

И. В. Бойков, М. А. Щербаков,
Н. П. Кривулин, В. В. Кикот, В. П. Маланин

К ВОПРОСУ О СИНТЕЗЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ДАТЧИКОВ АКУСТИЧЕСКОГО ДАВЛЕНИЯ¹

Аннотация.

Актуальность и цели. Объектом исследования являются пьезоэлектрические датчики акустического давления. Предметом исследования является моделирование пьезоэлектрических датчиков, функционирующих при термоударном воздействии рабочей среды с температурой минус 180 °С. Цель – создание математической модели процесса эксплуатации датчика.

Материалы и методы. При построении математической модели датчика, функционирующего при термоударе, использованы методы обобщенного операционного исчисления.

Результаты. Предложена математическая модель процесса эксплуатации пьезоэлектрических датчиков в условиях термоударного воздействия рабочей среды. Сравнение результатов натурного эксперимента и математического моделирования подтвердили эффективность применения предлагаемой модели.

Выводы. Полученные результаты могут быть использованы при разработке пьезоэлектрических датчиков для эксплуатации при нестационарной температуре рабочей среды и термоударных воздействиях.

Ключевые слова: пьезоэлектрический датчик, акустическое давление, термоударное воздействие, математическая модель, импульсная переходная функция.

I. V. Boykov, M. A. Shcherbakov,
N. P. Krivulin, V. V. Kikot, V. P. Malanin

ON THE ISSUE OF SYNTHESIS OF MATHEMATICAL MODELS OF PIEZOELECTRIC ACOUSTIC PRESSURE SENSORS

Abstract.

Background. The object of the study is piezoelectric acoustic pressure sensors. The subject of the research is the modeling of piezoelectric sensors operating under a thermal shock effect of the working environment with the temperature of minus 180 degrees Celsius. The aim is to create a mathematical model of the sensor operation.

Methods. At construction of the mathematical model the authors used the methods of generalized operational calculus.

Results. The article offers the mathematical model of piezoelectric transducer operation in conditions of the thermal impact of the working environment. A comparison of the results of a field experiment and mathematical modeling confirms the efficiency of the proposed model.

¹ Работа поддержана РФФИ – грант 16-01-00594.

Conclusions. The results can be used in the development of piezoelectric sensors intended for operation at non-stationary temperatures of the working environment and under thermal shock effects.

Key words: piezoelectric sensor, acoustic pressure, thermal shock, mathematical model, impulse response function.

Введение

Согласно нормативно-техническим требованиям дополнительная температурная погрешность пьезоэлектрических датчиков акустического давления (пьезодатчиков) характеризуется отклонением значения коэффициента преобразования измеряемого акустического давления в выходной сигнал пьезодатчика от воздействия температуры (коэффициентом термочувствительности). В соответствии с п. 2.4.6 ОСТ 92-4527–84 в диапазоне температур от минус 180 до плюс 200 °С значение коэффициента термочувствительности должно быть в пределах от 0,6 до 1,2. Однако при эксплуатации пьезодатчиков, разработанных с использованием известных технологических и конструктивных способов, особенно в условиях термоударного воздействия рабочей среды, это требование не обеспечивается. По этой причине снижение температурной погрешности измерения акустического давления, вызванной последствиями термоударного воздействия рабочей среды, основанное на методах математического моделирования и их схемно-технических реализациях, является актуальной задачей.

При создании математических моделей используется два общеизвестных способа. Первый основан на изучении физических свойств, технических параметров пьезодатчика и построении его модели на основе законов физики [1, 2]. Второй основан на определении параметров математической модели по результатам измерений выходных сигналов при известных изменениях измеряемой величины и воздействующих факторов [3–5]. Из-за сложности (а порой и невозможности) при анализе процесса эксплуатации учесть влияние всех воздействующих факторов во многих случаях предпочтительным является второй подход, который рассмотрен в настоящей статье.

1. Постановка математической задачи

В качестве математической модели процесса эксплуатации пьезодатчика рассматривается модель вида «вход-выход» для дискретных динамических величин, которая описывается уравнением вида [5]:

$$y(k) = \sum_{l=0}^k g(T, k, l) x(l), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $k, l = 0, 1, 2, \dots$ – дискретная величина (отсчеты времени); $x(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ – выходной сигнал без термоударного воздействия рабочей среды; $y(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$ – выходной сигнал при термоударном воздействии рабочей среды; $g(T, k, l)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, 2, \dots, k$ – импульсная переходная функция при термоударном воздействии рабочей среды с температурой T .

