
ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

УДК 517.956.22+517.968.2

**О ФРЕДГОЛЬМОВОСТИ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО
ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА
В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
НА СЛОЕ, ПОКРЫТОМ ГРАФЕНОМ**

© 2025 г. Ю. Г. Смирнов¹, С. В. Тихов²

Пензенский государственный университет

e-mail: ¹smirnovyug@mail.ru, ²tik.stanislaw2015@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.04.2025 г., после доработки 16.04.2025 г.; принята к публикации 24.07.2025 г.

Рассматривается краевая задача для системы двух однородных уравнений Гельмгольца со смешанными граничными условиями, возникающая в теории рассеяния электромагнитных волн на структурах, покрытых двумерными материалами. Задача сводится к граничному интегральному уравнению на всей числовой прямой с гиперсингулярным интегральным оператором. Введение новых переменных и искомой функции позволяет перейти к интегральному уравнению на отрезке. Для нахождения приближённого решения полученного уравнения предлагается метод коллокации с использованием ряда Фурье–Чебышёва для представления решения, при этом гиперсингулярные интегралы вычисляются аналитически. Доказывается фредгольмовость регуляризованного гиперсингулярного оператора в исследуемом интегральном уравнении.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, функция Грина, граничное интегральное уравнение, гиперсингулярный оператор, метод коллокации, полиномы Чебышёва

DOI: 10.31857/S0374064125090083, EDN: PTKXCE

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время во всём мире большое внимание уделяется исследованию оптических свойств так называемых двумерных материалов. Наиболее известным среди них является графен, представляющий собой двумерный слой атомов углерода, образующих гексагональную решётку [1].

При математическом моделировании оптических свойств двумерных материалов, в частности графена, возникает множество интересных и сложных задач, эффективное решение которых невозможно без применения передовых математических методов [2–7]. Так, для решения задач дифракции электромагнитных волн на графен-интегрированных структурах оказываются весьма эффективными методы интегральных уравнений [8–10].

В данной работе исследуется краевая задача, описывающая рассеяние электромагнитных волн на структуре с графеновым покрытием. При использовании метода функций Грина задача сводится к граничному интегральному уравнению с гиперсингулярным интегральным оператором. Гиперсингулярным интегральным уравнениям посвящено много работ (см., например, [11–14]). Такие уравнения обычно рассматриваются в некоторой ограниченной области, чаще всего на отрезке $[-1, 1]$, в то время как в настоящей статье — на всей действительной прямой $\mathbb{R}$, что связано с физической интерпретацией рассматриваемой краевой задачи. При помощи подходящих замены переменных и выбора искомой функции осуществляется

переход к интегральному уравнению на отрезке $[-1, 1]$. Для нахождения приближённого решения полученного уравнения предлагается использовать метод коллокации, представляя решение в виде ряда Фурье–Чебышёва, при этом гиперсингулярные интегралы вычисляются аналитически. Основная часть работы посвящена доказательству фредгольмовости регуляризованного гиперсингулярного оператора из решаемого интегрального уравнения.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Определим множества

$$\Omega_1 := \{(x, z): x > h, z \in \mathbb{R}\}, \quad \Omega_2 := \{(x, z): 0 < x < h, z \in \mathbb{R}\},$$

$$\Gamma_0 := \{(x, z): x = 0, z \in \mathbb{R}\}, \quad \Gamma_h := \{(x, z): x = h, z \in \mathbb{R}\},$$

где h — некоторая положительная постоянная.

Рассмотрим краевую задачу $\mathcal{P}$: найти пару функций

$$u_1 \equiv u_1(x, z) \in C^2(\Omega_1) \cap C(\bar{\Omega}_1), \quad u_2 \equiv u_2(x, z) \in C^2(\Omega_2) \cap C(\bar{\Omega}_2),$$

удовлетворяющих уравнениям Гельмгольца

$$\Delta u_1 + k_1^2 u_1 = 0, \quad (x, z) \in \Omega_1, \quad (1)$$

$$\Delta u_2 + k_2^2 u_2 = 0, \quad (x, z) \in \Omega_2, \quad (2)$$

однородному условию первого рода на границе Γ_0 :

$$u_2|_{\Gamma_0} = 0, \quad (3)$$

условию на границе Γ_h :

$$u_1(x, z)|_{\Gamma_h^+} - u_2(x, z)|_{\Gamma_h^-} = -f(z), \quad (4)$$

условию скачка частных производных на границе Γ_h вида

$$\frac{\partial u_1(x, z)}{\partial x} \Big|_{\Gamma_h^+} - \frac{\partial u_2(x, z)}{\partial x} \Big|_{\Gamma_h^-} = \sigma(z) u_2(x, z)|_{\Gamma_h^-} - g(z) \quad (5)$$

и условию излучения Зомерфельда

$$u_1 = O(r^{-1/2}), \quad \frac{\partial u_1}{\partial r} + ik_1 u_1 = o(r^{-1/2}), \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

Здесь f, g — некоторые гладкие функции переменной z , а σ — произвольная функция переменной z (некоторые ограничения на σ будут приведены ниже).

Задача $\mathcal{P}$ описывает рассеяние ТЕ-поляризованной электромагнитной волны на плоском диэлектрическом слое, имеющем абсолютно проводящую стенку на нижней границе (отсюда однородное условие (3)) и слой графена (или любого другого двумерного материала, оптические свойства которого характеризуются поверхностной проводимостью σ) на верхней границе (отсюда условия сопряжения (4), (5)). Отметим, что в силу поляризованности падающей электромагнитной волны и регулярности рассеивающей структуры исходная трёхмерная задача фактически становится двумерной. С физической точки зрения решения u_1 и u_2 краевой задачи $\mathcal{P}$ являются касательными составляющими электрических полей отражённой от границы Γ_h и прошедшей вглубь слоя Ω_2 электромагнитных волн соответственно. Функции f и g в условиях сопряжения (4), (5) соответствуют касательной компоненте электрического

поля падающей волны и её первой частной производной по пространственной переменной z . Зависимость проводимости σ от z позволяет исследовать рассеяние электромагнитных волн на слое, покрытом решёткой из графеновых полос.

2. СВЕДЕНИЕ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ К ГРАНИЧНОМУ ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Решение u_1 краевой задачи может быть представлено в виде

$$u_1(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_1(\eta) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} G_1(x, z, \xi, \eta) \right] \Big|_{\xi=h} d\eta, \quad (6)$$

где v_1 — след функции u_1 на границе Γ_h , т.е. $v(\eta) \equiv u_1(x, \eta)|_{\Gamma_h^+}$, а $G_1 \equiv G_1(x, z, \xi, \eta)$ — функция Грина задачи Дирихле для двумерного уравнения Гельмгольца (1).

Решение u_2 краевой задачи может быть записано как

$$u_2(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} v_0(\eta) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} G_2(x, z, \xi, \eta) \right] \Big|_{\xi=0} d\eta - \int_{-\infty}^{+\infty} v(\eta) \left[\frac{\partial}{\partial \xi} G_2(x, z, \xi, \eta) \right] \Big|_{\xi=h} d\eta, \quad (7)$$

где v_0 и v — следы функции u_2 на границах Γ_0 и Γ_h соответственно, т.е. $v_0(\eta) \equiv u_2(x, \eta)|_{\Gamma_0}$, $v(\eta) \equiv u_2(x, \eta)|_{\Gamma_h^-}$, а $G_2 \equiv G_2(x, z, \xi, \eta)$ — функция Грина задачи Дирихле для двумерного уравнения Гельмгольца (2).

