямых однократных измерений вычисляется по формуле

$$\varepsilon(P) = z_p\sigma_x = z_p\sqrt{\sum_{i=1}^{k}\frac{\varepsilon^2(P_i)}{z_{p_i}^2}}.$$

Найденные значения $\theta(P)$ и $\varepsilon(P)$ используются для оценки погрешности результата прямых однократных измерений. В зависимости от соотношения θ и σ_x суммарная погрешность определяется по одной из формул, приведенных в табл. 2.1. Значения коэффициента k_p приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.1

Формулы для расчета погрешности результата прямых однократных измерений $\Delta(P)$

Значение θ/σ_x	Погрешность результата изменения $\Delta(P)$
$\theta/\sigma_x < 8$	$\varepsilon(P)$
$0{,}8 \le \theta/\sigma_x \le 8$	$k_P\left[\varepsilon(P)+\theta(P)\right]$
$\theta/\sigma_x > 8$	$\theta(P)$

Таблица 2.2

Значение k_p в зависимости от отношения θ/S_x при доверительной вероятности 0,95

θ/σ_x	0,8	1	2	3	4	5	6	7	8
$k_{0,95}$	0,78	0,74	0,71	0,73	0,76	0,78	0,79	0,80	0,81

Результат прямых однократных измерений должен записываться в виде $x \pm \Delta(P)$ при доверительной вероятности $P = P_д$ [15].

Прямые однократные измерения с приближенным оцениванием погрешностей

Погрешность оценивается на основе метрологических характеристик, приведенных в нормативно-технической документации на используемые средства измерений.

Прямые однократные измерения с приближенным оцениванием погрешностей применяются, если доказана возможность пренебрежения случайной погрешностью измерения, т.е. можно обоснованно считать, что СКО σ_x случайной составляющей меньше 1/8 суммарной границы неисключенных систематических составляющих погрешности результата измерения.

В простейшем случае, когда влияющие величины соответствуют нормальным условиям $\Delta = \pm\Delta_{си}$, доверительная вероятность не указывается, но, как правило, подразумевается, что она равна 0,95. При проведении измерений в условиях, отличных от нормальных, необходимо определять и учитывать пределы дополнительных погрешностей [13].

Однократные измерения достаточны, если неисключенная систематическая погрешность (например, класс точности СИ) заведомо больше случайной. Практически это достигается при $\overset{o}{\Delta} = (0{,}5...5{,}25)\Delta_c$. Тогда результат измерения записывают в виде $\overline{x} = x_i + \Delta_\Sigma$ при вероятности $P = 0{,}95$,

где x_i – результат, зафиксированный СИ; $\Delta_\Sigma = \sqrt{\Delta_{\text{СИ}}^2 + \Delta_{\text{мет}}^2}$ – суммарная погрешность измерения, определяемая классом точности СИ ($\Delta_{\text{СИ}}$) и методической погрешностью ($\Delta_{\text{мет}}$).

Пример обработки результатов однократных измерений

Задача

В процессе однократного измерения емкости конденсатора получено значение $C = 1,24$ пФ. Предварительно экспериментально оценены среднеквадратическое отклонение результата измерения емкости σ_c = 0,037 пФ и границы неисключенных остатков двух составляющих систематической погрешности ΔC_1 = 0,012 пФ и ΔC_2 = 0,016 пФ. Определить доверительные границы результата с доверительной вероятностью $P_{\text{д}}$ = 0,95.

Решение

1. Определим доверительные границы случайной погрешности измерения:

$$\varepsilon(P) = \overset{\text{o}}{\Delta} C = t \cdot \sigma_c = 2 \cdot 0,037 = 0,074 \text{ пФ},$$

где t – коэффициент Стьюдента (при $P_{\text{д}}$ = 0,95 t = 2).

2. Определим доверительные неисключенные систематические погрешности:

$$\theta(P) = \Delta C = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m} \Delta C_i^2} = 1,1\sqrt{\Delta C_1^2 + \Delta C_2^2} =$$

$$= 1,1\sqrt{0,012^2 + 0,016^2} = 0,022 \text{ пФ}.$$

Для доверительной вероятности $P_{\text{д}}$ = 0,95 коэффициент пренебрежимо мало зависит от числа составляющих m = 2 и их соотношения, поэтому при указанной доверительной вероятности коэффициент принимают равным k = 1,1.

3. Рассчитаем коэффициент точности для оценки доверительных границ погрешности прямых однократных измерений:

$$\mu = \frac{\theta}{\sigma_x} = \frac{\Delta C}{\sigma_c} = \frac{0,022}{0,037} = 0,59.$$

4. Значение μ = 0,59 < 0,8, тогда погрешность результата измерения определяется случайной составляющей (см. табл. 2.1), т.е.

$$\Delta C_{\text{изм}} = \varepsilon(P) = 0,074 \text{ пФ}.$$

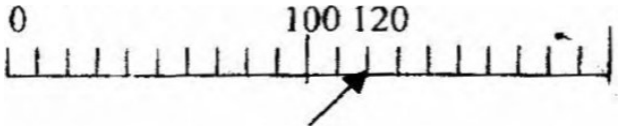
Результат измерения имеет вид

$$C = (1,24 \pm 0,074)\,\text{пФ} \text{ при } P_д = 0,95.$$

5. Полученное значение надо сравнить с допускаемой погрешностью измерений в зависимости от допусков *IT*, которая приведена в ГОСТ 8.051–81 или ГОСТ 8.549–86 [2, 3].

Задачи для самостоятельного решения

Задача 2.1. Указатель отсчетного устройства вольтметра класса точности 0,5, шкала которого приведена ниже, показывает 120 В. Представить результат однократного измерения (шкала равномерная).



Задача 2.2. Указатель отсчетного устройства омметра класса точности 0,5 с равномерной шкалой показывает 100 Ом. Чему равно измеряемое сопротивление?

Задача 2.3. Указатель отсчетного устройства цифрового ампервольтметра пределом измерения 50 А, класса точности 0,02/0,01 показывает 30 А. Чему равна измеряемая сила тока?

Задача 2.4. На основании предварительных измерений напряжения известно среднеквадратическое отклонение результата измерения σ_u = 0,54 В; граница неисключенных остатков четырех составляющих систематической погрешности ΔU_1= 0,59 В; ΔU_2= 0,84 В; ΔU_3 = 0,24 В; ΔU_4 = 0,65 В. Определить доверительные границы погрешности напряжения U = 85,5 В с однократным наблюдением при доверительной вероятности $P_д$ = 0,95.

Контрольные вопросы

1. Какие измерения называются однократными?
2. В каких случаях проводятся однократные измерения?
3. Охарактеризуйте способы обработки результатов однократных измерений.
4. Каков алгоритм обработки прямых многократных измерений?

Практическое занятие № 3. Обработка результатов однократных косвенных измерений

Цель занятия

Ознакомление с методами представления результатов косвенных измерений. Приобретение практических навыков обработки результатов косвенных измерений.

Теоретические сведения

При косвенных измерениях значение искомой величины находят на основании известной зависимости, связывающей ее с другими величинами, полученными прямыми измерениями, т.е. существует функциональная зависимость $Y = f(x_1, x_2,..., x_n)$, где $x_1, x_2,..., x_n$ – аргументы, полученные с помощью прямого измерения.

Погрешность величины Y зависит от погрешностей, с которыми были определены значения величин $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Рассматривая Y как функцию n переменных, запишем ее полный дифференциал

$$dY = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

Каждая величина x_i измерена с некоторой погрешностью Δx_i. Полагая, что погрешности Δx_i малы, можем заменить dx_i на Δx_i, и тогда

$$dY = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

Аргументы могут быть взаимозависимыми и взаимонезависимыми [9].

Аргументы взаимонезависимы

Абсолютная погрешность вычисляется по формуле

$$\Delta Y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \Delta x_1^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \Delta x_2^2 + ... + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \Delta x_n^2}.$$

Относительная погрешность:

$$\delta = \frac{\Delta Y}{Y} = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_1}\right)^2 \Delta x_1^2 + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_2}\right)^2 \Delta x_2^2 + ... + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial x_n}\right)^2 \Delta x_n^2}.$$

СКО функции определяется по формуле

$$\sigma_Y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2 \sigma_{x_n}^2},$$

где $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ – абсолютный коэффициент влияния; $\frac{\partial \ln f}{\partial x_i}$ – относительный коэффициент влияния.

Аргументы взаимозависимы

В случае взаимной зависимости аргументов находят парные коэффициенты корреляции:

$$r_{x_i x_k} = \frac{\sum (x_i - \overline{x}_i)(x_k - \overline{x}_k)}{\sigma_{x_i} \sigma_{x_k}}.$$

Значения $r_{x_i x_k}$ лежат в пределах $-1 < r_{x_i x_k} < +1$.

При $r = 0$ величины взаимонезависимы, но необходимо проверить значимость этой величины с помощью *t*-критерия: $t = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}$, если $3t \le r$, то взаимосвязь надо учитывать. Если $r_{x_i x_k} < 0{,}20 \ \ldots \ 0{,}25$, то корреляционную связь можно считать несуществующей.

Корреляция между аргументами чаще всего возникает в тех случаях, когда их измерения проводятся одновременно и подвергаются одинаковому влиянию внешних условий (температуры, влажности, напряжения питающей сети, помех и т.п.) [10].

При наличии взаимосвязи между x_i и x_j среднеквадратичное отклонение результата косвенного измерения вычисляется по формуле

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \sigma_{x_i}^2 + 2 \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} r_{x_i x_k} \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}}.$$

Пример обработки результатов косвенных измерений

Задача

Мощность постоянного тока *W* измерялась косвенным методом, путем многократных измерений напряжения *U* и силы тока *I* с учетом зависимости $W = U \cdot I$. Ток *I* и напряжение *U* подвергались прямым измерениям ($n = 15$). В процессе обработки результатов прямых измерений определены средние арифметические значения $\overline{U} = 36$ В и $\overline{I} = 2{,}81$ мА; средние квадратические отклонения $\sigma_U = 0{,}42$ В

и σ_I = 0,03 мА; коэффициент корреляции между погрешностями измерений напряжения и тока r_{iu} = 0,75.

Определить случайную погрешность результата косвенного измерения с доверительной вероятностью P = 0,95 и записать результат по установленной форме.

Решение

1. Определим результат косвенного измерения мощности:

$$\bar{W} = \bar{U} \cdot \bar{I} = 36 \cdot 2{,}81 = 101{,}16 \text{ мВт}.$$

2. Рассчитаем случайные погрешности косвенного измерения:

$$E_I = \frac{\partial W}{\partial I}\sigma_I = \bar{U} \cdot \sigma_I = 36 \cdot 0{,}03 = 1{,}08 \text{ мВт};$$

$$E_U = \frac{\partial W}{\partial U}\sigma_I = \bar{I} \cdot \sigma_U = 2{,}81 \cdot 0{,}42 = 1{,}18 \text{ мВт}.$$

3. Оценим квадратическое отклонение результата косвенного измерения мощности:

$$\sigma_W = \sqrt{E_U^2 + E_U^2 + 2E_U E_I r_{iu}} = \sqrt{1{,}18^2 + 1{,}08^2 + 2 \cdot 1{,}18 \cdot 1{,}08 \cdot 0{,}75} =$$

$$= 2{,}027 \text{ мВт}.$$

4. Определим значение коэффициента Стьюдента t для заданной доверительной вероятности P = 0,95 и числа наблюдений n = 15; t = 2,128.

5. Рассчитаем доверительную границу случайной погрешности результата косвенного измерения мощности:

$$\Delta W = t\sigma_W = 2{,}128 \cdot 2{,}027 = 4{,}313 \text{ мВт}.$$

6. Запишем результат измерения в виде

$$W = \bar{W} \pm \Delta W = (101{,}16 \pm 4{,}31) \text{ мВт}.$$

7. Проанализируем полученный результат с использованием критерия ничтожных погрешностей. В соответствии с этим критерием, если частная погрешность меньше 1/3 суммарной погрешности, то она является «ничтожной» и может быть исключена из рассмотрения.

Для решаемой задачи $\frac{\sigma_W}{3} = \frac{2{,}027}{3} = 0{,}676$; $E_U > 0{,}676$; $E_I > 0{,}676$.

Следовательно, E_U и E_I не являются ничтожными и для повышения точности измерения W необходимо увеличить точность измерения как U, так и I.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3.1. Определить момент инерции круглой платформы, связанный формулой $I = \frac{gRr}{4\pi^2 l} mT^2$ со следующими величинами, измеряемыми прямыми способами:

$R = (15{,}60 \pm 0{,}05)\cdot 10^{-2}$ м – радиус платформы;

$r = (11{,}10 \pm 0{,}05)\ 10^{-2}$ м – радиус верхнего диска подвеса;

$l = (235{,}0 \pm 0{,}2)\cdot 10^{-2}$ м – длина нитей подвеса;

$m = (125{,}4 \pm 0{,}1)\cdot 10^{-3}$ кг – масса платформы;

$T = (2{,}80 \pm 0{,}01)$ с – период малых колебаний платформы;

$g = 9{,}81$ мс$^{-2}$ – ускорение свободного падения.

Результаты приведены со средними квадратичными отклонениями.

Задача 3.2. Мощность постоянного тока W измерялась косвенным методом, путем измерений напряжения U и силы тока I (n = 10) с учетом зависимости $W = U{\cdot}I$. Результаты прямых измерений приведены в табл. 3.1. Средние квадратические отклонения σ_U = 0,38 В и σ_I = 0,028 мА. Коэффициент корреляции между погрешностями измерений напряжения и тока r_{iu} = 0,8.

Таблица 3.1

Результаты измерений

Параметр	Число измерений									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Напряжение, В	36,13	36,15	36,10	36,15	36,20	36,12	36,15	36,10	36,17	36,19
Ток, мА	2,81	2,84	2,86	2,88	2,82	2,85	2,89	2,87	2,84	2,87

Определить случайную погрешность результата косвенного измерения с доверительной вероятностью P = 0,99 и записать результат по установленной форме.

Задача 3.3. Сопротивление резистора R_x определялось путем многократных измерений падения напряжения на нем U_x и U_0 на последовательно соединенном с ним образцовом резисторе R_0 = 10 кОм. При обработке результатов прямых измерений U_x и U_0 получены средние арифметические значения U_x = 36,5 В и $\bar{U}_0$ = 2,5 В; средние квадратические отклонения σ_{U_x} = 0,2 В и σ_{U_0} = 0,04 В. Число

прямых измерений $n = 40$. Расчетная зависимость определяется формулой

$$\overline{R}_x = R_0 \frac{\overline{U}_x}{\overline{U}_0}.$$

Определить случайную погрешность результата косвенного сопротивления R_x с вероятностью $P = 0{,}99$ и записать результат измерения по установленной форме.

