

О ДОПОЛНИТЕЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ В ЗАДАЧАХ ВИЗУАЛИЗАЦИИ СКАЛЯРНЫХ ПОЛЕЙ

Ю.Н.Косников

ON ADDITIONAL REQUIREMENTS IN SCALAR FIELDS VISUALIZATION PROBLEMS

Y.N. Kosnikov

Аннотация. Визуализируемые кривые и поверхности часто задаются наборами характерных точек. Тогда для реконструкции геометрических форм применяют интерполяцию на основе смешивающих функций. Выполнение этой операции без участия разработчика, зачастую, невозможно. В связи с этим разработчику приходится применять дополнительные условия, которые облегчают дальнейшую алгоритмизацию реконструкции. В статье на примере кривых линий рассмотрены варианты дополнительных условий при использовании в интерполянтах сплайнов и радиальных базисных функций.

Ключевые слова: опорная точка, интерполяция, смешивающая функция, визуализация, сплайн, радиальная базисная функция.

Abstract. Visualized curves and surfaces are often defined by sets of characteristic points. Then interpolation based on blending functions is used to reconstruct geometric shapes. It is often impossible to perform this operation without the developer's participation. In this regard, the developer has to apply additional requirements that facilitate further algorithmization of the reconstruction. The article uses the example of curves to consider options for additional conditions when using splines and radial basis functions in interpolants.

Keywords: reference point, interpolation, blending function, visualization, spline, radial basis function.

Объекты визуализации часто описываются множествами характерных (опорных) точек. Реконструкция геометрии объектов в этом случае основана на интерполяционных методах. Испытанным средством интерполяции объектов визуализации служит применение смешивающих функций (СФ) [1, 2, 3]. Наиболее популярными из них являются степенные полиномы и радиальные базисные функции (РБФ) различного вида. Несмотря на несомненные достоинства и изученность интерполяции на основе СФ, ее практическое применение, зачастую, встречает ощутимые трудности, которые препятствуют алгоритмизации процесса. Тогда для определения параметров интерполяции приходится прибегать к «ручным» действиям разработчика, который тем или иным образом накладывает на процесс дополнительные условия. В статье даются рекомендации по выбору дополнительных условий в случае применения

сплайнов Безье (Bezier) и Кэтмулла-Рома (Catmull-Rom), а также по повышению производительности интерполяции на неравномерно расставленных узлах. Рассмотрение проводится на примере двумерных линий с учетом того, что поверхности могут формироваться на основе криволинейных сечений [4, 5].

Отсек сплайна Безье задается четырьмя опорными точками и, как правило, описывается в параметрической форме. Обозначив концевые точки отсека Безье $P1$ и $P3$, а точки, лежащие на касательных, которые проведены через концевые точки, – $Q1$ и $Q3$, можно записать уравнения отсека в виде

$$x(t) = (1 - t)^3 x_{P1} + 3t(1 - t)^2 x_{Q1} + 3t^2(1 - t) x_{Q3} + t^3 x_{P3}, \quad (1)$$

$$y(t) = (1 - t)^3 y_{P1} + 3t(1 - t)^2 y_{Q1} + 3t^2(1 - t) y_{Q3} + t^3 y_{P3}, \quad (2)$$

где t – параметр, изменяющийся в интервале $[0,1]$.

Точки $P1$, $P3$ располагаются в соседних узлах интерполяции, а точки $Q1$, $Q3$ задают изгибы отсека и должны быть найдены. Углы наклона касательных сегмента (тангенсы этих углов $tg \alpha_1$, $tg \alpha_3$), как правило, известны: касательные проводятся параллельно хордам, которые соединяют опорные точки, предшествующие и последующие по отношению к концевым точкам отсека. Для точки $P1$ это точки $P0$ и $P2$, для точки $P3$ это точки $P2$ и $P4$. С другой стороны, тангенсы углов наклона касательных известным образом находятся через производные выражений (1), (2) по параметру t , вычисленные для значений $t=0$ и $t=1$. Тогда можно записать:

$$\frac{y_{Q1} - y_{P1}}{x_{Q1} - x_{P1}} = \frac{y_{P2} - y_{P0}}{x_{P2} - x_{P0}}, \quad (3)$$

$$\frac{y_{Q3} - y_{P3}}{x_{Q3} - x_{P3}} = \frac{y_{P4} - y_{P2}}{x_{P4} - x_{P2}}. \quad (4)$$