Всюду ниже индекс j принимает значения 1, 2.

Для функций Грина G_j существуют аналитические представления [15, гл. 7, § 3]. Однако поскольку для наших дальнейших рассуждений имеет значение лишь сингулярная часть G_j , то удобно представить G_j в таком виде, где эта часть явно выделена. Как известно, функции Грина для двумерного уравнения Гельмгольца обладают логарифмической особенностью. Если к тому же учесть, что функции G_j обращаются в нуль на границе Γ_h (будучи решениями задачи Дирихле), то можно записать

$$G_j(x, z, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-2h+\xi)^2 + (z-\eta)^2} - \frac{1}{2\pi} \ln \sqrt{(x-\xi)^2 + (z-\eta)^2} + \hat{G}_j(x, z, \xi, \eta) - \hat{G}_j(x, z, h, \eta), \quad (8)$$

где $\hat{G}_j$ — некоторые непрерывные функции.

Из условия (3) следует, что $v_0(\eta) \equiv 0$. Используя условие непрерывности (4), функцию v_1 можно представить как $v_1 = v - f$. Тогда формулы (6), (7) примут вид

$$u_1(x, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(\eta) \frac{\partial G_1(x, z, \xi, \eta)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=h} d\eta - \int_{-\infty}^{+\infty} f(\eta) \frac{\partial G_1(x, z, \xi, \eta)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=h} d\eta,$$

$$u_2(x, z) = - \int_{-\infty}^{+\infty} v(\eta) \frac{\partial G_2(x, z, \xi, \eta)}{\partial \xi} \Big|_{\xi=h} d\eta.$$

Подставляя эти выражения в условие (5), приходим к следующему граничному интегральному уравнению:

$$(\mathcal{N}_2 v)(z) + (\mathcal{N}_1 v)(z) - \sigma(z)v(z) = (\mathcal{N}_1 f)(z) - g(z), \quad (9)$$

где операторы $\mathcal{N}_j$ определяются как

$$(\mathcal{N}_j \varphi)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\eta) \frac{\partial^2 G_j(x, z, \xi, \eta)}{\partial x \partial \xi} \Big|_{\xi=x=h} d\eta.$$

С учётом (8) находим

$$\frac{\partial^2 G_j(x, z, \xi, \eta)}{\partial x \partial \xi} \Big|_{x=\xi=h} = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{z-\eta} \right) + K_j(z, \eta), \quad (10)$$

где

$$K_j(z, \eta) = \frac{\partial^2 \hat{G}_j(x, z, \xi, \eta)}{\partial x \partial \xi} \Big|_{x=\xi=h}.$$

Явные выражения для функций K_j представлены в работе [16]. Для дальнейших рассуждений важно то, что $K_j(z, \eta)$ зависят от разности своих аргументов, т.е. $K_j(z, \eta) \equiv K_j(z-\eta)$, непрерывны при $z \neq \eta$ и характеризуются следующим асимптотическим поведением:

$$K_j(z-\eta) = \text{const} \ln |z-\eta| \quad \text{при} \quad |z-\eta| \rightarrow 0, \quad (11)$$

$$K_j(z-\eta) = \text{const} \quad \text{при} \quad |z-\eta| \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Подставляя (10) в $\mathcal{N}_j$, получаем $(\mathcal{N}_j \varphi)(z) = (\mathcal{S} \varphi)(z) + (\mathcal{K}_j \varphi)(z)$, где

$$(\mathcal{S} \varphi)(z) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-\eta} \varphi(\eta) d\eta, \quad (\mathcal{K}_j \varphi)(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} K_j(|z-\eta|) \varphi(\eta) d\eta.$$

Тогда интегральное уравнение (9) примет вид

$$2(\mathcal{S} v)(z) + (\mathcal{K}_1 v)(z) + (\mathcal{K}_2 v)(z) - \sigma(z)v(z) = F(z), \quad (13)$$

где $F(z) = (\mathcal{S} f)(z) + (\mathcal{K}_1 f)(z) - g(z)$.

Заметим, что интегральное уравнение (13) задано на всей действительной прямой $\mathbb{R}$. Это вызывает затруднения как при нахождении приближённого решения данного уравнения, так и при его аналитическом исследовании. Ниже при помощи подходящих замены переменных и выбора искомой функции перейдём к интегральному уравнению на отрезке $[-1, 1]$.

3. ПЕРЕХОД К ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ НА ОТРЕЗКЕ $[-1, 1]$

Вводя новые переменные

$$z = \ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta}, \quad \eta = \ln \frac{1+p}{1-p},$$

новую искомую функцию

$$w(\zeta) = (1-\zeta^2)^{-1/2} v \left(\ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right)$$

и обозначения

$$\tilde{K}_j(\zeta, p) = K_j \left(\ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} - \ln \frac{1+p}{1-p} \right), \quad \tilde{\sigma}(\zeta) = \sigma \left(\ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right), \quad \tilde{F}(\zeta) = F \left(\ln \frac{1+\zeta}{1-\zeta} \right),$$

уравнение (13) можно привести к виду

$$2(\tilde{S}w)(\zeta) + 2(\tilde{K}_1w)(\zeta) + 2(\tilde{K}_2w)(\zeta) - \tilde{\sigma}(\zeta)\sqrt{1-\zeta^2}w(\zeta) = \tilde{F}(\zeta), \quad (14)$$

где

$$(\tilde{S}w)(\zeta) = \frac{1-\zeta^2}{2\pi} \frac{d}{d\zeta} \int_{-1}^1 \operatorname{arctg}^{-1} \left(\frac{\zeta-p}{1-p\zeta} \right) \frac{w(p)dp}{\sqrt{1-p^2}},$$

$$(\tilde{K}_jw)(\zeta) = \int_{-1}^1 \tilde{K}_j(\zeta, p) \frac{w(p)dp}{\sqrt{1-p^2}}.$$

Кроме того, $\tilde{S}$ можно представить как сумму гиперсингулярного интегрального оператора

$$(\tilde{\mathcal{H}}w)(\zeta) = \frac{1-\zeta^2}{2\pi} \frac{d}{d\zeta} \int_{-1}^1 \frac{w(p)}{\zeta-p} \sqrt{1-p^2} dp$$

и интегрального оператора

$$(\tilde{K}_3w)(\zeta) = \int_{-1}^1 \tilde{K}_3(\zeta, p) \frac{w(p) dp}{\sqrt{1-p^2}},$$

где

$$\tilde{K}_3(\zeta, p) = -\frac{1}{2\pi} \left(1 - \left(\frac{\zeta-p}{1-p\zeta} \right)^{-2} + \operatorname{arctg}^{-2} \frac{\zeta-p}{1-p\zeta} \right). \quad (15)$$

Используя разложение в ряд Маклорена, можно убедиться, что функция $\tilde{K}_3$ непрерывна на всём квадрате $(\zeta, p) \in [-1, 1] \times [-1, 1]$. Заметим, что $\tilde{K}_3$ обращается в нуль при $\zeta = \pm 1$ или при $p = \pm 1$.

Окончательный вид уравнения (14) следующий:

$$\mathcal{T}w(\zeta) \equiv \left(2\tilde{\mathcal{H}} + 2 \sum_{i=1}^3 \tilde{K}_i - \tilde{\mathcal{J}} \right) w(\zeta) = \tilde{F}(\zeta), \quad (16)$$

где $\tilde{\mathcal{J}} = \tilde{\sigma}(\zeta)\sqrt{1-\zeta^2} \circ \mathcal{I}$, а $\mathcal{I}$ — тождественный оператор.

4. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Представим искомую функцию w в виде ряда

$$w(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n U_n(p), \quad (17)$$

здесь U_n — полиномы Чебышёва второго рода. Подставляя (17) в $\tilde{\mathcal{H}}$ и используя соотношение [11]

$$\frac{d}{d\zeta} \int_{-1}^1 \frac{1}{\zeta-p} U_n(p) \sqrt{1-p^2} dp = \pi(n+1)U_n(\zeta), \quad (18)$$

находим

$$(\tilde{\mathcal{H}}w)(\zeta) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} c_n(n+1)(1-\zeta^2)U_n(\zeta).$$

Пусть индекс i принимает значения 1, 2, 3. Подставив ряд (17) в интегральные операторы $\tilde{\mathcal{K}}_i$, получим

$$(\tilde{\mathcal{K}}_i w)(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \int_{-1}^1 \tilde{K}_i(\zeta, p) U_n(p) \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}.$$

Имеет смысл перейти в полученных интегралах к переменной интегрирования $\theta = \arccos p$:

$$(\tilde{\mathcal{K}}_i w)(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \int_0^\pi \tilde{K}_i(\zeta, \cos \theta) \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin \theta} d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \tilde{K}_i^{(n)}(\zeta).$$

Покажем, что интегралы $\tilde{K}_i^{(n)}$ сходятся. Действительно, из (11) следует, что функции $\tilde{K}_1$, $\tilde{K}_2$ имеют интегрируемую (логарифмическую) особенность при совпадении их аргументов и непрерывны, когда θ приближается к концам интервала интегрирования $(0, \pi)$. Функция $\tilde{K}_3(\zeta, \cos \theta)$ непрерывна во всей области $(\zeta, \theta) \in [-1, 1] \times [0, \pi]$. Таким образом, для доказательства сходимости интегралов $\tilde{K}_i^{(n)}$ осталось лишь заметить, что

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} = n+1, \quad \lim_{\theta \rightarrow \pi} \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} = (-1)^n(n+1).$$

Объединяя полученные результаты, приходим к уравнению

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (\Upsilon_n(\zeta) - \tilde{\sigma}(\zeta) \sin((n+1) \arccos \zeta)) = \tilde{F}(\zeta), \quad \zeta \in [-1, 1], \quad (19)$$

где

$$\Upsilon_n(\zeta) = (n+1)\sqrt{1-\zeta^2} \sin((n+1) \arccos \zeta) + 2 \sum_{i=1}^3 \tilde{K}_i^{(n)}(\zeta).$$

Введём сетку

$$-1 < \zeta_0 < \zeta_1 < \dots < \zeta_N < 1$$

с узлами ζ_k , являющимися корнями многочлена Чебышёва $U_{N+1}(\zeta)$. Приближённое решение интегрального уравнения (19) можно искать в виде

$$\tilde{v}_N(\zeta) = \sqrt{1-\zeta^2} \sum_{n=0}^N c_n U_n(\zeta),$$

при этом коэффициенты c_n определяются из системы уравнений

$$\sum_{n=0}^N c_n [\Upsilon_n(\zeta_k) - \tilde{\sigma}(\zeta_k) \sin((n+1) \arccos \zeta_k)] = \tilde{F}(\zeta_k), \quad k = \overline{0, N}.$$

Приближённые решения уравнения (19) представлены в работе [16].

5. СВОЙСТВА ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ОПЕРАТОРА $\mathcal{T}$

Исследуем свойства оператора $\mathcal{T}$ из интегрального уравнения (16). Пусть $S = (-1, 1)$, $\bar{S} = [-1, 1]$. Введём пространства функций, заданных на отрезке $\bar{S}$:

$$L_2^{(1)} = \left\{ f(p) : \|f\|_1^2 := \int_{-1}^1 |f(p)|^2 \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} < \infty \right\},$$

$$L_2^{(2)} = \left\{ f(p) : \|f\|_2^2 := \int_{-1}^1 |f(p)|^2 \sqrt{1-p^2} dp < \infty \right\}.$$

Предположим, что решение w уравнения (16) принадлежит $L_2^{(2)}$ и потому может быть представлено в виде ряда (17). В дальнейшем сузим пространство, которому принадлежит w .

Исследуем оператор $\tilde{\mathcal{H}}$. Представим его в виде композиции

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1-\zeta^2}{2} \circ \mathcal{H}', \quad (\mathcal{H}'\varphi)(\zeta) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\zeta} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(p)}{\zeta-p} \sqrt{1-p^2} dp. \quad (20)$$

Действуя оператором $\mathcal{H}'$ на (17) и используя соотношение (18), получаем

$$(\mathcal{H}'w)(\zeta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)c_n U_n(\zeta).$$

Потребуем, чтобы функция $\mathcal{H}'w$ также принадлежала пространству $L_2^{(2)}$. Это означает, что должно выполняться условие

$$\|\mathcal{H}'w\|_2^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 |c_n|^2 \|U_n\|^2 = \frac{\pi^2}{4} \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 |c_n|^2 < \infty. \quad (21)$$

Принадлежность w пространству $L_2^{(2)}$ этого не гарантирует.

Определим класс функций, которому должна принадлежать функция w , чтобы обеспечить сходимость ряда (21). Для этого удобно ввести так называемую “шкалу пространств”, как было сделано в работе [17] для логарифмических интегральных операторов.

Пусть h_p — пространство последовательностей комплексных чисел $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$ таких, что

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^p |\xi_n|^2 < \infty.$$

Пространство h_p , наделённое скалярным произведением

$$(\xi, \eta)_p = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^p \xi_n \bar{\eta}_n,$$

является (сепарабельным) гильбертовым пространством.

Рассмотрим класс функций, заданных на отрезке $\bar{S}$:

$$\Psi_p := \left\{ \varphi(p) : \varphi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n U_n(p), \quad \xi \in h_p \right\}.$$

Это пространство также будет гильбертовым, если определить в нём скалярное произведение по формуле

$$(\varphi, \psi)_p = (\xi, \eta)_p = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^p \xi_n \bar{\eta}_n, \quad \varphi(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n U_n(p), \quad \psi(p) = \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_n U_n(p).$$

Ясно, что Ψ_p унитарно изометрично пространству h_p .

Ввиду (21) мы будем работать с функциями из Ψ_2 . Оператор $\mathcal{H}'$, действуя на функции из Ψ_2 , переводит их в функции из Ψ_0 . Ясно, что $\Psi_0 = L_2^{(2)}$.

Следующие леммы устанавливают важные свойства, которыми обладают функции из Ψ_2 .

Лемма 1. Функция $\varphi \in \Psi_2$ непрерывна в интервале S и удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(t)| \leq \frac{C}{\sqrt{1-t^2}},$$

где $C \equiv C(\varphi)$ — некоторая постоянная, зависящая от φ .

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Psi_2$. Имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned} |\varphi(t)| &= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n U_n(t) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{n=0}^{+\infty} |\xi_n| |\sin((n+1) \arccos x)| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \sum_{n=0}^{+\infty} |\xi_n| \leq \frac{\|\xi\|_2}{\sqrt{1-t^2}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \right)^{1/2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} \frac{\|\xi\|_2}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{C}{\sqrt{1-t^2}}, \end{aligned}$$

где $C \equiv C(\varphi)$. Отсюда следует, что $\varphi(t)$ непрерывна на интервале S , поскольку ряд из непрерывных функций сходится равномерно на любом отрезке $[a, b] \subset S$. Лемма доказана.

