

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет» (ПГУ)

О. Н. Рееда

Расчет и моделирование электрических цепей

Учебное пособие

Пенза
Издательство ПГУ
2013

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, академик
Российской метрологической академии,
заместитель директора ФБУ «Пензенский центр
стандартизации и метрологии»

А. А. Данилов;

кандидат технических наук,
начальник отдела НИКИРЭТ
филиала ФГУП ФНПЦ «ПО «Старт»
им. М. В. Проценко»

А. И. Диянов

Регеда, О. Н.

Р32 Расчет и моделирование электрических цепей : учеб.
пособие / О. Н. Регеда. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2013. –
170 с.

ISBN 978-5-94170-680-8

Рассмотрены вопросы расчета и моделирования линейных электрических цепей постоянного и гармонического токов в установившихся и переходных режимах с применением программ MathCad и Electronics Workbench. Изложены основы работы с программами; даны примеры типовых расчетов и схем для моделирования. Приведены большое количество индивидуальных заданий по различным разделам дисциплины, а также задания к лабораторным работам на базовом и усложненном уровнях.

Работа подготовлена на кафедре «Электротехника и транспортное электрооборудование» Пензенского государственного университета и предназначена для студентов вузов, изучающих дисциплины «Теория электрических цепей», «Электротехника».

УДК 621.38 (076)

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	5
Глава 1. Системы автоматизации инженерных расчетов.....	7
1.1. Основы работы с программой Electronics Workbench.....	7
1.2. Основы работы с программой MathCad.....	22
1.2.1. Решение простейших задач средствами MathCad	22
1.2.2. Определение комплексных чисел.....	29
1.2.3. Переменные-диапазона.....	30
1.2.4. Использование векторов, матриц и таблиц	32
1.2.5. Построение графиков в системе MathCad	36
1.2.6. Решения систем линейных уравнений	38
Глава 2. Линейные электрические цепи постоянного тока в установившихся режимах	39
2.1. Основные понятия, определения и законы теории электрических цепей	39
2.2. Пассивные идеализированные элементы электрической цепи	41
2.3. Реальные пассивные элементы электрической цепи	45
2.4. Активные элементы электрической цепи	47
2.5. Топология электрической цепи.....	49
2.6. Закон Ома для участка электрической цепи.....	51
2.7. Законы Кирхгофа	52
2.8. Потенциальная диаграмма.....	54
2.9. Энергетический баланс мощности в электрических цепях	55
2.10. Преобразование линейных электрических цепей.....	56
2.10.1. Задачи для самостоятельного выполнения	61
2.11. Методы расчета сложных электрических цепей.....	63
2.11.1. Метод законов Кирхгофа.....	63
2.11.2. Метод контурных токов	64
2.11.3. Задачи для самостоятельного выполнения.....	66
2.12. Моделирование цепей постоянного тока	68
Глава 3. Линейные электрические цепи гармонического тока в установившихся режимах	70
3.1. Основные параметры гармонического сигнала	70

3.2. Метод комплексных амплитуд для расчета электрических цепей гармонического сигнала	72
3.3. Гармонический ток при последовательном соединении сопротивления, индуктивности и емкости	74
3.4. Гармонический ток при параллельном соединении сопротивления, индуктивности и емкости	79
3.5. Мощность в цепи гармонического тока	81
3.6. Пример расчета разветвленной гармонической цепи методом преобразования	84
3.6.1. Задачи для самостоятельного выполнения	86
3.7. Расчет сложных электрических цепей гармонического тока	87
3.8. Моделирование сложных электрических цепей гармонического тока	88
 Г л а в а 4. Переходные процессы в линейных электрических цепях	91
4.1. Причины возникновения переходных процессов. Законы коммутации	91
4.2. Классический метод расчета переходных процессов	93
4.3. Переходный процесс в цепи с R и L элементами	97
4.4. Переходный процесс в цепи с R и C элементами	105
4.5. Переходный процесс в цепи с R , L и C элементами	109
4.6. Переходный процесс в разветвленной цепи первого порядка	116
4.7. Моделирование переходных процессов в программе Electronics Workbench	118
4.8. Моделирование переходного процесса в одноконтурной электрической цепи второго порядка	127
4.9. Моделирование переходного процесса в разветвленной электрической цепи второго порядка	135
Список литературы	145
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Лабораторная работа № 1. Исследование линейных электрических цепей постоянного тока	146
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Лабораторная работа № 2. Исследование линейных электрических цепей гармонического тока	153
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Лабораторная работа № 3. Исследование переходных процессов в линейных электрических цепях первого порядка	161

Введение

Для эффективного усвоения знаний студент должен быть включен в активную учебную и творческую деятельность на основе принципа самостоятельности и сознательности. Для этого он должен быть заинтересован в сочетании учебных работ со свободной познавательной деятельностью, творческим поиском. Кроме того, переход на стандарты третьего поколения в образовании предполагает существенное увеличение часов, выделяемых на самостоятельную работу студента, по сравнению с аудиторными часами.

При подготовке специалистов по многим инженерным направлениям одной из базовых дисциплин является «Электротехника» («Теоретические основы электротехники, «Теория электрических цепей»), в преподавании которой должны оптимально сочетаться, с одной стороны, описание теоретических положений, их логическое обоснование и, с другой стороны, конкретные примеры, которые их иллюстрируют.

Данное учебное пособие наряду с кратким изложением основных теоретических положений дисциплины содержит большое количество примеров и индивидуальных заданий, выполнение которых рекомендовано студентам в часы самостоятельной работы для закрепления изучаемого теоретического материала.

Существенно облегчить последовательное усвоение сложного материала позволяет использование информационных технологий в учебном процессе. Сюда следует отнести использование таких систем автоматизации инженерных расчетов, как MathCad и Electronics Workbench (EWB).

Одной из самых доступных программ для моделирования и анализа электрических цепей является программа Electronics Work-bench. Она позволяет моделировать электрические цепи постоянного и переменного тока в установившемся и переходном режимах. Результаты моделирования отражаются на табло многочисленных виртуальных приборов либо в виде графиков, а также могут выводиться на принтер или импортироваться в текстовый или графический редактор для их дальнейшей обработки.

Общепризнанный лидер для автоматизации, документирования и повторного использования инженерных вычислений в процессе разработки изделия – это система MathCad. Пакет MathCad сочетает в себе мощный расчетный блок, полноценный текстовый редактор, графический модуль, экспертную документацию и контекстно-зависимую помощь. К его достоинствам можно отнести высокую универсальность, полное соответствие используемых в пакете MathCad функций и операторов традициям оформления, принятым в математике, высокая степень интеграции MathCad с другими Windows-приложениями, а также минимальные требования к вычислительным и системным ресурсам.

В данном учебном пособии изложены основы работы с продуктом корпорации PTC MathCad Prime 2.0, который относится к новому поколению передового программного обеспечения для инженерных расчетов. В нем сочетаются традиционный интерфейс MathCad, всевозможные функциональные возможности, управление единицами измерения и обновленная документация.

Глава 1. Системы автоматизации инженерных расчетов

1.1. Основы работы с программой Electronics Workbench

При моделировании электрических цепей EWB позволяет [1]:

- выбирать элементы и приборы из библиотек;
- перемещать элементы и схемы в любое место рабочего поля;
- поворачивать элементы и их группы на углы, кратные 90°;
- копировать, вставлять или удалять элементы и фрагменты схем;
- изменять цвета проводников;
- выделять цветом контур схем;
- одновременно подключать несколько измерительных приборов и наблюдать их показания на экране монитора;
- присваивать элементам позиционные обозначения;
- изменять параметры элементов.

Изменяя настройки приборов в EWB, можно задавать:

- диапазоны измерений;
- режим работы прибора;
- вид входных воздействий на цепь (постоянные или гармонические токи или напряжения, треугольные или прямоугольные импульсы).

При этом EWB позволяет:

- одновременно наблюдать несколько кривых на графике;
- отображать кривые различными цветами;
- измерять координаты точек на графике;
- вставлять схему или ее фрагмент в текстовый редактор, в котором печатается пояснение по работе схемы.

После запуска файла EWB32.EXE на экране появляется изображение *монтажного стола (рабочее поле)* – большой центральной части экрана, на которой размещаются компоненты схемы и измерительные приборы.

Над монтажным столом размещается *панель компонентов*, состоящая из пиктограмм полей компонентов. Щелчком мыши на пиктограмме компонентов открывается поле, соответствующее этой пиктограмме. Панель компонентов включает в себя следующие разделы: *Sources, Basic, Diodes, Transistors, Analog Ics, Mixed Ics, Digital Ics, Logic Gates, Digital, Indicators, Controls, Miscellaneous, Instrument*, а также настраиваемую панель инструментов *Favorites*.

Для добавления в настраиваемую панель требуемого элемента надо щелкнуть по его изображению на соответствующей панели правой кнопкой мыши и выбрать в появившемся контекстном меню команду *Add to Favorites*. Чтобы убрать элемент с панели *Favorites*, необходимо щелкнуть по его изображению на панели *Favorites* правой кнопкой мыши и выбрать в появившемся контекстном меню команду *Remove From Favorites*.

В верхней части экрана располагается горизонтальное меню, содержащее следующие разделы:

File – организация работы с файлами (открытие, создание, распечатка файлов и т.п.);

Edit – опции раздела, которые позволяют вырезать и копировать выделенный фрагмент схемы, перемещать элементы или блоки схемы. Опция *Copy as Bitmap* позволяет копировать выделенный фрагмент схемы в буфер обмена, откуда его можно вставить в другое приложение, например в Word, при составлении отчета о лабораторной работе;

Circuit – раздел, позволяющий вращать, менять свойства, приближать и отдалять элементы схемы. Кроме того, возможна настройка визуальных параметров схемы (расположение и ориентация элементов схемы, настройка цветов и шрифта, поиск и другие стандартные функции);

Analysis – раздел позволяет запускать, приостанавливать и завершать анализ схемы, а также устанавливать различные опции анализа;

Window – раздел предназначен для экранных настроек;

Help – раздел служит для доступа к справочной системе Electronics Workbench.

В правом верхнем углу экрана находятся клавиши *включения питания*  и *паузы*  для запуска процесса моделирования. Для остановки процесса моделирования или прекращения паузы необходимо повторно нажать на соответствующую клавишу.

При моделировании электрической цепи (рис. 1.1) требуется последовательно выбирать нужный раздел на панели компонентов и переносить соответствующие элементы и приборы на рабочее поле. Для этого необходимо: щелкнуть мышью на нужном элементе (приборе) и, не отпуская кнопки, перенести его на рабочее поле. При необходимости можно повернуть выделенные элементы, выбрав в меню команду *Circuit / Rotate* или нажав комбинацию клавиш *Ctrl + R*.

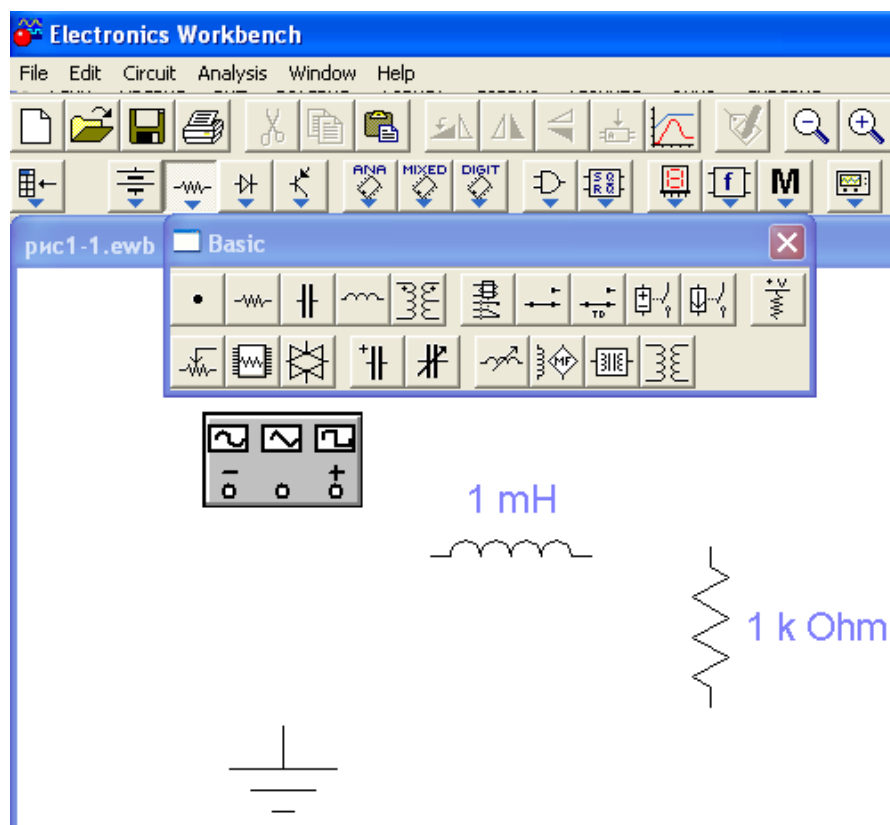


Рис. 1.1

Для соединения двух элементов в соответствии с моделируемой схемой необходимо щелкнуть по одному из контактов первого элемента левой кнопкой мыши так, чтобы появилась черная точка контакта, и, не отпуская кнопку, довести курсор до требуемого кон-

такта второго элемента. При появлении точки контакта у вывода другого элемента отпустить кнопку мыши. В результате появляется проводник (рис. 1.2).

В случае необходимости в схему можно добавить дополнительные узлы. Для этого требуется перетащить элемент  с панели компонентов в место узла на проводнике. Соединители могут появляться автоматически при наведении второго конца проводника на уже существующий проводник (рис. 1.3).

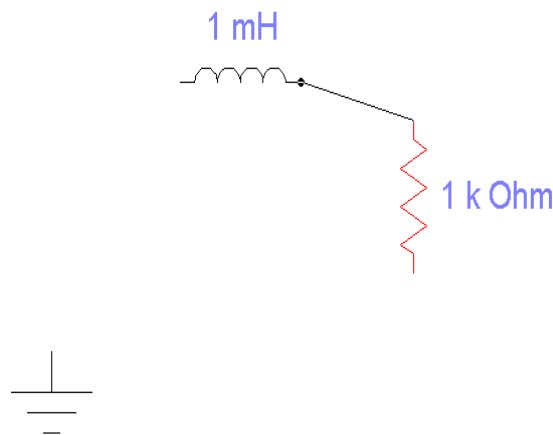


Рис. 1.2

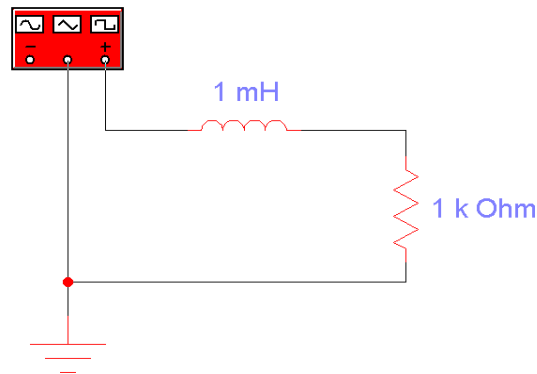


Рис. 1.3

При этом необходимо помнить, что каждый соединитель имеет лишь четыре точки подключения: справа, сверху, слева и снизу. Если подсоединить проводник к уже занятой точке соединителя и отпустить левую клавишу мыши, то существующее соединение заменяется на вновь введенное соединение.

Можно изменить цвет проводника, выполнив двойной щелчок на его изображении и выбрав нужный цвет из появившейся палитры. Цвет проводника, подключаемого на вход виртуального осциллографа, будет определять цвет соответствующей осциллограммы.

Для удаления проводника следует выделить вывод компонента, куда подключен этот проводник, нажать левую клавишу мыши, перенести проводник в сторону от вывода, а затем отпустить клавишу. Кроме того, для того чтобы убрать проводник, элемент или прибор с рабочего поля, необходимо выделить его и нажать на клавишу *Del* на клавиатуре. При этом вместе с выбранным объектом пропадут и все линии связи, подключенные к нему.

Линия связи может получиться неровной из-за неточного взаимного позиционирования элементов и приборов по горизонтали и вертикали. Для ее выравнивания можно выделить объект и переместить его с помощью мыши методом перетаскивания или с помощью клавиш управления курсором.

Для установки требуемых значений параметров компонентов необходимо дважды щелкнуть мышью по ним, в результате появится соответствующее окно свойств элемента. На рис. 1.4 показан вид окна *Свойств* для индуктивности (*Inductor Properties*), в разделе *Value* которого можно установить требуемое значение параметра элемента путем ввода с клавиатуры в текстовое окно.