Система из двух уравнений (3), (4) содержит четыре неизвестных – координаты точек $Q1$, $Q3$. Для их однозначного определения необходимо применить какое-то дополнительное условие. Предлагается между крайними точками отсека ввести дополнительную опорную точку и наложить условие точного прохождения отсека через эту точку. Тогда в процессе интерполяции множество исходных опорных точек разбивается на тройки, причем две крайние точки каждой тройки принимаются за концы отсека Безье, а средняя точка тройки используется в качестве дополнительной [6]. Обозначив дополнительную точку $P2$ и положив ее параметрическую координату $t=0.5$, можно записать условия прохождения отсека через эту точку (ее декартовы координаты x_{P2} , y_{P2} известны):

$$x_{P2} = \frac{1}{8} x_{P1} + \frac{3}{8} x_{Q1} + \frac{3}{8} x_{Q3} + \frac{1}{8} x_{P3}, \quad (5)$$

$$y_{P2} = \frac{1}{8} y_{P1} + \frac{3}{8} y_{Q1} + \frac{3}{8} y_{Q3} + \frac{1}{8} y_{P3}. \quad (6)$$

Выражения (5), (6) совместно с (3), (4) образуют систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными. Результатом ее решения будут координаты точек $Q1$, $Q3$ на касательных отсека Безье.

Отсек сплайна Кэтмулла-Рома также задается четырьмя опорными точками P_0, P_1, P_2, P_3 и в параметрической форме описывается выражениями

$$x = 0.5(-t(1-t)^2x_0 + (2-5t^2+3t^3)x_1 + t(1+4t-3t^2)x_2 - t^2(1-t)x_3), \quad (7)$$

$$y = 0.5(-t(1-t)^2y_0 + (2-5t^2+3t^3)y_1 + t(1+4t-3t^2)y_2 - t^2(1-t)y_3). \quad (8)$$

Свойства сплайна Кэтмулла-Рома таковы, что при изменении параметра t в интервале $[0,1]$ по выражениям (7), (8) вычисляются текущие координаты криволинейного отсека, соединяющего опорные точки P_1, P_2 . Изгибы отсека определяются направлениями касательных к кривой в этих точках, а касательные параллельны хордам, которые соединяют опорные точки, предшествующие и последующие по отношению к конечным точкам отсека. Сплайн Кэтмулла-Рома хорош тем, что позволяет формировать гладкую составную кривую, точно проходящую через опорные точки, и не требует для этого никаких дополнительных условий. Однако в этом же заключается и недостаток сплайна: он в исходном виде не позволяет управлять гладкостью кривой, то есть не позволяет в заданных местах получать изломы (фрактуры). Для получения фрактур требуется наложить на процесс интерполяции дополнительное условие.

Направления касательных к отсеку задаются расстановкой опорных точек, следовательно, для изменения этих направлений нужно ввести дополнительные опорные точки. Узлы интерполяции, в которых планируются фрактуры, следует представить в виде сочетания трех опорных точек: одной исходной – P_j и двух дополнительных P_j^e, P_j^b , так как P_j является концом (*end*) предыдущего и началом (*begin*) следующего отсека кривой. В зависимости от требований к сопряжению отсека с соседним алгоритм вычисления текущей точки будет использовать в выражениях (7), (8) координаты P_j или P_j^e или P_j^b . Списковая структура данных, задающих опорные точки интерполянта (в виде координат), должна выглядеть в соответствии с рисунком 1, где широкими линиями показана последовательность элементов списка. Если кривая в некоторой опорной точке не имеет фрактуры, содержимое дополнительных элементов соответствующего элемента списка получает значение null.

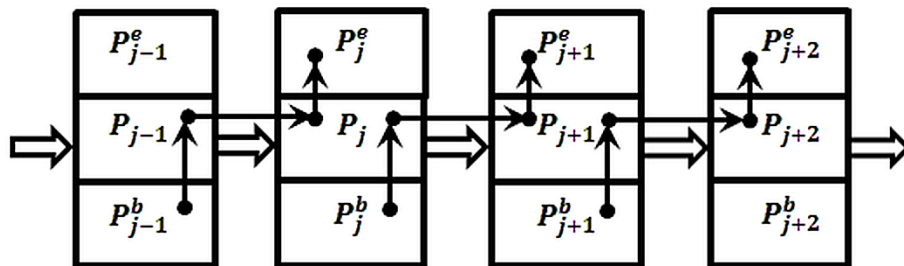


Рисунок 1 – Фрагмент списковой структуры данных для кривой с фрактурами

Закон обхода элементов списка показан на рисунке последовательностями узких стрелок. Если в обеих конечных точках отсека P_j, P_{j+1} есть фрактуры, опорные точки из списка извлекаются в следующем порядке: $P_j^b \Rightarrow P_j \Rightarrow P_{j+1} \Rightarrow P_{j+1}^e$. Их координаты подставляются в выражения (7), (8) и используются для

