

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРАЦИЙ ПЛАСТИН

А. Е. Хохлов¹, С. В. Пронькин²

^{1,2}Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
¹hohlov59@mail.ru, ²pronkin_2016@inbox.ru

Аннотация. *Актуальность и цели.* При проектировании и разработке методов активного управления вибрациями системы необходимо исследование динамических характеристик двумерной прямоугольной пластины при различных граничных условиях. *Материалы и методы.* Разработан алгоритм моделирования динамического поведения пластины путем дискретизации дифференциального уравнения динамики пластины с помощью метода конечных разностей. *Результаты.* Алгоритм реализован в среде Lazarus и позволяет подавать и воспринимать сигнал возмущения в любой точке сетки на пластине при различных граничных условиях. Проведенное исследование позволило вывести условие устойчивости алгоритма. Параметр устойчивости для пластин любого вида и для любых шагов дискретизации по пространству и времени должен лежать в интервале от 0,023 до 0,068. *Выводы.* Разработанный и проверенный таким образом алгоритм моделирования представляет собой подходящую платформу для тестирования и проверки в последующих исследованиях активного управления вибрациями для гибких пластинчатых конструкций.

Ключевые слова: гибкая пластина, метод конечных разностей, динамическое моделирование, граничные условия, устойчивость алгоритма, шаги дискретизации по времени и пространству, прогибы пластины

Для цитирования: Хохлов А. Е., Пронькин С. В. Конечно-разностное моделирование вибраций пластин // Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе. 2026. № 2. С. 172–183. doi: 10.21685/2227-8486-2026-2-11

FINITE-DIFFERENCE MODELING OF PLATE VIBRATIONS

A.E. Khokhlov¹, S.V. Pronkin²

^{1,2}Penza State University, Penza, Russia
¹hohlov59@mail.ru, ²pronkin_2016@inbox.ru

Abstract. *Background.* When designing and developing methods for active vibration control of a system, it is necessary to study the dynamic characteristics of a two-dimensional rectangular plate under various boundary conditions. *Materials and methods.* An algorithm has been developed for modeling the dynamic behavior of a plate by discretizing the plate's differential equation of motion using the finite difference method. *Results.* The algorithm is implemented. The stability parameter for plates of any type and for any space and time discretization steps should lie in the range from 0,023 to 0,068. *Conclusions.* The modeling algorithm developed and verified in this way provides a suitable platform for testing and validation in subsequent studies of active vibration control for flexible plate structures.

Keywords: flexible plate, finite difference method, dynamic modeling, boundary conditions, algorithm stability, time and space discretization steps, plate deflections

For citation: Khokhlov A.E., Pronkin S.V. Finite-difference modeling of plate vibrations. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve* = *Models, systems, networks in economics, technology, nature and society*. 2026;(2):172–183. (In Russ.). doi: 10.21685/2227-8486-2026-2-11

Введение

Проблема поведения тонких изотропных прямоугольных пластин представляет собой не только теоретический, но и практический интерес, так как плоские пластины находят множество применений в промышленности. Примерами могут служить настилы мостов, солнечные батареи, электронные печатные платы и корпуса транспортных средств. Управление вибрирующей пластиной является трудной задачей из-за крайне нелинейной природы динамики системы, которая включает в себя сложные процессы. Модель, описывающая динамику гибкой пластины, может быть построена с помощью дифференциальных уравнений в частных производных [1–6].

В этой работе рассмотрено динамическое уравнение движения гибкой пластины, где предполагается, что пластина имеет небольшой прогиб w . В [3–6] указано соотношение $w < 0,2h$, где w – максимальный ожидаемый прогиб, а h – толщина пластины:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{q}{D}, \quad (1)$$

где $w = w(x, y, t)$ – прогиб пластины (искомое решение), зависящий от координат x и y и времени t ; ρ – плотность материала пластины (кг/м^3); $q = q(x, y, t)$ – поперечная внешняя сила с размерностью силы на единицу площади (Н/м^2);

$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ – ускорение прогиба (м/с^2); $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – цилиндрическая жесткость

материала при изгибе пластины (Нм); ν – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга (Н/м^2).