Контрольные вопросы

1. Какие измерения называются косвенными?
2. Дайте характеристику принципа обработки результатов косвенных измерений.
3. Как определяется абсолютная погрешность при взаимонезависимости аргументов?
4. Как определяется среднее квадратическое отклонение при взаимозависимости аргументов?
5. В каких случаях чаще всего возникает корреляция между аргументами?

Практическое занятие № 4. Обработка результатов многократных прямых равноточных измерений

Цель занятия

Ознакомление с основными видами измерений. Приобретение практических навыков обработки результатов многократных прямых равноточных измерений.

Теоретические сведения

Результаты измерений и их погрешности наиболее часто являются случайными величинами. Зависимость между числовыми значениями случайной величины и вероятностью их появления устанавливается законом распределения вероятностей случайных величин.

В качестве закона распределения случайной погрешности размера при установившихся процессах изготовления деталей часто встречается закон нормального распределения, характеризующийся кривой, расположенной симметрично относительно центра группирования (рис. 4.1). Уравнение кривой нормального распределения (кривой Гаусса) имеет вид

$$y = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2\sigma_x^2}},$$

где y – плотность распределения вероятностей; x – случайная величина; σ_x – СКО.

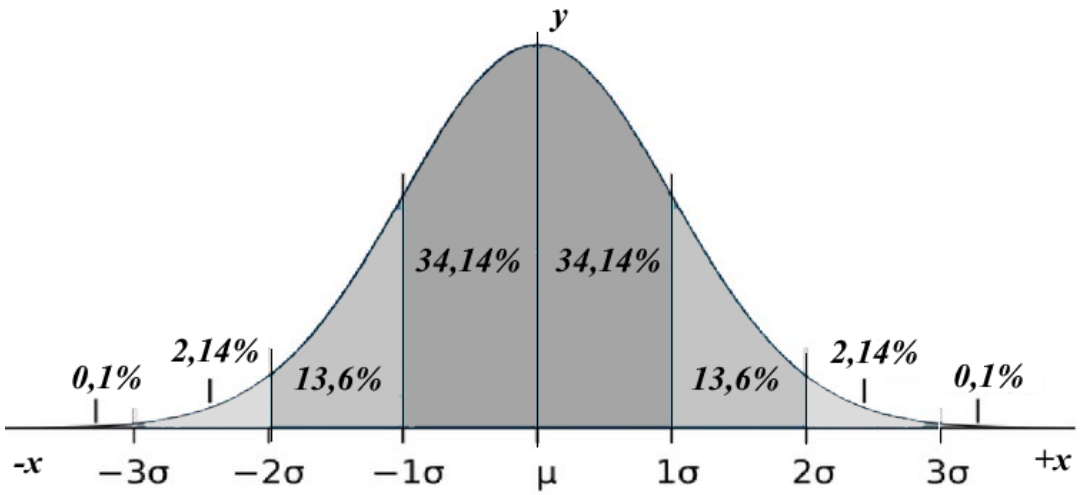


Рис. 4.1. Кривая нормального распределения

Основная масса изделий получается с размерами, лежащими в зоне $\pm\sigma$ относительно центра группирования. В табл. 4.1 представлены вероятности получения случайных величин в различных диапазонах.

Таблица 4.1

Вероятности получения случайных величин в различных диапазонах

$t\sigma$	$\pm1\sigma$	$\pm2\sigma$	$\pm3\sigma$	$\pm4\sigma$
P	0,68	0,95	0,9973	0,999

Параметры $\bar{x}$, σ, σ^2, определенные по данным выборки, называются выборочными (опытными) данными и дают лишь приближенную характеристику теоретического распределения.

При достаточно большом числе измерений σ^2 называется генеральной дисперсией. При малом числе измерений (менее 10–20) получают выборочную дисперсию $\bar{\sigma}^2$ ($\bar{\sigma}^2 \to \sigma^2$ только при $n \to \infty$). С уменьшением n надежность оценки $\bar{\sigma}^2 = \sigma^2$ уменьшается, а значение доверительной вероятности P завышается.

В связи с этим при ограниченном числе измерений n вводят поправочный коэффициент (коэффициент Стьюдента t_p), который определяется по табл. 4.2 в зависимости от числа измерений и принятой доверительной вероятности P.

Таблица 4.2

Значения коэффициентов Стьюдента

$n-1$	$P_д = 0,95$	$P_д = 0,99$
3	3,182	5,841
4	2,776	4,604
5	2,571	4,032
6	2,447	3,707
7	2,365	2,998
8	2.306	3,355
9	2,262	3,250
10	2,228	3.169
12	2,179	3,055
14	2,145	2,977
16	2,120	2,921
18	2,101	2,878
20	2,086	2,845

Окончание табл. 4.2

$n-1$	$P_д = 0{,}95$	$P_д = 0{,}99$
22	2,074	2,819
24	2,064	2,797
26	2,056	2,779
28	2,048	2.763
30	2,042	2,750
∞	1.960	2.576

Тогда результаты измерений представляются в виде

$$Q = \overline{x} \pm t_p \sigma_{\overline{x}},$$

где t_p – коэффициент Стьюдента для вероятности P; $\sigma_{\overline{x}}$ – опытное СКО результатов измерений; $\overline{x}$ – среднее значение случайной величины; $\Delta = \pm t_p \sigma_{\overline{x}}$ – границы доверительного интервала случайной погрешности.

Доверительный интервал результата измерений представляют в виде

$$\overline{x} - t_p \sigma_{\overline{x}} < Q < \overline{x} + t_p \sigma_{\overline{x}}.$$

Для наглядного осмысления информации о рассеянии (статистических данных) часто строят гистограмму распределения [15].

Гистограмма – инструмент представления данных, сгруппированных по частоте попадания в определенный (заранее заданный) интервал.

Это столбиковая диаграмма, служащая для графического представления имеющейся количественной информации.

Для построения гистограммы систематизируются данные, собранные за определенный период. Число данных должно быть не менее 30–50, оптимальное число порядка 100.

Порядок построения гистограммы:

1. Определяют наибольшее d_{max} и наименьшее d_{min} значения данных и вычисляют значение размаха $R = d_{max} - d_{min}$.

2. Определяют число интервалов k. Рекомендуется принимать $k = 8...15$.

3. Для определения ширины интервалов h значение размаха делят на число интервалов $h = R / k$.

4. Определяют значения границ интервалов. Определяют границы интервалов. Нижняя граница первого интервала равна d_{min}, а верхняя граница равна $d_{min} + h$; нижняя граница второго интервала – $d_{min} + h$ и т.д.

5. Определяют число значений, попадающих в каждый интервал (частоту).

6. Определяют центральные значения по формуле

$$\frac{\text{нижн.гран.условие} + \text{верхн.гран.условие}}{2}.$$

7. Строят график гистограммы. По оси абсцисс откладывают значения параметров, по оси ординат – частоту. Для каждого участка строят прямоугольник (столбик) с основанием, равным ширине интервала участка, высота его соответствует частоте показания данных в этом интервале.

8. Отмечают точками середины столбцов. Если два столбца имеют одинаковую высоту, то середину отмечают между столбцами. Полученные точки соединяют прямыми линиями. Полученная линия называется полигоном. Он более наглядно, чем гистограмма, отражает форму кривой распределения.

Если провести верхние и нижние предельные значения нормы, то легко можно понять вид распределения гистограммы и соотношение значений контрольных нормативов.

Пример построения гистограммы и представления результатов многократных прямых равноточных измерений в стандартном виде

Даны результаты измерений вала диаметром $Ø20_{-0,08}$ (табл. 4.3). Построить гистограмму, определить результат измерения, оценить его точность и определить границы доверительного интервала с вероятностью $P = 0,95$.

Таблица 4.3

Результаты измерений

19,945	19,935	19,970	19,965	19,980
20,000	20,015	19,980	19,985	19,925
19,950	19,960	19,970	19,965	19,955
19,915	19,990	19,975	19,935	19,975
19,950	19,955	19,965	19,955	19,960

Решение

Построим гистограмму.

1. Из табл. 4.3 видно, что $d_{max} = 20,015$ и $d_{min} = 19,915$. Возьмем число интервалов $k = 10$.

2. Определяем ширину интервалов $h = (20,015 – 19,915) / 10 = 0,01$ мм.

3. Определим границы интервалов (19,915; 19,915 + 0,01) и т.д., результаты занесем в табл. 4.4.

4. Вычисляем частоту попадания измерений в каждый из интервалов.

5. Вычисляем середины интервалов и заносим в табл. 4.4.

6. По полученным данным строим гистограмму (рис. 4.2).

Таблица 4.4

Результаты вычислений

№	Интервал действительных размеров	Частота *n* попаданий данных	Среднее значение
1	(19,915;19,925]	1	19,920
2	(19,925;19,935]	1	19,930
3	(19,935;19,945]	2	19,940
4	(19,945;19,955]	3	19,950
5	(19,955;19,965]	5	19,960
6	(19,965;19,975]	5	19,970
7	(19,975;19,985]	4	19,980
8	(19,985;19,995]	2	19,990
9	(19,995;20,005]	1	20,000
10	(20,005;20,015]	1	20,010

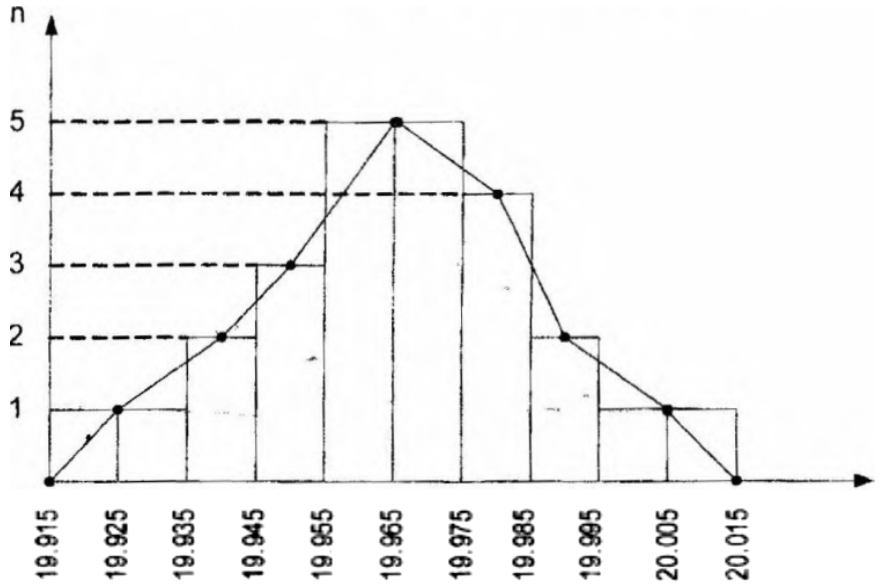


Рис. 4.2. Гистограмма распределения

По условию задачи $Ø20_{-0,08}$. Следовательно, размеры детали должны находиться в промежутке Ø19,920 – Ø20,000. В нашем случае не все детали попадают в данный интервал, т.е. не все детали являются годными, а именно деталь размером 20,015.

Представим результаты измерений в стандартном виде:

$$Q = \overline{x} \pm t_p \sigma_{\overline{x}}.$$

1. Вычисляем $\overline{x} = 19{,}963$; $\sigma_x = 0{,}022$; $\sigma_{\overline{x}} = 0{,}004$.

2. Определим границы доверительного интервала $\Delta = \pm t_p \sigma_{\overline{x}}$ с вероятностью $P = 0{,}95$. При $n = 25$ и $P = 0{,}95$ находим $t_p = 2{,}06$. Тогда $\Delta = \pm 2{,}060 \cdot 0{,}004 = 0{,}009$.

3. Представим результаты измерений в стандартном виде:

$$Q = 19{,}963 \pm 0{,}009;\ \ \overline{x} = 19{,}963;\ \ \sigma_{\overline{x}} = 0{,}0044;$$

$$t_p = 2{,}06;\ \ P = 0{,}95;\ \ n = 25.$$

4. Доверительный интервал имеет вид

$$19{,}9628 - 0{,}009 < Q < 19{,}9628 + 0{,}009 \text{ или } 19{,}9588 < Q < 9{,}9718.$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 4.1. При многократном (n = 20) измерении диаметра вала были получены результаты, приведенные в табл. 4.5. Необходимо построить гистограмму, определить результат измерения, оценить его точность и определить границы доверительного интервала с вероятностью $P = 0{,}95$ и $P = 0{,}99$. Результат измерения представить в стандартном виде.

Таблица 4.5

Варианты заданий для самостоятельного решения

Вариант	Диаметр вала	Результаты измерений							
1	$Ø19^{+0,82}_{+0,79}$	19,811	19,813	19,806	19,807	19,804	19,800	19,798	19,804
		19,803	19,815	19,810	19,808	19,806	19,807	19,809	19,817
		19,809	19,807	19,809	19,810	19,805	19,813	19,805	19,802
2	$Ø22^{+0,80}_{+0,76}$	22,772	22,775	22,777	22,778	22,779	22,779	22,780	22,78
		22,785	22,786	22,786	22,787	22,789	22,789	22,791	22,794
		22,781	22,781	22,782	22,782	22,782	22,784	22,785	22,785
3	$Ø24^{+0,84}_{+0,80}$	24,834	24,836	24,830	24,831	24,828	24,825	24,823	24,828
		24,827	24,838	24,833	24,832	24,830	24,831	24,832	24,839
		24,826	24,829	24,836	24,829	24,833	24,832	24,831	24,832
4	$Ø39^{+0,87}_{+0,83}$	39,858	39,859	39,854	39,855	39,853	39,850	39,848	39,853
		39,852	39,861	39,857	39,856	39,854	39,855	39,856	39,862
		39,851	39,853	39,859	39,853	39,857	39,856	39,855	39,856
5	$Ø25^{+0,82}_{+0,79}$	25,811	25,813	25,806	25,807	25,804	25,800	25,798	25,804
		25,803	25,815	25,810	25,808	25,806	25,807	25,809	25,817
		25,802	25,805	25,813	25,805	25,810	25,809	25,807	25,809
6	$Ø27^{+0,78}_{+0,74}$	27,763	27,766	27,757	27,758	27,755	27,750	27,747	27,755
		27,753	27,768	27,762	27,760	27,757	27,758	27,761	27,771
		27,752	27,756	27,766	27,756	27,762	27,761	27,758	27,761