вычисления текущих точек отсека. Если элемент списка $P_j^b = \text{null}$ (в точке P_j нет излома), то алгоритм обхода делает «шаг назад» и в качестве начальной точки отсека выбирает P_{j-1} . В этом случае возникает закон обхода $P_{j-1} \Rightarrow P_j \Rightarrow P_{j+1} \Rightarrow$. Если элемент списка $P_{j+1}^e = \text{null}$ (в точке P_{j+1} нет излома), то алгоритм обхода делает «шаг вперед» и в качестве конечной точки отсека выбирает P_{j+2} . В этом случае возникает закон обхода $\Rightarrow P_j \Rightarrow P_{j+1} \Rightarrow P_{j+2}$. При отсутствии дополнительных опорных точек в выражения (7), (8) поступают из списка только координаты точек, не имеющих на рисунке 1 верхнего индекса, и формируется гладкая кривая. Рекомендации по практическому применению описанного условия приведены в [7].

Хорошим интерполятором формы являются РБФ. При реконструкции поверхности центры РБФ, как правило, размещаются в опорных точках, а интерполянт записывается в неявной форме:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \phi(r_i) = 0,$$

где λ_i – коэффициент влияния i -й опорной точки на текущую точку;

r_i – декартово расстояние между i -й опорной точкой и текущей точкой;

$\phi(r_i)$ – значение РБФ, связанной с i -й опорной точкой, в текущей точке.

Нахождение коэффициентов λ_i – непростое дело, для этого к исходным данным добавляются дополнительные опорные точки или в интерполянт добавляется полином невысокой степени. Кроме того, РБФ довольно затратны в вычислительном отношении, так как включают такие компоненты, как дроби, радикалы, экспоненты, тригонометрические функции, логарифмы. Например, часто применяемая РБФ «инверсный мультиквадрик» имеет вид [2]:

$$\Phi(r) = 1/\sqrt{r^2 + c^2},$$

где r – декартово расстояние между центром РБФ и текущей точкой;

c – константа.

Многих трудностей можно избежать, применив ряд дополнительных условий:

- параметрическую форму интерполяции;
- целочисленный отсчет параметрических координат;
- табличное вычисление значений СФ.

Особенно явно достоинства этих приемов проявляются при реконструкции поверхностей, но для простоты рассмотрена интерполяция плоской кривой.

Параметрическая форма интерполянта в двухмерном случае выглядит следующим образом:

$$x = \sum_{i=1}^N \lambda_{xi} \phi(r_i), \quad (9)$$

$$y = \sum_{i=1}^N \lambda_{yi} \phi(r_i), \quad r_i = |t - t_i|, \quad (10)$$

где t – параметр;

$\lambda_{xi}, \lambda_{yi}$ – коэффициенты влияния i -й опорной точки на координаты x и y , текущей точки;

t_i – параметрическая координата i -й опорной точки.

Коэффициенты влияния λ_{xi} , λ_{yi} находятся из условия точного прохождения кривой через опорные точки. Для этого составляются две системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$\begin{aligned} x_j &= \sum_{i=1}^N \lambda_{xi} \phi(r_{ij}), \\ y_j &= \sum_{i=1}^N \lambda_{yi} \phi(r_{ij}), \quad j = 1, \dots, N, \end{aligned}$$

где r_{ij} – параметрическое расстояние между i -й и j -й опорными точками.

В матричной форме первая СЛАУ имеет вид

$$\begin{bmatrix} \phi(r_{11}) & \phi(r_{12}) & \dots & \phi(r_{1N}) \\ \phi(r_{21}) & \phi(r_{22}) & \dots & \phi(r_{2N}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \phi(r_{N1}) & \phi(r_{N2}) & & \phi(r_{NN}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{x1} \\ \lambda_{x2} \\ \vdots \\ \lambda_{xN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix},$$

или в свернутом виде с очевидными обозначениями – $\Phi \cdot \Lambda X = X$, откуда

$$\Lambda X = \Phi^{-1} \cdot X.$$

Аналогично из второй системы уравнений находятся остальные весовые коэффициенты.