Решение этого уравнения может быть получено путем учета соответствующих граничных и начальных условий.

Материалы и методы

Метод конечных разностей вычисляет решения модели только в дискретных узловых точках [7–9]. Для этого область пластины разбивается на узловые точки, и каждая точка нумеруется индексами. На рис. 1 показана двумерная область (x, y) , разбитая на узловые точки. По оси X используется индекс i , а по оси Y – индекс j . Расстояние между 2 точками называется шагом сетки. Чаще всего используется равномерная дискретизация с одинаковым шагом сетки Δ_{xy} по осям X и Y . Тогда $x = i\Delta_{xy}$ и $y = j\Delta_{xy}$. Если какую-то точку обозначить индексами (i, j) , то соседние точки будут иметь индексы $(i - 1, j)$, $(i + 1, j)$, $(i, j - 1)$, $(i, j + 1)$ и т.д.

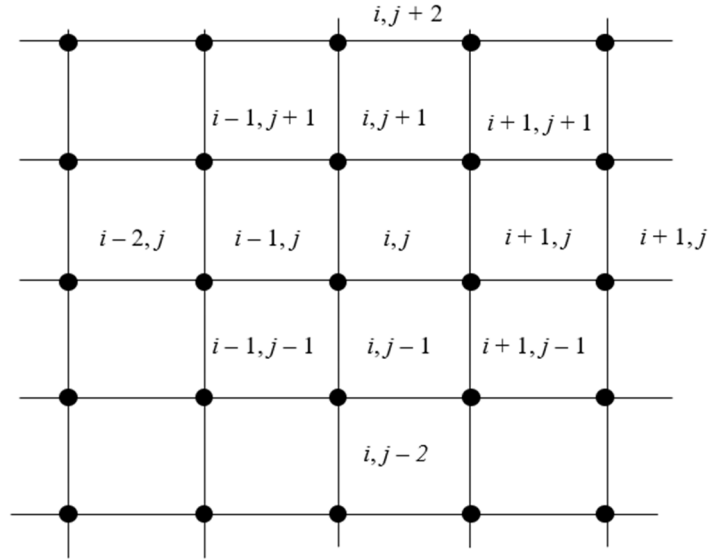


Рис. 1. Конечно-разностная дискретизация по пространственным координатам

Дополнительным измерением является время t . Ось времени обозначается индексом k , где $t = k\Delta t$.

Для каждой узловой точки внутри сетки (x_i, y_j, t_k) ($i = 0, 1, \dots, n; j = 0, \dots, m$ и $k = 0, 1, \dots, p$) используется разложение в ряд Тейлора для получения центральных конечных разностей членов с частными производными прогиба пластины $w(x, y, t) = w_{i,j,k}$ в точке $x = i\Delta_{xy}$, $y = j\Delta_{xy}$ и $t = k\Delta t$ [7].

Подставим значения частных производных в уравнение (1) и обозначим через $Aw_{i,j,k}$ конечно-разностный оператор по пространству:

$$Aw_{i,j,k} = 20w_{i,j,k} - 8(w_{i+1,j,k} + w_{i,j+1,k} + w_{i-1,j,k} + w_{i,j-1,k}) + \\ + 2(w_{i+1,j+1,k} + w_{i-1,j+1,k} + w_{i-1,j-1,k} + w_{i+1,j-1,k}) + \\ + (w_{i+2,j,k} + w_{i,j+2,k} + w_{i-2,j,k} + w_{i,j-2,k}). \quad (2)$$

Выделив в явном виде решение (прогиб) в каждой узловой точке (i, j) на следующем временном шаге $k + 1$, получаем следующее [8]:

$$w_{i,j,k+1} = -\frac{D\Delta t^2}{\rho h \Delta_{xy}^4} Aw_{i,j,k} + 2w_{i,j,k} - w_{i,j,k-1} + \frac{q_{i,j,k}\Delta t^2}{\rho h}. \quad (3)$$