Продолжение табл. 4.5

Вариант	Диаметр вала	Результаты измерений							
7	$Ø32^{+0,76}_{+0,73}$	32,751	32,754	32,745	32,746	32,742	32,737	32,734	32,742
		32,741	32,757	32,750	32,748	32,745	32,746	32,749	32,759
		32,740	32,744	32,754	32,744	32,750	32,749	32,746	32,749
8	$Ø24^{+0,75}_{+0,72}$	24,740	24,742	24,733	24,734	24,730	24,725	24,722	24,730
		24,729	24,745	24,738	24,736	24,733	24,734	24,737	24,748
		24,727	24,731	24,742	24,731	24,738	24,737	24,737	24,737
9	$Ø17^{+0.82}_{+0.79}$	17,811	17,813	17,806	17,807	17,804	17,800	17,798	17,804
		17,803	17,815	17,810	17,808	17,806	17,807	17,809	17,817
		17,802	17,805	17,813	17,805	17,810	17,809	17,807	17,809
10	$Ø19^{+0,78}_{+0,74}$	19,763	19,766	19,757	19,758	19,755	19,750	19,747	19,755
		19,753	19,768	19,762	19,760	19,757	19,758	19,761	19,771
		19,752	19,756	19,766	19,756	19,762	19,761	19,758	19,761
11	$Ø15^{+0,80}_{+0,77}$	15,787	15,789	15,781	15,782	15,779	15,775	15,772	15,779
		15,778	15,791	15,786	15,784	15,781	15,782	15,785	15,794
		15,777	15,780	15,789	15,780	15,786	15,785	15,782	15,785
12	$Ø20^{+0,84}_{+0,82}$	20,834	20,836	20,830	20,831	20,828	20,825	20,823	20,828
		20,827	20,838	20,833	20,832	20,830	20,831	20,832	20,839
		20,826	20,829	20,836	20,829	20,833	20,832	20,831	20,832
13	$Ø27^{+0,66}_{+0,62}$	27,645	27,649	27,636	27,638	27,632	27,625	27,621	27,632
		27,630	27,653	27,643	27,640	27,636	27,638	27,641	27,656
		27,628	27,634	27,649	27,634	27,643	27,641	27,638	27,641
14	$Ø30^{+0,77}_{+0,74}$	30,763	30,766	30,757	30,758	30,755	30,750	30,747	30,755
		30,753	30,768	30,762	30,760	30,757	30,758	30,761	30,772
		30,752	30,756	30,766	30,756	30,762	30,761	30,758	30,761
15	$Ø24^{+0,80}_{+0,78}$	24,799	24,801	24,793	24,794	24,791	24,787	24,785	24,791
		24,790	24,803	24,798	24,796	24,793	24,794	24,797	24,805
		24,789	24,792	24,801	24,792	24,798	24,797	24,794	24,797
16	$Ø16^{+0,79}_{+0,76}$	16,775	16,777	16,796	16,770	16,767	16,768	16,776	16,767
		16,766	16,780	16,774	16,769	16,770	16,776	16,773	16,782
		16,764	16,768	16,777	16,768	16,774	16,773	16,770	16,773
17	$Ø21^{+0,83}_{+0,81}$	21,822	21,824	21,818	21,819	21,816	21,812	21,810	21,816
		21,815	21,826	21,821	21,820	21,818	21,819	21,820	21,828
		21,814	21,817	21,824	21,817	21,821	21,820	21,819	21,820
18	$Ø25^{+0,85}_{+0,83}$	25,846	25,848	25,842	25,843	25,840	25,837	25,835	25,840
		25,833	25,849	25,845	25,844	25,842	25,843	25,844	25,851
		25,839	25,841	25,848	25,841	25,845	25,844	25,843	25,844
19	$Ø23^{+0,88}_{+0,86}$	23,870	23,871	23,866	23,867	23,865	23,862	23,861	23,865
		23,864	23,872	23,869	23,868	23,866	23,867	23,868	23,874
		23,863	23,865	23,871	23,865	23,869	23,868	23,867	23,868
20	$Ø26^{+0,77}_{+0,74}$	26,763	26,766	26,757	26,758	26,755	26,750	26,745	26,755
		26,753	26,768	26,762	26,760	26,757	26,758	26,761	26,771
		26,752	26,753	26,766	26,756	26,762	26,761	26,758	26,761
21	$Ø27^{+0,82}_{+0,80}$	27,811	27,813	27,806	27,807	27,804	27,800	27,798	27,804
		27,803	27,815	27,810	27,808	27,806	27,807	26,809	27,817
		27,802	27,805	27,813	27,805	27,810	27,809	27,807	27,809

Окончание табл. 4.5

Вариант	Диаметр вала	Результаты измерений							
22	$Ø27^{+0,79}_{+0,77}$	27,787	27,789	27,781	27,789	27,779	27,775	27,772	27,779
		27,778	27,791	27,786	27,784	27,781	27,778	27,785	27,794
		27,777	27,780	27,789	27,780	27,786	27,785	27,782	27,785
23	$Ø33^{+0,76}_{+0,73}$	33,751	33,754	33,745	33,746	33,742	33,737	33,734	33,742
		33,741	33,757	33,750	33,748	33,745	33,746	33,749	33,759
		33,740	33,744	33,754	33,744	33,750	33,749	33,746	33,749
24	$Ø29^{+0,75}_{+0,72}$	29,740	29,742	29,733	29,734	29,730	29,725	29,722	29,730
		29,729	29,745	29,738	29,736	29,733	29,734	29,737	29,748
		29,727	29,731	29,742	29,731	29,738	29,737	29,734	29,737
25	$Ø35^{+0,82}_{+0,79}$	35,811	35,813	35,806	35,807	35,804	35,800	35,798	35,804
		35,803	35,815	35,810	35,808	35,806	35,807	35,809	35,817
		35,802	35,805	35,813	35,805	35,810	35,809	35,807	35,809

Согласно ГОСТ 8.207–76 **последовательность обработки результатов прямых многократных измерений** состоит из ряда этапов:

1. Определение точечных оценок закона распределения результатов измерений.

На этом этапе определяются среднее арифметическое значение $\bar{x}$ измеряемой величины, СКО результата измерений S_x. В соответствии с критериями грубые погрешности исключаются, после чего проводится повторный расчет оценок среднего арифметического значения и его СКО.

2. Определение закона распределения результатов измерений или случайных погрешностей.

Здесь по результатам измерений и проведенным расчетам строится гистограмма или полигон. По виду построенных зависимостей может быть оценен закон распределения результатов измерений.

3. Оценка закона распределения по статистическим критериям.

При числе измерений $n > 50$ для идентификации закона распределения используется критерий Пирсона. При $50 > n > 15$ для проверки нормальности закона распределения применяется составной критерий. При $n < 15$ принадлежность экспериментального распределения к нормальному не проверяется.

4. Определение доверительных границ случайной погрешности.

Если удалось идентифицировать закон распределения результатов измерений, то с его использованием находят квантильный множитель z_p при заданном значении доверительной вероятности P. В этом случае доверительные границы случайной погрешности равны

$\Delta = \pm z_p \cdot S_{\bar{x}}$. Здесь $S_{\bar{x}}$ – СКО среднего арифметического значения. При $n < 30$ часто используют распределение Стьюдента, при этом доверительные границы случайной погрешности имеют вид

$$\Delta_p = \pm t_p \cdot S_x / \sqrt{n},$$

где t_p – коэффициент Стьюдента, приведенный в табл. 4.6, n – количество измерений. Проверку гипотезы о том, что результаты измерений принадлежат нормальному распределению, проводят с уровнем значимости от 10 % до 2 %. Конкретные значения уровней значимости должны быть указаны в конкретной методике измерений.

Таблица 4.6

Величина t_p при различных уровнях значимости

n	Уровень значимости							
	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
2	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	127,32	318,30	636,61
3	1,84	2,92	4,30	6,96	9,99	14,09	22,33	31,60
4	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	7,45	10,21	12,92
5	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	5,60	7,17	8,61
6	1,48	2,02	2,57	3,36	4,03	4,77	5,89	6,87
7	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	4,32	5,21	5,96
8	1,41	1,89	2,36	3,00	3,50	4,03	4,74	5,41
9	1,40	1,85	2,31	2,90	3,36	3,83	4,50	5,04
10	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	3,64	4,30	4,78
11	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	3,50	4,14	4,59

5. Определение границ неисключенной систематической погрешности результата измерения.

Под этими границами понимают найденные нестатистическими методами границы интервала, внутри которого находится неисключенная систематическая погрешность. Границы неисключенной систематической погрешности принимаются равными пределам допускаемых основных и дополнительных погрешностей средств измерений, если их случайные составляющие пренебрежимо малы.

6. Определение доверительных границ погрешности результата измерения.

Данная операция осуществляется путем суммирования СКО случайной составляющей $S_{\bar{x}}$ и границ неисключенной систематической составляющей θ в зависимости от соотношения $\theta / S_{\bar{x}}$.

7. Запись результата измерения.

Результат измерения записывается в виде $x = \bar{x} \pm \Delta_p$ при доверительной вероятности $P = P_д$.

Пример

Произвести обработку результатов измерений, данные которых представлены в табл. 4.7.

Таблица 4.7

Результаты измерений

Номер п/п	x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
1	36,008	–0,001	0,000001
2	36,008	–0,001	0,000001
3	36,008	–0,001	0,000001
4	36,008	–0,001	0,000001
5	36,010	0,001	0,000001
6	36,009	0	0
7	36,012	0,003	0,000009
8	36,009	0	0
9	36,011	0,002	0,000004
10	36,007	0,002	0,000004
11	36,012	0,003	0,000009
12	$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{11} x_i = 36,009$		$\sum_{i=1}^{11}(x_i - \overline{x})^2 = 0,000031$

1. *Определение точечных оценок закона распределения результатов измерений*

Определяем среднее арифметическое значение результатов измерений:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{11} x_i = 36,009.$$

Среднее квадратическое отклонение результатов измерения равно

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{1}{11-1}\cdot 0,000031} = 0,00194.$$

Производим проверку на наличие грубых погрешностей в результатах измерения по критерию Диксона.

Составим вариационный возрастающий ряд из результатов измерений: 36,007; 36,008; 36,009; 36,010; 36,011; 36,012.

Найдем расчетное значение критерия Диксона для значения 36,012:

$$K_{\text{Д}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1} = \frac{36,012 - 36,011}{36,012 - 36,007} = 0,2.$$

Как следует из табл. 4.7, по этому критерию результат 36,012 не является промахом при всех уровнях значимости.

2. *Предварительная оценка вида распределения результатов измерений или случайных погрешностей*

При числе измерений меньше 15 предварительная оценка вида распределения результатов наблюдений не производится.

3. *Оценка закона распределения по статистическим критериям*

При $n < 15$ принадлежность экспериментального распределения к нормальному не проверяется.

4. *Определение доверительных границ случайной погрешности*

При числе измерений $n = 11$ используем распределение Стьюдента, при этом доверительные границы случайной погрешности равны

$$\Delta_p = \pm t_p S_x / \sqrt{n} .$$

Коэффициент Стьюдента при доверительной вероятности $P_д = 0,95$ и при $n = 11$ равен 2,23.

Тогда доверительные границы случайной погрешности равны

$$\Delta_p = \pm 2,23 \frac{0,00194}{\sqrt{11}} = \pm 0,0012 .$$

5. *Определение границ неисключенной систематической погрешности результата измерения*

Границы неисключенной систематической погрешности θ принимаются равными пределам допускаемых основных и дополнительных погрешностей средства измерения. Для рычажного микрометра допускаемая погрешность равна ±0,7 мкм.

6. *Определение доверительных границ погрешности результата измерения*

Согласно ГОСТ 8.207–76 погрешность результата измерения определяется по следующему правилу. Если границы неисключенной систематической погрешности $\theta < 0,8 S_x$, то следует пренебречь систематической составляющей погрешности и учитывать только случайную погрешность результата. В нашем случае θ = 1,4 мкм, а S_x = 2 мкм, т.е. соотношение $\theta < 0,8 S_x$ выполняется, поэтому систематической погрешностью пренебрегаем.

7. *Запись результата измерения*

Результат измерения: $x = \overline{x} \pm \Delta_p = 36,009 \pm 0,001$ при доверительной вероятности $P = 0,95$.

Задание 4.1

Используя данные табл. 4.8, произвести обработку результатов прямых многократных измерений.

Таблица 4.8

Исходные данные

Вариант	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	θ
1	32,3	32,32	32,98	32,52	32,67	32,5	32,49	31,17	32,39	32,43	0,32
2	148,6	49,56	48,7	48,83	48,67	48,36	48,24	47,31	48,85	48,6	0,14
3	72,1	72,12	71,98	73,83	72,3	72,34	72,39	71,27	72,44	72,13	0,52
4	12,5	11,54	11,38	11,4	11,42	11,67	11,28	11,52	11,6	13,37	0,39
5	12,4	12,78	13,62	12,69	12,3	12,25	12,3	11,36	12,16	12,38	0,17
6	13,3	14,27	13,18	13,1	13,6	13,53	13,42	13,26	13,64	12,31	0,47
7	18,8	17,82	18,51	19,07	19,2	18,69	18,86	18,91	19,63	18,7	0,31
8	29,9	29,83	30,68	29,99	28,72	29,87	30,24	30	29,76	30,1	0,24
9	35,5	34,54	35,3	35,42	35,4	35,67	35,28	35,52	36,1	35,37	0,49
10	101,1	99,9	100,83	101,2	101,14	101	101,41	100,93	102,1	101,2	0,57
11	14,3	14,27	13,8	14,09	14,6	14,53	14,42	14,26	16,64	14,31	0,19
12	22,44	23,46	23,45	23,46	23,47	23,43	24,58	23,63	23,48	23,31	0,36
13	77,76	77,78	78,85	77,63	77,24	77,63	77,54	77,52	76,78	77,87	0,28
14	55,35	54,52	55,38	55,42	55,64	55,46	55,28	56,34	55,27	55,35	0,21
15	30,17	30,18	30,28	31,58	30,43	30,02	30,41	29,57	30,12	30,21	0,47
16	79,89	79,99	79,78	78,83	79,84	79,72	79,85	79,84	80,91	79,78	0,31
17	40,11	39,12	40,15	40,01	40,23	40,25	40,18	41,21	40,11	40,12	0,24
18	20	20,01	18,89	19,95	21,05	20,07	20,03	19,99	20,06	19,99	0,49
19	30,01	31,06	30,04	29,98	30,02	30,08	28,89	29,97	30,01	29,99	0,57
20	49,99	50,01	49,83	50,06	50,02	49,94	49,99	50,07	50,01	49,94	0,19
21	24,13	24,19	23,3	24,12	24,17	24,28	24,14	24,25	25,33	24,21	0,36
22	19,5	19,54	18,38	19,4	19,42	19,67	19,28	20,52	19,1	19,37	0,28
23	18,3	19,27	18,18	18,09	18,6	18,53	18,42	28,26	19,64	18,31	0,21
24	7,8	7,78	7,75	8,94	7,37	7,6	7,98	8	9,98	7,82	0,32
25	11,2	12,3	12,13	12,07	12,43	12,51	12,18	13,6	12,34	12,29	0,14
26	10,4	10,78	11,62	10,69	10,3	10,25	10,18	9,36	10,16	10,38	0,52
27	11,6	12,6	11,54	11,42	11,38	10,87	11,48	11,32	11,44	11,36	0,39
28	20,7	20,71	21	19,38	20,64	20,53	20,84	20,41	21,58	20,74	0,17
29	17,9	18,83	17,65	17,99	17,72	18,1	18,24	17,87	16,76	18,09	0,57
30	5,2	4,36	5,24	5,61	5,52	5,18	6,78	5,12	5,09	5,3	0,19
31	3,8	3,82	4,51	4,07	4,2	3,69	3,86	4,91	3,63	3,6	0,36
32	52,1	51,9	50,83	52,2	52,14	52,38	52,41	51,93	53,1	52,2	0,28
33	84,4	85,25	84,19	84,51	84,3	84,1	85,64	84,71	84,35	84,28	0,21
34	92,7	92,42	93,88	92,55	92,61	92,43	92,56	93,4	92,39	92,8	0,47
35	64,8	63,72	63,64	64,2	63,89	64,9	63,92	63,94	64	63,89	0,31

Контрольные вопросы

1. Назовите основные виды измерений.
2. Дайте определения прямых, косвенных, совместных и совокупных измерений.
3. Дайте характеристику принципа обработки многократных прямых равноточных измерений.
4. Для каких целей вводят коэффициент Стьюдента и от каких параметров он зависит?
5. Что такое гистограмма? Для каких целей применяются гистограммы?