Уравнение (1) связывает выходной сигнал $x(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, датчика в отсутствие термоудара с выходным сигналом $y(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, того же

датчика при термоударном воздействии. В модели (1) $x(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, считается входным сигналом. Отметим, что разница между сигналами $x(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и $y(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, обусловлена только температурной погрешностью, возникающей при термоударном воздействии.

В настоящей статье параметр T далее исключается, так как функционирование пьезодатчика рассматривается только при одной температуре термоударного воздействия, равной минус 180 °С, которая является наиболее характерной для процесса эксплуатации.

Требуется определить импульсную переходную функцию $g(k, l)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, 2, \dots, k$, системы (1) по двум выходным сигналам без термоударного воздействия $x_i(k)$, $i = 1, 2$; $k = 0, 1, 2, \dots$ и соответствующим им двум выходным сигналам при термоударном воздействии $y_i(k)$, $i = 1, 2$; $k = 0, 1, 2, \dots$. Для этого для каждой последовательности $x_i(k)$ и $y_i(k)$ получим систему уравнений:

$$y_i(k) = \sum_{l=0}^k g(k, l) x_i(l), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

2. Определение импульсной переходной функции пьезодатчика

Определим импульсную переходную функцию $g(k, l)$ для пьезодатчика ДХС 525. Экспериментально определенная при неизменных пульсациях измеряемого давления 50 кПа с частотой 40–50 Гц в условиях термоударного воздействия рабочей среды с температурой минус 180 °С временная зависимость выходного сигнала пьезодатчика y_k , $k = 0, 1, 2, \dots, 300$, при значениях времени $k = 0, 1, 2, \dots, 300$ с представлена на рис. 1.

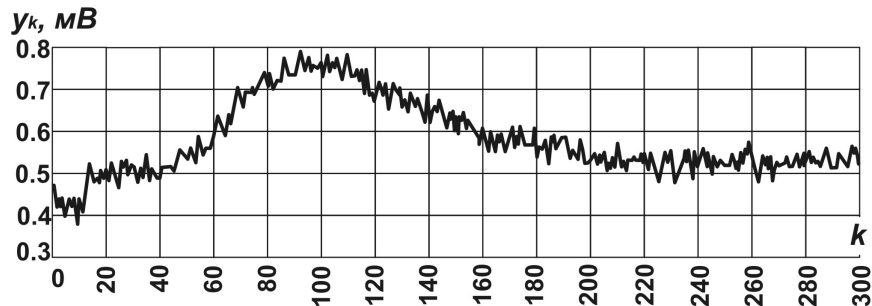


Рис. 1. Временная зависимость выходного сигнала y_k , $k = 0, 1, 2, \dots, 300$, пьезодатчика ДХС 525, полученная при неизменных пульсациях измеряемого давления 50 кПа с частотой 40–50 Гц в условиях термоударного воздействия рабочей среды с температурой минус 180 °С

Для расчета импульсной переходной функции пьезодатчика $g(k, l)$ в программной среде MathCAD при воздействии известных пульсаций измеряемого давления 50 кПа с частотой 40–50 Гц в качестве выходных сигналов пьезодатчика $x_1(k), x_2(k)$ без термоударного воздействия рабочей среды при-

няты последовательности $x_1(k) = 0,5$; $k = 2j$; $x_2(k) = 0,5$; $k = 2j + 1$; $j = 0,1,\dots,74$, в качестве выходных сигналов пьезодатчика при термоударном воздействии рабочей среды с температурой минус 180°C при тех же известных пульсациях измеряемого давления приняты последовательности $y_1(k) = y_{2k}$, $y_2(k) = y_{2k+1}$, $k = 0,1,2,\dots,74$, где $y_1(k)$ – четные отсчеты значений, а $y_2(k)$ – нечетные отсчеты значений выходного сигнала y_k при термоударном воздействии рабочей среды (рис. 2).