Для составления СЛАУ необходимо знать значения параметра t для каждой опорной точки, другими словами, опорные точки должны быть упорядочены. С этой целью предлагается поставить значения t_i в соответствие со значениями декартовой координаты опорной точки, например, x_i . Кроме того, предлагается ввести для параметра t целочисленный отсчет. По сути дискретные целочисленные отсчеты параметра являются шагами по реконструируемой кривой, и для их упорядочения предлагается использовать проекции этих шагов на ось x . Так можно поступить, если каждому значению x соответствует одно значение y (условие однозначности). Для многих практических приложений это условие выполняется или геометрическую форму можно к нему привести [8]. Выражение для перехода от декартовых координат опорных точек к их целочисленным параметрическим координатам имеет вид

$$t_i = \left[\frac{M \cdot x_i}{x_{max}} \right], \quad (11)$$

где $[]$ – обозначение операции округления до ближайшего целого;

M – число шагов параметра t в области определения декартовой координаты x , оно зависит от желаемой точности построения кривой;

x_{max} – максимальное значение координаты x в области определения.

Применение (11) ко всем опорным точкам дает для каждой из них уникальное значение параметра t . При этом между опорными точками возникает некоторое количество промежуточных отсчетов t , зависящее от значения M и декартовых расстояний между опорными точками. Возникает неравномерная расстановка опорных точек (узлов интерполяции) на равномерной параметрической сетке. Поскольку кривая формируется из отрезков-векторов, полученные промежуточные отсчеты t сопоставляются вершинам (концам) этих

отрезков. Декартовы координаты вершин находятся с помощью интерполяционных выражений (9), (10). Смешивающие функции в них имеют целочисленный аргумент и могут вычисляться табличным методом. Значения СФ заранее вычисляются с заданным шагом и заносятся в память компьютера, например, в переменную типа «массив». Целочисленные параметрические расстояния между очередной вершиной и опорными точками используются как адреса памяти (после приведения к диапазону адресов). Таким образом, вычисление СФ любой сложности в процессе интерполяции заменяется одним обращением к памяти.

Резюмируя, можно отметить, что интерполяцию криволинейными отсеками, как правило, не удастся алгоритмизировать полностью. Часть операций приходится возлагать на разработчика. Эти операции состоят из наложения и реализации некоторых дополнительных условий. Обоснованное и корректное наложение таких условий позволяет в режиме реального времени улучшить показатели как формообразования, так и производительности интерполяции.

Список литературы

1. Schall O. Surface from Scattered Points: A Brief Survey of Recent Developments / O.Schall, M.Samozino, B.Falcidieno, N.Thalmann // 1st International Workshop towards Semantic Virtual Environments, MIRALab. – 2005. – P. 138-147.
2. Anjyo K., Lewis J.P., Pighin F. Scattered Data Interpolation for Computer Graphics // ACM SIGGRAPH, 2014. – pp.1–69. – [Электронный ресурс]. – Доступно из URL: <https://doi.org/10.1145/2614028.2615425>.
3. Александрова Н.В. Смешивающие функции в геометрическом моделировании и визуализации поверхностей свободных форм / Н.В. Александрова, А.П. Зимин, Ю.Н. Косников, Хоанг Т.Х. // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Научное периодическое издание. Серия: Технические науки. Информационные технологии. – Пенза: Изд-во ПГТУ, 2015. – №03(25). – Т.1 – С. 51 – 60.
4. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
5. Косников Ю.Н., Афанасьев А.И. Формообразование неаналитических поверхностей в режиме реального времени с применением сечений // Перспективные информационные технологии (ПИТ 2022) [Электронный ресурс]: труды Международной научно-технической конференции (18 – 21 апреля 2022 г.) / под ред. С.А. Прохорова. – Самара: Издательство Самарского научного центра РАН, 2022. – С. 405 – 409.
6. Косников Ю.Н., Новиков А.В. Математическое описание пространственных форм сплайнами Безье в задачах визуализации // Проблемы информатики в образовании, управлении, экономике и технике: сборник статей XIX Международной НТК (г.Пенза, ПГУ, 24 - 25 октября 2019 г.). – Пенза: Приволжский Дом знаний, 2019. – С.90 – 96.

7. Kosnikov Y.N., Zimin A. P., Novikov A. V. Information Technique for Smooth and Non-Smooth Curves Modeling // International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies (FarEastCon), Vladivostok, 2020, pp. 1-4. – doi: 10.1109/FarEastCon50210.2020.9271619
IEEE Xplore <https://ieeexplore.ieee.org/document/9271619>

8. Косников Ю.Н. Методика и технология компьютерного моделирования поверхностей свободных форм с применением радиальных базисных функций // XXI век: итоги прошлого и проблемы настоящего плюс. Научное периодическое издание. Серия: Технические науки. Информационные технологии. – Пенза: Изд-во ПГТУ, 2014. – №03(19). – С. 176 – 183.

Косников Юрий Николаевич
Пензенский государственный
университет, г.Пенза, Россия
E.mail: kosnikov@gmail.com

Kosnikov Yuriy Nikolaevich
Penza State University,
Penza, Russia