Практическое занятие № 5. Обработка результатов многократных косвенных измерений

Цель занятия

Ознакомление с методами представления результатов косвенных многократных измерений. Приобретение практических навыков обработки результатов косвенных многократных измерений.

Теоретические сведения

Косвенные измерения – это измерения, проводимые косвенным методом, при котором искомое значение физической величины определяется на основании результатов прямых измерений других физических величин, функционально связанных с искомой величиной. Каждая физическая величина x измерена с некоторой погрешностью Δx. Полагая, что погрешности Δx малы, можно записать

$$dZ = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i ,$$

где каждое слагаемое $\frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$ представляет собой частную погрешность результата косвенного измерения, вызванную погрешностью Δx измерения. Частные производные носят название коэффициентов влияния соответствующих погрешностей.

Пример

Определить момент инерции круглой платформы, связанный формулой

$$I = \frac{gRr}{4\pi^2 l} mT^2$$

со следующими величинами, измеряемыми прямыми способами:

$R = (11{,}50 \pm 0{,}05) \cdot 10^2$ м – радиус платформы;

$r = (10{,}00 \pm 0{,}05) \cdot 10^2$ м – радиус верхнего диска подвеса;

$l = (233{,}0 \pm 0{,}2)\ 10^2$ м – длина нитей подвеса;

$m = (125{,}7 \pm 0{,}1) \cdot 10^3$ кг – масса платформы;

$T = (2{,}81 \pm 0{,}01)$ с – период малых колебаний платформы;

$g = 9{,}81$ м/с^2 – ускорение свободного падения.

Результаты приведены со средними квадратичными отклонениями.

Решение

Подставляя в исходную формулу средние арифметические значения измеряемых прямыми способами величин и округленные значения постоянных, получим оценку истинного значения момента инерции платформы:

$$\overline{I} = \frac{9,82 \cdot 11,50 \cdot 10,00}{4 \cdot 3,14^2 \cdot 233} \cdot 125,7 \cdot 2,81^2 \cdot 10^5 = 1,22 \cdot 10^7 \text{ кг} \cdot \text{м}^2,$$

так как результат должен быть округлен до трех значащих цифр.

Для оценки точности полученного результата вычислим частные производные и частные погрешности косвенного измерения:

$$E_R = \left(\frac{\partial I}{\partial R}\right) s_{\overline{R}} = \frac{I}{R} S_{\overline{R}} = \frac{1,22 \cdot 10^7}{11,5 \cdot 10^2} \cdot 0,05 \cdot 10^2 = 0,0053 \cdot 10^7 \text{ кг·м}^2;$$

$$E_r = \left(\frac{\partial I}{\partial r}\right) s_{\overline{r}} = \frac{I}{r} S_{\overline{r}} = \frac{1,22 \cdot 10^7}{10 \cdot 10^2} \cdot 0,05 \cdot 10^2 = 0,0061 \cdot 10^7 \text{ кг·м}^2;$$

$$E_l = \left(\frac{\partial I}{\partial l}\right) S_{\overline{l}} = \frac{I}{l} S_{\overline{l}} = \frac{1,22 \cdot 10^7}{233 \cdot 10^2} \cdot 0,2 \cdot 10^2 = -0,0010 \cdot 10^7 \text{ кг·м}^2;$$

$$E_m = \left(\frac{\partial I}{\partial m}\right) S_{\overline{m}} = \frac{I}{m} S_{\overline{m}} = \frac{1,22 \cdot 10^7}{233 \cdot 10^2} \cdot 0,2 \cdot 10^2 = -0,0010 \cdot 10^7 \text{ кг·м}^2;$$

$$E_T = \left(\frac{\partial I}{\partial T}\right) S_{\overline{T}} = 2\frac{I}{T} S_{\overline{T}} = 2\frac{1,22 \cdot 10^7}{2,81} \cdot 0,01 = 0,0087 \cdot 10^7 \text{ кг·м}^2.$$

Таким образом, среднее квадратичное отклонение косвенного измерения момента инерции платформы составит

$$s_I = \sqrt{E_R^2 + E_r^2 + E_t^2 + E_m^2 + E_T^2} = 0,01 \cdot 10^7 \text{ кг·м}^2.$$

Окончательно результат косвенного измерения записывается в виде $I = (1,22 \pm 0,01)\, 10^7$ кг·м^2.

Задание 5.1

Определить предельное усилие при растяжении полос при сварке в стык по длинной полосе по данным, приведенным в табл. 5.1, с использованием формулы

$$N_{\text{пред}} = t \cdot \sigma_T \cdot b,$$

где t – толщина полосы; σ_T – предел текучести; b – ширина полосы.

Таблица 5.1

Исходные данные

Вариант	t, мм	σ_T, МПа	b, мм
1	1 ± 0,01	245 ± 3	20 ± 0,05
2	2 ± 0,1	175 ± 1	45 ± 0,2
3	1,5 ± 0,05	390 ± 3	50 ± 0,01
4	3 ± 0,05	345 ± 2	80 ± 0,01
5	2 ± 0,01	245 ± 2,5	30 ± 0,05
6	1,5 ± 0,01	175 ± 1,5	70 ± 0,05
7	1 ± 0,2	390 ± 2,1	60 ± 0,1
8	2 ± 0,05	345 ± 1,8	40 ± 0,01
9	1,5 ± 0,1	245 ± 2,4	20 ± 0,2
10	3 ± 0,1	175 ± 1,2	45 ± 0,05
11	1 ± 0,05	390 ± 3,1	50 ± 0,2
12	2 ± 0,1	345 ± 1,7	80 ± 0,01
13	1,5 ± 0,05	245 ± 3	30 ± 0,05
14	3 ± 0,01	175 ± 1,6	70 ± 0,1
15	1 ± 0,01	390 ± 2,6	60 ± 0,01
16	2 ± 0,1	345 ± 2,2	40 ± 0,2
17	1,5 ± 0,05	245 ± 2,3	20 ± 0,05
18	3 ± 0,05	175 ± 1,7	45 ± 0,01
19	1 ± 0,2	390 ± 2,3	50 ± 0,05
20	2+0,01	345 ± 1,9	80 ± 0,1
21	1,5 ± 0,01	245 ± 2,1	30 ± 0,2
22	3 ± 0,1	175 ± 1,8	70 ± 0,01
23	1 ± 0,05	390 ± 2,4	60 ± 0,5
24	2 ± 0,1	345 ± 1,2	40 ± 0,01
25	1,5 ± 0,05	245 ± 3,1	20 ± 0,05
26	3 ± 0,01	175 ± 1,7	45 ± 0,1
27	1 ± 0,01	390 ± 3,2	50 ± 0,2
28	2 ± 0,1	345 ± 1,6	80 ± 0,05
29	1,5 ± 0,05	245 ± 2,3	30 ± 0,01
30	3 ± 0,05	175 ± 2,3	70 ± 0,2
31	1 ± 0,2	390 ± 1,8	60 ± 0,05
32	2 ± 0,1	345 ± 2,6	40 ± 0,01
33	1,5 ± 0,1	175 ± 1,9	20 ± 0,05
34	3 ± 0,01	390 ± 1,7	45 ± 0,1
35	2 ± 0,2	345 ± 0,1	50 ± 0,05

Практическое занятие № 6. Обработка результатов многократных неравноточных измерений

Цель занятия

Ознакомление с методами представления результатов неравноточных измерений. Приобретение практических навыков обработки результатов неравноточных измерений.

Теоретические сведения

Если обработке подлежат ряды измерений, выполненные в разных условиях, или разными операторами, или в разное время, то для оценки действительного значения измеряемой величины необходимо проверить их на равноточность [9].

Рассмотрим два способа проверки гипотезы равноточности двух рядов, состоящих из n_1 и n_2 результатов измерений.

Способ 1. Критерий Фишера

1. Вычисляют эмпирические дисперсии для каждого ряда:

$$S_1^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_1}\left(x_i - \overline{X}_1\right)^2}{n_1 - 1} \text{ и } S_2^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n_2}\left(x_i - \overline{X}_2\right)^2}{n_2 - 1}.$$

2. Находят дисперсионное отношение $F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$, которое составляется так, чтобы $S_1^2 > S_2^2$.

3. По таблице критерия Фишера определяют табличное значение F_T для уровня значимости α и числа степеней свободы $f_1 = n_1 - 1$ и $f_2 = n_2 - 1$.

4. Если $F > F_T$, то измерение считают неравноточным.

Способ 2. Критерий Романовского *R*

1. Определяют отношение $R = \frac{|Q-1|}{s(Q)}$, где $Q = \frac{n_2 - 3s_1^2}{n_1 - 1s_2^2}$ и $s(Q) = \sqrt{\frac{2(n_1+n_2)-4}{(n_1-1)(n_2-3)}}$.

2. Если $R < 3$, то результаты наблюдений считаются неравноточными.

Обработка неравноточных измерений сводится к определению достоверного значения измеряемой величины и оценке воспроизводимости измерений [9].

Пусть некоторая величина X была измерена многократно различными операторами и в различных условиях. В процессе серий измерений получены $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_n$ со средними квадратичными отклонениями $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n$.

1. Вычисляют веса измерений $p_i = \dfrac{\mu^2}{\sigma_1^2}$, где μ^2 – некоторый коэффициент, выбранный таким образом, чтобы отношение $\dfrac{\mu^2}{\sigma_1^2}$ было близко к единице.

2. Вычисляют весовое среднее: $\overline{X}_p = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \overline{x}_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}$.

3. Вычисляют среднее квадратическое отклонение результатов измерений: $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{n-1} \sum\limits_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - \overline{X}_p \right)^2}$.

4. Вычисляют среднее квадратическое отклонение весового среднего: $\sigma_{X_p} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} p_i}}$.

5. Результат представляют в виде $X = \overline{X}_p \pm \sigma_{x_p}$.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 6.1. Проведены шесть серий измерений значения размера. Полученные размеры приведены в табл. 6.1. Проверить измерения на равноточность и обработать результаты.

Таблица 6.1

Исходные данные

Вариант	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
1	20,617	20,666	20,642	20,634	20,628	20,653
	20,619	20,661	20,640	20,630	20,630	20,655
	20,616	20,662	20,638	20,632	20,626	20,650
	20,614	20,667	20,645	20,6385	20,624	20,656
	20,618	20,665	20,642	20,637	20,631	20,652
	20,617	20,668	20,643	20,635	20,630	20,651
	20,619	20,670	20,639	20,633	20,627	20,654
	20,620	20,673	20,646	20,634	20,625	20,653
2	18,616	18,665	18,642	18,635	18,629	18,654
	18,618	18,659	18,640	18,630	18,630	18,656
	18,616	18,662	18,638	18,632	18,626	18,650
	18,614	18,667	18,645	18,638	18,624	18,656
	18,618	18,665	18,642	18,637	18,631	18,652
	18,617	18,668	18,643	18,635	18,630	18,651
	18,619	18,670	18,639	18,633	18,627	18,654
	18,620	18,673	18,646	18,634	18,625	18,653
3	16,619	16,668	16,643	16,636	16,627	16,653
	16,619	16,658	16,640	16,630	16,632	16,657
	16,616	16,662	16,638	16,632	16,626	16,650
	16,614	16,667	16,645	16,638	16,624	16,656
	16,618	16,665	16,642	16,637	16,631	16,652
	16,617	16,668	16,643	16,635	16,630	16,651
	16,619	16,670	16,639	16,633	16,627	16,654
	16,620	16,673	16,646	16,634	16,625	16,653
4	19,621	19,664	19,648	19,639	19,630	19,656
	19,619	19,661	19,642	19,631	19,628	19,652
	19,616	19,662	19,638	19,632	19,626	19,650
	19,614	19,667	19,645	19,638	19,624	19,656
	19,615	19,665	19,642	19,637	19,631	19,652
	19,617	19,668	19,643	19,635	19,630	19,651
	19,619	19,670	19,629	19,633	19,627	19,654
	19,617	19,673	19,646	19,634	19,625	19,653
5	21,616	21,665	21,642	21,635	21,629	21,654
	21,619	21,660	21,640	21,630	21,630	21,656
	21,616	21,662	21,638	21,632	21,626	21,650
	21,614	21,667	21,645	21,638	21,624	21,656
	21,618	21,665	21,642	21,637	21,631	21,652

Окончание табл. 6.1

Вариант	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6
5	21,617	21,668	21,643	21,635	21,630	21,651
	21,619	21,670	21,639	21,633	21,627	21,654
	21,620	21,673	21,646	21,634	21,625	21,653
6	17,617	17,667	17,644	17,639	17,627	17,653
	17,618	17,659	17,639	17,633	17,631	17,658
	17,616	17,662	17,638	17,632	17,625	17,651
	17,614	17,667	17,645	17,638	17,624	17,656
	17,618	17,665	17,642	17,637	17,631	17,652
	17,617	17,668	17,643	17,635	17,630	17,651
	17,619	17,670	17,639	17,633	17,627	17,654
	17,620	17,673	17,646	17,634	17,625	17,653
7	15,620	15,666	15,643	15,632	15,626	15,659
	15,616	15,661	15,639	15,639	15,632	15,655
	15,616	15,662	15,638	15,633	15,626	15,650
	15,614	15,667	15,645	15,638	15,624	15,656
	15,615	15,665	15,642	15,637	15,631	15,652
	15,617	15,668	15,643	15,635	15,630	15,651
	15,619	15,670	15,639	15,633	15,627	15,654
	15,617	15,673	15,643	15,634	15,625	15,653
8	22,617	22,665	22,642	22,635	22,629	22,654
	22,616	22,660	22,640	22,630	22,630	22,656
	22,616	22,662	22,638	22,632	22,626	22,650
	22,614	22,667	22,645	22,638	22,624	22,656
	22,618	22,665	22,642	22,637	22,631	22,652
	22,617	22,668	22,643	22,635	22,630	22,651
	22,619	22,670	22,639	22,633	22,627	22,654
	22,620	22,673	22,646	22,634	22,625	22,653
9	14,618	14,667	14,642	14,635	14,629	14,654
	14,618	14,662	14,644	14,631	14,632	14,659
	14,616	14,662	14,638	14,632	14,626	14,650
	14,614	14,667	14,645	14,638	14,624	14,654
	14,618	14,665	14,640	14,636	14,631	14,652
	14,617	14,668	14,643	14,635	14,630	14,651
	14,619	14,670	14,638	14,633	14,625	14,654
	14,619	14,673	14,646	14,634	14,625	14,653
10	28,616	28,665	28,642	28,639	28 628	28,658
	28,617	28,661	28,639	28,635	28,631	28,655
	28,616	28,662	28,638	28,632	28,626	28,650
	28,612	28,667	28,645	28,638	28,624	28,656
	28,618	28,664	28,642	28,637	28,631	28,652
	28,617	28,668	28,643	28,635	28,630	28,651
	28,619	28,671	28,639	28,633	28,627	28,654
	28,620	28,673	28,646	28,634	28,625	28,653

Контрольные вопросы

1. Какие измерения называются неравноточными?
2. Охарактеризуйте способы проверки гипотезы равноточности двух рядов.
3. Дайте характеристику принципа обработки результатов неравноточных измерений.