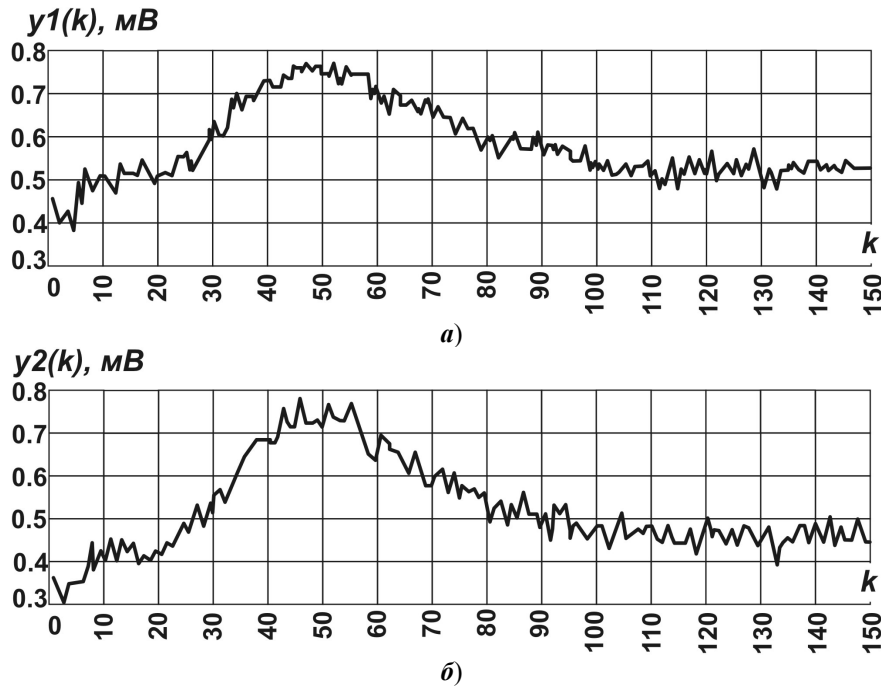


Рис. 2. Значения выходных сигналов пьезодатчика при $k = 0,1,2,\dots,149$: *а* – $y_1(k)$; *б* – $y_2(k)$

В табл. 1 приведены рассчитанные в соответствии с [5] значения импульсной переходной функции $g(k,l)$ пьезодатчика при $k, l = 0, 1, \dots, 14$ для термоударного воздействия рабочей среды с температурой минус 180°C .

В табл. 2 приведены измеренные значения выходного сигнала $y(k)$, $k = 0,1,2,\dots,29$ при термоударном воздействии рабочей среды и вычисленные с использованием системы (3) значения выходного сигнала $y_m(k)$, $k = 0,1,2,\dots,29$, причем $y_m(2k) = \hat{y}_1(k)$, $k = 0,1,2,\dots,14$ – для четных отсчетов и $y_m(2k+1) = \hat{y}_2(k)$, $k = 0,1,2,\dots,14$ – для нечетных отсчетов:

$$\begin{aligned} \hat{y}_1(k) &= \sum_{l=0}^k g(k,l)x_1(l), \quad k = 0,1,2,\dots,14, \\ \hat{y}_2(k) &= \sum_{l=0}^k g(k,l)x_2(l), \quad k = 0,1,2,\dots,14, \end{aligned} \quad (3)$$

где $g(k, l)$, $k = 0, 1, 2, \dots, 14$; $l = 0, 1, 2, \dots, k$ – импульсная переходная функция, значения которой представлены в табл. 1; $x_1(k) = 0.5$, $x_2(k) = 0.5$, $k = 0, 1, 2, \dots, 14$ – значения выходного сигнала без термоударного воздействия при известных (50 кПа, частота 40–50 Гц) пульсациях измеряемого давления.

Из табл. 2 видно, что максимальное отличие выходных сигналов составляет $\max_k \epsilon_k = 0,005$, т.е. менее 1 %, что является приемлемым значением и подтверждает эффективность применения математической модели.

3. Вычисление значений измеряемого акустического давления с использованием математической модели

При известных значениях импульсной переходной функции $g(k, l)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, 2, \dots, k$, и выходного сигнала $y(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, математическая модель, описываемая системой (1), позволяет снизить температурную погрешность измерения, вызванную последствиями термоударного воздействия рабочей среды, путем вычисления значений выходного сигнала пьезодатчика $xv(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, соответствующего измеряемому акустическому давлению, с использованием решения системы (1) относительно $x(k)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. При $g(T, k, l) \neq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $l = 0, 1, 2, \dots, k$, решение определяется по рекуррентной формуле:

$$xv(k) = \frac{1}{g(k, k)} \left(y(k) - \sum_{l=0}^{k-1} g(k, l)x(l) \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4)$$

Например, с использованием формулы (4) и данных, приведенных в табл. 1, 2, в программной среде MathCAD определены значения выходного сигнала пьезодатчика xv_k при его функционировании в течение 14 с в условиях термоударного воздействия с температурой минус 180 °С. Результаты вычислений приведены на рис. 3 и в табл. 3. Также в табл. 3 приведены отличия ϵ_k , $k = 0, 1, \dots, 14$, значений выходного сигнала при термоударном воздействии, полученных аналитически, от значений выходного сигнала, полученных без термоударного воздействия рабочей среды.