Лемма 2. Функция $\varphi_* = \varphi \sqrt{1-t^2}$, где $\varphi \in \Psi_2$, непрерывна на отрезке $\bar{S}$, обращается в нуль на концах $\bar{S}$ и удовлетворяет неравенству Гёльдера

$$|\varphi_*(t_1) - \varphi_*(t_2)| \leq M |t_1 - t_2|^{1/4}, \quad (22)$$

где $M \equiv M(\varphi)$ — некоторая постоянная, зависящая от φ .

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Psi_2$. Рассмотрим функцию $\varphi_* = \varphi \sqrt{1-t^2}$. Непрерывность и ограниченность функции φ_* на всём отрезке $\bar{S}$ следует из леммы 1.

Далее, в формуле

$$\varphi_*(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n \sin((n+1) \arccos t)$$

можно перейти к пределу при $t \rightarrow \pm 1$ ввиду того, что ряд в правой части сходится равномерно на отрезке $\bar{S}$. Отсюда получаем, что $\varphi_*(-1) = \varphi_*(1) = 0$.

Наконец, покажем, что φ_* удовлетворяет указанному в лемме неравенству Гёльдера. Введём обозначения $\theta = \arccos t_1$, $\tau = \arccos t_2$. Справедлива цепочка неравенств

$$\begin{aligned} |\varphi_*(t_1) - \varphi_*(t_2)| &= \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n (\sin((n+1)\theta) - \sin((n+1)\tau)) \right| \leq 2 \sum_{n=0}^{+\infty} |\xi_n| \left| \sin \frac{(n+1)(\theta - \tau)}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \|\xi\|_2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^2((n+1)(\theta - \tau)/2)}{(n+1)^2} \right)^{1/2} = 2 \|\xi\|_2 \left(|\theta - \tau| \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{8} |\theta - \tau| \right) \right)^{1/2} \leq \sqrt{\pi} \|\xi\|_2 |\theta - \tau|^{1/2}. \end{aligned}$$

Используя неравенство $1 - 2\pi^{-1}t \leq \cos t$ [18], можно показать, что

$$\sqrt{\pi} \|\xi\|_2 |\theta - \tau|^{1/2} \leq \frac{\pi}{\sqrt{2}} \|\xi\|_2 |\cos \theta - \cos \tau|^{1/4}.$$

Отсюда, переходя от θ и τ к t_1 и t_2 соответственно, приходим к требуемому неравенству. Лемма доказана.

Введём пространство функций

$$\hat{W}_2^1 = \{f(p) : f \in L_2^{(2)}, f_* = f\sqrt{1-p^2}, f_*(-1) = f_*(1) = 0, f'_* \in L_2^{(2)}\}.$$

Лемма 3. *Справедливо равенство $\Psi_2 = \hat{W}_2^1$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Psi_2$. Тогда

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n U_n(t), \quad \xi_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \hat{U}_n(t) \varphi_*(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

где $\varphi_* = \varphi\sqrt{1-t^2}$, $\hat{U}_n(t) = \sin((n+1)\arccos t)$ — функция Чебышёва второго рода, и последовательность ξ_n такова, что $\sum_{n=0}^{+\infty} |\xi_n|^2 (n+1)^2 < \infty$. Отсюда по теореме Рисса–Фишера существует такой элемент $f \in L_2^{(1)}$, что его коэффициенты Фурье по ортогональной системе полиномов Чебышёва первого рода T_n , $n \geq 1$, равны $n\xi_{n-1}$, т.е.

$$(n+1)\xi_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_{n+1}(x) f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Поскольку $|f(x)|$ интегрируема с весом $(1-x^2)^{-1/2}$, функция

$$F(x) = \int_{-1}^x \frac{f(t) dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

представляющая собой неопределённый интеграл от суммируемой функции, абсолютно непрерывна и её производная $F'(x) = f(x)(1-x^2)^{-1/2}$ почти всюду непрерывна. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_{n+1}(x) f(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_{n+1}(x) F'(x) dx = \\ &= \frac{2}{\pi} F(1) - \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T'_{n+1}(x) F(x) dx = \frac{2}{\pi} F(1) + (n+1) \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \hat{U}_n(x) F(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \end{aligned}$$

поэтому

$$\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 (\varphi_*(t) + F(t)) \hat{U}_n(x) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{2}{\pi n} F(1). \quad (23)$$

По условию $\varphi \in L_2^{(2)}$ и, стало быть, $\varphi_* \in L_2^{(1)}$. Абсолютно непрерывная функция F также, очевидно, принадлежит $L_2^{(1)}$. Отсюда следует, что формула (23) определяет коэффициенты в разложении функции $\psi(t) = \varphi_*(t) + F(t)$ из пространства $L_2^{(1)}$ по функциям Чебышёва $\hat{U}_n$, т.е.

$$\psi(t) = F(1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n} \hat{U}_n(t) = F(1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)\arccos t)}{n} = F(1) \frac{\pi - \arccos t}{2}.$$

Отсюда получаем

$$\varphi'_* = (\varphi\sqrt{1-t^2})' = \psi'(t) - F'(t) = \frac{F(1) - f(t)}{\sqrt{1-t^2}} \in L_2^{(2)}.$$

Обратно, пусть функция $\varphi \in \hat{W}_2^1$. Её ряд Фурье–Чебышёва

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n U_n(t), \quad \xi_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) U_n(t) \sqrt{1-t^2} dt.$$

Докажем сходимость ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} |\xi_n|^2 (n+1)^2$. Для этого покажем, что числа $(n+1)\xi_n$ являются коэффициентами в разложении функции

$$\varphi^*(t) = \sqrt{1-t^2} (\varphi(t) \sqrt{1-t^2})'$$

по полиномам Чебышёва первого рода. Тогда условие сходимости указанного ряда равносильно тому, что $\varphi^* \in L_2^{(1)}$ или, что то же самое, $(1-t^2)^{-1/2} \varphi^* \in L_2^{(2)}$, а последнее нам дано по условию.

Итак, используя формулу для вычисления коэффициентов ξ_n в разложении функции в ряд по полиномам Чебышёва второго рода, находим

$$\begin{aligned} (n+1)\xi_n &= (n+1) \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) U_n(t) \sqrt{1-t^2} dt = (n+1) \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \sin((n+1) \arccos t) dt = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi(t) \sqrt{1-t^2} (\cos((n+1) \arccos t))' dt. \end{aligned}$$

Интегрируя последний интеграл по частям и учитывая, что

$$(\varphi(t) \sqrt{1-t^2})|_{t=-1} = (\varphi(t) \sqrt{1-t^2})|_{t=1} = 0,$$

получаем

$$(n+1)\xi_n = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_{n+1}(t) (\varphi(t) \sqrt{1-t^2})' dt = -\frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 T_{n+1}(p) \varphi^*(t) \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

где T_{n+1} — полином Чебышёва первого рода. Последнее выражение есть с точностью до знака $(n+1)$ -й коэффициент в разложении φ^* по полиномам Чебышёва первого рода. Лемма доказана.

В силу леммы 3 функции из $\hat{W}_2^1$ обладают свойствами, сформулированными в леммах 1, 2, и удовлетворяют условию (21).

Лемма 4. Вложение $\hat{W}_2^1$ в $L_2^{(2)}$ компактно.