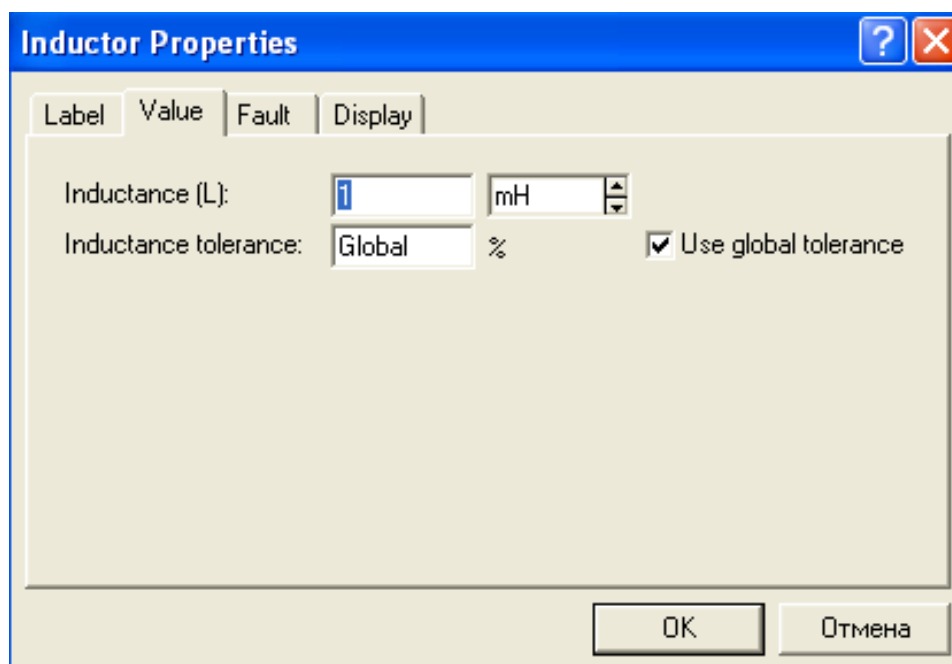


Рис. 1.4

Единицу измерения параметра выбирают с помощью счетчика, расположенного в этом же окне. При этом в EWB используют обозначения единиц измерения, приведенные в табл. 1.1, 1.2.

В разделе *Label* можно задавать позиционные обозначения элемента.

Таблица 1.1

Физическая величина	Обозначение в EWB	Обозначение по ГОСТ
Напряжение	V	В
Ток	A	А
Сопротивление	Ohm (Ω)	Ом
Емкость	F	Ф
Индуктивность	H	Гн
Частота	Hz	Гц
Фаза	Deg	°

Таблица 1.2

Дольные / кратные приставки	Обозначение в EWB	Обозначение по ГОСТ
Мега	M	М
Кило	k	к
Милли	m	м
Микро	μ	мк
Нано	n	н
Пико	p	п

Для проведения экспериментальных исследований к схеме можно подключить измерительные приборы: амперметр  и вольтметр , выбрав их с панели инструментов Indicators (рис. 1.5). Количество амперметров и вольтметров на этой панели не ограничено.

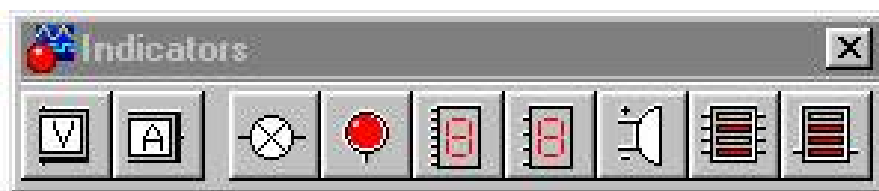


Рис. 1.5

При необходимости изображения приборов можно повернуть так же, как и другие элементы (рис. 1.6).

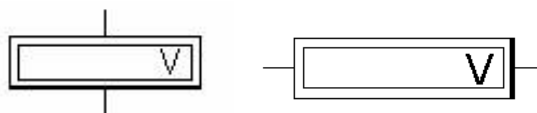


Рис. 1.6

Вольтметр или амперметр по умолчанию включены в режиме измерения постоянного напряжения или тока. Выделенная толстой линией на изображении прибора сторона прямоугольника соответствует отрицательному выводу прибора.

Двойным щелчком на изображении вольтметра (амперметра) открывается диалоговое окно свойств *Voltmeter Properties* (*Ammeter Properties*), в котором указаны:

- значение внутреннего сопротивления (по умолчанию для вольтметра – 1 МОм, а для амперметра – 1 мОм);
- вид измеряемого напряжения или тока (*DC* – постоянное, *AC* – переменное).

При измерении переменного синусоидального сигнала (*AC*) вольтметр или амперметр показывает действующее значение только переменной составляющей напряжения или тока.

При необходимости в схему можно дополнительно добавить приборы с Панели приборов *Instruments* (рис. 1.7).

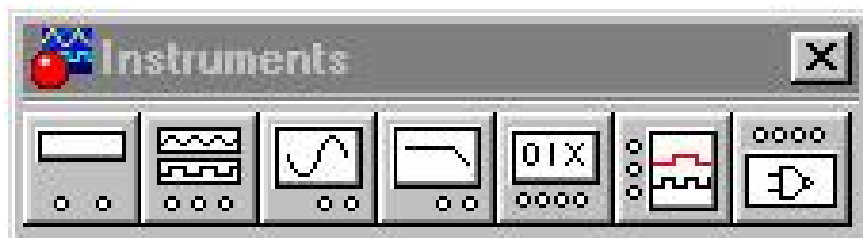
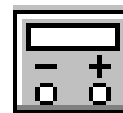


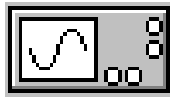
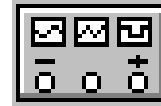
Рис.1.7

Каждый из приборов имеется на панели в единственном экземпляре, поэтому при переносе его на рабочее поле соответствующее изображение на панели становится недоступным. При моделировании электрических цепей наибольший интерес представляют следующие приборы:

- *мультиметр* (*Multimeter*) предназначен для измерения напряжения, тока, сопротивления или ослабления сигнала в децибеллах между двумя контрольными точками электрической цепи;



– *функциональный генератор (Functional generator)* является источником напряжения, который вырабатывает сигнал синусоидальной, прямоугольной или треугольной форм;



– *осциллограф (Oscilloscope)* используется для визуального наблюдения электрических сигналов в функции времени, измерения их амплитудных и временных параметров (длительности, времени задержки, периода повторения и пр.);



– *построитель частотных характеристик (Bode Plotter)* используется для построения амплитудно-частотных (АЧХ) и фазочастотных (ФЧХ) характеристик схемы.

Изображение любого прибора с панели приборов может быть развернуто двойным нажатием левой клавиши мыши по нему.

На рис. 1.8 показана лицевая панель мультиметра в развернутом виде. Он может работать в режиме измерения тока, напряжения, сопротивления и потерь мощности сигнала (затухания) между двумя точками схемы на постоянном токе и переменном токе. В режиме измерения постоянных тока и напряжения необходимо подключаться с учетом полярности.

На рис. 1.9 показана лицевая панель функционального генератора, который является источником напряжения специальной формы. Генератор способен вырабатывать напряжение синусоидальной, треугольной и прямоугольной форм. Форма напряжения задается клавишами верхнего ряда. На рис. 1.9 генератор включен в режиме генерации напряжения прямоугольной формы.



Рис. 1.8

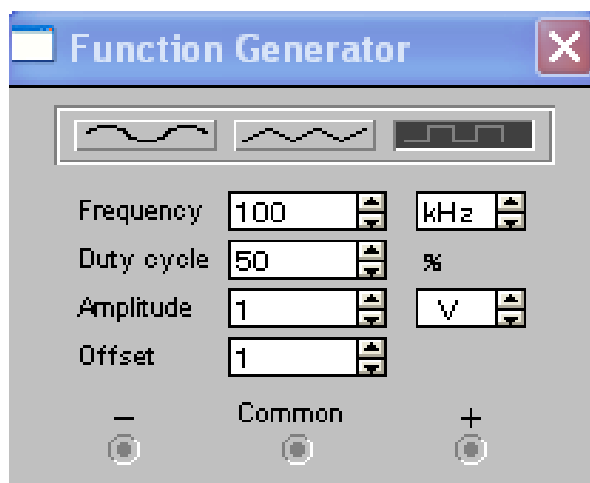


Рис. 1.9

Частота сигналов *Frequency*, коэффициент заполнения (скважность) *Duty cycle*, амплитуда *Amplitude* и смещение базовой линии *Offset* (постоянной составляющей напряжения) устанавливаются либо непосредственным вводом с клавиатуры в соответствующее окно, либо с помощью соответствующего счетчика.

При этом частота выходных сигналов генератора *Frequency* может быть в пределах от 0,1 Гц до 999 МГц.

Параметр *Duty cycle* задает для прямоугольного сигнала отношение длительности импульса с высоким рабочим уровнем к его периоду в процентах, а для треугольного сигнала – отношение длительности положительного линейно нарастающего фронта к его периоду. Коэффициент заполнения на 50 % соответствует симметричной форме сигнала. Форма синусоидального сигнала не изменяется с изменением данного коэффициента.

Параметр *Amplitude* задает максимальное значение выходного напряжения, отсчитываемое от базовой линии (смещения по постоянному току), в предположении, что выходной сигнал снимается между зажимами *COM* (Общий) и «+» (или *COM* и «–»). Если выходной сигнал снимается с зажимов «+» и «–», то амплитуда удваивается и задается в диапазоне от 1 мкВ до 999 кВ.

Параметр *Offset* задает значение постоянного смещения выходного сигнала в пределах от –999 до +999 кВ.

Режим источника напряжения, реализуемый функциональным генератором, предполагает, что генерируемый сигнал свободен от искажений, шумов и пульсаций, свойственных реальным генераторам с реальной нагрузкой. Параметры генерируемого сигнала в ре-

жиме источника напряжения не зависят от величины подключенной нагрузки. Один из выходных зажимов генератора обычно подключается к общей шине (элемент $\frac{\perp}{-}$).

Для настроек, указанных на рис. 1.9, на выходе генератора в схеме рис. 1.10 формируются однополярные прямоугольные импульсы с амплитудой, изменяющейся от 0 до 2 В, с частотой 100 кГц и скважностью 50 %.

На рис. 1.10 первый канал осциллографа подключен к выходу «+» генератора прямоугольных импульсов, а на второй вход подано напряжение, падающее на сопротивлении в 1 кОм.

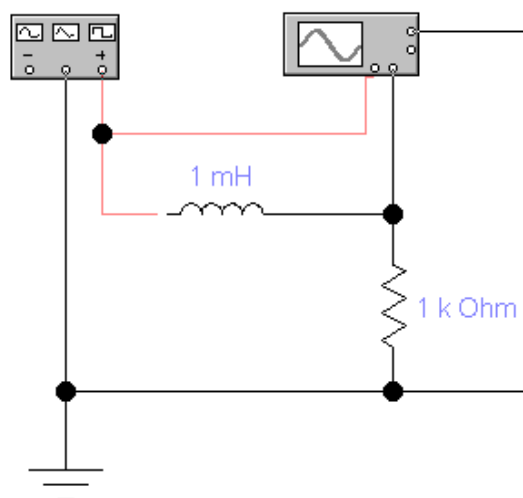


Рис. 1.10

На рис. 1.11 показано развернутое изображение осциллограммы для схемы, изображенной на рис. 1.10.

Входные зажимы осциллографа подключаются к контрольным точкам схемы так же, как и остальные соединения в ней. Для удобства можно назначить разные цвета для изображений подаваемых на вход осциллографа сигналов, выполнив двойной щелчок левой кнопкой мыши по соответствующему проводнику.

Левый и правый нижние зажимы осциллографа представляют собой входы его двух каналов: *Channel A* и *Channel B*.

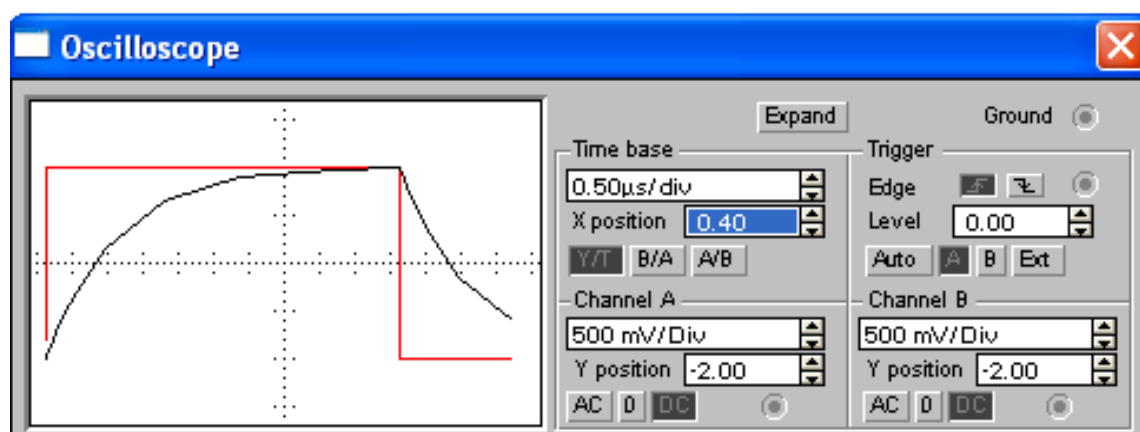


Рис. 1.11

Верхний правый зажим осциллографа (*Ground*) обычно под-
соединяется к общей шине $\frac{\perp}{-}$.

В блоке синхронизации *Trigger* можно выбрать требуемый ре-
жим синхронизации для запуска развертки осциллографа: автомати-
ческая синхронизация – кнопка *Auto*, синхронизация от канала *A*
или *B* и внешняя синхронизация – *Ext*. Кнопки *Edge* (фронт)
  устанавливают запуск развертки соответственно по фрон-
ту и спаду запускающего сигнала. Полоса прокрутки *Level* (уровень)
определяет пороговое напряжение, превышение которого приводит
к запуску развертки.

В блоке временной развертки *Time base* можно выбрать требу-
емый режим работы осциллографа. При нажатии на кнопку *Y/T* по
оси *T* откладывается время, а по оси *Y* – напряжения сигналов, по-
данных на каналы *A* и *B* соответственно. В режимах работы *B/A* и
A/B по оси *T* откладываются напряжения сигналов *A* и *B* соответ-
ственно, а по оси *Y* – напряжения сигналов *B* и *A* соответственно.

На каждом канале можно установить емкостной вход, закры-
тый для постоянной составляющей (кнопка *AC*), потенциальный
вход, открытый для постоянной составляющей (по умолчанию
включена кнопка *DC*), или подать на вход осциллографа уровень
нулевого потенциала (кнопка *0*). Последний режим используется
для коррекции положения луча на экране осциллографа в отсут-
ствии входного сигнала.

Нужный масштаб временной развертки осциллографа можно
подобрать с помощью счетчика  справа от поля текущего мас-

штаба в блоке *Time base*. Скорость развертки можно изменять от 0,1 нс до 1 с на одно деление шкалы.

Нужный масштаб по вертикали следует настроить для каждого канала отдельно с помощью счетчика сбоку от поля текущего масштаба, который может меняться от 10 мкВ/деление до 5 кВ/деление.

Для смещения начальной точки развертки по временной оси используется полоса прокрутки *X position* для обоих каналов одновременно. Если *X position* установлено 0,00, то развертка начинается слева от начала экрана осциллографа, положительное ненулевое значение *X position* сдвигает начало развертки вправо, а отрицательное – влево. В режимах *B/A* и *A/B* шкала по горизонтальной оси определяется установленным масштабом по каналу *A* и *B* соответственно.

Смещение сигналов по вертикали задается полосой прокрутки *Y position* индивидуально для каждого канала в пределах от –3,00 до +3,00 делений и используется для того, чтобы раздвинуть по вертикали изображения сигналов *A* и *B* либо сдвинуть оба сигнала одновременно.

При нажатии кнопки *Expand* осциллографа появляется его расширенная модель с дополнительными инструментами (рис. 1.12). В отличие от простой модели на ней добавлены три информационных табло, на которых выводятся результаты измерений. Кроме этого, непосредственно под экраном находится линейка прокрутки с ползунком, позволяющая наблюдать любой временной отрезок от момента включения до момента выключения схемы.