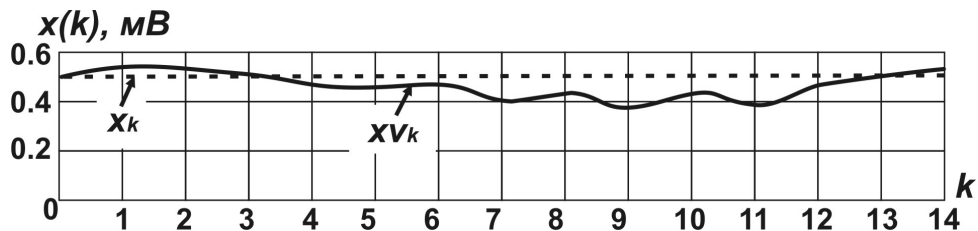


Рис. 3. Значения выходного сигнала x_k , соответствующие известным значениями пульсаций давления (40 кПа с частотой 40–50 Гц), и вычисленные по формуле (4) значения выходного сигнала xv_k в условиях термоударного воздействия рабочей среды с температурой минус 180 °С при $k = 0, 1, 2, \dots, 14$

Таблица 1
Значения импульсной переходной функции $g(k, l)$ ($k, l = 0, 1, \dots, 14$) пьезодатчика ДХС 525

k	l														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
0	0,940	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	-0,062	0,940	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	-0,076	-0,062	0,940	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3	0,046	-0,076	-0,062	0,940	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
4	-0,078	0,046	-0,076	-0,062	0,940	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
5	0,046	-0,078	0,046	-0,076	-0,062	0,940	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
6	0,232	0,046	-0,078	0,046	-0,076	-0,062	0,940	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
7	-0,092	0,232	0,046	-0,078	0,046	-0,076	-0,062	0,940	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
8	0,000	-0,092	0,232	0,046	-0,078	0,046	-0,076	-0,062	0,940	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	0,062	0,000	-0,092	0,232	0,046	-0,078	0,046	-0,076	-0,062	0,940	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10	0,000	0,062	0,000	-0,092	0,232	0,046	-0,078	0,046	-0,076	-0,062	0,940	0,000	0,000	0,000	0,000
11	-0,016	0,000	0,062	0,000	-0,092	0,232	0,046	-0,078	0,046	-0,076	-0,062	0,940	0,000	0,000	0,000
12	-0,062	-0,016	0,000	0,062	0,000	-0,092	0,232	0,046	-0,078	0,046	-0,076	-0,062	0,940	0,000	0,000
13	0,124	-0,062	-0,016	0,000	0,062	0,000	-0,092	0,232	0,046	-0,078	0,046	-0,076	-0,062	0,940	0,000
14	-0,032	0,124	-0,062	-0,016	0,000	0,062	0,000	-0,092	0,232	0,046	-0,078	0,046	-0,076	-0,062	0,940

Таблица 2

Значения выходного сигнала $y(k)$, полученные в результате эксперимента; значения выходного сигнала $y_m(k)$, рассчитанные по математической модели (1); отличие $\varepsilon_k = |y(k) - y_m(k)|$, $k = 0, 1, 2, \dots, 29$, выходных сигналов, полученных при эксперименте и вычисленных с использованием модели (1)

№ стр.	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	$y(k)$	0,470	0,470	0,424	0,439	0,401	0,401	0,439	0,424	0,439	0,385	0,439	0,408	0,455	0,524	0,516
2	$y_m(k)$	0,472	0,467	0,423	0,437	0,402	0,400	0,444	0,427	0,436	0,385	0,435	0,411	0,460	0,520	0,511
3	ε_k	0,002	0,003	0,001	0,002	0,001	0,001	0,005	0,003	0,003	0,000	0,004	0,003	0,005	0,004	0,005
4	k	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
5	$y(k)$	0,478	0,485	0,478	0,501	0,509	0,485	0,509	0,524	0,501	0,485	0,470	0,524	0,532	0,501	0,516
6	$y_m(k)$	0,477	0,481	0,474	0,497	0,505	0,489	0,510	0,526	0,501	0,480	0,468	0,526	0,535	0,498	0,514
7	ε_k	0,001	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004	0,001	0,002	0,000	0,005	0,002	0,002	0,003	0,003	0,002

Таблица 3

Значения выходного сигнала xv_k , полученного аналитически и погрешность восстановления реального выходного сигнала $\varepsilon_k = |x(k) - xv_k|$, $k = 0, 1, 2, \dots, 29$

№ стр.	k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	xv_k	0,500	0,549	0,529	0,505	0,458	0,453	0,476	0,399	0,436	0,367	0,444	0,378	0,465	0,502	0,536
2	ε_k	0,0001	0,049	0,029	0,05	0,042	0,047	0,024	0,111	0,064	0,133	0,056	0,122	0,035	0,002	0,036

Из табл. 3 видно, что отличие выходных сигналов составляет $\max_k \epsilon_k = 0,133 \epsilon_k$, т.е. менее 14 %, что является приемлемым значением и подтверждает эффективность применения математической модели при снижении температурной погрешности измерения акустического давления.