Обозначив

$$c = \frac{D\Delta t^2}{\rho h \Delta_{xy}^4} \quad (4)$$

$$\text{и } b = \frac{\Delta t^2}{\rho h}, \quad (5)$$

получаем следующее:

$$w_{i,j,k+1} = 2w_{i,j,k} - cAw_{i,j,k} - w_{i,j,k-1} + bq_{i,j,k}, \quad (6)$$

где $q_{i,j,k}$ – внешняя сила, которая изменится во времени по гармоническому закону с частотой ν и амплитудой F :

$$q_{i,j,k} = F_{i,j,k} \sin(2\pi\nu t) = F_{i,j} \sin(2\pi\nu k\Delta t). \quad (7)$$

Для дискретизации граничных условий примем, что контур пластины совпадает с линиями разностной сетки. Чтобы разностный шаблон (2) действовал для всех узловых точек, в которых рассчитывается прогиб пластины, введем 2 законтурных слоя узловых точек (рис. 2). Значения прогибов в законтурных узлах вычисляются из граничных условий.

Для жестко защемленного края необходимо соблюдение 2 условий. Во-первых, прогиб всегда равен нулю вдоль края пластины. Во-вторых, внешняя нормаль прогиба к контуру пластины равна нулю [1–3]. В связи с этим если ребро зажато вдоль $x = a$, то

$$w|_{x=a} = \frac{dw}{dx}|_{x=a} = 0. \quad (8)$$

Если граница пластины перпендикулярна оси x , то разностный аналог (см. рис. 2) условий (8) для каждой узловой точки жестко защемленного края имеет вид

$$w_{i,j,k} = 0, \quad \frac{1}{2\Delta_{xy}}(w_{i+1,j,k} - w_{i-1,j,k}) = 0. \quad (9)$$

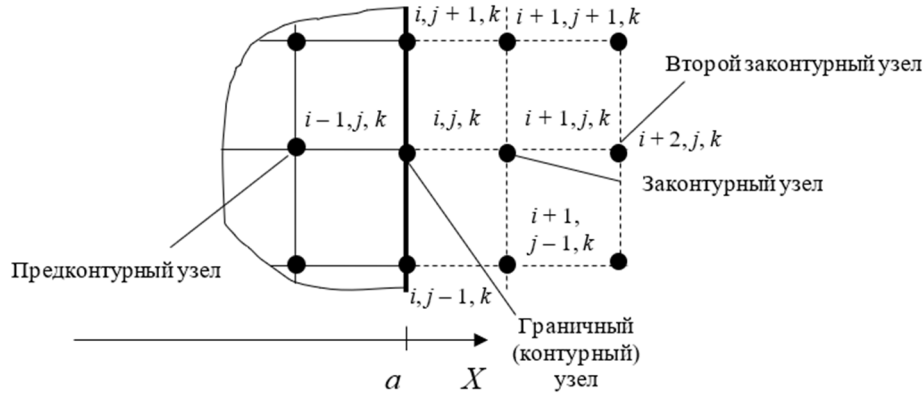


Рис. 2. К определению прогиба в законтурных узлах

Из (9) можно получить расчетную формулу

$$w_{i+1,j,k} = w_{i-1,j,k}, \quad (10)$$

т. е. значение прогиба в законтурной точке в каждый момент времени k равно значению прогиба в предконтурной точке. Прогиб в граничных узлах при этом всегда остается нулевым.

Для свободно (шарнирно) опертого края пластины прогиб на границе и изгибающий момент вдоль свободного края равны нулю [1–3], т.е. граничные условия в точке $x = a$ в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} w|_{x=a} &= 0; \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) |_{x=a} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Условия (11) в разностной форме имеют вид [9] (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} w_{i,j,k} &= 0, \\ \frac{1}{\Delta_{xy}^2} (w_{i+1,j,k} - 2w_{i,j,k} + w_{i-1,j,k}) + \frac{\nu}{\Delta_{xy}^2} (w_{i,j+1,k} - 2w_{i,j,k} + w_{i,j-1,k}) &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Так как на контуре пластины прогиб равен нулю, то

$$w_{i,j+1,k} = w_{i,j,k} = w_{i,j-1,k} = 0$$

и из (12) имеем значение прогиба для законтурной точки

$$w_{i+1,j,k} = -w_{i,j-1,k}, \quad (13)$$

т.е. значение прогиба в законтурной точке в каждый момент времени k равно значению прогиба с противоположным знаком в предконтурной точке. Прогиб в граничных узлах при этом всегда остается нулевым.