Доказательство. Введём пространства функций, заданных на отрезке $[0, 2\pi]$:

$$L_2 = \left\{ f(t) : \|f\|^2 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}, \quad W_2^1 = \{ f(t) : f(t) \in L_2, \quad f'(t) \in L_2 \}.$$

Несложно показать, что L_2 и W_2^1 унитарно изометричны вводимым нами ранее пространствам последовательностей комплексных чисел h_0 и h_2 соответственно. Действительно, любую функцию φ из указанных функциональных пространств можно представить в виде ряда

$$\varphi(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi_n e^{int}, \quad \varphi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-int} dt.$$

Последовательность чисел φ_n принадлежит пространству h_0 , т.е. ряд

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi_n|^2 < \infty,$$

если и только если $\varphi \in L_2$. Аналогично последовательность чисел φ_n принадлежит h_2 , т.е.

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} n^2 |\varphi_n|^2 < \infty,$$

если и только если $\varphi \in W_2^1$.

В соответствии с классическими результатами теории пространств Соболева вложение $W_2^1 \subset L_2$ компактно. В силу указанной выше унитарной изометрии вложение $h_2 \subset h_0$ также компактно.

Для завершения доказательства осталось лишь заметить, что пространство $L_2^{(2)}$ ($= \Psi_0$) унитарно изометрично h_0 , а $\hat{W}_2^1$ ($= \Psi_2$) унитарно изометрично h_2 . Лемма доказана.

Итак, мы установили, что оператор $\mathcal{H}'$ переводит функции из пространства $\hat{W}_2^1$ в функции из $L_2^{(2)}$. Поскольку функция $(1 - \zeta^2)$ принадлежит пространству $L_2^{(2)}$, то оператор $\tilde{\mathcal{H}}$ также действует из $\hat{W}_2^1$ в $L_2^{(2)}$.

Введём в рассмотрение оператор

$$(\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon w)(\zeta) = \frac{1 + \varepsilon - \zeta^2}{2\pi} \frac{d}{d\zeta} \int_{-1}^1 \frac{w(p)}{\zeta - p} \sqrt{1 - p^2} dp,$$

где ε — любое малое положительное число. Ясно, что равно как и $\tilde{\mathcal{H}}$, оператор $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ является ограниченным, действуя из $\hat{W}_2^1$ в $L_2^{(2)}$. Имеет место следующий важный результат.

Теорема 1. *Оператор $\tilde{\mathcal{H}}: \hat{W}_2^1 \rightarrow L_2^{(2)}$ инъективен, но не сюръективен, тогда как оператор $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon: \hat{W}_2^1 \rightarrow L_2^{(2)}$ непрерывно обратим при условии, что $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Оба оператора: $\tilde{\mathcal{H}}$ и $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ представляют собой композицию классического гиперсингулярного оператора $\mathcal{H}'$ и оператора умножения либо на функцию $f(\zeta) = (1 - \zeta^2)/2$, либо на функцию $f_\varepsilon(\zeta) = (1 + \varepsilon - \zeta^2)/2$. Как известно, $\mathcal{H}'$ имеет ограниченный обратный оператор $(\mathcal{H}')^{-1}$. Тогда обратные к $\tilde{\mathcal{H}}$ и $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$ операторы имеют вид $\tilde{\mathcal{H}}^{-1} \equiv (\mathcal{H}')^{-1} \circ f^{-1}(\zeta)$ и $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon^{-1} \equiv (\mathcal{H}')^{-1} \circ f_\varepsilon^{-1}(\zeta)$ соответственно. Ясно, что первый из них определён не для всех $\varphi \in L_2^{(2)}$, поскольку функция $f^{-1}\varphi$, вообще говоря, не принадлежит пространству $L_2^{(2)}$. В то же время $f_\varepsilon^{-1}\varphi \in L_2^{(2)}$ при $\varepsilon > 0$ и, следовательно, оператор $\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon^{-1}$ определён и ограничен на всём $L_2^{(2)}$. Теорема доказана.

Зададим норму в пространстве $\hat{W}_2^1$. Для этого рассмотрим $L_2^{(2)}$ -норму функции $w'_* = (w\sqrt{1-p^2})'$. Используя равенство

$$|w'_*|^2 \sqrt{1-p^2} = |w'|^2 \sqrt{(1-p^2)^3} - p(|w|^2)' \sqrt{1-p^2} + \frac{p^2 |w|^2}{\sqrt{1-p^2}},$$

можем записать

$$\|w'_*\|_2^2 = \int_{-1}^1 |w'|^2 \sqrt{(1-p^2)^3} dp + \int_{-1}^1 \frac{p^2 |w|^2 dp}{\sqrt{1-p^2}} - \int_{-1}^1 (|w|^2)' p \sqrt{1-p^2} dp.$$

Интегрируя последний интеграл по частям, находим

$$\int_{-1}^1 (|w|^2)' p \sqrt{1-p^2} dp = (|w|^2 p \sqrt{1-p^2})|_{-1}^1 + \int_{-1}^1 \frac{|w|^2 p^2 dp}{\sqrt{1-p^2}} - \int_{-1}^1 |w|^2 \sqrt{1-p^2} dp.$$

Первое слагаемое в правой части полученного равенства можно оценить, используя неравенство (22). Действительно, полагая в (22) $t_1 = \pm 1$ и используя элементарную оценку $|1 - |t|| \leq |1 - t^2|$, верную при $|t| = 1 - |\delta|$, где $|\delta| \leq 1$, получаем $|w_*(p)| \leq M \sqrt[4]{1-p^2}$, $|p| \rightarrow 1$. Отсюда следует, что

$$(|w|^2 p \sqrt{1-p^2})|_{-1}^1 = \left(|w_*|^2 \frac{p}{\sqrt{1-p^2}} \right) \Big|_{-1}^1 \leq 2M.$$

Объединяя результаты, приходим к равенству

$$\|w'_*\|_2^2 = \int_{-1}^1 |w'|^2 \sqrt{(1-p^2)^3} dp + \int_{-1}^1 |w|^2 \sqrt{1-p^2} dp + 2M. \quad (24)$$

Очевидно, что выражение (24) определяет естественную для $\hat{W}_2^1$ норму в том смысле, что $w \in \hat{W}_2^1$, если и только если оно ограничено, при этом число $2M$ в норме можно опустить (в этом случае получаем эквивалентную норму). Однако для дальнейших рассуждений удобнее ввести в $\hat{W}_2^1$ норму

$$\|w\|_{2,1}^2 = \|w'_*\|_2^2 + \|w\|_1^2, \quad (25)$$

где $\|\cdot\|_1$ — норма в пространстве $L_2^{(1)}$. Важно отметить, что при этом мы не сужаем класс функций $\hat{W}_2^1$. На этот счёт справедлива следующая

Лемма 5. Если $\varphi \in \hat{W}_2^1$, то $\varphi \in L_2^{(1)}$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \hat{W}_2^1$. Представим функцию φ'_* в виде следующей разности:

$$\varphi'_* = \varphi' \sqrt{1-p^2} - \frac{p\varphi}{\sqrt{1-p^2}}.$$

По условию $\varphi'_* \in L_2^{(2)}$, а из (24) следует, что $\varphi' \sqrt{1-p^2} \in L_2^{(2)}$. Это означает, что функция

$$\frac{p\varphi}{\sqrt{1-p^2}} = \varphi' \sqrt{1-p^2} - \varphi'_*,$$

будучи линейной комбинацией функций из $L_2^{(2)}$, также принадлежит $L_2^{(2)}$. Ввиду элементарного равенства

$$\int_{-1}^1 |\varphi|^2 \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = \int_{-1}^1 p^2 |\varphi|^2 \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} + \int_{-1}^1 |\varphi|^2 \sqrt{1-p^2} dp$$

приходим к выводу, что $\varphi \in L_2^{(1)}$. Лемма доказана.