Заключение

Использование предлагаемой математической модели позволяет провести имитационное моделирование процесса эксплуатации пьезодатчика в условиях термоударного воздействия рабочей среды, а также определить значение измеряемого акустического давления. Сопоставление результатов натурального эксперимента и имитационного моделирования подтвердили эффективность использования предлагаемой математической модели.

Библиографический список

1. **Богущ, М. В.** Проектирование пьезоэлектрических датчиков на основе пространственных электротермоупругих моделей / М. В. Богущ ; под ред. А. Е. Панича. – М. : Техносфера, 2014. – 312 с.
2. **Богущ, М. В.** Влияние температуры на коэффициент преобразования пьезоэлектрических датчиков / М. В. Богущ // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика. – 2008. – № 2. – С. 26–39.
3. **Бойков, И. В.** Определение временных характеристик линейных систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Метрология. – 2012. – № 8. – С. 3–14.
4. **Бойков, И. В.** Идентификация дискретных динамических систем с распределенными параметрами / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2014. – № 2 (30). – С. 34–48.
5. **Бойков, И. В.** Аналитические и численные методы идентификации динамических систем : моногр. / И. В. Бойков, Н. П. Кривулин. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2016. – 398 с.

References

1. Bogush M. V. *Proektirovanie p'ezoelektricheskikh datchikov na osnove prostranstvennykh elektrotermouprugikh modeley* [Design of piezoelectric sensors on the basis of three-dimensional electrothermoelastic models]. Moscow: Tekhnosfera, 2014, 312 p.
2. Bogush M. V. *Pribory i sistemy. Upravlenie, kontrol', diagnostika* [Devices and systems. Control, monitoring, diagnostics]. 2008, no. 2, pp. 26–39.
3. Boykov I. V., Krivulin N. P. *Metrologiya* [Metrology]. 2012, no. 8, pp. 3–14.
4. Boykov I. V., Krivulin N. P. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki* [University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences]. 2014, no. 2 (30), pp. 34–48.
5. Boykov I. V., Krivulin N. P. *Analiticheskie i chislennye metody identifikatsii dinamicheskikh sistem: monogr.* [Analytical and numerical methods of dynamic system identification: monograph]. Penza: Izd-vo PGU, 2016, 398 p.

Бойков Илья Владимирович

доктор физико-математических наук,
профессор, заведующий кафедрой
высшей и прикладной математики,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: math@pnzgu.ru

Щербаков Михаил Александрович

доктор технических наук, профессор,
заведующий кафедрой автоматики
и телемеханики, Пензенский
государственный университет
(Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: avitel@pnzgu.ru

Кривулин Николай Петрович

кандидат технических наук, доцент,
кафедра высшей и прикладной
математики, Пензенский
государственный университет (Россия,
г. Пенза, ул. Красная, 40)

E-mail: krivulin@bk.ru

Кикот Виктор Викторович

аспирант, Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: inbox@post.su

Маланин Владимир Павлович

кандидат технических наук, доцент,
кафедра автоматики и телемеханики,
Пензенский государственный
университет (Россия, г. Пенза,
ул. Красная, 40)

E-mail: malanin48@yandex.ru

Boykov Ilya Vladimirovich

Doctor of physical and mathematical
sciences, professor, head of sub-department
of higher and applied mathematics, Penza
State University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Shcherbakov Mikhail Aleksandrovich

Doctor of engineering sciences, professor,
head of sub-department of automation
and remote control, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

Krivulin Nikolay Petrovich

Candidate of engineering sciences, associate
professor, sub-department of higher
and applied mathematics, Penza State
University (40 Krasnaya street,
Penza, Russia)

Kikot Viktor Viktorovich

Postgraduate student, Penza
State University (40 Krasnaya
street, Penza, Russia)

Malanin Vladimir Pavlovich

Candidate of engineering science, associate
professor, sub-department of automation
and remote control, Penza State University
(40 Krasnaya street, Penza, Russia)

УДК 681.586.773: 519.8

К вопросу о синтезе математических моделей пьезоэлектрических датчиков акустического давления / И. В. Бойков, М. А. Щербаков, Н. П. Кривулин, В. В. Кикот, В. П. Маланин // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки. – 2017. – № 1 (41). – С. 106–114. DOI 10.21685/2072-3059-2017-1-9