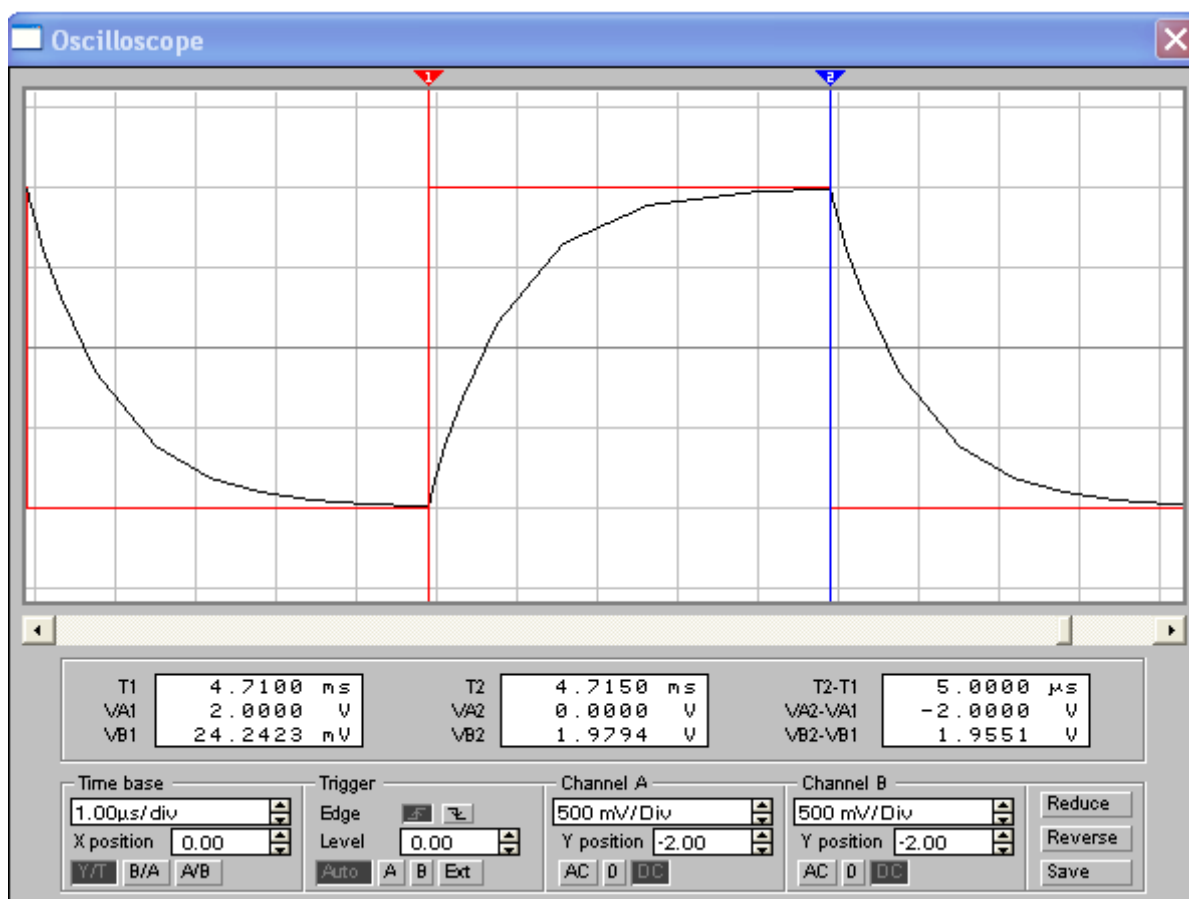


Рис. 1.12

На экране осциллографа расположены два курсора (красный и синий), обозначаемые соответственно треугольниками с цифрами 1 и 2, с помощью которых можно измерить мгновенные значения напряжений в любой точке осциллограммы. Для этого один из курсоров мышью перетаскивается в требуемую точку осциллограммы.

Координаты точек пересечения первого курсора с осциллограммами отображаются на левом табло, координаты второго курсора – на среднем табло. На правом табло отображаются значения разностей между соответствующими координатами первого и второго курсоров.

На рис. 1.12 в третьем информационном окне видно, что длительность прямоугольного импульса равна 5 мкс, а амплитуда – 2 В.

Аналогичные результаты можно получить, умножив длину импульса в делениях на экране осциллографа (5 делений) на масштаб временной развертки (1 мкс/деление), а амплитуду импульса в

делениях на экране осциллографа (4 деления) на масштаб по вертикали (500 мВ/деление).

На рис. 1.12 видно также, что входные сигналы сдвинуты относительно средней линии на два деления вниз. Это позволяет более рационально использовать площадь экрана и более точно проводить измерения параметров импульса.

Нажатие на клавишу *Reduce* осциллографа возвращает его предыдущую модель.

На рис. 1.13 показана схема (см. рис. 1.3), к которой подключен измеритель частотных характеристик *Bode Plotter*, используемый для построения амплитудно-частотных характеристик (АЧХ) и фазочастотных характеристик (ФЧХ) схемы.

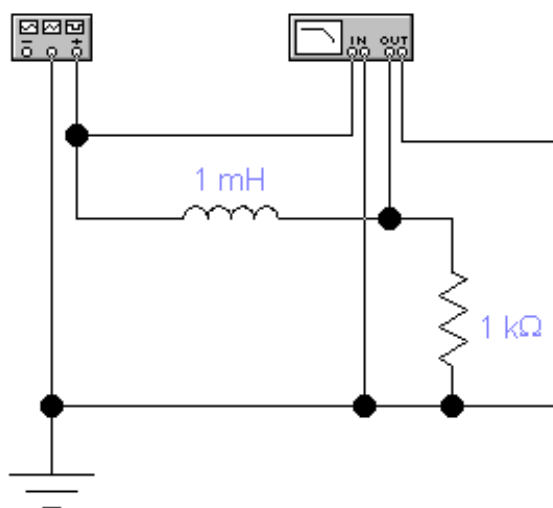


Рис. 1.13

Bode Plotter измеряет отношение амплитуд сигналов в двух точках схемы и фазовый сдвиг между ними. Для измерений сам *Bode Plotter* генерирует собственный спектр частот, диапазон которого может задаваться при настройке прибора. Хотя частота любого переменного источника в исследуемой схеме игнорируется, но схема должна включать какой-либо источник переменного напряжения.

Bode Plotter имеет четыре зажима: два входных *In* и два выходных *Out*. Левые выводы входов *In* и *Out* подключаются к исследуемым точкам, а их правые выводы заземляются.

При двойном щелчке по изображению *Bode Plotter* открывается его увеличенное изображение (рис. 1.14).

Кнопка *Magnitude* нажимается для получения АЧХ, кнопка *Phase* – для получения ФЧХ.

На панелях *Vertical* и *Horizontal* задаются:

- начальное значение параметра вертикальной оси *I*;
- конечное значение параметра вертикальной оси *F*;
- вид шкалы вертикальной оси – логарифмическая *Log* или линейная *Lin*.

При получении АЧХ по вертикальной оси откладывается отношение напряжений:

- в линейном масштабе в диапазоне от 0 до 10^9 ;
- логарифмическом масштабе в диапазоне от –200 до 200 дБ.

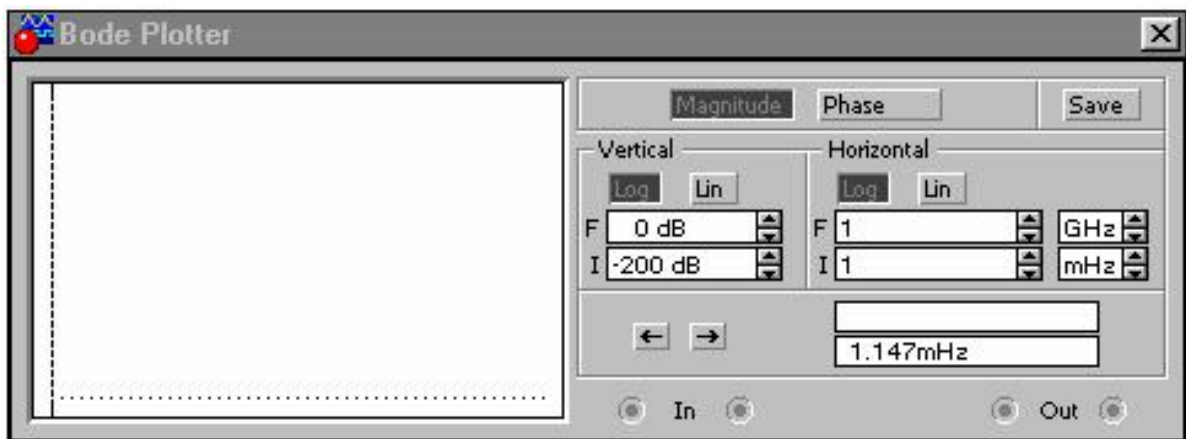


Рис. 1.14

При получении ФЧХ по вертикальной оси откладываются градусы в диапазоне от -720° до $+720^\circ$.

По горизонтальной оси всегда откладывается частота в герцах или в производных единицах.

На рис. 1.15, 1.16 показаны АЧХ и ФЧХ для схемы рис. 1.13.

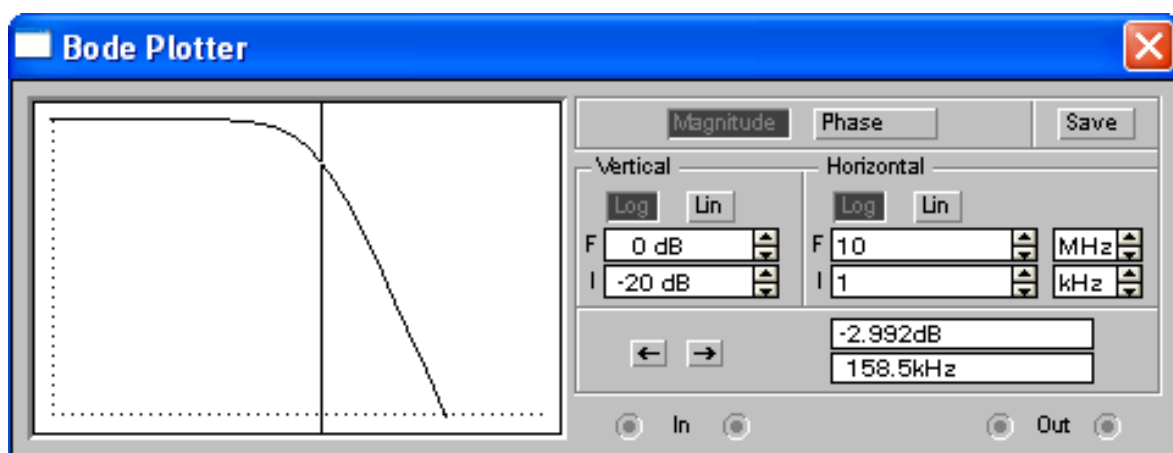


Рис. 1.15

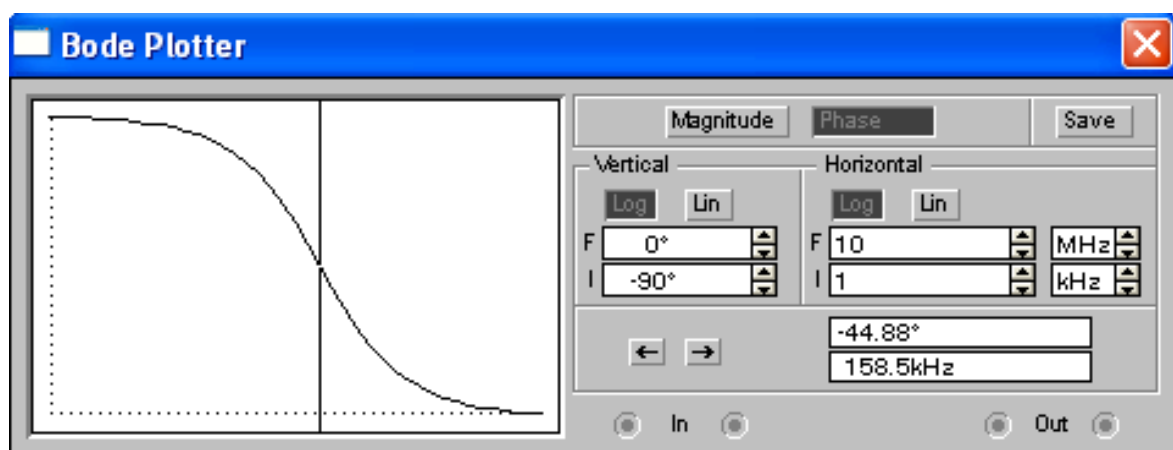


Рис. 1.16

Для точного отсчета результата измерений можно использовать визирную линию, управляя ее позицией с помощью кнопок с изображениями горизонтальных стрелок  и  в нижней части лицевой панели *Bode Plotter*. Визирную линию можно также перемещать с помощью мыши.

Отсчет измеряемой величины появляется на верхнем цифровом табло в нижней правой части прибора (на рис. 1.16 – «- 44.88°»), а под ним указывается соответствующее значение частоты (на рис. 1.16 – «158.5 kHz»).

1.2. Основы работы с программой MathCad

Описание возможностей работы в программе MathCad можно найти в различных источниках, например [2]. Применение MathCad для автоматизации расчета линейных электрических цепей [1] позволяет существенно упростить анализ особенно сложных электрических цепей.

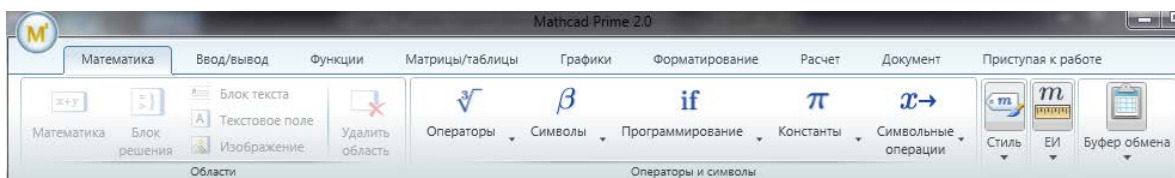
1.2.1. Решение простейших задач средствами MathCad

Математическая система MathCad во всем мире признана одной из наиболее совершенных программных систем, позволяющих решать математические задачи в объеме программы технического вуза [2]. Начиная с версии MathCad 2002 и до последней, доступной версии MathCad Prime 2.0, система обеспечивает удобный интерфейс и широкий набор решаемых задач. В среде MathCad задачи выполнения, документирования и совместного использования расчетов интегрированы в единый процесс, что существенно повышает производительность работы.

При запуске MathCad открывается пустой документ, в который можно добавить текст, уравнения, графики, таблицы Excel и изображения. Количество одновременно открытых документов ограничивается только ресурсами операционной системы.

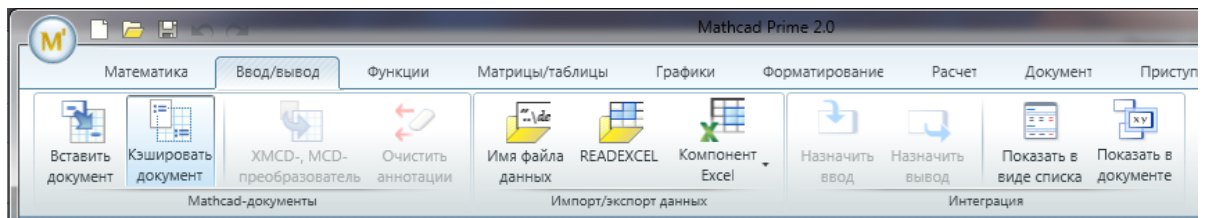
Рабочая область MathCad содержит *окно редактирования* и *ленту*, на вкладках которой сгруппированы связанные команды. Сведения о командах ленты можно получить из всплывающих подсказок и контекстной справки.

Вкладки ленты служат для быстрого выполнения наиболее часто применяемых команд. На рис. 1.17,*а–и* показаны команды, помещенные на различных вкладках ленты.

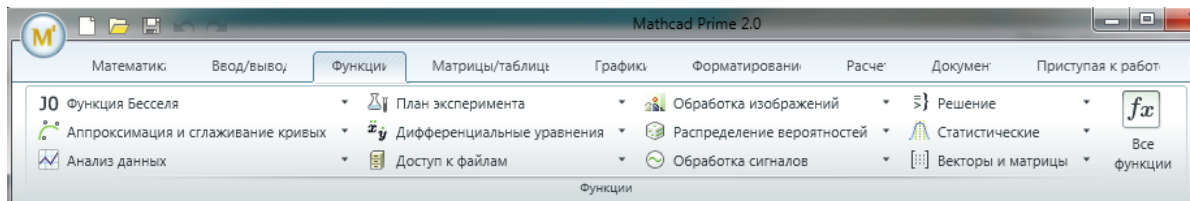


а)

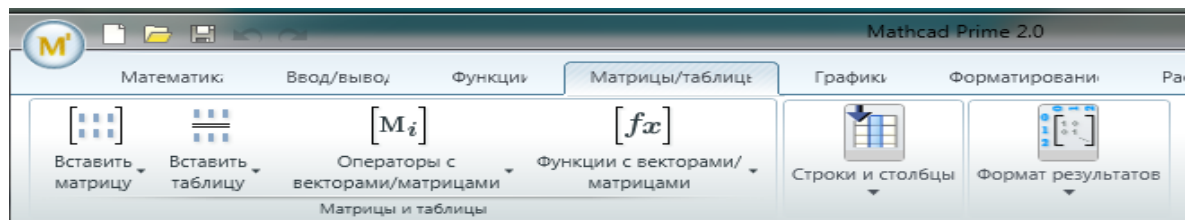
Рис. 1.17. Начало



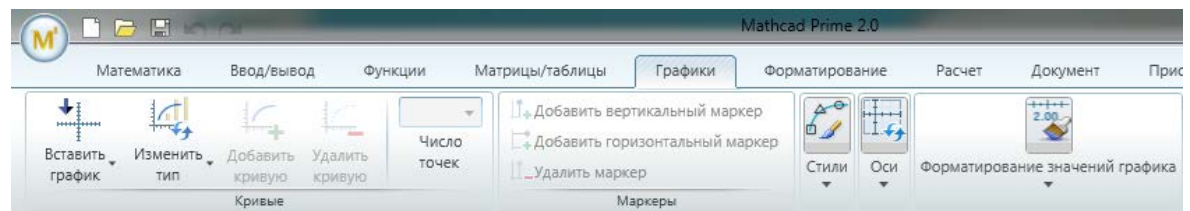
б)