Для свободного края естественно предположить, что вдоль него не действуют изгибающие и крутящие моменты, а также вертикальные сдвигающие силы [1–3]. Таким образом, если край пластины свободен в точке $x = a$, то

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) |_{x=a} = 0; \quad (14)$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) |_{x=a} = 0. \quad (15)$$

В случае свободного от закрепления края условия (14) и (15) в разностной форме имеют вид (13) и (16) [9]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta_{xy}^3} (w_{i+2,j,k} - 3w_{i+1,j,k} + 3w_{i,j,k} - w_{i-1,j,k}) + \\ & + \frac{(2-\nu)}{\Delta_{xy}^3} (w_{i+1,j+1,k} - 2w_{i+1,j,k} + w_{i+1,j-1,k} - w_{i,j+1,k} + 2w_{i,j,k} - w_{i,j-1,k}) = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

В случае свободного края пластины значения прогибов во всех узловых точках, включая контурные, находятся в процессе решения задачи (3). Далее из (13) вычисляются значения прогиба для всех узлов первого слоя законтурных узлов, и затем из (16) определяются значения прогиба для второго слоя законтурных узлов:

$$w_{i+2,j,k} = (3w_{i+1,j,k} - 3w_{i,j,k} + w_{i-1,j,k}) - (2-v)(w_{i+1,j+1,k} - 2w_{i+1,j,k} + w_{i+1,j-1,k} - w_{i,j+1,k} + 2w_{i,j,k} - w_{i,j-1,k}). \quad (17)$$

Для угловой точки i, j , когда две смежные стороны, например верхняя и правая, являются свободными, необходимо решение в «диагональной» точке первого законтурного слоя $i+1, j+1$. Это решение используется затем для расчета решения во втором законтурном слое. Но внешняя нормаль в угловой точке вообще не существует. Тогда по аналогии с «недиагональными» точками в точке $i+1, j+1$ можно получить решение с противоположным знаком из угловой точки на предконтурном слое $i-1, j-1$:

$$w_{i+1,j+1,k} = -w_{i-1,j-1,k}.$$

Результаты

В векторной форме уравнение (6) можно записать так:

$$W_{k+1} = 2W_k - cAW_k - W_{k-1} + bQ, \quad (18)$$

где W_{k+1} – вектор прогиба точек сетки при $i = 1, 2, \dots, n$ и $j = 1, 2, \dots, m$ на временном шаге $k+1$; W_k и W_{k-1} – соответствующие векторы на временных шагах k и $k-1$; AW_k – вектор конечно-разностного оператора по пространству (2); c – скалярный коэффициент (4), учитывающий физические характеристики материала пластины и шаги дискретизации по пространству и времени; b – скалярный коэффициент (5), учитывающий шаг дискретизации по времени и плотность единицы площади материала; Q – вектор внешней силы. Каждый элемент определяется по формуле (7).

Алгоритм (18) можно представить в несколько другом виде:

$$W_{k+1} = (2 - cA)W_k - W_{k-1} + bQ. \quad (19)$$

Применяя спектральный критерий устойчивости по Нейману [10–12], получим условие устойчивости алгоритма (26):

$$|2 - c\lambda| < 1, \quad (20)$$

где $\lambda \leq \beta(A)$ – собственные числа оператора A ($\beta(A)$ – спектральный радиус оператора A).

Тогда

$$|2 - c\beta(A)| \leq 1. \quad (21)$$

Одним из следствий теоремы Гершгорина [13] является следующая оценка для спектрального радиуса оператора A :

$$\beta(A) \leq S, \quad (22)$$

где $S = \max_i \sum_j^n |a_{ij}|$ при $i \neq j$ – максимальная сумма модулей коэффициентов разностного оператора A .