Покажем компактность интегральных операторов

$$(\tilde{\mathcal{K}}_i w)(\zeta) = \int_{-1}^1 \tilde{K}_i(\zeta, p) \frac{w(p) dp}{\sqrt{1-p^2}}.$$

Подчеркнём, что из-за наличия в подынтегральном выражении весовой функции $(1-p^2)^{-1/2}$ и функций $\tilde{K}_j$ с логарифмической особенностью (см. (11)) компактность $\tilde{\mathcal{K}}_i$ не является простым следствием классической теории интегральных операторов, а нуждается в строгом обосновании.

Для дальнейших выкладок удобно представить функции $\tilde{K}_i$ в виде

$$\tilde{K}_i(\zeta, p) \equiv \tilde{K}_i(s_i(\zeta, p)),$$

где

$$s_1(\zeta, p) = s_2(\zeta, p) = 2 \operatorname{arctanh} \frac{\zeta - p}{1 - \zeta p}, \quad s_3(\zeta, p) = \frac{\zeta - p}{1 - p\zeta}.$$

Введём пространство функций, заданных в квадрате $\bar{S} \times \bar{S}$:

$$L_2^{(1)}(\bar{S} \times \bar{S}) = \left\{ f(\zeta, p) : \|f\|_1^2 := \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{|f(\zeta, p)|^2 d\zeta dp}{\sqrt{1-\zeta^2} \sqrt{1-p^2}} < \infty \right\}.$$

Для функций $\tilde{K}_i$ верно следующее утверждение.

Лемма 6. *Функции $\tilde{K}_i$ принадлежат пространству $L_2^{(1)}(\bar{S} \times \bar{S})$.*

Доказательство. Поскольку функция $\tilde{K}_3$ непрерывна (и ограничена) во всём квадрате $\bar{S}$ (см. формулу (15)), то она, очевидно, принадлежит пространству $L_2^{(1)}(\bar{S} \times \bar{S})$.

В первую очередь заметим, что при $\zeta = \pm 1$ и/или $p = \pm 1$ верны равенства

$$|s_j(\pm 1, p)| = |s_j(\zeta, \pm 1)| = |s_j(\pm 1, \pm 1)| = |2 \operatorname{arctanh} \pm 1| = \infty,$$

откуда в силу формулы (12) имеем $\tilde{K}_j(\pm \infty) = \text{const.}$ Тогда поскольку функции $\tilde{K}_j$ непрерывны (и ограничены) в квадрате $\bar{S} \times \bar{S}$ за исключением множества точек

$$\{(\zeta, p) \in \bar{S} \times \bar{S} : \zeta = p\} \setminus \{(1, 1), (-1, -1)\},$$

где $\tilde{K}_j$ характеризуются логарифмической особенностью (см. формулу (11)), то для доказательства принадлежности $\tilde{K}_j$ пространству $L_2^{(1)}(\bar{S} \times \bar{S})$ достаточно показать ограниченность интеграла

$$T = \int_{-1+|\varepsilon|}^{1-|\varepsilon|} \int_{\zeta-|\delta|}^{\zeta+|\delta|} \ln^2 \left| \operatorname{arctanh} \frac{\zeta - p}{1 - \zeta p} \right| \frac{d\zeta dp}{\sqrt{1-p^2} \sqrt{1-\zeta^2}},$$

где ε, δ — некоторые малые числа такие, что $0 \leq |\varepsilon| - |\delta| \leq 1$ (данное условие гарантирует, что переменная интегрирования p принадлежит интервалу I) и $|\zeta - p|/|1 - \zeta p| < 1$.

Используя элементарные неравенства

$$|\zeta - p| \leq \left| \frac{\zeta - p}{1 - \zeta p} \right| \leq \left| \frac{\zeta - p}{1 - \zeta p} \right| \left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{\zeta - p}{1 - \zeta p} \right)^{2n} \right) = \left| \operatorname{arctanh} \frac{\zeta - p}{1 - \zeta p} \right|$$

и $\ln |a| \geq \ln |b|$ для $|a| \leq |b| \leq 1$, интеграл T можно оценить как

$$T \leq \int_{-1+|\varepsilon|}^{1-|\varepsilon|} \int_{\zeta-|\delta|}^{\zeta+|\delta|} \frac{\ln^2 |\zeta-p| d\zeta dp}{\sqrt{1-p^2} \sqrt{1-\zeta^2}} \leq \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\ln^2 |\zeta-p| d\zeta dp}{\sqrt{1-p^2} \sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Последний интеграл существует, поскольку функция $\ln |\zeta-p|$, как хорошо известно, принадлежит пространству $L_2^{(1)}$ функций, заданных на квадрате $[-1, 1] \times [-1, 1]$. Лемма доказана.

Используя леммы 4, 6, а также свойства функций из $\hat{W}_2^1$, получаем следующий важный результат.

Теорема 2. *Интегральные операторы $\tilde{K}_i: \hat{W}_2^1 \rightarrow L_2^{(2)}$ компактны.*

Доказательство. Сначала докажем, что операторы $\tilde{K}_i$ действуют из $\hat{W}_2^1$ в себя и при этом ограничены.

Действительно, действуя оператором $\tilde{K}_i$ на функцию $w \in \hat{W}_2^1$, получаем

$$\varphi(\zeta) := (\tilde{K}_i w)(\zeta) = \int_{-1}^1 \tilde{K}_i(\zeta, p) w(p) \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}}.$$

Ввиду формул (24), (25), задающих норму в пространстве $\hat{W}_2^1$, и неравенства $\|f\|_2 \leq \|f\|_1$ для доказательства ограниченности операторов $\tilde{K}_i: \hat{W}_2^1 \rightarrow \hat{W}_2^1$ нужно показать, что

$$\|\varphi\|_1 \leq \text{const} \|w\|_{2,1}, \quad \|\varphi' \sqrt{1-\zeta^2}\|_2 \leq \text{const} \|w\|_{2,1}.$$

Первое из указанных неравенств элементарно получается, если учесть леммы 5 и 6. Действительно,

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_1^2 &= \int_{-1}^1 \left| \int_{-1}^1 \tilde{K}_i(\zeta, p) w(p) \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} \right|^2 \frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \leq \int_{-1}^1 \frac{|w(p)|^2 dp}{\sqrt{1-p^2}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{|\tilde{K}_i(\zeta, p)|^2 d\zeta dp}{\sqrt{1-\zeta^2} \sqrt{1-p^2}} = \|w\|_1^2 \cdot \|\tilde{K}_i\|_1^2 \leq \\ &\leq (\|w\|_1^2 + \|w'_*\|_1^2) \|\tilde{K}_i\|_1^2 = \|w\|_{2,1}^2 \|\tilde{K}_i\|_1^2. \end{aligned}$$

Для получения второго неравенства прежде заметим, что

$$\frac{\partial \tilde{K}_i(\zeta, p)}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \tilde{K}_i(s_i(\zeta, p)) = \frac{d\tilde{K}_i(s_i)}{ds_i} \frac{\partial s_i(\zeta, p)}{\partial \zeta} = -\frac{1-p^2}{1-\zeta^2} \frac{d\tilde{K}_i(s_i)}{ds_i} \frac{\partial s_i(\zeta, p)}{\partial p} = -\frac{1-p^2}{1-\zeta^2} \frac{\partial \tilde{K}_i(\zeta, p)}{\partial p},$$