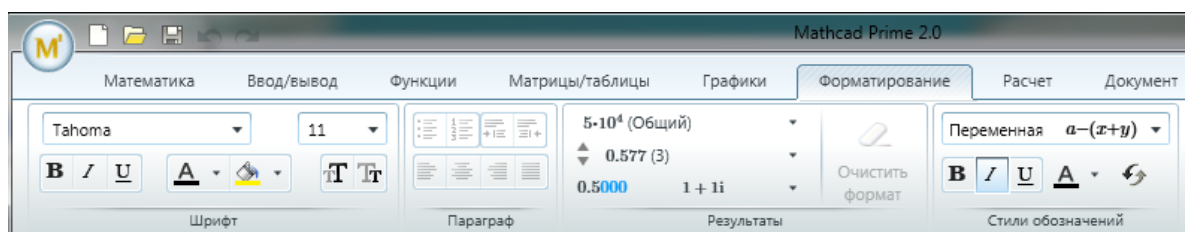
в)



г)

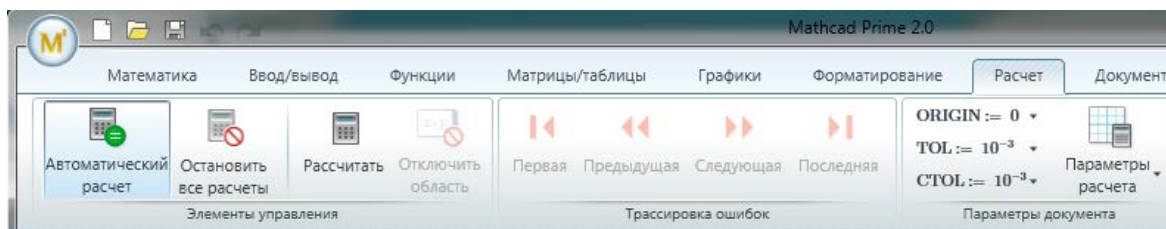


д)

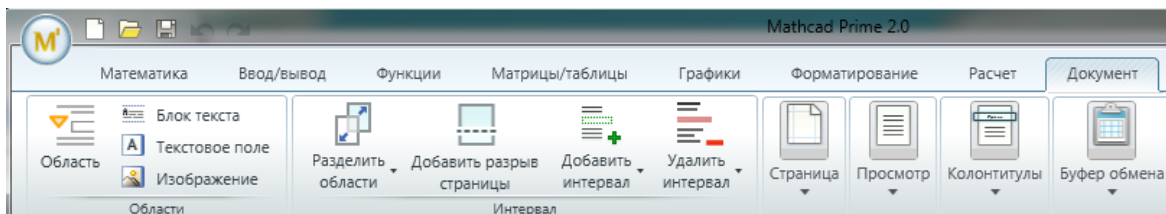


е)

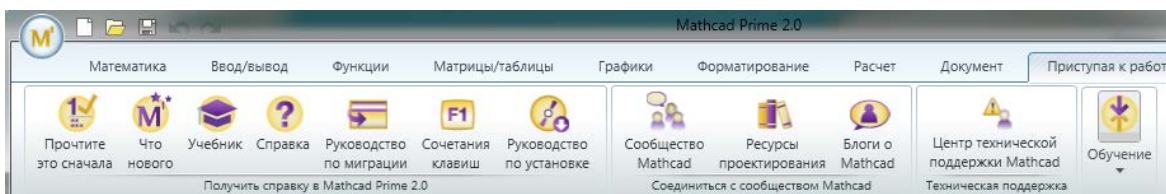
Рис. 1.17. Продолжение



ж)



з)



и)

Рис. 1.17. Окончание

Кнопка MathCad  содержит команды для работы с файлами, например: *Открыть* (Open), *Сохранить* (Save) и *Печать* (Print).

Панель быстрого доступа содержит часто используемые команды. Команды можно добавлять и удалять с панели. Панель быстрого доступа может находиться как под лентой, так и над лентой.

Строка состояния, находящаяся под окном редактирования, содержит: номер страницы документа; цветной кружок, показывающий состояние кнопки «Автоматический расчет»; окна «Найти и заменить» и «Регулятор масштабирования»; переключатели режимов «Просмотр страницы» и «Режим черновика».

Работа с системой MathCad сводится к подготовке в окне редактирования заданий на вычисления и к установке форматов для их результатов. При этом математические выражения вводятся в том виде, в котором они обычно записываются инженерами на листе бумаги. Входным языком системы является язык визуального про-

граммирования, многие записи вводятся просто путем заполнения шаблонов соответствующих операторов.

MathCad интегрирует в себе три редактора: формульный, текстовый и графический.

Текстовые блоки позволяют создавать в документе пояснения. Для ввода текста необходимо щелкнуть в документе в место вставки текста, где появится синее перекрестие . Текст можно вставить в виде:

– *текстового блока*  **Блок текста**, который растягивается по ширине страницы, и его область не перекрывается с другими областями документа (комбинация клавиш *Ctrl+T*);

– *текстового поля с изменяемой шириной*  **Текстовое поле**, которое можно перемещать по документу, и оно может перекрываться другими областями (комбинация клавиш *Ctrl+Shift+T*).

Обе команды находятся на вкладке *Математика* (*Math*) в группе *Области* (*Regions*). После ввода или вставки через буфер обмена требуемого текста нажмите клавишу *Ввод* для перемещения на новую строку, либо щелкните за пределами текстовой области для прекращения набора текста. Если изменить настройки стиля шрифта и абзаца, заданные на вкладке *Форматирование* (*Formatting*) в группах *Шрифт* (*Font*) и *Параграф* (*Paragraph*), то они будут применяться либо к выделенным, либо ко всем новым текстовым областям в документе.

Для вставки в документ изображения необходимо выбрать команду  **Изображение** на вкладке *Математика* в группе *Области* и выбрать изображение в окне *Открыть* (комбинация клавиш *Ctrl+4*).

Любая введенная область может быть удалена из документа с помощью команды *Удалить область*, также расположенной на вкладке *Математика* в группе *Области*.

Щелкнув в документе в любом месте, можно ввести *математические выражения* (цифры, буквы и математические операторы). В результате создается *Область формул*. Для ввода формулы можно



также выбрать команду **Математика** на вкладке *Математика* в группе *Области* (комбинация клавиш *Ctrl+Shift+M*).

В MathCad можно вводить математические выражения следующих типов: алгебраические; дифференциальные и интегральные; логические; матрицы и векторы; строковые.

Щелкните в верхней части документа и введите следующее математическое выражение:

$$12 + 3,2 \cdot \frac{3,8}{2,6}.$$

Обратите внимание, что в MathCad для разделения целой и дробной части используется точка, а не запятая. При наборе выражений операторы, символы и константы можно вставить с вкладки *Математика*.

По мере набора выражения на экране отображается область формул с синей вертикальной линией в точке вставки, этот курсор можно использовать для правки математических выражений. Оператор «*вычисление*» (символ « $\Rightarrow$ ») возвращает результат вычисления выражения, находящегося слева от него (рис. 1.18).

$$12 + 3.2 \cdot \frac{3.8}{2.6} = 16.677.$$

Рис. 1.18

При изменении математического выражения его результат автоматически обновляется. Все связанные математические области, находящиеся справа или снизу от измененных выражений, соответственно обновляются. Если отключить расчет области на вкладке *Расчет* в группе *Элементы управления*, то результаты не будут обновляться.

Все, что начинается с цифры, MathCad интерпретирует как число. При вводе комплексного (мнимого) числа в алгебраической форме записи, за ним должны следовать символы *i* или *j* (рис. 1.19).

$$1i + 2.5i = 3.5i.$$

Рис. 1.19

Для определения переменных и функций используется оператор «определения» $:=$, который можно выбрать на вкладке *Математика* в панели *Операторы* либо ввести с клавиатуры при нажатии клавиши «двоеточие». Справа от знака определения может стоять либо *числовое значение*, либо *вычисляемое выражение*.

На рис. 1.20 приведен пример программы, определяющей, вычисляющей и выводящей на экран значение переменной f .

$$a := 2.6 \quad b := 2.5 \quad c := 3$$

$$f := a + 2 \cdot b \cdot \sqrt{c} = 11.26$$

$$f = 11.26$$

Рис. 1.20

Обратите внимание на то, что оператор «определение» $:=$ не возвращает значение переменной f в отличие от оператора «вычисление» « $=$ ». Однако в одной строке можно совмещать сначала оператор определения, а затем справа от вычисляемого выражения – оператор вычисления.

Кроме того переменные, которые входят в вычисляемое выражение, должны быть ранее определены (либо выше, либо левее в окне редактирования). Иначе появится сообщение об ошибке (рис. 1.21).

$$a := 2.6 \quad f := a + b$$

$$f = ?$$

Эта переменная не определена. Проверьте правильность установки обозначения.

Рис. 1.21

Следует иметь в виду, что в MathCad имена переменных и функций не могут начинаться с цифры, могут быть любой длины и

содержать как русские, так и латинские буквы, кроме того, различаются строчные и прописные буквы.

В логических выражениях или ограничениях для блоков решений используется оператор «равно» (**=**), который сравнивает переменные, векторы или выражения (рис. 1.22). Обратите внимание, что в отличие от оператора вычисления он имеет более жирное начертание.

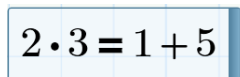

$$2 \cdot 3 = 1 + 5$$

Рис. 1.22

В MathCad существует и *локальный оператор* определения *переменной-диапазона* (**=**), который определяет переменную-диапазон для оператора суммы или произведения.

Например, для нахождения произведения членов ряда следует на вкладке ленты *Математика* группы *Операторы и Символы* (*Operators and Symbols*) раскрыть панель *Операторы*, найти соответствующую пиктограмму и нажать левую клавишу мыши. В результате на поле документа выведется шаблон данной операции (рис. 1.23).

После заполнения соответствующих позиций шаблона и ввода символа «**=**» получим результат (рис. 1.24).

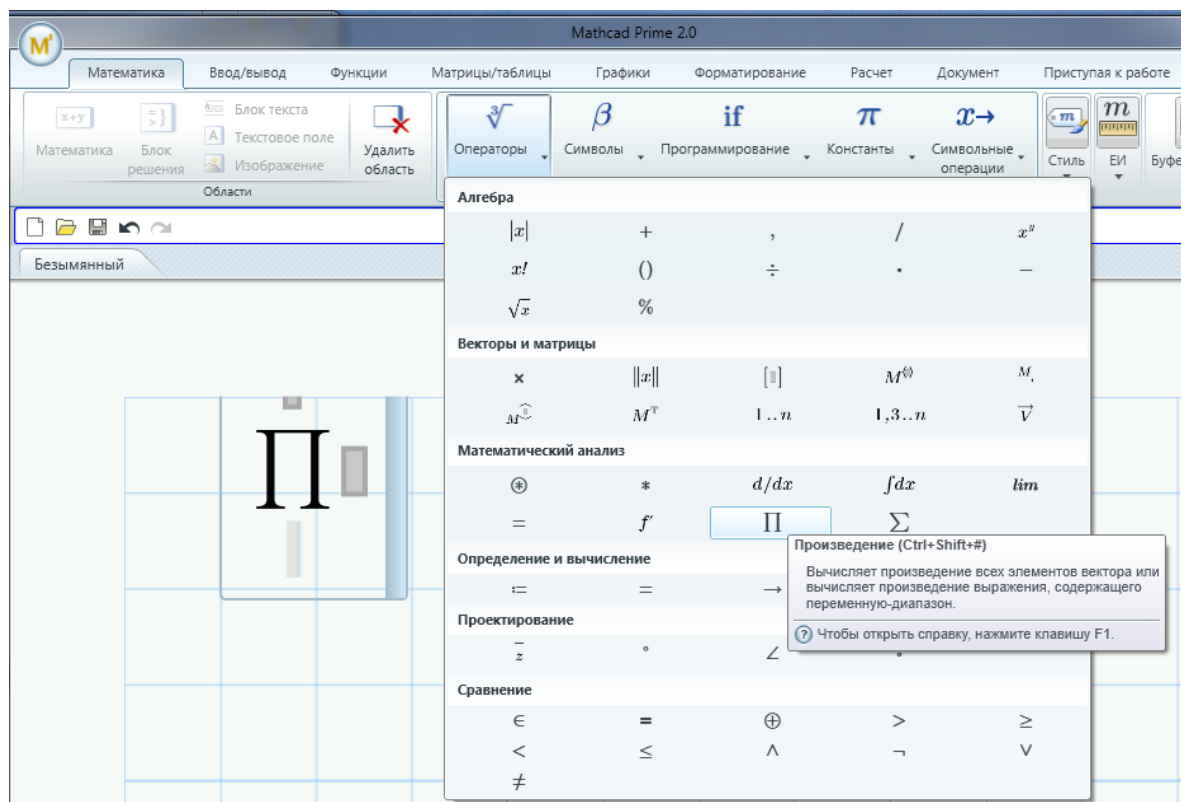


Рис. 1.23

$$\prod_{x=1}^{20} \left(\sin(x) \cdot \frac{e}{x} \right) = -2.628 \cdot 10^{-15}$$

Рис. 1.24

В данном выражении константа $e \approx 2,7$ в числителе дроби вводится из списка *Константы* (Constants) группы *Операторы и Символы* на вкладке *Математика*.

На вкладке *Форматирование* (Formatting) в группе *Результаты* (Results) можно настроить отображение результатов для повышения точности или изменения числового формата (рис. 1.25).

Для форматирования отображения результатов необходимо выбрать одну или несколько областей для форматирования либо щелкнуть за пределами области формул, чтобы применить форматирование результатов ко всем областям формул в документе.

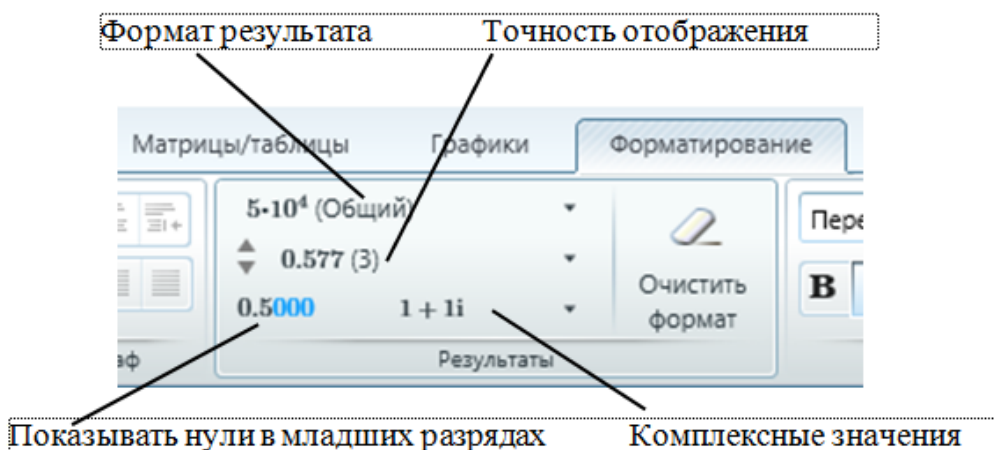


Рис. 1.25

1.2.2. Определение комплексных чисел

Результатом вычисления, а также решения уравнений могут являться *комплексные числа*, даже если все исходные значения – вещественные числа. Независимо от того, в какой форме записи были заданы комплексные числа (алгебраической или показательной), MathCad всегда возвращает их в алгебраической форме записи:

$$Z = a + b i,$$

где Z – комплексное число (в MathCad подчеркивание не указывается); a и b – вещественные числа, обозначающие соответственно вещественную и мнимую часть комплексного числа; $i = \sqrt{1}$ – мнимая единица.

Для работы с комплексными числами можно использовать следующие функции комплексного числа Z :

- функция $Re(Z)$ возвращает вещественную часть комплексного числа Z ;
- функция $Im(Z)$ возвращает мнимую часть комплексного числа Z ;
- функция $arg(Z)$ возвращает главное значение аргумента комплексного числа Z (между $-\pi$ и π , включая π). Аргумент является значением угла φ , когда Z записывается в показательной форме записи:

$$Z = |Z| e^{i\varphi}.$$

Некоторые операции над комплексными числами показаны на рис. 1.26.

Определим комплексные числа		$i := \sqrt{-1}$
$Z1 := 1 + i$	$Z1 = 1 + 1i$	$Z2 := 5 \cdot e^{i \cdot \frac{\pi}{3}}$
		$Z2 = 2.5 + 4.33i$
Выполним некоторые действия		
$Z1 + Z2 = 3.5 + 5.33i$	$\text{Re}(Z1) = 1$	$\text{Im}(Z1) = 1$
$Z1 \cdot Z2 = -1.83 + 6.83i$		
Аргумент комплексного числа Z1		
$\varphi := \arg(Z1) = 0.785$	$\varphi := \arg(Z1) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 45^\circ$	
Модуль комплексного числа Z1		
$ Z1 = 1.414$	$Z1 := \sqrt{\text{Re}(Z1)^2 + \text{Im}(Z1)^2} = 1.414$	

Рис. 1.26

1.2.3. Переменные-диапазона

Уже в первых версиях MathCad была предусмотрена поддержка *переменных-диапазона*, которые определяют область дискретных значений и позволяют организовывать циклические вычисления без применения операторов программирования.