Для разностного оператора A (2) сумма недиагональных элементов каждой строки

$$S = 8 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 4 = 44. \quad (23)$$

Решая неравенства (21) и (22) и учитывая значения c и S , получаем условия устойчивости:

$$0,023 < c = \frac{D\Delta t^2}{\rho h \Delta_{xy}^4} < 0,068. \quad (24)$$

Из этого соотношения практический интерес представляют ограничение на шаг по времени Δt при фиксированном шаге дискретизации по пространству Δ_{xy} .

$$\Delta t < 0,261 \Delta_{xy}^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D}}. \quad (25)$$

Например, для стальной пластины толщиной $h = 5$ мм с шагом дискретизации по пространству $\Delta_{xy} = 2$ см шаг по времени должен быть меньше 13 мкс.

Обсуждение

Алгоритм (19) положен в основу пакета программ, реализованного в среде Lazarus и позволяющего получить значения прогибов в любой точке сетки на пластине.

Для реализации алгоритма моделирования рассматривается стальная пластина, характеризующаяся параметрами, приведенными в табл. 1. Пластина жестко закреплена по всем краям.

Таблица 1

Параметр	Значение
Длина, a	22 см = 0,22 м
Ширина, b	22 см = 0,22 м
Толщина, h	5 мм = 0,005 м
Плотность, ρ	7700 кг/м ³
Модуль Юнга, E	$0,216 \cdot 10^{12}$ Н/м ²
Коэффициент Пуассона, ν	0,3
Цилиндрическая жесткость, D	2472,5 Нм
Амплитуда внешней силы, F	100 Н
Частота внешней силы, ν	806 Гц
Точки приложения внешней силы	4 точки по центру пластины

С помощью конечно-разностной дискретизации пластина разбивается на 11 секций в каждом из направлений x и y по 12 узловых точек с шагом дискретизации по пространству 0,02 м.

При шаге дискретизации по времени 12 мкс параметр устойчивости $c = 0,058$. Это значение лежит внутри интервала устойчивости (24). Действительно, при таких значениях алгоритм (19) работает устойчиво (рис. 3), что согласуется с ранее полученными результатами [14, 15].