откуда

$$\varphi'(\zeta) = \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_{-1}^1 \tilde{K}_i(\zeta, p) w(p) \frac{dp}{\sqrt{1-p^2}} = -\frac{1}{1-\zeta^2} \int_{-1}^1 \frac{\partial \tilde{K}_i(\zeta, p)}{\partial p} w_*(p) dp.$$

Интегрируя последний интеграл по частям и учитывая, что $w_*(\pm 1) = 0$, а $\tilde{K}_i(\zeta, \pm 1) \equiv \tilde{K}_i(\pm \infty)$ ограничены, находим

$$\varphi'(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta^2} \int_{-1}^1 \frac{\tilde{K}_i(\zeta, p)}{\sqrt{1-p^2}} w'_*(p) \sqrt{1-p^2} dp.$$

Тогда, используя неравенство Коши–Буняковского, имеем

$$|\varphi'(\zeta)| \leq \frac{1}{1-\zeta^2} \|w'_*\|_2 \left(\int_{-1}^1 \frac{|\tilde{K}_i(\zeta, p)|^2 dp}{\sqrt{1-p^2}} \right)^{1/2}.$$

Отсюда следуют соотношения

$$\|\varphi' \sqrt{1-\zeta^2}\|_2^2 = \int_{-1}^1 |\varphi'(\zeta)|^2 (1-\zeta^2)^{3/2} d\zeta \leq \|w'_*\|_2^2 \|\tilde{K}_i\|_1^2 \leq (\|w'_*\|_2^2 + \|w\|_1^2) \|\tilde{K}_i\|_1^2 = \|w\|_{2,1}^2 \|\tilde{K}_i\|_1^2.$$

Итак, мы показали, что $\tilde{K}_i$ действуют из $\hat{W}_2^1$ в себя и при этом ограничены. На самом деле это равносильно их компактности. Действительно, введём оператор $\tilde{K}'_i: \hat{W}_2^1 \rightarrow \hat{W}_2^1$: $w \rightarrow \tilde{K}_i w$. Тогда оператор $\tilde{K}_i: \hat{W}_2^1 \rightarrow L_2^{(2)}$ можно представить в виде композиции оператора $\tilde{K}'_i$ и тождественного оператора $\mathcal{I}: \hat{W}_2^1 \rightarrow L_2^{(2)}$. Первый из них, как показано выше, ограничен, а второй компактен в силу леммы 4. Теорема доказана.

Согласно теореме 1 оператор $\tilde{\mathcal{H}}$ не является обратимым в рассматриваемых нами функциональных пространствах. Это обстоятельство не позволяет установить фредгольмовость гиперсингулярного оператора $\mathcal{T}$.

Ввиду этого рассмотрим оператор

$$\mathcal{T}_\varepsilon \equiv 2\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon + 2 \sum_{i=1}^3 \tilde{K}_i - \tilde{\mathcal{J}},$$

который представляет собой *регуляризованный* вариант исходного гиперсингулярного оператора $\mathcal{T}$. Сформулируем основной результат данной работы.

Теорема 3. *Гиперсингулярный оператор $\mathcal{T}_\varepsilon: \hat{W}_2^1 \rightarrow L_2^{(2)}$ является фредгольмовым.*

Доказательство. Представим оператор $\mathcal{T}_\varepsilon$ в виде суммы $\mathcal{T}_\varepsilon = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2$, где $\mathcal{T}_1 = 2\tilde{\mathcal{H}}_\varepsilon$, $\mathcal{T}_2 = 2 \sum_{i=1}^3 \tilde{K}_i - \tilde{\mathcal{J}}$.

Согласно теореме 1 оператор $\mathcal{T}_1$ непрерывно обратим. Покажем, что все операторы, входящие в $\mathcal{T}_2$, компактны.

Оператор $\tilde{\mathcal{J}} \equiv \tilde{\sigma} \sqrt{1-\zeta^2} \circ \mathcal{I}$ компактен в силу того, что является композицией ограниченного и компактного операторов. Действительно, оператор, переводящий $w \in L_2^{(2)}$ в $(\tilde{\sigma} \sqrt{1-\zeta^2} w) \in L_2^{(2)}$, ограничен при довольно общих предположениях относительно функции $\tilde{\sigma}$, например, достаточно потребовать, чтобы $\tilde{\sigma}$ удовлетворяла неравенству

$$\tilde{\sigma}(\zeta) \leq \text{const} \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Тождественный оператор $\mathcal{I}: \hat{W}_2^1 \rightarrow L_2^{(2)}$ компактен в силу леммы 4.

Интегральные операторы $\tilde{K}_i$ являются компактными в силу теоремы 2.

Итак, мы показали, что оператор $\mathcal{T}_\varepsilon$ можно представить как сумму обратимого и компактного операторов. Тогда, используя критерий Никольского [19, с. 223], приходим к выводу, что $\mathcal{T}_\varepsilon$ является фредгольмовым оператором. Теорема доказана.

ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания № 124020200015-7.

КОНФЛИКТ ИНТЕРЕСОВ

Авторы данной работы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Geim, A.K. The rise of graphene / A.K. Geim, K.S. Novoselov // *Nat. Mater.* — 2007. — № 6. — P. 183–191.
2. Gorbach, A.V. Nonlinear graphene plasmonics: amplitude equation for surface plasmons / A.V. Gorbach // *Phys. Rev. A.* — 2013. — V. 87. — Art. 013830.
3. Andreeva, V. Nonperturbative nonlinear effects in the dispersion relations for te and tm plasmons on two-dimensional materials / V. Andreeva, M. Luskun, D. Margetis // *Phys. Rev. B.* — 2018. — V. 98. — Art. 195407.
4. Nonlinear optics of graphene and other 2D materials in layered structures / J.L. Cheng, J.E. Sipe, N. Vermeulen, C. Guo // *J. Phys.: Photonics.* — 2018. — V. 1, № 1. — Art. 015002.
5. Song, J.H. Adaptive finite element simulations of waveguide configurations involving parallel 2D material sheets / J.H. Song, M. Maier, M. Luskun // *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* — 2019. — V. 351. — P. 20–34.
6. Nonretarded edge plasmon-polaritons in anisotropic two-dimensional materials / D. Margetis, M. Maier, T. Stauber [et al.] // *J. Phys. A: Math. Theor.* — 2020. — V. 53, № 5. — Art. 055201.
7. Smirnov, Yu. The nonlinear eigenvalue problem of electromagnetic wave propagation in a dielectric layer covered with graphene / Yu. Smirnov, S. Tikhov // *Photonics.* — 2023. — V. 10, № 5. — Art. 523.
8. Integral equation analysis of plane wave scattering by coplanar graphene-strip gratings in the thz range / O.V. Shapoval, J.S. Gómez-Díaz, J. Perruisseau-Carrier [et al.] // *IEEE Trans. Terahertz Sci. Technol.* — 2013. — V. 3. — P. 666–674.
9. Zinenko, T.L. Surface-plasmon, grating-mode, and slab-mode resonances in the h- and e-polarized thz wave scattering by a graphene strip grating embedded into a dielectric slab / T.L. Zinenko, A. Matsushima, A.I. Nosich // *IEEE J. Sel. Top. Quant.* — 2017. — V. 23. — P. 1–9.
10. Смирнов, Ю.Г. Интегро-дифференциальные уравнения в задаче рассеяния электромагнитных волн на электрическом теле, покрытом графеном / Ю.Г. Смирнов, О.В. Кондырев // *Дифференц. уравнения.* — 2024. — Т. 60, № 9. — С. 1216–1224.
11. Kaya, A.C. On the solution of integral equations with strongly singular kernels / A.C. Kaya, F. Erdogan // *Q. Appl. Math.* — 1987. — V. 45, № 1. — P. 105–122.
12. Ervin, V. Collocation with chebyshev polynomials for a hypersingular integral equation on an interval / V. Ervin, E. Stephan // *J. Comput. Appl. Math.* — 1992. — V. 43, № 1. — P. 221–229.
13. Lifanov, I.K. Hypersingular Integral Equations and Their Applications / I.K. Lifanov, L.N. Poltavskii, M.M. Vainikko. — 1st ed. — Boca Raton : CRC Press, 2003. — 416 p.
14. Сетуха, А.В. Метод интегральных уравнений в математической физике: учеб. пособие / А.В. Сетуха. — М. : Изд-во Моск. ун-та, 2023. — 316 с.
15. Polyanin, A.D. Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists / A.D. Polyanin, V. E. Nazaikinskii. — 2nd ed. — New York : Chapman and Hall/CRC, 2016. — 1643 p.
16. Тихов, С.В. Задача дифракции ТЕ-волны на двумерном слое, покрытом графеном, с учётом нелинейности / С.В. Тихов // *Модели, системы, сети в экономике, технике, природе и обществе.* — 2024. — № 4. — С. 73–85.
17. Shestopalov, Y.V. Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics / Y.V. Shestopalov, Y.G. Smirnov, E.V. Chernokozhin. — Berlin; Boston : De Gruyter, 2000. — 128 p.
18. Kober, H. Approximation by integral functions in the complex domain / H. Kober // *Trans. Amer. Math. Soc.* — 1944. — V. 56, № 1. — P. 7–31.
19. Треногин, В.А. Функциональный анализ / В.А. Треногин. — М. : Наука, 1980. — 495 с.