Переменные-диапазона используют для решения целого ряда задач: определения массивов и диапазонов суммирования или произведения, поиска решений методом последовательных приближений, построения графиков функций и таблиц.

Оператор диапазона  может быть введен в документ при нажатии два раза на клавишу «точка», а также выбран на вкладке ленты *Математика* в группе *Операторы и символы* на панели *Операторы*.

Для задания циклических вычислений с целочисленной управляющей переменной цикла (шаг изменяется на единицу) используется следующая конструкция:

$$\text{Имя переменной-диапазон} := N_{\text{нач}} \dots N_{\text{кон}},$$

где $N_{\text{нач}}$ – начальное значение переменной; $N_{\text{кон}}$ – конечное значение переменной.

Если $N_{\text{нач}} < N_{\text{кон}}$, то шаг изменения переменной равен +1, а если $N_{\text{нач}} > N_{\text{кон}}$, то шаг изменения переменной равен –1.

Шаг изменения можно задать любым, используя другую конструкцию задания таких переменных:

Имя переменной-диапазон: = Nнач, Nслед .. Nкон,

где *Nслед* – следующее за *Nнач* значение переменной. Шаг в этом случае равен *Nслед* – *Nнач*.

На рис. 1.27 приведены примеры реализации циклов с заданными пределами изменения для формирования векторов-столбцов.

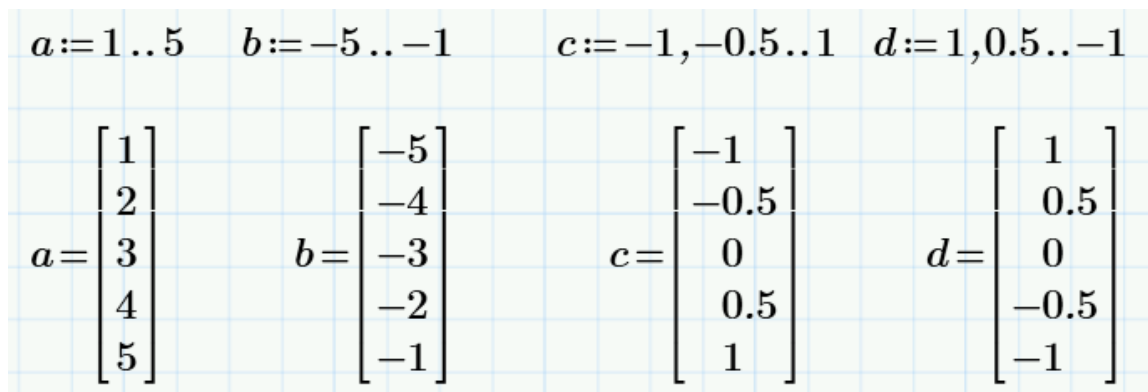


Рис. 1.27

1.2.4. Использование векторов, матриц и таблиц

В переменных-диапазона невозможно осуществить доступ к произвольному элементу представляемого ими ряда. Этой цели служат *массивы*. Наиболее распространены одномерные массивы – *векторы* и двумерные массивы – *матрицы*.

В MathCad массив задается именем, как и любая переменная. Вектор имеет ряд элементов с определенным порядком расположения. Порядковый номер элемента задается индексом.

Нижняя граница индексации определяется значением системной переменной ORIGIN, которая по умолчанию равна 0. Влияние значения этой системной переменной показано на примере рис. 1.28.

$\text{ORIGIN} := 0$	$M := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$M_2 = 3$
$\text{ORIGIN} := 1$	$M := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$	$M_2 = 2$

Рис. 1.28

Для вставки шаблона вектора-столбца в документ необходимо на вкладке ленты *Матрицы/таблицы* выбрать команду *Вставить матрицу*, указав для нее один столбец и требуемое число строк.

Для указания подстрочных индексов после имени переменной вводится знак открывающей квадратной скобки, либо можно выбрать соответствующий шаблон на вкладке *Математика* в панели *Операторы*.

Элементы матриц также являются индексированными переменными, имена которых совпадают с именами матриц. В этом случае для каждой индексированной переменной указываются два индекса: первый – для номера строки, второй – для номера столбца.

Как векторы, так и матрицы можно создать и без введения шаблона путем определения их отдельных элементов. На рис. 1.29 приведен пример создания вектора, в котором были определены только первый, второй и четвертый элементы, а третий элемент по умолчанию равен нулю.

$x_1 := 1$	$x_2 := 2$	$x_4 := 4$	$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$
------------	------------	------------	--

Рис. 1.29

На рис. 1.30 приведен пример создания массива M1. Индексы элементов массива формируются с помощью двух переменных-диапазона i и j , которые задают два вложенных цикла: у внешнего цикла переменная цикла изменяется от одного до двух, а у внутреннего цикла – от одного до трех.

$$i := 1 \dots 2 \quad j := 1 \dots 3 \quad M1_{i,j} := i + j \quad M1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Рис. 1.30

Еще один способ создания векторов – использование таблиц. *Таблица* MathCad представляет собой область, в которой определяются наборы данных. Заголовок таблицы включает в себя имя для каждого набора данных в первой строке и под ним поле для задания соответствующей единицы измерения.

Для вставки таблицы в документ необходимо щелкнуть в месте вставки и выбрать пункт *Вставить таблицу* на вкладке *Матрицы/таблицы* в группе *Матрицы и таблицы*, а затем задать указателем нужные размеры таблицы.

Следует иметь в виду, что максимальный размер таблицы, которую можно вставить из ленты, составляет десять строк по десять столбцов. Для вставки дополнительных строк или столбцов нажмите *Shift* + «Ввод», чтобы добавить новую строку, или *Shift* + «Пробел», чтобы добавить новый столбец. *Строки и столбцы* можно удалять клавишей «Delete», предварительно выделив их.

Создадим таблицу, состоящую из двух столбцов: первый столбец – это напряжение U , а второй столбец – это ток I (рис. 1.31).

U	I	$I = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.05 \\ 0.1 \end{bmatrix} \text{ A}$ Значения второго столбца в виде вектора
(V)	(0.001 A)	
0	0	
5	50	
10	100	$I := \frac{U}{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \\ 100 \end{bmatrix} \text{ mA}$ Расчет по закону Ома
$R := 100 \text{ } \Omega$		

Рис. 1.31

Выберем поле для задания единицы измерения для переменной U и введем имя единицы измерения «V». Имя единицы измерения можно выбрать на вкладке *Математика* в группе *Единицы измерения (Units)*, раскрыв пункт *Единицы измерения (Units)*. Откроется список единиц измерения (рис. 1.32), отображающий все имена встроенных единиц измерения. Щелкните требуемую единицу измерения, чтобы вставить ее.

В MathCad имеется полный набор единиц измерения по международной системе СИ, американской системе единиц (USCS) и системе СГС. В MathCad все переменные отображаются в системе единиц измерения, определенной для документа.

Выберем поле для задания единицы измерения для переменной I и введем имя единицы измерения «A» (см. рис. 1.31) либо «mA» (см. рис. 1.32).

MathCad позволяет вставить масштабный множитель перед именем единицы измерения. Если поставить перед именем единицы измерения «A» множитель «0.001», то данные в этот столбец нужно будет заносить в миллиамперах.

Введем в первый столбец таблицы данные для напряжений, приложенных к сопротивлению 100 Ом (0, 5 и 10 В), рассчитаем по закону Ома соответствующие значения тока в миллиамперах и занесям их во второй столбец таблицы (см. рис. 1.31).

Таблицы предназначены только для ввода данных, но не для вывода. Однако после задания наборов данных в таблице их можно использовать аналогично *векторам-столбцам*.

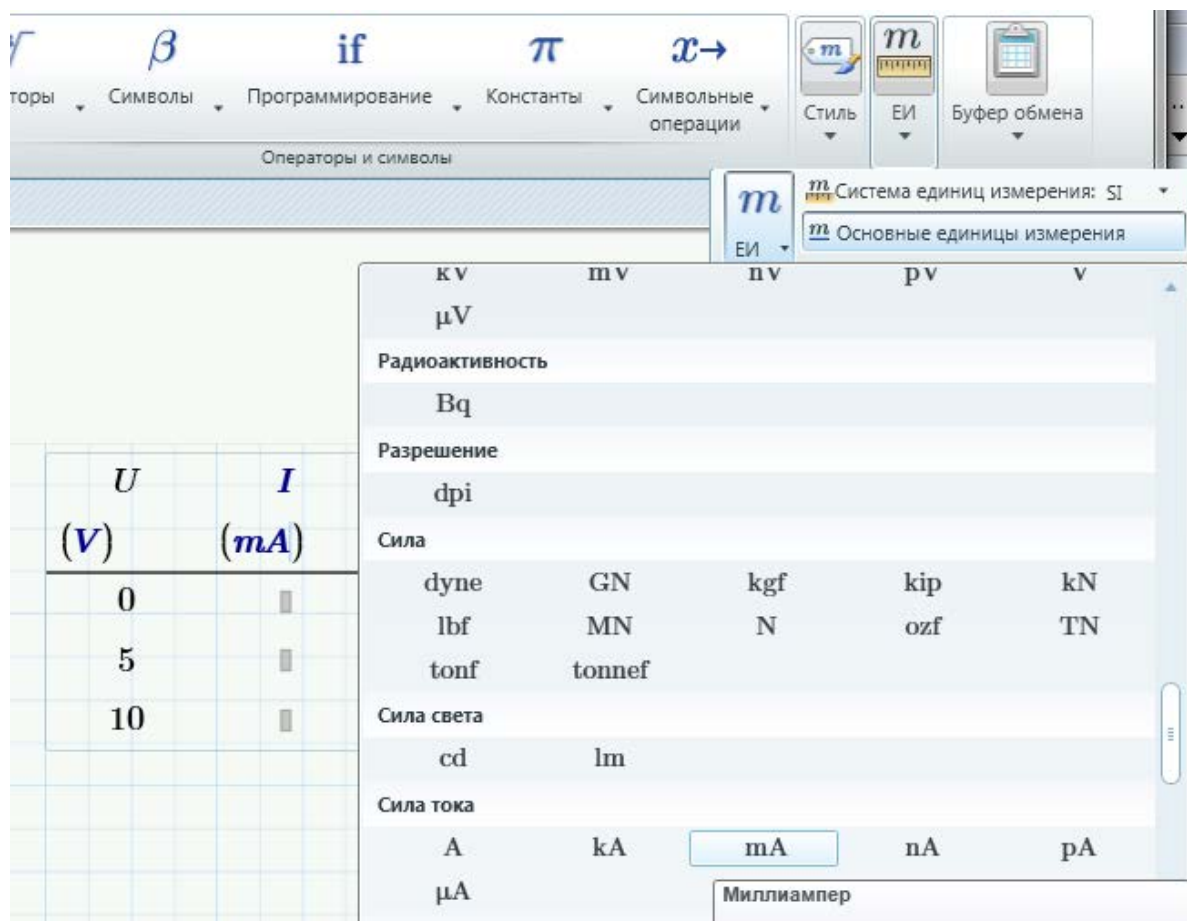


Рис. 1.32

Вектор может возвращать свои значения с помощью оператора «вычисление» (см. « U » рис. 1.31), а также может использоваться в качестве аргументов функций (см. « t » рис. 1.33).

t (s)	
0	$\tau := 1 \text{ s}$
1	$i := 1 \cdot e^{\frac{-t}{\tau}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.368 \\ 0.135 \\ 0.05 \end{bmatrix}$
2	
3	

Рис. 1.33

1.2.5. Построение графиков в системе MathCad

По значениям таблицы можно также строить графики.

Для вставки графика в документ требуется выбрать место вставки графика либо ниже, либо правее соответствующей таблицы. Затем выбрать пункт *Вставить график* на вкладке *Графики* в группе *Кривые*, раскрыть список с вариантами графиков и выбрать, например *График XY*.

В результате в документ вставится шаблон выбранного графика, в котором необходимо заполнить соответствующие позиции для X и Y .

Графики можно масштабировать, изменять расположение названия осей графика, а также править и настраивать деления и значения делений осей. Оси графика можно задать в линейном или логарифмическом масштабе. По умолчанию масштаб осей является линейным.

На рис. 1.34 приведен график зависимости $U(I)$, построенный для таблицы из программы на рис. 1.31.

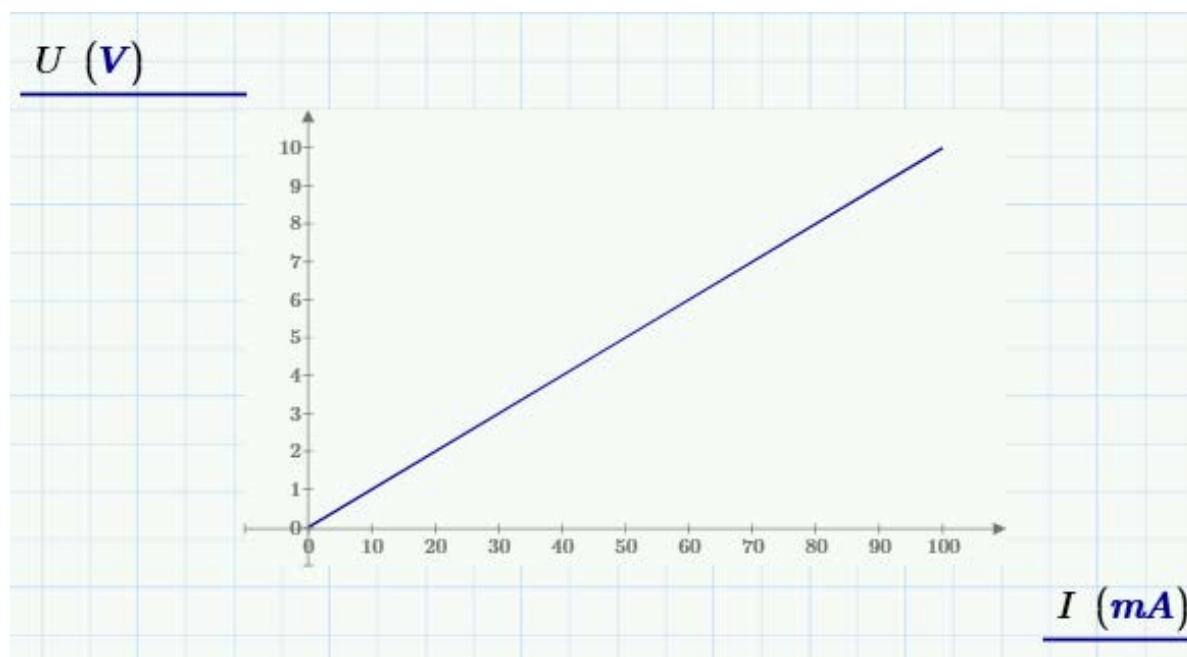


Рис. 1.34

На рис. 1.35 приведен график зависимости вектора мгновенного значения тока $i(t)$ из программы на рис. 1.33.

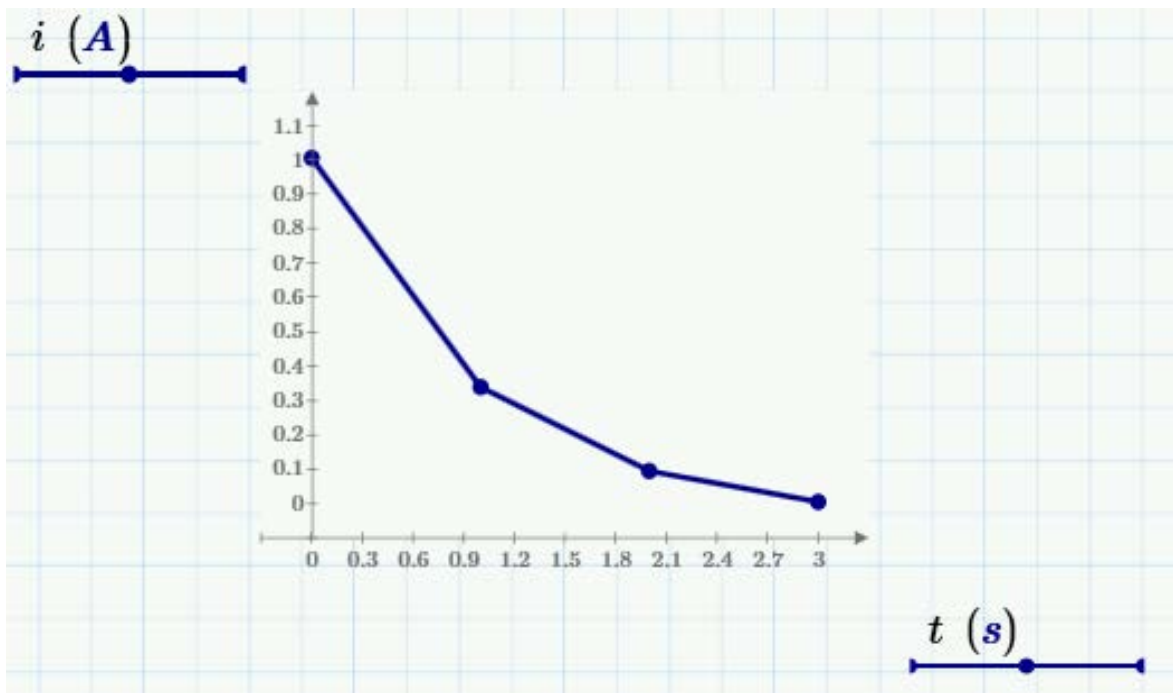


Рис. 1.35

При построении графиков удобно использовать переменную-диапазона, с помощью которой задавать не только диапазон изменения аргумента, но и его шаг, который, в свою очередь, определяет количество точек на графике (рис. 1.36).