Практическое занятие № 7.
Выбор средства измерений

Цель занятия

Ознакомление с общими положениями и принципами выбора средств измерений. Приобретение практических навыков выбора средств измерений.

Принцип выбора средств измерений по коэффициенту уточнения и по принципу безошибочности контроля

Теоретические сведения

При выборе средства измерения учитывают совокупность метрологических (цена деления, погрешность, пределы измерений, измерительное усилие и т.д.), эксплуатационных и экономических показателей.

Общие положения при выборе средства измерения:

1. Для гарантирования заданной или расчетной относительной погрешности измерения $\delta_{изм}$ относительная погрешность средства измерения $\delta_{си}$ должна быть на 25–30 % ниже, чем $\delta_{изм}$ (т.е. $\delta_{си} = 0{,}7\ \delta_{изм}$).

2. Выбор средства измерения зависит от масштаба производства или количества находящихся в эксплуатации однотипных (одноименных) технических средств.

Например, *в массовом производстве* с отработанным технологическим процессом, включая контрольные операции, используют высокопроизводительные механизированные и автоматизированные средства измерения и контроля. Универсальные средства измерения применяются преимущественно для наладки оборудования.

В серийном производстве основными средствами контроля должны быть жесткие предельные калибры, шаблоны, специальные контрольные приспособления. Возможно применение универсальных средств измерения.

В мелкосерийном и индивидуальном производстве основными являются универсальные средства измерения, поскольку применение других организационно и экономически невыгодно: неэффективно будут использоваться специальные контрольные приспособления или потребуется большое количество калибров различных типоразмеров [15].

3. При выборе средства измерения по метрологическим характеристикам необходимо учитывать следующее:

– если технологический процесс неустойчив, т.е. возможны существенные отклонения измеряемого параметра за пределы поля допуска, то нужно, чтобы пределы шкалы средства измерения превышали диапазон рассеяния значений параметра;

– цена деления шкалы должна выбираться с учетом заданной точности измерения. Например, если размер необходимо контролировать с точностью до 0,01 мм, то и средства измерения следует выбирать с ценой деления 0,01 мм.

Качество измерений на разных участках шкалы неодинаково, поэтому при измерениях рабочий участок шкалы средства измерения должен выбираться по правилу: относительная погрешность в пределах рабочего участка шкалы средства измерения не должна превышать приведенную погрешность более чем в 3 раза ($\delta < 3\gamma$) [15].

Из этого правила следует:

а) при односторонней равномерной шкале с нулевой отметкой в ее начале рабочий участок занимает последние две трети длины шкалы;

б) при двусторонней шкале с нулевой отметкой посредине – последнюю треть каждого сектора;

в) при шкале без нуля рабочий участок может распространяться на всю длину шкалы.

В пределах рабочего участка шкалы наибольшая возможная абсолютная погрешность равновероятна на всех отметках. Таким образом, при выборе средства измерения важно определить рабочий участок шкалы и ее цену деления. Последняя зависит от класса точности средства измерения и числа n_i делений шкалы.

Если класс точности средства измерения определяет наибольшую допустимую погрешность с заданной вариацией, то цена деления должна учитывать эту вариацию, а именно должна быть равна удвоенному значению приведенной погрешности средства измерения: $C = 2\gamma$ или $n_i = 100 / 2\gamma$.

Исходя из требований удобства считывания показаний, допускается использование более крупных делений шкалы, но обязательно кратных n_i (в пределах 2–10). Кроме того, цена деления должна составлять целое число единиц измеряемой величины (1, 2, 5, 10 и т.д.) [15].

Принципы выбора средств измерений

1. Выбор средства измерения по коэффициенту уточнения

Это самый простой способ, предусматривающий сравнение точности измерения и точности изготовления (функционирования) объекта контроля. Для этого вводят коэффициент уточнения $K_T^{'}$ (коэффициент закона точности) при известном допуске T и предельном значении $[\Delta_{изм}]$ погрешности измерения:

$$K_T^{'} = T / 2[\Delta_{изм}].$$

Величину, обратную $K_T^{'}$, называют относительной погрешностью метода измерения $\Delta_{мет} = 1 / K_T^{'}$.

В соответствии с ГОСТ 8.051–81 значения пределов допускаемых погрешностей $[\Delta_{изм}]$ для линейных размеров задаются в зависимости от допусков и квалитета (табл. 7.1) как

$$[\Delta_{изм}] = (0,20 - 0,35)T = \rho T.$$

Таблица 7.1

Зависимость ρ от диапазона допусков и квалитета

Показатель	Квалитет			
	2–5	6–7	8–9	10–16
Средний коэффициент, ρ	0,35	0,30	0,25	0,20
Диапазон допуска, мкм	0,8–2,7	6–63	14–155	40–4000
Диапазон $[\Delta_{изм}]$, ± мкм	0,25–10,00	2–19	3,5–39,0	8–800

Для линейных размеров указанное соотношение между $[\Delta_{изм}]$ и T соответствует $K_T^{'}$ = 1,4, …, 2,5. Если измеряемый размер попадает в стандартизованный ГОСТ 8.051–81 интервал 0...500 мм, то находят среднее значение $K_{T\text{ср}}^{'}$, а предел основной допускаемой погрешности средства измерения находят как

$$\Delta_g = \frac{T / 2}{1,3K_{T\text{ср}}^{'}} \geq \Delta_{СИ},$$

и из табл. 7.2 выбирают ближайшее средство измерения с такой погрешностью ГОСТ 8.549–86 [4].

Таблица 7.2

Выбор средств измерений

Измерительные средства	Предельные погрешности измерения ([$\Delta_{изм}$], мкм) для интервалов размеров, мм							
	До 10	11...50	51...80	81...120	121...180	181...260	261...360	361...500
Оптиметры, измерительные машины (при измерении наружных размеров)	0,7	1,0	1,3	1,6	1,8	2,5	3,5	4,5
То же (при измерении внутренних размеров)	–	0,9	1,1	1,3	1,4	1,6	–	–
Микроскоп универсальный	1,5	2,0	2,5	2,5	3,0	3,5	–	–
То же	5,0	5,0	–	–	–	–	–	–
Миниметр с ценой деления:								
1 мкм	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	4,5	6,0	8,0
2 мкм	1,4	1,8	2,5	3,0	3,5	5,0	6,5	8,0
3 мкм	2,2	2,5	3,0	3,5	4,0	5,0	6,5	8,5
Рычажная скоба с ценой деления:								
2 мкм	3,0	3,5	4,0	4,5	–	–	–	–
10 мкм	7,0	7,5	7,5	7,5	8,0	–	–	–
Микрометр рычажный	3	4	–	–	–	–	–	–
Микрометр	7	8	9	10	12	15	20	25
Индикатор	15	15	15	15	15	16	16	16
Штангенциркуль с ценой деления:								
0,02 мм	40	40	45	45	45	50	60	70
0,05 мм	80	80	90	100	100	100	100	100
0,10 мм	150	150	160	170	190	200	210	230

Для ориентированного выбора без расчетов с последующим уточнением по таблицам универсальных средств измерения можно использовать номограммы (рис. 7.1–7.3) [7,15].

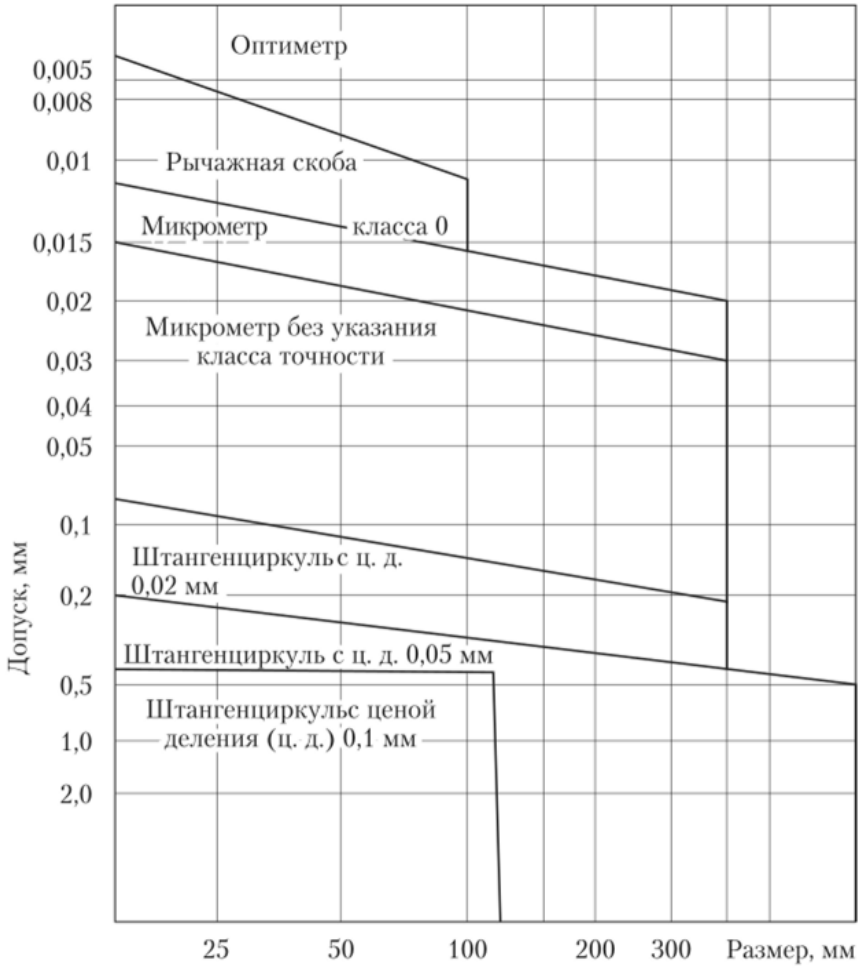


Рис. 7.1. Номограмма для выбора средства измерения валов

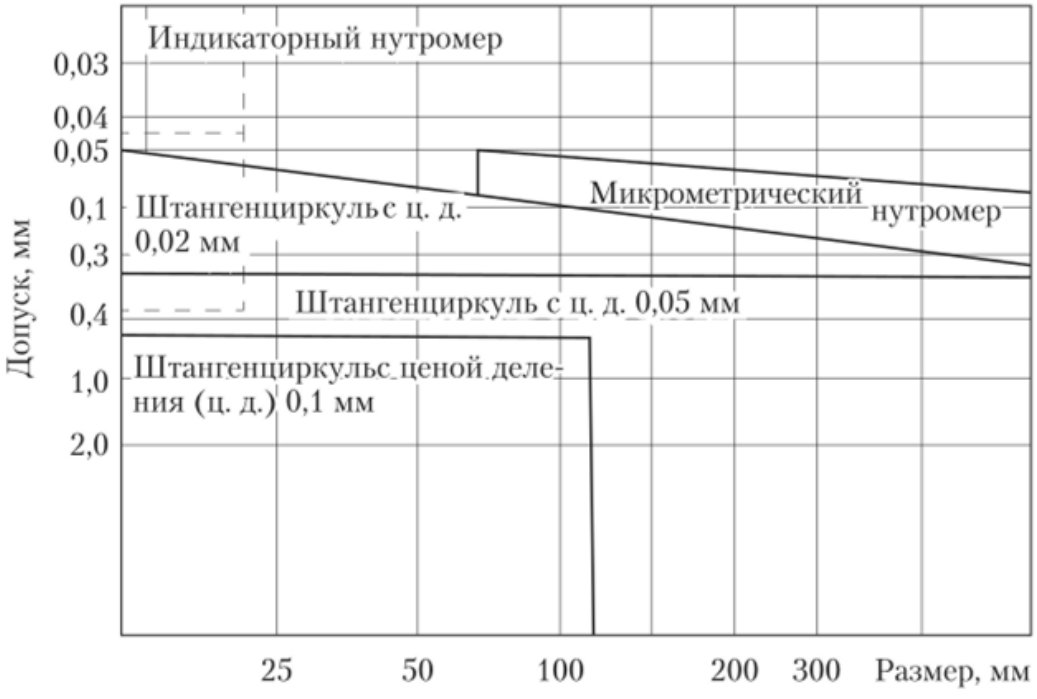


Рис. 7.2. Номограмма для выбора средства измерения отверстий

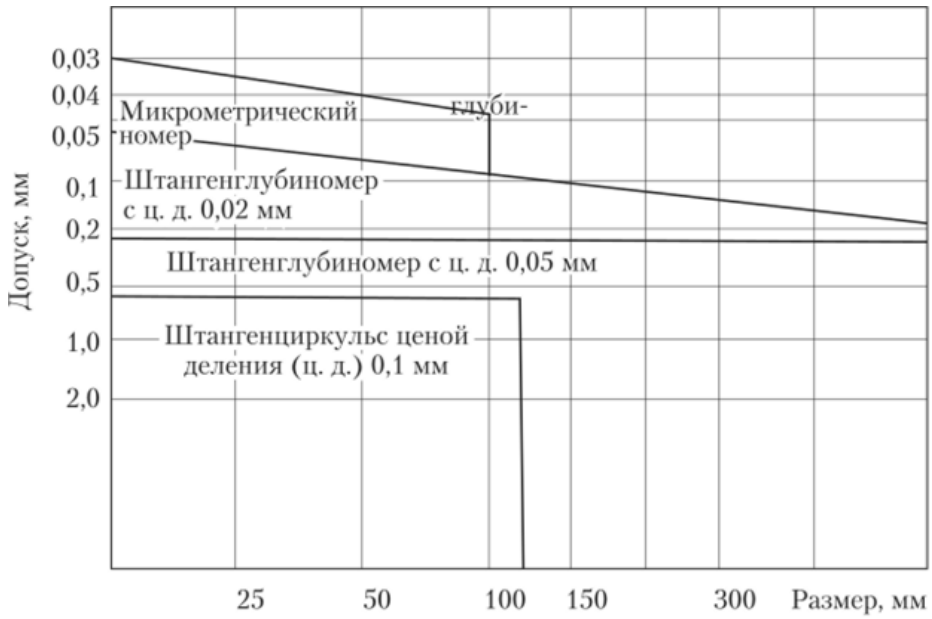


Рис. 7.3. Номограмма для выбора средства измерения глубины и высоты

2. Выбор средств измерения по принципу безошибочности контроля

Данный метод предполагает предварительную оценку вероятностей ошибок первого и второго рода. Схема выбора средства измерения включает следующие этапы [15]:

1) оценивают (или обоснованно задают) законы распределения контролируемого параметра и погрешности измерения;

2) задаются соответствующие вероятности ошибок первого и второго рода (или отдельно P_1 и P_2);

3) по табл. 7.3 находят соответствующие значения коэффициента уточнения $K_T^{'}$;

4) при известном допуске на параметр выбирают средства измерения по таблицам, аналогичным табл. 7.3.