ON THE FREDHOLM PROPERTY OF A HYPERSINGULAR INTEGRAL OPERATOR IN A SCATTERING PROBLEM OF ELECTROMAGNETIC WAVES ON A SLAB COVERED WITH GRAPHENE

© 2025 / Yu. G. Smirnov¹, S. V. Tikhov²

Penza State University, Russia

e-mail: ¹smirnovyug@mail.ru, ²tik.stanislav2015@yandex.ru

The paper focuses on a boundary-value problem for a system of two homogeneous Helmholtz equations with mixed boundary conditions arising in the theory of electromagnetic waves scattering on structures covered with two-dimensional materials. The problem is reduced to a boundary integral equation on the whole line involving a hypersingular integral operator. Introducing new variables and sought-for function, one passes to the integral equation on segment. To find an approximate solution of the obtained equation the collocation method using Fourier–Chebyshev series to present a solution is suggested; hypersingular integrals are calculated analytically. In the main part of the paper we prove the Fredholm property of the hypersingular operator involved in the integral equation under consideration.

Keywords: Helmholtz equation, Green's function, boundary integral equation, hypersingular operator, collocation method, Chebyshev polynomials

FUNDING

This work was carried out with the financial support from the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the framework of the State Assignment no. 124020200015-7.

REFERENCES

1. Geim, A.K. and Novoselov, K.S., The rise of graphene, *Nat. Mater.*, 2007, no. 6, pp. 183–191.
2. Gorbach, A.V., Nonlinear graphene plasmonics: amplitude equation for surface plasmons, *Phys. Rev. A*, 2013, vol. 87, art. 013830.
3. Andreeva, V., Luskun, M., and Margetis, D., Nonperturbative nonlinear effects in the dispersion relations for te and tm plasmons on two-dimensional materials, *Phys. Rev. B*, 2018, vol. 98, art. 195407.
4. Cheng, J.L., Sipe, J.E., Vermeulen, N., and Guo, C., Nonlinear optics of graphene and other 2D materials in layered structures, *J. Phys.: Photonics*, 2018, vol. 1, no. 1, art. 015002.
5. Song, J.H., Maier, M., and Luskun, M., Adaptive finite element simulations of waveguide configurations involving parallel 2D material sheets, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 2019, vol. 351, pp. 20–34.
6. Margetis, D., Maier, M., Stauber, T. [et al.], Nonretarded edge plasmon-polaritons in anisotropic two-dimensional materials, *J. Phys. A: Math. Theor.*, 2020, vol. 53, no. 5, art. 055201.
7. Smirnov, Yu. and Tikhov, S., The nonlinear eigenvalue problem of electromagnetic wave propagation in a dielectric layer covered with graphene, *Photonics*, 2023, vol. 10, no. 5, art. 523.
8. Shapoval, O.V., Gómez-Díaz, J.S., Perruisseau-Carrier, J. [et al.], Integral equation analysis of plane wave scattering by coplanar graphene-strip gratings in the thz range, *IEEE Trans. Terahertz Sci. Technol.*, 2013, vol. 3, pp. 666–674.
9. Zinenko, T.L., Matsushima, A., and Nosich, A.I., Surface-plasmon, grating-mode, and slab-mode resonances in the h- and e-polarized thz wave scattering by a graphene strip grating embedded into a dielectric slab, *IEEE J. Sel. Top. Quant.*, 2017, vol. 23, pp. 1–9.
10. Smirnov, Yu.G. and Kondyrev, O.V., Integro-differential equations in the problem of scattering of electromagnetic waves by a graphene-coated dielectric body, *Differ. Equat.*, 2024, vol. 60, no. 9, pp. 1209–1216.
11. Kaya, A.C. and Erdogan, F., On the solution of integral equations with strongly singular kernels, *Q. Appl. Math.*, 1987, vol. 45, no. 1, pp. 105–122.
12. Ervin, V. and Stephan, E., Collocation with chebyshev polynomials for a hypersingular integral equation on an interval, *J. Comput. Appl. Math.*, 1992, vol. 43, no. 1, pp. 221–229.
13. Lifanov, I.K., Poltavskii, L.N., and Vainikko, M.M., *Hypersingular Integral Equations and Their Applications*, 1st ed., Boca Raton: CRC Press, 2003.

14. Setukha, A.V., *Metod integral'nykh uravneniy v matematicheskoy fizike: uchebnoye posobiye* (Method of Integral Equations in the Mathematical Physics: textbook), Moscow: Moscow University Press, 2023.
15. Polyanin, A.D. and Nazaikinskii, V.E., *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*, 2nd ed., New York: Chapman and Hall/CRC, 2016.
16. Tikhov, S.V., Scattering problem of te-wave on a two-dimensional layer, covered with graphene, accounting for the nonlinearity, *Modeli, sistemy, seti v ekonomike, tekhnike, prirode i obshchestve*, 2024, no. 4, pp. 73–85.
17. Shestopalov, Y.V., Smirnov, Y.G., and Chernokozhin, E.V., *Logarithmic Integral Equations in Electromagnetics*, Berlin; Boston: De Gruyter, 2000.
18. Kober, H., Approximation by integral functions in the complex domain, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1944, vol. 56, no. 1, pp. 7–31.
19. Trenogin, V.A., *Funktsional'nyi analiz* (Functional Analysis), Moscow: Nauka, 1980.