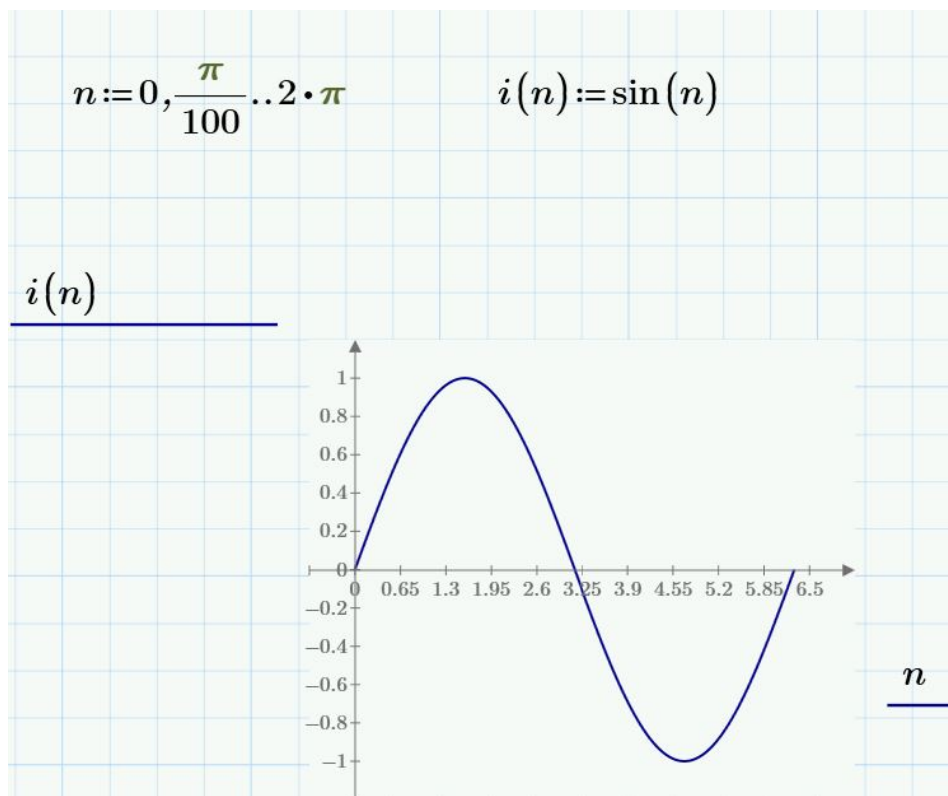


Рис. 1.36

Аргумент функции $\sin(n)$ в MathCad по умолчанию считается заданным в радианах. Если требуется указать аргумент в градусах, то можно либо умножить n на $\pi/180$, либо использовать оператор «градус» (символ $^\circ$), который преобразует n из радиан в градусы.

Если n является вектором, матрицей или комплексным числом, оператор «градус» применяется к каждому элементу n .

1.2.6. Решения систем линейных уравнений

Система линейных уравнений $M \cdot X = V$ может быть решена в MathCad аналитически в матричной форме через обращение матрицы (рис. 1.37).

В MathCad многие задачи решаются численными методами. Так, для решения систем линейных уравнений введена функция $lsolve(M, V)$, которая работает быстрее и в некоторых случаях дает более высокую точность. На рис. 1.37 показан пример использования функции $lsolve$, к аргументам которой предъявляются следующие требования:

M – матрица коэффициентов системы должна состоять из действительных или комплексных значений. Если матрица квадратная, то ее определитель не должен равняться нулю;

V – вектор или матрица свободных членов должна состоять из действительных или комплексных значений, иметь такое же число строк, как и матрица M .

$$M := \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & -7 \\ 5 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad V := \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad X := M^{-1} \cdot V = \begin{bmatrix} -0.597 \\ 2.363 \\ -0.185 \end{bmatrix}$$

$$X := lsolve(M, V) = \begin{bmatrix} -0.597 \\ 2.363 \\ -0.185 \end{bmatrix}$$

Рис. 1.37

Глава 2. Линейные электрические цепи постоянного тока в установившихся режимах

2.1. Основные понятия, определения и законы теории электрических цепей

Согласно ГОСТ Р 5200–2003 [3] электрической цепью называется совокупность устройств и объектов, образующих путь для прохождения электрического тока, электромагнитные процессы в которой могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе (ЭДС), электрическом токе и электрическом напряжении.

Основные элементы электрической цепи делятся на активные элементы (*источники*) – устройства, создающие (генерирующие) токи и напряжения, и пассивные элементы (*приемники*) – устройства, потребляющие, запаасающие или преобразующие электрическую энергию в другие виды энергии. Они соединяются между собой с помощью вспомогательных элементов: проводников, ключей, разъемов и т.д. В данном учебном курсе рассматриваются только двухполюсные элементы электрической цепи.

Электрический ток – явление «направленного движения носителей электрических зарядов и (или) явление изменения электрического поля во времени, сопровождаемые магнитным полем» [1]. В качестве носителя выступают: в металлах – это отрицательно заряженные частицы (электроны), в жидкостях и газах – как положительно, так и отрицательно заряженные частицы.

В электротехнике за положительное направление тока принимается направление перемещения положительного заряда.

Мгновенное значение тока в рассматриваемый момент времени $i(t)$ равно заряду q , проходящему через поперечное сечение проводника в единицу времени t :

$$i(t) = \frac{dq}{dt}.$$

Если заряд изменяется во времени линейно, то в проводнике течет постоянный ток I , если нелинейно – то в проводнике течет переменный ток i .

В системе единиц СИ заряд измеряется в кулонах (Кл), время – секундах (с), а ток – в амперах (А).

Рассмотрим участок электрической цепи с сопротивлением R (рис. 2.1). Пропустим через него постоянный ток I . Обозначим выводы цепи «а» и «б», а электрические потенциалы зажимов участка цепи – соответственно φ_a и φ_b .

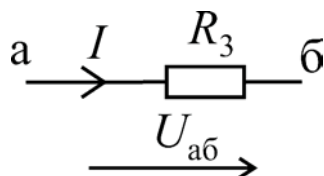


Рис. 2.1

Под потенциалом (φ) произвольной точки электрического поля понимается работа, которая совершается силами поля по переносу единичного положительного заряда из данной точки в бесконечность (или в точку, потенциал которой равен нулю) [4].

Разность потенциалов между двумя точками называется напряжением между этими точками:

$$U_{aa} = \varphi_a - \varphi_a.$$

В системе единиц СИ единица измерения напряжения – вольт (В). Для определенности будем считать, что положительное направление напряжения совпадает с направлением стрелки от более высокого потенциала к более низкому потенциалу. Если $\varphi_a > \varphi_a$, то U_{aa} – положительное.

Мгновенная мощность (p) «определяет скорость поступления в двухполюсник электромагнитной энергии в данный момент времени» [3] и равна произведению мгновенного напряжения u , падающего на двухполюснике, и мгновенного тока i , протекающего через него:

$$p = ui.$$

Активная мощность (P) – «среднее арифметическое мгновенной мощности за период» [3]

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt.$$

Для цепи постоянного тока активная мощность равна

$$P = UI.$$

В системе единиц СИ единица измерения активной мощности – ватт (Вт). Если она положительная – то мощность потребляется участком цепи от источника энергии, если отрицательная – то мощность отдается участком цепи источнику энергии.

Электрическая энергия, поступающая на участок электрической цепи (приемник) за промежуток времени от t_1 до t_2 , равна

$$W = \int_{t_1}^{t_2} p dt.$$

В системе единиц СИ энергия измеряется в джоулях (Дж).

2.2. Пассивные идеализированные элементы электрической цепи

Под элементами в теории электрических цепей понимают не физически существующие устройства, а их идеализированные модели, которые приближенно отображают явления, происходящие в реальных устройствах. Согласно ГОСТ Р 52002–2003 *идеальный элемент электрической цепи* – это абстрактное представление элемента электрической цепи, характеризующееся одним параметром.

Идеальный резистивный элемент характеризуется *активным электрическим сопротивлением*, под которым понимается «параметр пассивного двухполюсника, равный отношению активной мощности, поглощаемой в этом двухполюснике, к квадрату действующего значения тока через этот двухполюсник» [3].

Сопротивление называют активным, так как только им определяются необратимые активные процессы в цепи (в данном случае – это преобразование электромагнитной энергии в тепловую энергию) [4].

Условное графическое обозначение резистивного элемента показано на рис. 2.1. Буквенное обозначение R используется как для обозначения самого резистивного элемента, так и для количественной оценки его сопротивления в омах (Ом).

Величина, обратная активному сопротивлению, называется *активной проводимостью* (G) и измеряется в сименсах (См):

$$G = 1/R.$$

Вольт-амперная характеристика (ВАХ) – это зависимость напряжения на элементе к току, протекающему через него. У линейных резистивных элементов ВАХ также линейная.

Мгновенная мощность, характеризующая скорость поступления энергии в резистивный элемент в данный момент времени, всегда положительна и определяется как

$$p = u i = i^2 R = u^2 / R = u^2 G.$$

Электрическая энергия, поступившая в резистивный элемент, начиная с некоторого момента времени $t = 0$ и до рассматриваемого момента t , определяется выражением

$$W_R = \int_0^t p dt.$$

Превращение электрической энергии в тепловую было доказано Джоулем и Ленцем опытным путем. Они установили тепловой эквивалент электрической энергии 0,24 кал/Дж. В соответствии с законом Джоуля–Ленца количество тепла в калориях (Q), эквивалентное рассеянной в резистивном элементе энергии, равно

$$Q = 0,24 W_R.$$

Идеальный индуктивный элемент – это элемент электрической цепи, сходный по своим свойствам с катушкой индуктивности, способный запасать энергию магнитного поля. Условное обозначение идеального индуктивного элемента приведено на рис. 2.2.

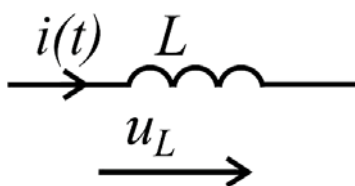


Рис. 2.2

Буквенное обозначение L применяется как для обозначения на схеме самого идеального индуктивного элемента, так и для количественной оценки его собственной индуктивности в генри (Гн), которая определяется как отношения потокосцепления самоиндукции элемента ψ к току i в этом элементе [3]:

$$L = \psi / i.$$

Физически картина состоит в следующем. Переменный во времени ток, протекая по виткам w катушки, создает переменный магнитный поток Φ . Этот поток, пронизывая витки катушки, образует потокосцепление самоиндукции

$$\psi = \Phi w.$$

Если магнитный поток катушки формируется в ферромагнитной среде, то зависимость $i(t)$ в общем случае нелинейная и, следовательно, индуктивность катушки зависит от тока, протекающего через нее. Если сердечник неферромагнитный, то зависимость $i(t)$ линейна и индуктивность L является постоянной величиной.

Всякое изменение потокосцепления самоиндукции во времени на основании закона электромагнитной индукции обуславливает наведение ЭДС самоиндукции, направленной противоположно потоку, вызвавшему ее:

$$e_L = -L \frac{di}{dt}.$$

Так как напряжение на индуктивности противоположно по знаку e_L , то для линейного индуктивного элемента можно записать следующее выражение:

$$u_L = -e_L = L \frac{di}{dt},$$

т.е. напряжение на индуктивном элементе пропорционально скорости изменения тока, протекающего через него.

Если $i = \text{const}$, то $u_L = 0$ и, следовательно, индуктивный элемент в цепи с источниками постоянного напряжения и тока в установившемся режиме можно заменить проводником с нулевым сопротивлением.

Если известно напряжение на индуктивном элементе, то ток через него определяется как

$$i = i(0) + \frac{1}{L} \int_0^t u_L dt.$$

Мгновенная мощность для индуктивного элемента

$$p_L = u_L i = Li \frac{di}{dt}$$

может быть и положительной, и отрицательной, что зависит от знаков тока и производной тока.

Если $p_L > 0$, то энергия поступает из внешней цепи и запасается в индуктивном элементе, при $p_L < 0$ энергия, запасенная в индуктивном элементе, возвращается во внешнюю цепь.

Сама энергия всегда положительна и определяется выражением

$$W_L = \int_0^t p_L dt = \int_0^t L i di = \frac{L i^2}{2}.$$

Идеальный емкостной элемент – это элемент электрической цепи, сходный по своим свойствам с конденсатором, способный запасать энергию электрического поля. Условное обозначение идеального емкостного элемента приведено на рис. 2.3.

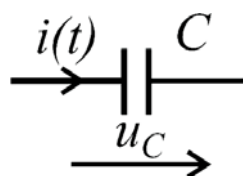


Рис. 2.3

Буквенное обозначение C применяется как для обозначения на схеме самого идеального емкостного элемента, так и для количественной оценки отношения заряда q в кулонах (К), накапливаемого на емкостном элементе, к напряжению u_C в вольтах, падающему на нем [3]. Это отношение называется емкостью элемента и измеряется в фарадах (Ф):

$$C = \frac{q}{u_C}.$$

Если зависимость $q(u_C)$ нелинейная, то емкость конденсатора зависит от напряжения на его обкладках, иначе его емкость является постоянной величиной.

Ток, который протекает через линейный емкостной элемент, пропорционален скорости изменения напряжения на нем:

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}.$$

Если $u_C = \text{const}$, то $i = 0$ и, следовательно, в цепи с источниками постоянного напряжения и тока в установившемся режиме ветвь с емкостным элементом можно исключить (разорвать).

Если известен ток емкостного элемента, то напряжение на нем определяется как

$$u_C = u_C(0) + \frac{1}{C_0} \int_0^t i \, dt.$$

Мгновенная мощность для емкостного элемента

$$p_{\tilde{N}} = u_{\tilde{N}} i = u_C \tilde{N} \frac{du_C}{dt}$$

может быть и положительной, и отрицательной, что зависит от знаков напряжения и производной напряжения.

Если $p_C > 0$, то энергия поступает из внешней цепи и запасается в емкостном элементе; $p_C < 0$ – энергия, запасенная в емкостном элементе, возвращается во внешнюю цепь.

Сама энергия всегда положительна и определяется выражением

$$W_C = \int_0^t p_C dt = \int_0^t C u_C du_C = \frac{C u_C^2}{2}.$$

2.3. Реальные пассивные элементы электрической цепи

Для реализации свойств идеализированных элементов сопротивления, емкости и индуктивности созданы реальные элементы: резистор, конденсатор и катушка индуктивности.

По ГОСТ Р 52002–2003 *резистор* – «элемент электрической цепи, предназначенный для использования его электрического сопротивления»; *индуктивная катушка* – «элемент электрической цепи, предназначенный для использования его собственной индуктивности и/или его магнитного поля»; *электрический конденсатор* – «элемент электрической цепи, предназначенный для использования его электрической емкости».

В реальных элементах помимо основного процесса протекают еще дополнительные «паразитные» процессы.

В резисторе при прохождении тока через его выводы возникает магнитное поле, поэтому для учета накопления в нем магнитной энергии, нужно ввести в модель резистора индуктивность L_{Π} (рис. 2.4).

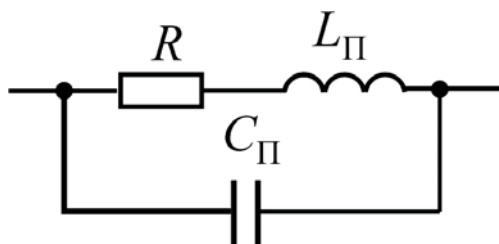


Рис. 2.4

На зажимах резистора создается разность потенциалов, что приводит к появлению электрического поля, для учета которого введем в модель резистора емкость C_{Π} (рис. 2.4).

Между пластинами конденсатора в диэлектрике создается «паразитная» проводимость, которую можно учесть в модели конденсатора сопротивлением R_{Π} (рис. 2.5). Накопление энергии магнитного поля при прохождении переменного тока можно учесть в модели конденсатора индуктивностью L_{Π} (рис. 2.5).

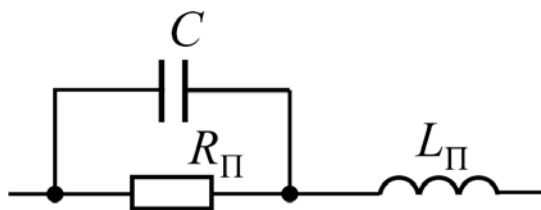


Рис. 2.5

Провод, из которого намотана катушка индуктивности, обладает омическим сопротивлением R_{Π} (рис. 2.6). Это сопротивление учитывают, если оно соизмеримо с реактивным индуктивным сопротивлением, что больше всего проявляется на низких частотах переменного тока.