Таблица 7.3

Вероятности P_1 и P_2 при контроле по размерным параметрам

Коэффициент уточнения $K_T^{'}$	Закон распределения контролируемых параметров							
	нормальный				существенно положительных величин			
	Закон распределения погрешности измерения							
	нормальный		равномерный		нормальный		равномерный	
	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2	P_1	P_2
1	2	3	4	5	6	7	8	9
10,40	0,4	0,37	0,75	0,7	0,25	0,15	0,5	0,4
5,50	0,9	0,87	1,30	1,2	0,70	0,60	0,9	0,7

Окончание табл. 7.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,30	1,7	1,60	2,25	2,0	1,25	1,20	1,5	1,5
2,10	2,8	2,60	3,70	3,4	2,20	1,90	2,8	2,4
1,70	3,5	3,10	4,75	4,5	2,75	2,50	3,8	3,2
1,40	4,1	3,75	5,80	5,4	3,25	3,00	4,2	3,5
1,04	5,4	5,00	8,25	7,8	4,35	3,90	5,5	5,2

Пример выбора средств измерений

Задача

Необходимо выбрать средства измерения (по номограмме и по коэффициенту уточнения) для контроля вала диаметром $Ø10_{-004}$.

Решение

1. Произведем ориентировочный выбор средства измерения по номограмме (рис. 7.1); для этого определим допуск $T = 40$ мкм.

При диаметре от 0 до 25 принимаем микрометр без указания класса точности.

2. Выберем средства измерения по коэффициенту уточнения; для этого определим среднее значение $K_T^{'} = (2{,}5 + 1{,}4) / 2 = 1{,}95$.

Тогда имеем

$$\Delta_{\text{СИ}} = \frac{40 / 2}{1{,}3 \cdot 1{,}95} = 7{,}9\,\text{мкм}.$$

Из табл. 7.2 видно, что предел, наиболее близкий к расчетному, имеют микрометр и рычажная скоба с ценой деления 10 мкм, поэтому для контроля вала диаметром $Ø10_{-004}$ необходимо выбрать или микрометр, или рычажную скобу.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 7.1. Для контроля вала диаметром $Ø45_{-0{,}025}$ мм выбрать средства измерения по коэффициенту уточнения.

Задача 7.2. Выбрать средства измерения для контроля коренной шейки коленчатого вала двигателя диаметром $Ø75_{-0{,}02}$.

Задача 7.3. Выбрать средства измерения для контроля отверстия диаметром Ø54,8H12.

Задача 7.4. При контроле вала диаметром $Ø18_{-0{,}06}$ мм вероятность пропуска брака не должна превышать $P_2 = 0{,}045$. Законы распределения размера и погрешности неизвестны. Выбрать средства измерения для контроля.

Задача 7.5. При контроле отверстия диаметром $Ø25_{-0,016}$ мм вероятность первого рода не должна превышать $P_1 = 0,035$. Закон распределения размера и погрешности – нормальный. Выбрать средства измерения для контроля.

Выбор средств измерений свободных линейных размеров в зависимости от измеряемых размеров и допускаемых погрешностей измерения

Теоретические сведения

Технические средства, используемые при измерениях и имеющие нормированные метрологические характеристики, называются средствами измерения.

При выборе измерительных средств и методов контроля изделий учитывают совокупность метрологических, эксплуатационных и экономических показателей. К метрологическим показателям относятся: допустимая погрешность измерительного прибора; цена деления шкалы; порог чувствительности; пределы измерения и др. К эксплуатационным и экономическим показателям относятся: стоимость и надежность измерительных средств; продолжительность работы (до ремонта); время, затрачиваемое на настройку и процесс измерения; масса, габаритные размеры и рабочая нагрузка.

На рис. 7.4 показаны кривые распределения размеров деталей ($y_{тех}$) и погрешностей измерения ($y_{мет}$) с центрами, совпадающими с границами допуска. В результате наложения кривых $y_{мст}$ и $y_{тех}$ происходит искажение кривой распределения $y(\sigma_{тех}, \sigma_{мет})$, появляются области вероятностей m и n, обусловливающие выход размера за границу допуска на величину c. Таким образом, чем точнее технологический процесс (меньше отношение $IT/\Delta_{мет}$), тем меньше неправильно принятых деталей по сравнению с неправильно забракованными.

Решающим фактором является допускаемая погрешность измерительного средства, что вытекает из стандартизованного определения действительного размера, как и размера, получаемого в результате измерения с допустимой погрешностью.

Допускаемые погрешности измерения $\delta_{изм}$ при приемочном контроле на линейные размеры до 500 мм устанавливаются ГОСТ 8.051–81, которые составляют 35–20 % от допуска на изготовление детали *IT*.

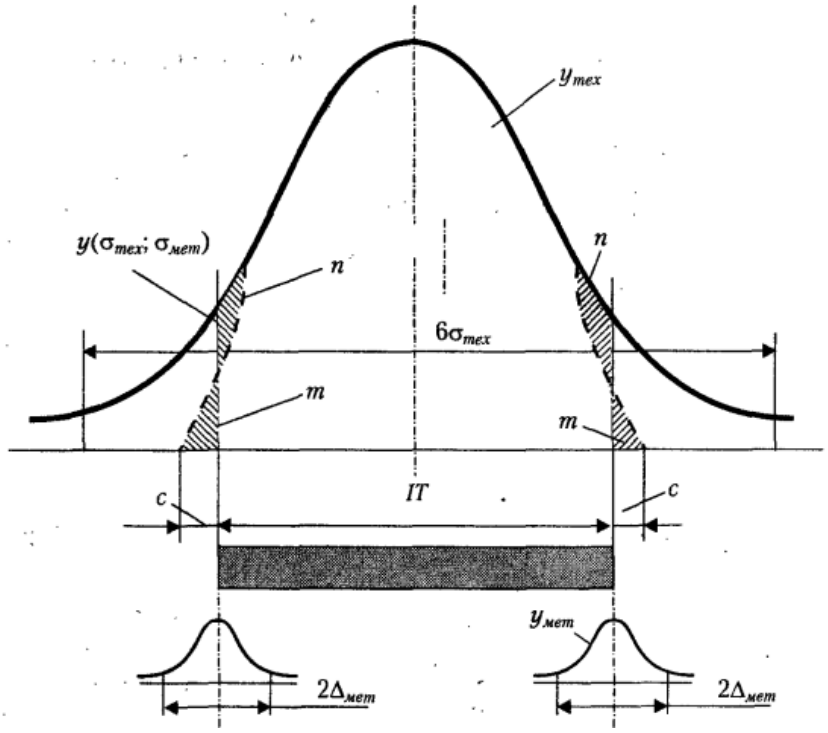


Рис. 7.4. Кривые распределения контролируемых параметров, построенные с учетом погрешностей измерения

Измерительные средства в зависимости от измеряемых размеров и допускаемых погрешностей измерения рекомендуется выбирать по табл. 7.4–7.7. Допускается использовать более точные средства измерения, кроме указанных в табл. 7.4.

Таблица 7.4

Универсальные средства измерения размеров с неуказанными допусками

Обозначения для табл. 7.5–7.7	Наименование измерительного средства и способ его применения	Цена деления или величина отсчета, мм	Диапазон измерения, мм	Условие измерения	
				Класс концевых мер длины	Температурный режим
1	2	3	4	5	6
1	Линейки измерительные металлические по ГОСТ 427–75	1,0	0–500	–	–
2	Штангенциркули по ГОСТ 166–80	0,1	0–630 (внутренние размеры от 10 мм)	–	–
3	Штангенциркули по ГОСТ 166–80	0,05	0–250 (внутренние размеры от 10 мм)	–	–

Окончание табл. 7.4

1	2	3	4	5	6
4	Микрометры по ГОСТ 6507–78	0,01	0–500	–	–
5	Индикаторные нутромеры по ГОСТ 868–82 при настройке на нуль по концевым мерам длины или по микрометру	0,01	6–100	4	5
			100–500	4	3
6	Штангенглубиномеры по ГОСТ 162–80	0,05	0–400	–	–
7	Глубиномеры микрометрические по ГОСТ 7470–78	0,01	0–150	–	5
8	Глубиномеры индикаторные по ГОСТ 7661–67 с настройкой на нуль по установочной мере	0,01	0–100	–	5

В табл. 7.5–7.7 на пересечении вертикальной колонки (квалитет) и горизонтальной строки (номинальные размеры) находится поле, в котором в виде дроби указан в числителе предел допускаемой погрешности измерения в микрометрах (мкм), а в знаменателе – условные обозначения измерительных средств из табл. 7.4.

Таблица 7.5

Выбор универсальных средств для измерения наружных размеров

Номинальные размеры, мм	Квалитет 12	Квалитеты 13, 14	Квалитеты 15, 16	Квалитет 17
Свыше 1–3	$\frac{50}{4}$	$\frac{100}{3}$	$\frac{150}{2}$	$\frac{150}{2}$
Свыше 3–6	$\frac{50}{4}$	$\frac{100}{3}$	$\frac{200}{2}$	$\frac{500}{1;2}$
Свыше 6–30	$\frac{100}{3}$	$\frac{200}{2}$	$\frac{300}{2}$	$\frac{500}{1;2}$
Свыше 30–120	$\frac{150}{2}$	$\frac{250}{2}$	$\frac{400}{2;4}$	$\frac{800}{1;2}$
Свыше 120–315	$\frac{200}{2;4}$	$\frac{300}{2;4}$	$\frac{600}{1;2;4}$	$\frac{1000}{1;2;4}$
Свыше 315–500	$\frac{300}{2;4}$	$\frac{500}{1;2;4}$	$\frac{1000}{1;2;4}$	$\frac{1500}{1;2;4}$

Таблица 7.6

Выбор универсальных средств для измерения внутренних размеров

Номинальные размеры, мм	Квалитет 12	Квалитеты 13, 14	Квалитеты 15, 16	Квалитет 17
Свыше 1–3	–	–	–	–
Свыше 3–6	–	–	–	–
Свыше 6–30	$\frac{100}{5}$	$\frac{200}{2}$	$\frac{300}{2}$	$\frac{500}{1;2}$
Свыше 30–120	$\frac{150}{3}$	$\frac{250}{2}$	$\frac{400}{2}$	$\frac{800}{1;2}$
Свыше 120–315	$\frac{200}{2}$	$\frac{300}{2}$	$\frac{600}{1;2}$	$\frac{1000}{1;2}$
Свыше 315–500	$\frac{300}{2}$	$\frac{500}{1;2}$	$\frac{1000}{1;2}$	$\frac{1500}{1;2}$

Примечание. Точность измерения внутренних размеров от 1 до 6 мм обеспечивается технологически размерами режущего инструмента. Контроль в случае необходимости можно проводить калибрами или специальными измерительными средствами.

Таблица 7.7

Выбор универсальных средств для измерения глубин и уступов

Номинальные размеры, мм	Квалитет 12	Квалитеты 13, 14	Квалитеты 15, 16	Квалитет 17
Свыше 1–3	$\frac{50}{7;8}$	$\frac{100}{6}$	$\frac{150}{2;6}$	$\frac{150}{2;6}$
Свыше 3–6	$\frac{50}{7;8}$	$\frac{100}{6}$	$\frac{200}{2;6}$	$\frac{500}{1;2}$
Свыше 6–30	$\frac{100}{6}$	$\frac{200}{2;6}$	$\frac{300}{2;6}$	$\frac{500}{1;2}$
Свыше 30–120	$\frac{150}{2;6}$	$\frac{250}{2;6}$	$\frac{400}{2;6}$	$\frac{800}{1;2}$
Свыше 120–315	$\frac{200}{6}$	$\frac{300}{6}$	$\frac{600}{1}$	$\frac{1000}{1}$
Свыше 315–500	$\frac{300}{6}$	$\frac{500}{1}$	$\frac{1000}{1}$	$\frac{1500}{1}$

Пример

Выбрать средство измерения для контроля длины изделия для измерения наружного размера $\frac{100}{13}$, где в виде дроби указан в числителе размер измеряемого изделия в мм, а в знаменателе – квалитет.

Решение

По табл. 7.5 определяем в поле на пересечении номинального размера и квалитета предел допускаемой погрешности измерения в микрометрах (мкм), указанный в числителе, и средство измерения – в знаменателе. Предел допускаемой погрешности измерения равняется 250 мкм, и средство измерения, определяемое по табл. 7.4, – штангенциркули по ГОСТ 166–80 с ценой деления 0,1 мм и диапазоном измерения для наружных размеров 0–630 мм.

Задание 7.1

Выбрать средство измерения для контроля размеров изделия, используя данные табл. 7.8, где в виде дроби указан в числителе размер измеряемого изделия, мм, а в знаменателе – квалитет.