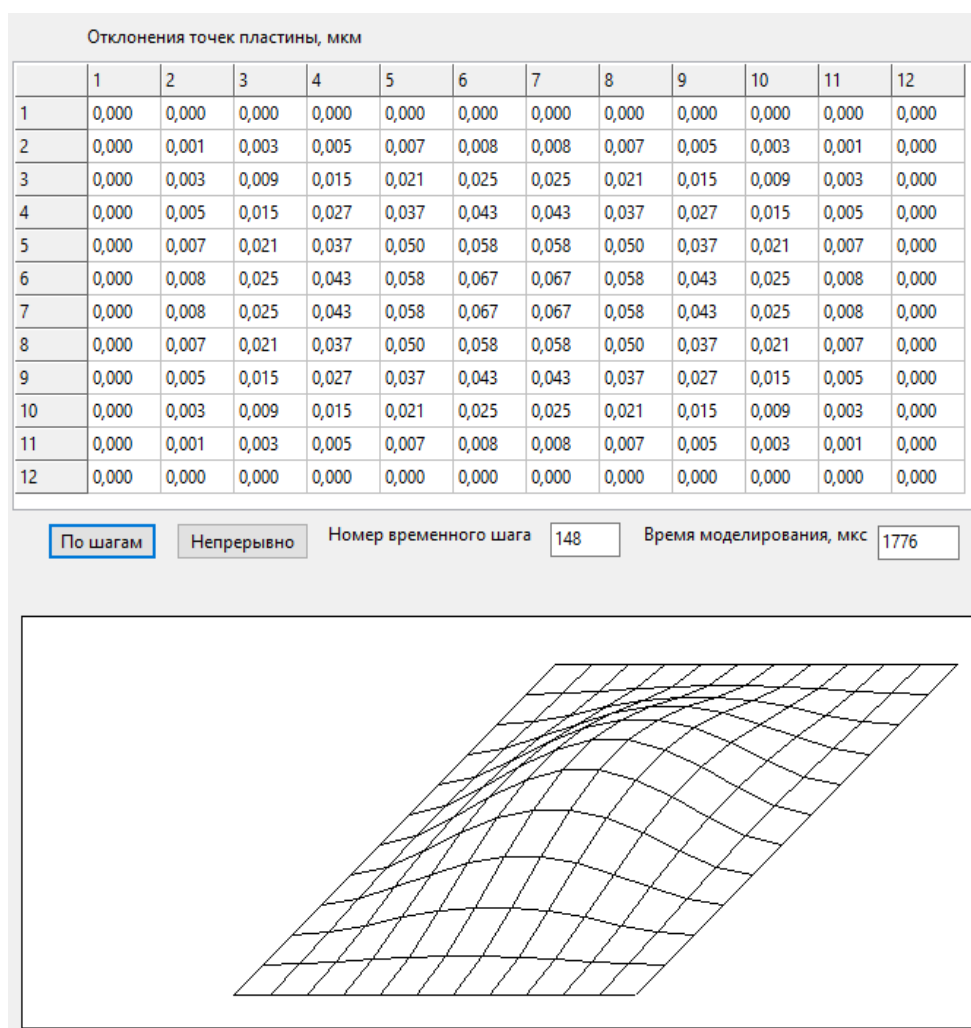


Рис. 3. Прогибы точек пластины на 148-м временном шаге

При увеличении шага дискретизации до 14 мкс параметр устойчивости $c = 0,079$ не будет лежать в диапазоне от 0,023 до 0,068 и эксперимент уже на 17-м временном шаге будет подтверждать нарушение устойчивости (рис. 4).

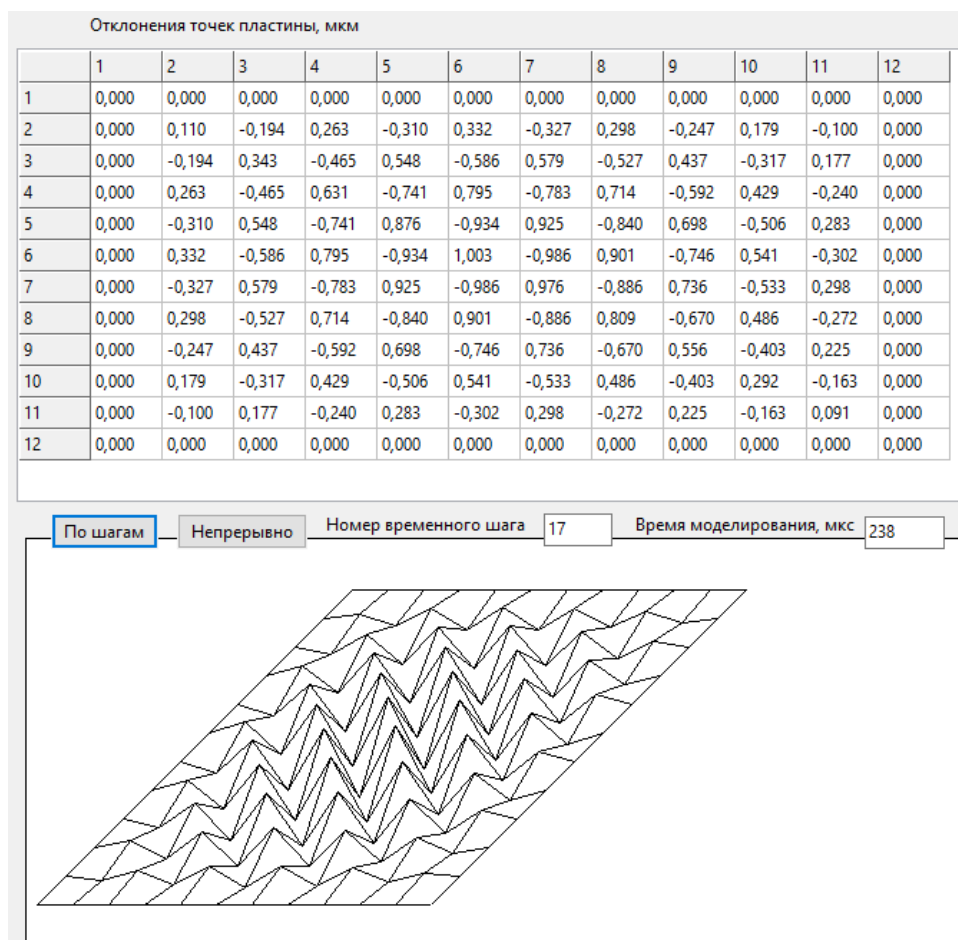


Рис. 4. Прогибы точек пластины при нарушении устойчивости алгоритма

Выводы

Разработан алгоритм конечно-разностного моделирования двумерной гибкой пластинчатой структуры. Определены условия устойчивости этого алгоритма. Параметр устойчивости, учитывающий физические характеристики материала пластины и шаги дискретизации по пространству и времени, должен лежать в определенном интервале.