Рис. 2.6

2.4. Активные элементы электрической цепи

Активные элементы электрической цепи делятся на зависимые и независимые источники энергии. Рассмотрим независимые источники энергии: источники тока и электродвижущей силы ЭДС (источник напряжения).

Идеальный источник ЭДС представляет собой элемент с двумя выводами, напряжение на которых не зависит от сопротивления нагрузки R_H (или от тока нагрузки).

По ГОСТ Р 52002–2003 ЭДС – скалярная величина, «характеризующая способность стороннего поля и индуцированного электрического поля вызывать электрический ток».

На рис. 2.7,а,б представлены эквивалентные схемы идеального и реального источников постоянной ЭДС. Стрелкой на рис. 2.7 указано положительное направление ЭДС источника, т.е. направление возрастания потенциала в источнике.

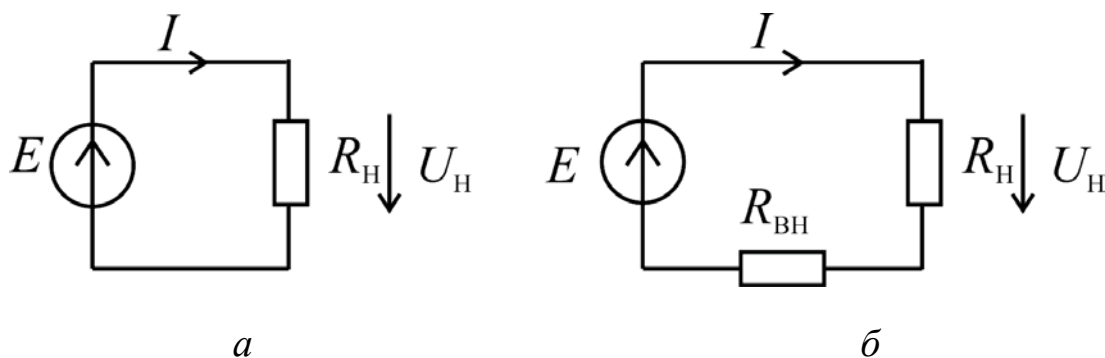


Рис. 2.7

Идеальный источник ЭДС представляет источник бесконечно большой мощности. Реальный источник ЭДС изображается в виде источника ЭДС с последовательно подключенным к нему внутренним сопротивлением $R_{\text{вн}}$, который ограничивает мощность, отдаваемую источником во внешнюю цепь, так как падение напряжения на нагрузке будет равно

$$U_i = E - IR_{\text{вн}}.$$

Внешняя характеристика реального и идеального источников ЭДС приведена на рис. 2.8.

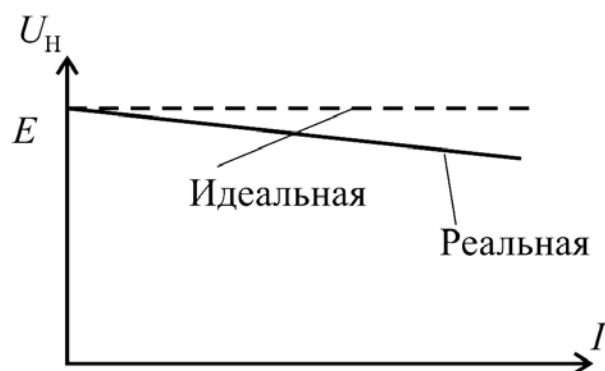


Рис. 2.8

Идеальный источник тока представляет собой элемент с двумя выводами, ток во внешней цепи которого не зависит от сопротивления нагрузки.

На рис. 2.9,а,б представлены эквивалентные схемы идеального и реального источников постоянного тока. Стрелкой внутри источника тока указано направление перемещения положительных зарядов в источнике.

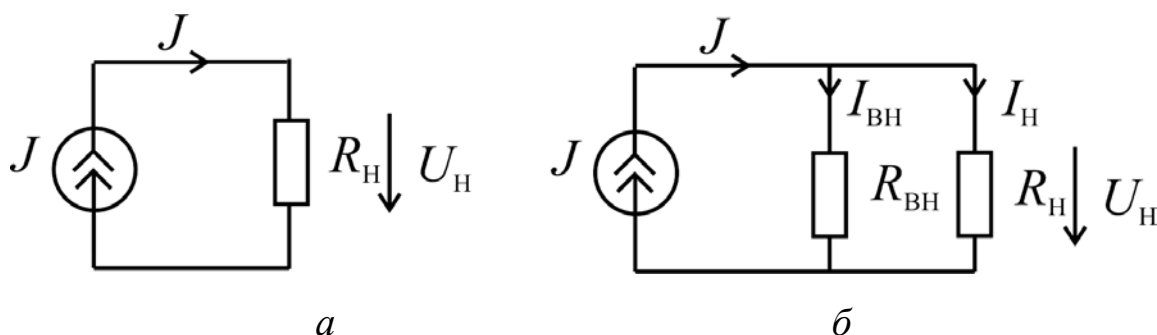


Рис. 2.9

Идеальный источник тока представляет источник бесконечно большой мощности. Источник конечной мощности изображается в виде идеального источника с подключенным к нему параллельно внутренним сопротивлением $R_{\text{вн}}$, который ограничивает мощность, отдаваемую источником во внешнюю цепь, так как на нагрузку поступает ток, равный

$$I_{\text{н}} = J - I_{\text{вн}}.$$

Внешняя характеристика реального и идеального источников тока приведена на рис. 2.10.

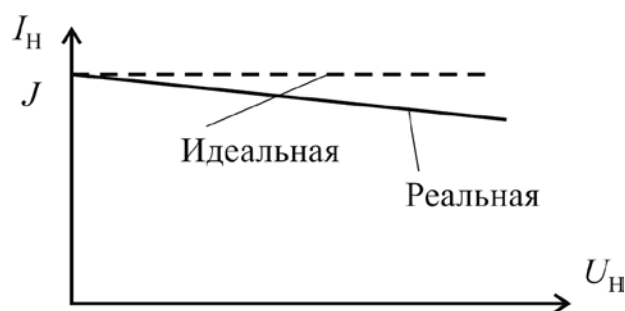


Рис. 2.10

2.5. Топология электрической цепи

Топология – это наука, изучающая топологические свойства геометрических фигур. К таким свойствам или параметрам относятся параметры, не изменяющиеся при любых деформациях, производимых без разрывов элементов фигуры.

В любой электрической цепи можно выделить пути, по которым протекает один и тот же электрический ток, и места соединения таких путей.

В электрической цепи существуют следующие топологические элементы: ветвь, узел и контур.

Ветвь – «Участок электрической цепи, вдоль которой протекает один и тот же ток» [3]. Ветвь может содержать либо один, либо несколько последовательно включенных элементов.

Узел – «Место соединения ветвей электрической цепи» [3], причем количество соединяемых ветвей не должно быть меньше трех. Если ветвь между двумя узлами не содержит элементов, то принято эти узлы считать одним узлом, а ток в этой ветви не подлежит определению.

Контур – «Последовательность ветвей электрической цепи, образующих замкнутый путь, в которой один из узлов одновременно является началом и концом пути, а остальные встречаются только один раз» [3].

В каждой электрической цепи количество таких контуров ограничено и зависит от ее топологии. Различают *зависимые* и *независимые* контуры. Каждый новый независимый контур должен содержать хотя бы одну новую ветвь, по сравнению с уже названными ветвями в других контурах.

На рис. 2.11 показана электрическая цепь, у которой два узла (а и б) и три ветви, в каждой из которой протекает свой ток (I_1 , I_2 , I_3).

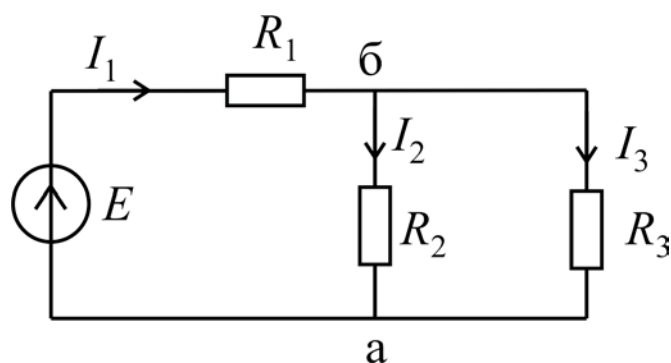


Рис. 2.11

В данной цепи три контура, однако независимых контуров – только два. Один из них образован, например, ветвями с током I_1 и I_2 , а другой – ветвями с током I_2 и I_3 .

На рис. 2.12,а показана электрическая цепь, у которой четыре узла (а, б, в (в1), г), семь ветвей и четыре независимых контура.

Обратите внимание, что на схеме электрической цепи точка в месте расположения узла должна обязательно ставиться лишь для узлов, где сходится более трех ветвей, так как в этом случае это может быть не узел, а просто точка пересечения ветвей.

В цепи на рис. 2.12,б нет узла в точке «в1», он остался только в точке «в». В этой цепи число узлов также равно четырем (а, б, в и г), а количество ветвей стало на одну меньше по сравнению со схемой на рис. 2.12,а. Вместо двух ветвей с сопротивлениями R_2 и R_5 появилась одна ветвь, содержащая последовательно соединенные сопротивления R_2 и R_5 .

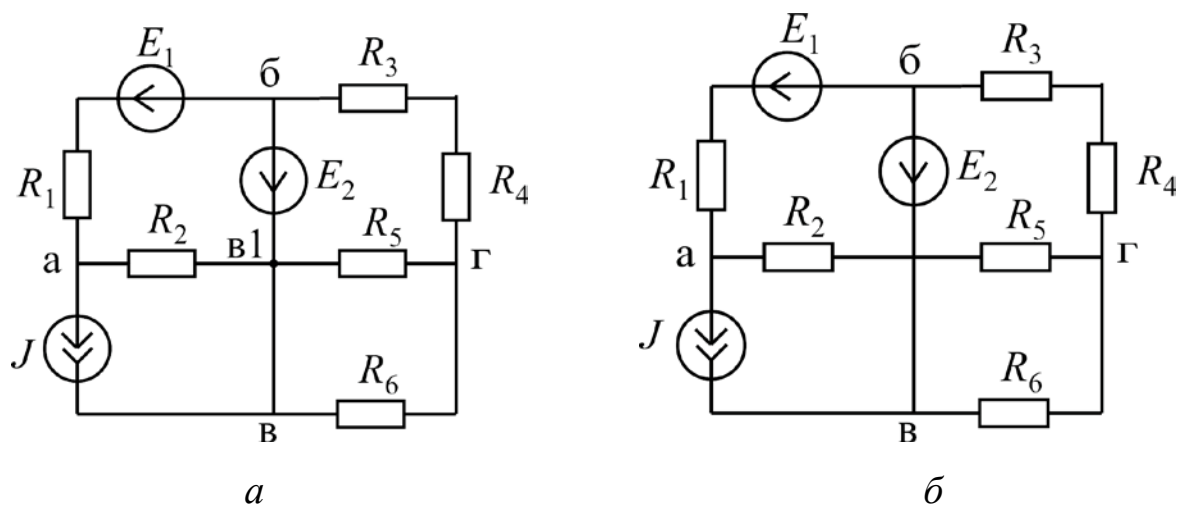


Рис. 2.12

В схеме рис. 2.12,б количество независимых контуров определить труднее, чем в схеме рис. 2.12,а. Однако если, не изменяя топологических параметров цепи (рис. 2.12,б), лишь перенести ветви с элементами J , E_2 и R_6 выше узла «б», то топология цепи станет более понятной. Кроме того, не будет пересечения ветвей (рис. 2.13). Таким образом, в схемах рис. 12,б,в – три независимых контура.

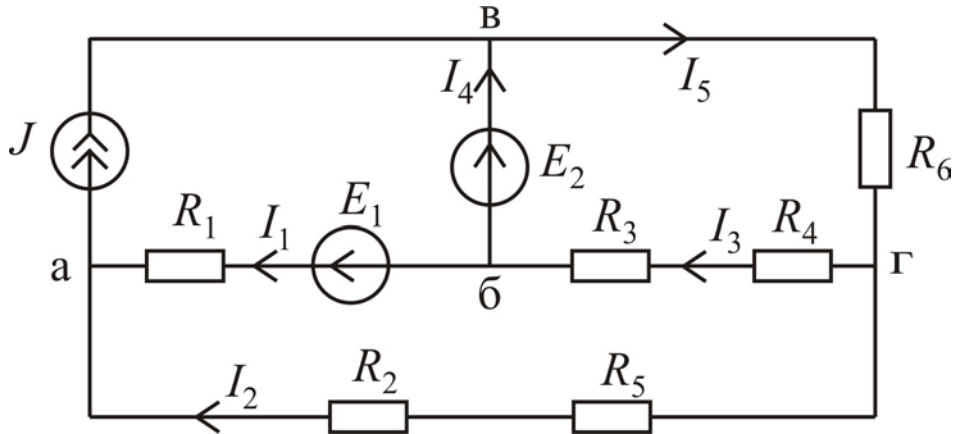


Рис. 2.13

2.6. Закон Ома для участка электрической цепи

Для любой ветви электрической цепи выполняется закон Ома, который был экспериментально установлен в 1826 г.:

$$R = U/I,$$

где R – электрическое сопротивление постоянному току – скалярная величина, равная отношению постоянного напряжения на участке пассивной электрической цепи (U) к постоянному току в нем (I), при отсутствии на участке ЭДС.

Рассмотрим связь между током и напряжением в общем случае: для ветви с последовательным соединением резистора и источника ЭДС (рис. 2.14).

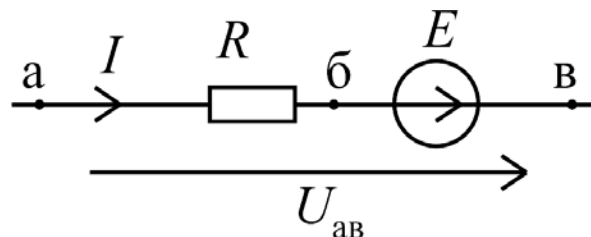


Рис. 2.14

Падение напряжения на концах участка а–в с учетом того, что направления падения напряжения и ЭДС всегда противоположны, можно представить как

$$U_{a\hat{a}} = U_{\hat{a}\hat{a}} + U_{\hat{a}\hat{a}} = IR - E.$$

Отсюда получим выражение для тока

$$I = \frac{U_{\hat{a}\hat{a}} + E}{R}.$$

Если изменить направление действия ЭДС на противоположное, то в выражении для напряжения $U_{a\hat{a}}$ изменится знак при E .

Запишем для примера, чему будет равно напряжение $U_{a\hat{a}}$ в схеме рис. 2.13. Для этого напряжения можно записать разные выражения, в зависимости от того, из каких напряжений оно будет складываться:

$$U_{a\hat{a}} = -I_2 (R_2 + R_5);$$

$$U_{a\hat{a}} = -I_1 R_1 + E_1 - I_3 (R_3 + R_4);$$

$$U_{a\hat{a}} = -I_1 R_1 + E_1 - E_2 + I_5 R_6.$$

2.7. Законы Кирхгофа

Для любой электрической цепи выполняются законы Кирхгофа. Они являются одной из форм закона сохранения энергии и относятся к фундаментальным законам природы.

При составлении уравнений по законам Кирхгофа (*уравнений равновесия*) необходимо сначала выбрать условно положительные направления токов в ветвях. Если в результате расчета какие-то токи получатся отрицательными, это говорит о том, что токи направлены противоположно выбранному направлению.

Первый закон Кирхгофа выполняется для любого узла и является следствием принципа непрерывности электрического тока. Физический смысл первого закона Кирхгофа заключается в том, что в узле электрический заряд не накапливается и не расходуется.

Можно дать две формулировки первого закона Кирхгофа.

1) *Алгебраическая сумма токов в любом узле электрической цепи равна нулю:*

$$\sum_{k=1}^n \pm I_k = 0,$$

где n – количество ветвей, сходящихся в узле.

Слово «алгебраическая» обозначает, что токи, направленные к узлу и от него, следует брать с разными знаками. В электротехнике принято токи, направленные к узлу, брать со знаком плюс, а токи, направленные от узла – со знаком минус. Например, уравнение по первому закону Кирхгофа для схемы (см. рис. 2.11) в узле «а» имеет следующий вид:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0.$$

2) Сумма токов, направленных к узлу электрической цепи, равна сумме токов, направленных от него:

$$\sum_{k=1}^m I_k = \sum_{k=1}^{n-m} I_k, \quad (2.1)$$

где m – количество токов, направленных к узлу.

Запишем второй вариант уравнения по первому закону Кирхгофа для схемы рис. 2.11 в узле «а»:

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Второй закон Кирхгофа выполняется для любого контура электрической цепи. Можно дать две формулировки второго закона Кирхгофа.

1) Алгебраическая сумма напряжений во всех ветвях любого контура электрической цепи равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n \pm (U_k - E_k) = 0,$$

где n – количество ветвей в контуре; $\pm (U_k - E_k)$ – напряжение на k -й ветви контура.

2) Алгебраическая сумма падений напряжения на пассивных участках любого контура электрической цепи равна алгебраической сумме ЭДС в этом контуре:

$$\sum_{k=1}^p \pm U_k = \sum_{k=1}^q \pm E_k, \quad (2.2)$$

где p – количество пассивных участков в контуре; q – количество источников ЭДС в контуре.