Таблица 7.8

Выбор средств измерений

Вариант	Наружный размер	Внутренний размер	Размер глубин и уступов
1	$\frac{111}{13}$	$\frac{433}{17}$	$\frac{24}{17}$
2	$\frac{23}{12}$	$\frac{282}{16}$	$\frac{4,9}{15}$
3	$\frac{5}{14}$	$\frac{35}{14}$	$\frac{1,8}{14}$
4	$\frac{1,3}{15}$	$\frac{12}{12}$	$\frac{2,9}{12}$
5	$\frac{3,7}{17}$	$\frac{14}{14}$	$\frac{5,4}{13}$
6	$\frac{19}{16}$	$\frac{84}{15}$	$\frac{7}{16}$
7	$\frac{134}{12}$	$\frac{144}{17}$	$\frac{61}{17}$
8	$\frac{49}{12}$	$\frac{367}{16}$	$\frac{302}{15}$
9	$\frac{134}{12}$	$\frac{138}{13}$	$\frac{369}{14}$
10	$\frac{227}{115}$	$\frac{87}{12}$	$\frac{218}{12}$

Продолжение табл. 7.8

Вариант	Наружный размер	Внутренний размер	Размер глубин и уступов
11	$\frac{102}{17}$	$\frac{17}{15}$	$\frac{42}{13}$
12	$\frac{9,4}{16}$	$\frac{86}{17}$	$\frac{16}{16}$
13	$\frac{4,2}{13}$	$\frac{291}{16}$	$\frac{3,7}{17}$
14	$\frac{1,6}{12}$	$\frac{467}{14}$	$\frac{2,2}{17}$
15	$\frac{2,1}{14}$	$\frac{308}{12}$	$\frac{5,1}{15}$
16	$\frac{5,8}{15}$	$\frac{92}{13}$	$\frac{23}{14}$
17	$\frac{13}{17}$	$\frac{27,5}{15}$	$\frac{66}{12}$
18	$\frac{64}{16}$	$\frac{13}{17}$	$\frac{237}{13}$
19	$\frac{198}{13}$	$\frac{183}{17}$	$\frac{417}{16}$
20	$\frac{397}{13}$	$\frac{457}{16}$	$\frac{343}{17}$
21	$\frac{211}{12}$	$\frac{172}{14}$	$\frac{121}{15}$
22	$\frac{93}{14}$	$\frac{49}{12}$	$\frac{73}{14}$
23	$\frac{23}{15}$	$\frac{16}{13}$	$\frac{15}{12}$
24	$\frac{5,9}{17}$	$\frac{53}{15}$	$\frac{4,7}{13}$
25	$\frac{2,3}{17}$	$\frac{134}{17}$	$\frac{1,9}{16}$
26	$\frac{4,1}{16}$	$\frac{8}{17}$	$\frac{3,2}{17}$

Окончание табл. 7.8

Вариант	Наружный размер	Внутренний размер	Размер глубин и уступов
27	$\frac{12}{13}$	$\frac{31}{16}$	$\frac{29}{15}$
28	$\frac{46}{12}$	$\frac{195}{14}$	$\frac{37}{14}$
29	$\frac{142}{14}$	$\frac{391}{12}$	$\frac{278}{12}$
30	$\frac{327}{16}$	$\frac{14}{13}$	$\frac{407}{13}$
31	$\frac{264}{17}$	$\frac{247}{15}$	$\frac{2}{12}$
32	$\frac{81}{15}$	$\frac{42}{17}$	$\frac{4}{14}$
33	$\frac{9,1}{13}$	$\frac{324}{14}$	$\frac{12}{16}$
34	$\frac{3,3}{12}$	$\frac{201}{12}$	$\frac{98}{17}$
35	$\frac{2,7}{14}$	$\frac{71}{15}$	$\frac{204}{16}$

Выбор средств измерений для контроля длины изделия с учетом суммарной погрешности

Теоретические сведения

Расчет погрешности при выборе методов и средств измерений выполняют в соответствии с требованиями ГОСТ 26433.0–85.

Методы и средства измерений принимаем в соответствии с характером объекта и измеряемых параметров из условия

$$\delta x_{\sum \text{мет}} \le \delta x_{\text{мет}},$$

где $\delta x_{\sum \text{мет}}$ – расчетная суммарная погрешность принимаемого метода и средства измерения; $\delta x_{\text{мет}}$ – предельная погрешность измерения.

Вычисляем расчетную погрешность измерения по одной из формул:

$$\delta x_{\sum \text{мет}} = \sqrt{\sum_{p=1}^{r} K_p^2 \delta x_p^2 + \left(\sum_{q=1}^{u} K_q \theta x_q \right)^2}$$

или

$$\delta x_{\sum \text{мет}} = 2{,}5\sigma x_{\sum \text{мет}} = \sqrt{\sum_{p=1}^{r} K_p^2 \sigma^2 x_p + \left(\sum_{q=1}^{u} K_q \sigma x_q \right)^2},$$

где δx_p – случайные составляющие погрешности; θx_q – систематические составляющие погрешности; σx_p – средние квадратические случайные составляющие погрешности; σx_q – средние квадратические систематические составляющие погрешности; p = 1, 2...r – число случайных составляющих погрешностей; q = 1, 2...u – число систематических составляющих погрешностей; K_p, K_q – коэффициенты, учитывающие характер зависимости между суммарной и каждой из составляющих погрешностей измерения.

При расчете по указанным формулам принимаем, что составляющие погрешности независимы между собой или слабо коррелированы.

Предельную погрешность $\delta x_{\text{мет}}$ определяем из условия

$$\delta x_{\sum \text{мет}} \le K \cdot \Delta x,$$

где Δx – допуск измеряемого геометрического параметра, установленный нормативно-технической документацией на объект измерения; K – коэффициент, зависящий от цели измерений и характера объекта.

Для измерений, выполняемых в процессе и при контроле точности изготовления и установки элементов, а также при контроле точности разбивочных работ принимаем K = 0,2. Для измерений, выполняемых в процессе производства разбивочных работ, K = 0,4.

Действительная погрешность $\delta x_{s\text{мет}}$ выполненных измерений не должна превышать ее предельного значения.

Для случаев, когда процесс измерения состоит из большого числа отдельных операций, на основе принципа равных влияний определяем среднее значение составляющих погрешностей $\delta x_{p,q}$ по формуле

$$\delta x_{p,q} = \frac{\delta x_{\text{мет}}}{\sqrt{r + u^2}},$$

где r – число случайных составляющих погрешностей; u – число систематических составляющих погрешностей.

Выделяем те составляющие погрешности, которые легко могут быть уменьшены, увеличивая соответственно значения тех составляющих погрешностей, которые трудно обеспечить имеющимися методами и средствами.

Проверяем соблюдение условия, и в случае несоблюдения этого условия назначаем более точные средства или принимаем другой метод измерения.

Пример

Выбрать средство измерения для контроля длины изделия, L = 3600 ± 2,0 мм (Δx = 4 мм, ГОСТ 21779–82) с учетом суммарной погрешности.

Решение

1. Определяем предельную погрешность измерения $\delta x_{\text{мет}}$:

$$\delta x_{\text{мет}} = K \cdot \Delta x = 0{,}2 \cdot 4{,}0 = 0{,}8 \text{ мм}.$$

2. Для выполнения измерений применяем, например, 10-метровую металлическую рулетку 3-го класса точности ЗПКЗ-10АУТ/1О ГОСТ 7502–80.

3. В суммарную погрешность измерения длины изделия рулеткой входят составляющие погрешности: θx_1 – поверки рулетки; θx_2 – от погрешности измерения температуры окружающей среды; θx_3 – от колебания силы натяжения рулетки; θx_4 – снятия отсчетов по шкале рулетки на левом и правом краях изделия.

Определяем значения этих погрешностей.

3.1. Погрешность θx_1 поверки рулетки в соответствии с МИ 1780-87 [11] принимаем равной 0,2 мм.

3.2. Погрешность θx_2 от изменения температуры окружающей среды термометром с ценой деления 1 °С (погрешность измерения равна 0,5 °С) составляет

$$\theta x_2 = L\alpha\Delta t = 3600 \cdot 12{,}5 \cdot 10^{-6} \cdot 0{,}5 \approx 0{,}22 \text{ мм}.$$

3.3. Погрешность θx_3 от колебания силы натяжения рулетки составляет

$$\theta x_3 = \frac{L\Delta P}{FE} = \frac{3600 \cdot 10}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} = 0{,}09 \approx 0{,}1 \text{ мм},$$

где $\Delta P = 10$ Н – погрешность натяжения рулетки вручную; $F = 2$ мм^2 – площадь поперечного сечения рулетки; $E = 2 \cdot 10^5$ Н/мм – модуль упругости материала рулетки.

3.4. Экспериментально установлено, что погрешность снятия отсчета по шкале рулетки не превышает 0,3 мм, при этом погрешность δx_4 снятия отсчетов на левом и правом краях изделия составит

$$\theta x_4 = 0,3\sqrt{2} \approx 0,4 \text{ мм}.$$

4. Определяем расчетную суммарную погрешность измерения по формуле, учитывая, что θx_1 – систематическая погрешность, а δx_2, δx_3 и δx_4 – случайные:

$$\delta x_{\sum \text{мет}} = \sqrt{\delta x_2^2 + \delta x_3^2 + \delta x_4^2 + \theta x_1^2} = \sqrt{0,26} \approx 0,5 \text{ мм}.$$

5. Данные метод и средство измерения могут быть приняты для выполнения измерений, так как расчетная суммарная погрешность измерения $\delta x_{\sum \text{мет}} = 0,5$ мм меньше предельной $\delta x_{\text{мет}} = 0,8$ мм, что соответствует требованию.

Задание 7.2

По вышеописанному алгоритму произвести выбор средства измерения с учетом погрешности, используя данные табл. 7.9.

Таблица 7.9

Исходные данные

Вариант	L, мм	Δx, мм	α	Δt, °С	ΔP, Н	F, мм^2	E, Н/мм
1	3150 ± ± 2,0	4	$12,5 \cdot 10^{-6}$	0,2	7	2	$2 \cdot 10^5$
2	6000 ± ± 4,0	8	$12,5 \cdot 10^{-6}$	0,5	12	1,6	$2 \cdot 10^5$
3	4000 ± ± 6,0	12	$12,5 \cdot 10^{-6}$	1,0	10	3	$2 \cdot 10^5$
4	2800 ± ± 1,0	2	$12,5 \cdot 10^{-6}$	0,7	9	2,5	$2 \cdot 10^5$
5	4500 ± ± 3,0	6	$12,5 \cdot 10^{-6}$	0,3	11	1	$2 \cdot 10^5$
6	6700 ± ± 5,0	10	$12,5 \cdot 10^{-6}$	2,0	8	2	$2 \cdot 10^5$
7	3150 ± ± 4,0	8	$12,5 \cdot 10^{-6}$	0,4	12	1,6	$2 \cdot 10^5$
8	6000 ±	12	$12,5 \cdot 10^{-6}$	1,5	10	3	$2 \cdot 10^5$

Вариант	L, мм	Δx, мм	α	Δt, °С	ΔP, Н	F, мм^2	E, Н/мм
	± 6,0						
9	4000 ± ± 1,0	2	$12{,}5\cdot10^{-6}$	0,7	9	2	$2\cdot10^5$

Продолжение табл. 7.9

Вариант	L, мм	Δx, мм	α	Δt, оС	ΔP, Н	F, мм2	E, Н/мм
10	2800 ± ± 3,0	6	$12{,}5\cdot10^{-6}$	0,3	11	1,6	$2\cdot10^5$
11	4500 ± ± 2,0	4	$12{,}5\cdot10^{-6}$	2,0	7	3	$2\cdot10^5$
12	3150 ± ± 4,0	8	$12{,}5\cdot10^{-6}$	0,4	12	2,5	$2\cdot10^5$
13	6700 ± ± 6,0	12	$12{,}5\cdot10^{-6}$	1,5	8	1	$2\cdot10^5$
14	3150 ± ± 1,0	2	$12{,}5\cdot10^{-6}$	0,2	12	2	$2\cdot10^5$
15	4000 ± ± 3,0	6	$12{,}5\cdot10^{-6}$	0,5	10	1,6	$2\cdot10^5$
16	2800 ± ± 5,0	10	$12{,}5\cdot10^{-6}$	1,0	9	3	$2\cdot10^5$
17	6700 ± ± 4,0	8	$12{,}5\cdot10^{-6}$	0,7	11	2	$2\cdot10^5$
18	4500 ± ± 6,0	12	$12{,}5\cdot10^{-6}$	0,7	7	1,6	$2\cdot10^5$
19	4000 ± ± 1,0	2	$12{,}5\cdot10^{-6}$	0,3	12	3	$2\cdot10^5$
20	6000 ± 3,0	6	$12{,}5\cdot10^{-6}$	2,0	7	2,5	$2\cdot10^5$
21	6700 ± ± 2,0	4	$12{,}5\cdot10^{-6}$	0,4	12	1	$2\cdot10^5$
22	4000 ± ± 4,0	8	$12{,}5\cdot10^{-6}$	1,5	10	2	$2\cdot10^5$
23	3150 ± ± 6,0	12	$12{,}5\cdot10^{-6}$	0,3	10	1,6	$2\cdot10^5$
24	6700 ± ± 1,0	2	$12{,}5\cdot10^{-6}$	2,0	9	3	$2\cdot10^5$
25	4000 ± ± 3,0	6	$12{,}5\cdot10^{-6}$	0,4	11	2	$2\cdot10^5$

26	6000 ± ± 5,0	10	$12{,}5 \cdot 10^{-6}$	1,5	8	1,6	$2 \cdot 10^5$
27	2800 ± ± 4,0	8	$12{,}5 \cdot 10^{-6}$	0,3	12	3	$2 \cdot 10^5$

Окончание табл. 7.9

Вариант	L, мм	Δx, мм	α	Δt, °С	ΔP, Н	F, мм^2	E, Н/мм
28	4500 ± ± 6,0	12	$12{,}5 \cdot 10^{-6}$	2,0	10	2,5	$2 \cdot 10^5$
29	6700 ± ± 1,0	2	$12{,}5 \cdot 10^{-6}$	0,4	9	1	$2 \cdot 10^5$
30	6700 ± ±3,0	6	$12{,}5 \cdot 10^{-6}$	1,5	11	2	$2 \cdot 10^5$
31	2800 ± ± 2,0	4	$12{,}5 \cdot 10^{-6}$	0,7	12	1,6	$2 \cdot 10^5$
32	4000 ± ± 4,0	8	$12{,}5 \cdot 10^{-6}$	0,3	7	3	$2 \cdot 10^5$

Контрольные вопросы

1. Назовите общие положения выбора средства измерения.
2. Какие существует принципы выбора средств измерений?
3. Дайте характеристику принципа выбора средства измерения по коэффициенту уточнения.
4. От каких параметров зависит коэффициент уточнения?
5. Дайте характеристику принципа выбора средства измерения по принципу безошибочности контроля.
6. Что оценивают в первую очередь при выборе средства измерения по принципу безошибочного контроля?