На основе алгоритма разработан пакет программ, позволяющий получить значения прогибов в любой точке сетки на пластинах разных размеров и материалов. С помощью пакета программ экспериментально подтверждены выявленные ограничения на параметр устойчивости.

Разработанный и проверенный таким образом алгоритм моделирования представляет собой платформу для тестирования и проверки в последующих исследованиях по разработке стратегий активного управления вибрациями для гибких пластинчатых конструкций, таких как мосты, солнечные батареи, печатные платы, корпуса транспортных средств и др.

Список литературы

1. Harris T. J. *Vibration Theory and Applications. Modern Approaches and Methods*. Cham : Springer, 2017. 416 p.
2. Ercan S., Yaman A. *Vibration Analysis: Modern Methods and Applications*. Chichester : Wiley, 2018. 384 p.
3. Szlek B. *Nonlinear Vibration in Engineering Systems*. Cham : Springer, 2022. 419 p.
4. Baran A. [et al.]. *Structural Vibration of Plates: Modern Methods and Applications*. Cham : Springer, 2018. 312 p.
5. Rossi M. [et al.]. Operational modal analysis of plates under ambient excitation: challenges and solutions // *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2021. Vol. 152. Art. 107395.
6. Yang L. [et al.]. Nonlinear dynamics of wide-plate and coupled boundary effects // *Journal of Sound and Vibration*. 2018. Vol. 408. P. 123–141.
7. Liu Y., Wang J. Explicit and implicit finite-difference schemes for plate vibration problems with various boundary conditions // *Applied Numerical Mathematics*. 2018. Vol. 129. P. 1–19.
8. Zienkiewicz O. C., Zhu J. Z. Review of plate vibration modeling methods: FEM vs FD vs spectral methods // *Engineering Structures*. 2017. Vol. 142. P. 123–134.
9. Burman E., Farrell P. Stability of finite difference and hybrid methods for fourth-order PDEs on composite grids // *SIAM Review*. 2018. Vol. 60, № 2. P. 327–342.
10. Kumari K., Donzis D. A. A generalized von Neumann analysis for multi-level schemes: Stability and spectral accuracy // *Journal of Computational Physics*. 2021. Vol. 424. doi: 10.1016/j.jcp.2020.109868
11. Зенков А. В. Численные методы : учебник для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М. : Юрайт, 2026. 136 с. (Высшее образование). URL: <https://urait.ru/bcode/584925>
12. Остапенко В. В., Ковыркина О. А., Фроловская О. А. Теория разностных схем. Введение : учеб. пособие для вузов. М. : Юрайт, 2024 ; Новосибирск : ИПЦ НГУ. 56 с.
13. Бурмистров А. Н., Демьянов М. А. Краткий курс теории матриц : учеб. пособие. М. : Изд-во МФТИ, 2017. 68 с.
14. Хохлов А. Е., Горбаченко В. И. Анализ устойчивости алгоритмов моделирования колебаний пластин методом конечных разностей // *Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе*. 2022. № 3. С. 158–167. doi:10.21685/2227-8486-2022-3-10
15. Хохлов А. Е., Соловьев Д. Д. Экспериментальное исследование устойчивости алгоритма моделирования вынужденных колебаний пластин // *Новые информационные технологии и системы (НИТиС-2022) : сб. науч. ст. по материалам XIX Междунар. науч.-техн. конф., посвящ. 75-летию кафедры «Вычислительная техника» ПГУ (г. Пенза, 17–18 ноября 2022 г.)*. Пенза : Изд-во ПГУ, 2022. С. 411–415.