Практическое занятие № 8.
Оценка точности произведенных измерений

Цель занятия

Ознакомление с общими положениями и принципами оценки точности произведенных измерений. Приобретение практических навыков оценки точности произведенных измерений.

Теоретические сведения

1. Оценка точности измерений производится по ГОСТ 26433.0–85 [1]:

– до начала измерений путем обработки результатов специально выполненных наблюдений;

– после окончания измерений путем обработки результатов наблюдений, выполненных в процессе этих измерений.

2. Для оценки точности измерений используются многократные наблюдения параметра в одном из установленных сечений (мест) или двойные наблюдения параметра в разных сечениях (местах) одного или нескольких объектов измерений.

Общее число наблюдений *M*, необходимое для оценки точности результата измерений, составляет:

– для предварительной оценки – 20;

– для оценки точности выполненных измерений – не менее 6.

Для уменьшения влияния систематических погрешностей на результат измерения наблюдения производят в прямом и обратном направлениях, на разных участках шкалы отсчетного устройства, меняя установку и настройку прибора и соблюдая другие приемы, указанные в инструкции по эксплуатации на средства измерения. При этом должны быть соблюдены условия равноточности наблюдений (выполнение наблюдений одним наблюдателем, тем же методом, с помощью одного и того же прибора и в одинаковых условиях).

Перед началом наблюдений средства измерений следует выдерживать на месте измерений до выравнивания температур этих средств и окружающей среды.

3. Оценка точности измерений производится путем определения действительной погрешности измерения $\delta x_{s\text{мет}}$ и сравнения ее с предельной погрешностью $\delta x_{\text{мет}}$.

В случаях, когда нормирована относительная погрешность измерения, определяется действительная относительная погрешность.

4. Действительная погрешность измерения при многократных наблюдениях определяется по формуле

$$\delta x_{s\text{мет}} = tS_{x\text{мет}},$$

где $S_{x\text{мет}}$ – среднее квадратическое отклонение измерения; t – коэффициент (принимают по табл. 8.1).

Таблица 8.1

Значения коэффициента *t*

Доверительные вероятности	*M*			
	20	10	8	6
0,95	2	2,3	2,4	2,6
0,99	2,5	3,2	3,5	4,0

Среднее квадратическое отклонение измерения при многократных наблюдениях параметра определяется по формуле

$$S_{x\text{мет}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{M}\left(x_j - \overline{x}\right)^2}{m\left(M-1\right)}},$$

где x_j – результат наблюдения; $\overline{x}$ – результат измерения, полученный по многократным наблюдениям параметра (среднее арифметическое); M – число равноточных результатов наблюдений, выполняемых для предварительной оценки; m – число наблюдений параметра, выполняемых при контроле в данном сечении (месте).

Если при измерениях используются средства и методы, для которых из специально выполненных ранее измерений или из эксплуатационной документации установлено среднее квадратическое отклонение наблюдения $S_{\text{мет}}$, то действительная погрешность измерения определяется по формуле

$$\delta x_{s\text{мет}} = t\frac{S_{\text{мет}}}{\sqrt{m}}.$$

5. Действительная погрешность результата измерения при двойных наблюдениях параметра в одном из установленных сечений (местах) оценивается по формуле

$$\delta x_{s\,\text{мет}} = \left|\theta x_{m\,\text{мет}}\right| + tS_{x\,\text{мет}},$$

где $\left|\theta x_{m\,\text{мет}}\right|$ – абсолютное значение остаточной систематической погрешности, численное значение которой определено из обработки ряда двойных наблюдений.

Пример

Произвести предварительную оценку точности измерений длинномером длины изделий при контроле точности их изготовления.

Решение

Измерение длины каждого изделия в процессе контроля будет производиться при числе наблюдений $m = 2$.

Выполняем многократные наблюдения длины одного изделия при числе наблюдений $M = 10$. Для уменьшения влияния систематической погрешности первые пять наблюдений выполняем в одном направлении, каждый раз со сдвигом шкалы рулетки на 70–90 мм, а вторые пять наблюдений – в другом направлении с тем же сдвигом шкалы.

Результаты наблюдений и последовательность их обработки приведены в табл. 8.2 (приведены результаты 10 наблюдений, т.е. $M = 10$).

Таблица 8.2

Обработка исходных данных

Номера наблюдений	Отсчеты по длинномеру		Размеры, полученные в результате наблюдений	$x_j - x_0$	$\left(x_j - x_0\right)^2$	$\overline{x} - x_j$	$\left(\overline{x} - x_0\right)^2$
	Левая грань	Правая грань					
	Прямо						
1	0	3205	3205	5	25	0	0
2	7	3216	3209	9	81	–4	16
3	14	3219	3205	5	25	0	0
4	21	3221	3200	0	0	5	25
5	29	3232	3203	3	9	2	4
	Обратно						
6	36	3244	3208	8	64	–3	9
7	43	3245	3202	2	4	3	9
8	50	3257	3207	7	49	–2	4
9	57	3265	3208	8	64	–3	9
10	64	3269	3205	5	25	0	0
				$\sum 52$	$\sum 346$	$\sum -2$	$\sum 76$

1. Определяем среднее арифметическое из результатов измерений:

$$\overline{x} = x_0 + \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_0)}{n} = 3200 + \frac{52}{10} = 3205,2 \text{ мм}.$$

Принимаем $\overline{x}$ = 3205,0 мм с ошибкой округления a = –0,2 мм; x_0 – наименьший результат из всех наблюдений, x_0 = 3200 мм.

Контроль правильности вычислений:

$$\sum_{j=1}^{M}\left(\overline{x} - x_j\right) = a \cdot M = -0,2 \cdot 10 = -2 \text{ мм};$$

$$\sum_{j=1}^{M}\left(\overline{x} - x_j\right)^2 = \sum_{j=1}^{M}\left(x_j - x_0\right)^2 - \frac{\left[\sum_{j=1}^{M}\left(x_j - x_0\right)\right]^2}{M} = 346 - \frac{52^2}{10} = 75,6 \text{ мм}.$$

2. Среднее квадратическое отклонение результата измерений находим по формуле

$$S_{x\,\text{мет}} = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{M}\left(x_j - \overline{x}\right)^2}{m\left(M-1\right)}} = \sqrt{\frac{76}{2\left(10-1\right)}} = 2,0 \text{ мм}.$$

3. Действительная погрешность измерения будет составлять

$$\delta x_{s\text{мет}} = tS_{x\,\text{мет}} = 2,5 \cdot 2,0 = 5,0 \text{ мм}.$$

4. Предельную погрешность измерения находим по формуле

$$\delta x_{\text{мет}} = K \cdot \Delta x.$$

При допуске на длину 16,5 мм по 16 квалитету имеем

$$\delta x_{\text{мет}} = 0,2 \cdot 16,5 = 3,3 \text{ мм}.$$

Проверяем соблюдение условия $\delta x_{\sum\text{мет}} \le \delta x_{\text{мет}}$, которое не выполняется, так как 5,0 > 3,3 мм.

Действительная погрешность измерения не соответствует требуемой, должны быть приняты другие средства измерений или увеличено количество наблюдений m. Принимаем m = 5, тогда

$$S_{x\,\text{мет}} = \sqrt{\frac{76}{5\left(10-1\right)}} = 1,29 \text{ мм};$$

$$\delta x_{\text{мет}} = 2,5 \cdot 1,29 = 3,2 \text{ мм}.$$

В этом случае условие выполняется, так как 3,2 мм < 3,3 мм.

Задание 8.1

По вышеописанному алгоритму произвести оценку точности произведенных измерений, заполнить табл. 8.3.

Таблица 8.3

Исходные данные

Номера наблюдений	Отсчеты по длинномеру		Размеры, полученные в результате наблюдений	$x_j - x_0$	$(x_j - x_0)^2$	$\overline{x} - x_j$	$(\overline{x} - x_0)^2$
	Левая грань	Правая грань					
	Прямо						
1	0	6175					
2	6	6186					
3	14	6189					
4	21	6191					
5	28	6202					
6	36	6214					
7	43	6215					
8	50	6227					
9	57	6235					
10	64	6239					
	Обратно						
11	72	6250					
12	78	6253					
13	84	6255					
14	90	6266					
15	96	6277					
16	103	6289					
17	110	6290					
18	117	6302					
19	124	6310					
20	132	6314					
				$\sum =$	$\sum =$	$\sum =$	$\sum =$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. ГОСТ 26433.0–85. Система обеспечения точности геометрических параметров. Правила выполнения измерений.
2. ГОСТ 8.051–81. Государственная система обеспечения единства измерений. Погрешности, допускаемые при измерении линейных размеров до 500 мм.
3. ГОСТ 8.549–86. Государственная система обеспечения единства измерений. Погрешности, допускаемые при измерении линейных размеров до 500 мм с неуказанными допусками М. : Стандартинформ, 1986. 5 с.
4. ГОСТ Р 8.736–2011. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения. М. : Стандартинформ, 2013. 20 с.
5. Димов Ю. В. Метрология, стандартизация и сертификация : учебник для вузов. 4-е изд. [Стандарт третьего поколения]. СПб. : Питер, 2013. 496 с.
6. Об обеспечении единства измерений : Закон РФ. URL: www.gost.ru (дата обращения 25.11.2024).
7. О техническом регулировании : закон РФ № 184-ФЗ от 27 декабря 2002 г. : [с изм. от 9 мая 2005 г., 1 мая 2007 г.]. URL: www.gost.ru (дата обращения 25.11.2024).
8. Метрология, стандартизация и сертификация. Часть I: метод. указания по выполнению практических работ для студентов строительных и механических специальностей очной и заочной форм обучения / сост. В. А. Норин, В. Н. Гордиенко, Н. В. Овчинников ; СПбГАСУ. СПб., 2009. 56 с.
9. Радкевич Я. М., Схиртладзе А. Г., Лактионов Б. И. Метрология, стандартизация и сертификация : учебник для вузов. М. : Абрис, 2012. 791 с.
10. МИ 1730–87 ГСИ. Погрешности косвенных измерений характеристик процессов. Методика расчета.
11. МИ 1780–87 Методические указания. ГСОЕИ. Ленты образцовые и рулетки металлические измерительные. Методика поверки : [дата актуализации: 01.01.2021; заменяет собой ГОСТ 8.301–78. ГСИ. Меры длины штриховые. Ленты образцовые и рулетки измерительные металлические. Методы и средства поверки].

12. Муратшин А. М., Сафин Э. В., Сафина А. Ф. Метрология, стандартизация и сертификация: практикум. Уфа : Центр оперативной полиграфии УГАТУ, 2007. 55 с.

13. Р 50.2.038–2004. Рекомендации по метрологии. Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения прямые однократные. Оценивание погрешностей и неопределенности результата измерений.

14. РМГ 29–2013. Государственная система обеспечения единства измерений. Метрология. Основные термины и определения.

15. Сергеев А. Г., Терегеря В. В. Метрология, стандартизация, сертификация : учебник. М. : Юрайт, 2011. 820 с.

Учебное издание

Таранцев Константин Валентинович,
Сорокина Наталья Владимировна

МЕТРОЛОГИЯ

Редактор *В. В. Устинская*
Технический редактор *В. А. Гущин*
Компьютерная верстка *В. А. Гущина*

Подписано в печать 18.06.2025.
Формат 60×84 1/16. Усл. печ. л. 6,45.
Заказ № 237. Тираж 50.

Издательство ПГУ.
440026, г. Пенза, ул. Красная, 40.
Тел.: (8412) 66-60-49, 66-67-77; e-mail: iic@pnzgu.ru

Вниманию авторов!

Издательство ПГУ выпускает учебную, научную и художественную литературу, презентационную и акцидентную продукцию, а также полноцветные юбилейные и мемориальные издания в соответствии с ГОСТ 7.60–2003.

Издательство ПГУ принимает к изданию рукописи, подготовленные с использованием текстового редактора Microsoft Word for Windows версий **2003 и выше**. Формат – А4, основной шрифт – Times New Roman, 14–16 pt через одинарный интервал (минимальный размер шрифта в таблицах и сносках – 12,5 pt). Тип файла в электронном виде – doc, docx.

Работа должна содержать индекс УДК, аннотацию.

Аннотация (ГОСТ 7.86–2003, ГОСТ 7.9–1995) включает характеристику основной темы, проблемы объекта, цели работы и ее результаты. В аннотации указывают, что нового несет в себе данный документ в сравнении с другими, родственными по тематике и целевому назначению. Аннотация может включать сведения о достоинствах произведения. Текст аннотации начинают фразой, в которой сформулирована главная тема документа. Заканчивается аннотация читательским адресом.

Рисунки и таблицы должны быть размещены в тексте после ссылки на них (растровые рисунки предоставляются в виде отдельных файлов в формате jpg, BMP с разрешением 300 dpi, векторные рисунки в формате Corel Draw с минимальной толщиной линии 0,75 pt. Рисунки должны быть доступны для правки!). Рисунки должны сопровождаться подрисуночными подписями, на все рисунки и таблицы в тексте должны быть ссылки.

Формулы в тексте выполняются только в редакторе формул **MathType версия 5.0** и выше. Символы греческого и русского алфавита должны быть набраны прямо, нежирно; латинского – курсивом, нежирно; обозначения векторов и матриц – прямо, жирно; цифры – прямо, нежирно. Наименования химических элементов набираются прямо, нежирно. Эти же требования необходимо соблюдать и в рисунках.

В списке литературы **нумерация источников** должна соответствовать очередности ссылок на них в тексте ([1], [2], …). Номер источника указывается в квадратных скобках. Требования к оформлению списка литературы на русские и иностранные источники (ГОСТ Р 7.0.5–2008): для книг – фамилия и инициалы автора, название, город, издательство, год издания, том, количество страниц; для журнальных статей, сборников трудов – фамилия и инициалы автора, название статьи, полное название журнала или сборника, серия, год, том, номер, страницы; для материалов конференций – фамилия и инициалы автора, название статьи, название конференции, город, издательство, год, страницы.

К материалам **должна** прилагаться следующая информация: фамилия, имя, отчество, контактные телефоны.

Контакты Издательства ПГУ: т.: (8412) 66-60-49, 66-67-77, e-mail: iic@pnzgu.ru

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пензенский государственный университет»

К. В. Таранцев, Н. В. Сорокина

МЕТРОЛОГИЯ

Учебно-методическое пособие

ПЕНЗА 2025

ПензГУ