Reference

1. Harris T.J. *Vibration Theory and Applications. Modern Approaches and Methods*. Cham: Springer, 2017:416.
2. Ercan S., Yaman A. *Vibration Analysis: Modern Methods and Applications*. Chichester: Wiley, 2018.
3. Szlek B. *Nonlinear Vibration in Engineering Systems*. Cham: Springer, 2022:410.
4. Baran A. et al. *Structural Vibration of Plates: Modern Methods and Applications*. Cham: Springer, 2018:312.
5. Rossi M. et al. Operational modal analysis of plates under ambient excitation: challenges and solutions. *Mechanical Systems and Signal Processing*. 2021;152:Art. 107395.

6. Yang L. et al. Nonlinear dynamics of wide-plate and coupled boundary effects. *Journal of Sound and Vibration*. 2018;408:123–141.
7. Liu Y., Wang J. Explicit and implicit finite-difference schemes for plate vibration problems with various boundary conditions. *Applied Numerical Mathematics*. 2018;129:1–10.
8. Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. Review of plate vibration modeling methods: FEM vs FD vs spectral methods. *Engineering Structures*. 2017;142:123–134.
9. Burman E., Farrell P. Stability of finite difference and hybrid methods for fourth-order PDEs on composite grids. *SIAM Review*. 2018;60(2):327–342.
10. Kumari K., Donzis D.A. A generalized von Neumann analysis for multi-level schemes: Stability and spectral accuracy. *Journal of Computational Physics*. 2021;424. doi: 10.1016/j.jcp.2020.109868
11. Zenkov A.V. *Chislennyye metody: uchebnik dlya vuzov = Numerical Methods: A Textbook for Universities*. 2-e izd., rev. and enl. Moscow: Yurajt, 2026:136. (In Russ.). Available: <https://urait.ru/bcode/584925>
12. Ostapenko V.V., Kovyorkina O.A., Frolovskaya O.A. *Teoriya raznostnykh skhem. Vvedenie: ucheb. posobie dlya vuzov = Theory of Difference Schemes. Introduction: textbook for universities*. Moscow; Novosibirsk: Izd-vo Yurajt: IPC NGU 2024:56. (In Russ.)
13. Burmistrov A.N., Dem'yanov M.A. *Kratkij kurs teorii matric: ucheb. posobie = A Short Course in Matrix Theory: a study guide*. Moscow: Izd-vo MFTI, 2017:68. (In Russ.)
14. Hohlov A.E., Gorbachenko V.I. Analysis of the stability of algorithms for modeling plate vibrations using the finite difference method. *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve = Models, systems, and networks in economics, technology, nature, and society*. 2022;(3):158–167. (In Russ.). doi:10.21685/2227-8486-2022-3-10
15. Hohlov A.E., Solov'ev D.D. Experimental study of the stability of the algorithm for modeling forced oscillations of plates. *Novye informacionnye tekhnologii i sistemy (NITiS-2022): sb. nauch. st. po materialam XIX Mezhdunar. nauch.-tekhn. konf., posvyashch. 75-letiyu kafedry «Vychislitel'naya tekhnika» PGU (g. Penza, 17–18 noyabrya 2022 g.) = New information technologies and systems (NITiS-2022) : collection of scientific articles based on materials XIX International Scientific and Technical conf., dedication. 75th anniversary of the Department of Computer Engineering of PSU (Penza, November 17-18, 2022)*. Penza: Izd-vo PGU, 2022:411–415. (In Russ.)

Информация об авторах/Information about the authors

Алексей Евгеньевич Хохлов
доцент, доцент кафедры
информационно-вычислительных
систем,
Пензенский государственный
университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: hohlov59@mail.ru

Alexey E. Khokhlov
Associate professor, associate professor
at the sub-department of information
and computing systems,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Сергей Викторович Пронькин
студент,
Пензенский государственный
университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)
E-mail: pronkin_2016@inbox.ru

Sergey V. Pronkin
Student,
Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов /
The authors declare no conflicts of interests.

Поступила в редакцию/Received 10.03.2025

Поступила после рецензирования/Revised 03.10.2025

Принята к публикации/Accepted 01.12.2025