При написании уравнений по второму закону Кирхгофа следует придерживаться следующего правила:

«Слагаемые берутся со знаком плюс, если направление обхода контура совпадает с направлением тока на участке цепи (с направлением ЭДС) и со знаком минус – если иначе».

Запишем уравнение по второму закону Кирхгофа (см. рис. 2.11) для внешнего контура схемы, двигаясь в нем по часовой стрелке, по первой и второй формулировке соответственно:

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 - E = 0;$$

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = E.$$

2.8. Потенциальная диаграмма

Потенциальная диаграмма – это график распределения потенциалов вдоль какого-либо участка цепи или контура в зависимости от его сопротивления. По оси абсцисс на графике откладываются сопротивления вдоль контура, начиная с какой-либо произвольной точки, а по оси ординат – потенциалы соответствующих точек.

Построим потенциальную диаграмму для контура электрической цепи, приведенной на рис. 2.15.

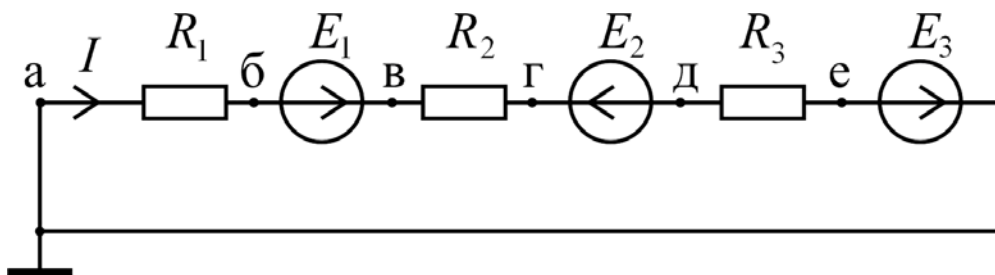


Рис. 2.15

- 1) Зададимся значением потенциала в точке а – $\varphi_a = 0\text{В}$.
- 2) Рассчитаем потенциалы во всех точках электрической цепи:

$$\varphi_{\text{а}} = \varphi_{\text{б}} - IR_1; \varphi_{\text{а}} = \varphi_{\text{в}} + E_1; \varphi_{\text{а}} = \varphi_{\text{г}} - IR_2;$$

$$\varphi_{\text{а}} = \varphi_{\text{д}} - E_2; \varphi_{\text{а}} = \varphi_{\text{е}} - IR_3; \varphi_{\text{а}} = \varphi_{\text{а}} + E_3.$$

3) Построим потенциальную диаграмму, на которой по оси R отложим изменение сопротивления вдоль контура, а по оси φ – значения соответствующих потенциалов.

На рис. 2.16 приведен пример потенциальной диаграммы для схемы рис. 2.15. Причем на данной диаграмме значения потенциалов и сопротивлений взяты произвольно. На практике потенциальную диаграмму следует строить после того, как были получены числовые значения потенциалов.

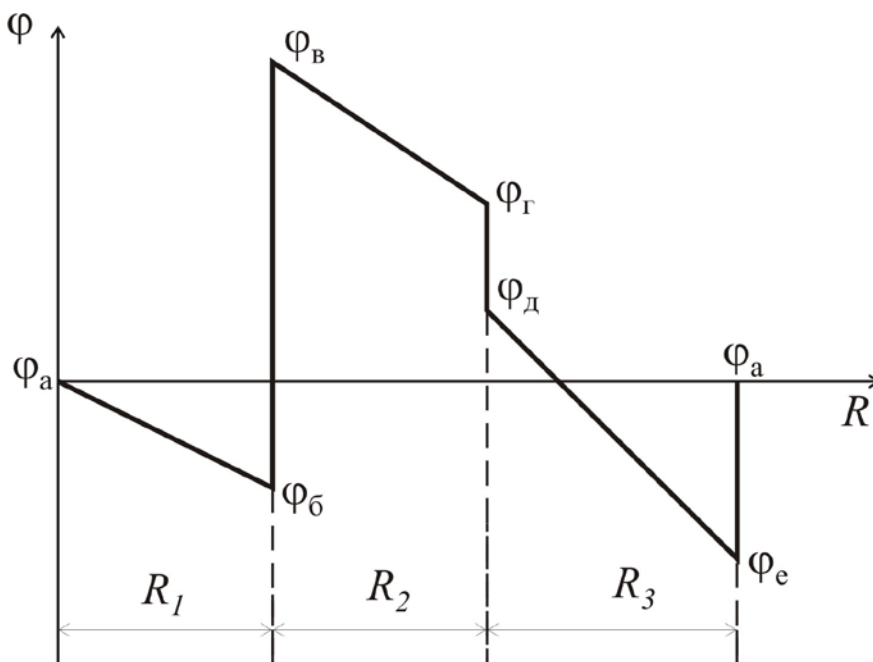


Рис. 2.16

2.9. Энергетический баланс мощности в электрических цепях

При протекании токов по сопротивлениям в них выделяется тепло. На основании закона сохранения энергии количество теплоты, выделяющейся на сопротивлениях, равно энергии, отбираемой за то же время от источника. Уравнение энергетического баланса мощности в общем случае можно записать как

$$\sum I_k^2 R_k = \sum E_n I_n + \sum J_m U_m,$$

где k – общее количество сопротивлений в электрической цепи; n – общее количество ЭДС в электрической цепи; m – общее коли-

чество источников тока в электрической цепи; U_m – напряжение на зажимах источника тока.

Запишем для примера уравнение баланса активной мощности для схемы на рис. 2.13:

$$I_1^2 R_1 + I_2^2 (R_2 + R_5) + I_3^2 (R_3 + R_4) + I_5^2 R_6 = E_1 I_1 + E_2 I_4 + J U_{\text{аа}}.$$

Следует иметь в виду, что в правой части уравнения слагаемые берутся со знаком плюс, если направление ЭДС и тока, протекающего через него, совпадают, и со знаком минус – если иначе. В левой части уравнения все слагаемые всегда со знаком плюс.

На рис. 2.17 приведен график зависимости активной мощности, передаваемой от источника ЭДС к нагрузке, для схемы рис. 2.7,б от отношения $R_1 / R_{\text{аі}}$.

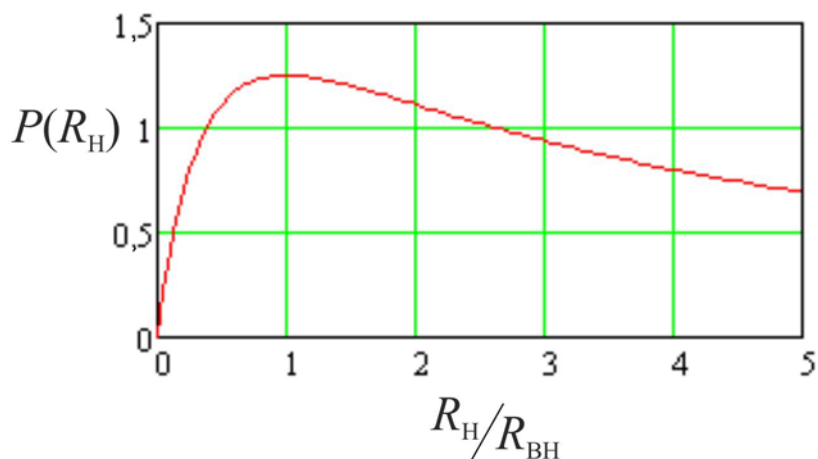


Рис. 2.17

Эта зависимость нелинейная:

$$P = \left(\frac{E}{R_1 + R_{\text{аі}}} \right)^2 R_1.$$

Условием передачи источником E максимальной мощности в нагрузку является равенство $R_{\text{аі}} = R_1$.

2.10. Преобразование линейных электрических цепей

Существуют следующие виды соединения элементов электрической цепи: последовательное, параллельное, смешанное, соединения по схеме «звезда» и «треугольник».

«Электрическое соединение, при котором через рассматриваемые участки электрической цепи возможен только один и тот же электрический ток» [3] называется *последовательным* соединением.

На рис. 2.18 показано последовательное соединение сопротивлений R_1 , R_2 и R_3 . Падение напряжения на участке а–б равно

$$U_{\text{аб}} = I(R_1 + R_2 + R_3) = IR_{\text{аб}}.$$

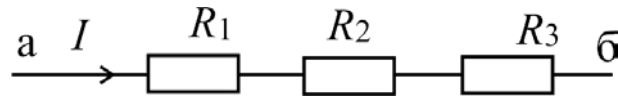


Рис. 2.18

Таким образом, эквивалентное сопротивление $R_{\text{аб}}$ равно сумме сопротивлений:

$$R_{\text{аб}} = R_1 + R_2 + R_3.$$

«Электрическое соединение, при котором рассматриваемые участки электрической цепи присоединяются к одной паре узлов», [3] называется *параллельным* соединением.

При параллельном соединении сопротивлений (рис. 2.19) на основании первого закона Кирхгофа можно записать:

$$\begin{aligned} I = I_1 + I_2 + I_3 &= \frac{U_{\text{аб}}}{R_1} + \frac{U_{\text{аб}}}{R_2} + \frac{U_{\text{аб}}}{R_3} = U_{\text{аб}} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right) = \\ &= U_{\text{аб}} (G_1 + G_2 + G_3) = U_{\text{аб}} G_{\text{аб}}. \end{aligned}$$

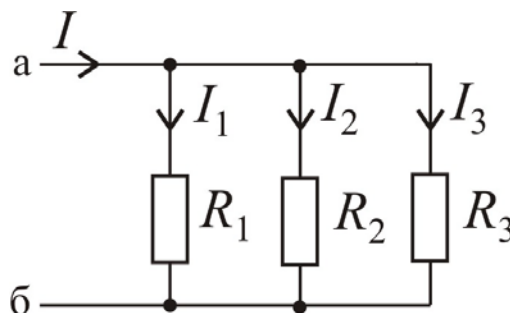


Рис. 2.19

Таким образом, эквивалентная проводимость на параллельном участке цепи равна сумме проводимостей всех параллельных ветвей:

$$G_{\text{аб}} = G_1 + G_2 + G_3.$$

Эквивалентное сопротивление в цепи будет равно

$$R_{\dot{a}\dot{a}} = \frac{1}{G_{\dot{a}\dot{a}}}.$$

В случае двух параллельно соединенных сопротивлений R_1 и R_2 выражение для общего сопротивления имеет вид:

$$R_{a\bar{b}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Смешанным называется такое соединение, при котором в цепи имеются и параллельно, и последовательно включенные сопротивления.

Рассчитаем эквивалентное сопротивление цепи $R_{a\dot{a}}$, представленной на рис. 2.20.

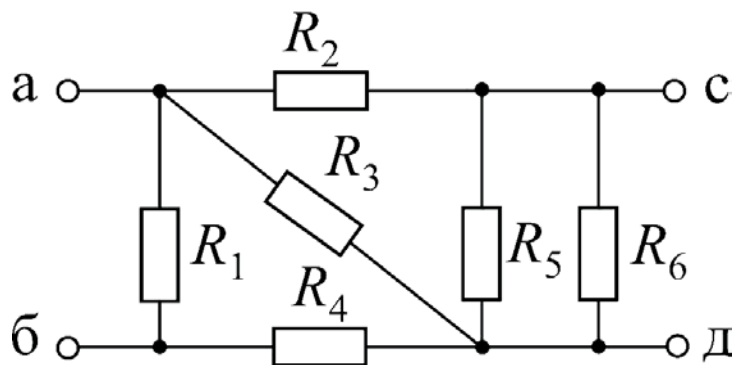


Рис. 2.20

В данной схеме нет ветвей с последовательно соединенными элементами, однако две ветви соединены параллельно – R_5 и R_6 .

Найдем эквивалентное сопротивление цепи на участке цепи $R_{\dot{n}\dot{a}}$ как

$$R_{сд} = \frac{R_5 R_6}{R_5 + R_6}.$$

Эквивалентная схема рассматриваемой цепи после первого шага преобразования представлена на рис. 2.21.

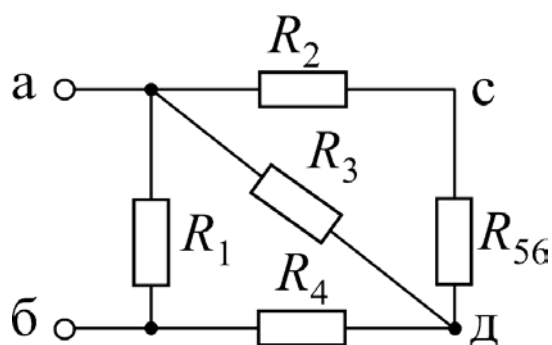


Рис. 2.21

Точка «с» на эквивалентной схеме уже не является узлом цепи. Поэтому сопротивления R_2 и R_{56} включены последовательно, а их общее сопротивление R_{256} равно

$$R_{256} = R_2 + R_{56}.$$

В схеме рис. 2.21 ветви с сопротивлениями R_{256} и R_3 включены параллельно, следовательно, их эквивалентное сопротивление R_{3256} можно найти как

$$R_{3256} = \frac{R_3 R_{256}}{R_3 + R_{256}}.$$

Эквивалентная схема рассматриваемой цепи после третьего шага преобразования представлена на рис. 2.22.

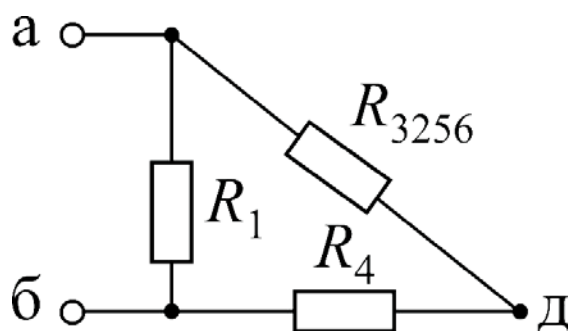


Рис. 2.22

Точка «д» на эквивалентной схеме уже не является узлом цепи. Поэтому сопротивления R_4 и R_{3256} включены последовательно, а их общее сопротивление R_{43256} равно

$$R_{43256} = R_4 + R_{3256}.$$

В схеме рис. 2.22 ветви с сопротивлениями R_{43256} и R_1 включены параллельно, следовательно, их эквивалентное сопротивление $R_{\text{аа}}$ можно найти как

$$R_{\text{аа}} = \frac{R_1 R_{43256}}{R_1 + R_{43256}}.$$

На схеме рис. 2.23, а, б показаны соединения сопротивлений по схеме «звезда» и «треугольник» соответственно.

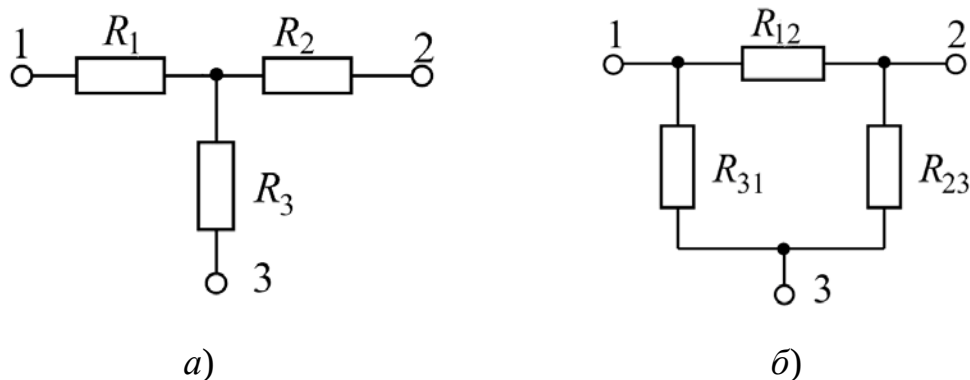


Рис. 2.23

Часто при выполнении эквивалентных преобразований единственным способом упростить схему является замена участка цепи по схеме «звезда» на схему «треугольник», и наоборот. При этом для того, чтобы при такой замене не изменился режим работы всей оставшейся части электрической цепи, сопротивления этих двух схем должны быть связаны между собой следующими соотношениями:

$$R_1 = \frac{R_{12} R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}};$$

$$R_2 = \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}};$$

$$R_3 = \frac{R_{31} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}};$$

$$R_{12} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3};$$

$$R_{23} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1};$$

$$R_{31} = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}.$$

Для расчета одноконтурных цепей либо разветвленных цепей с одним активным элементом удобно использовать метод преобразования, основанный на преобразовании электрических цепей.

Рассмотрим применение этого метода для расчета электрической цепи, схема которой приведена на рис. 2.11. Найдем токи во всех ветвях этой цепи.

Сначала найдем эквивалентное входное сопротивление цепи

$$R_{\dot{y}} = R_1 + R_{\dot{a}\dot{a}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Затем рассчитаем по закону Ома ток в первой ветви:

$$I_1 = \frac{E}{R_{\dot{y}}}.$$

Далее найдем напряжение, падающее на параллельном участке цепи $U_{\dot{a}\dot{a}}$:

$$U_{\dot{a}\dot{a}} = I_1 R_{\dot{a}\dot{a}}.$$

Затем рассчитаем по закону Ома ток во второй и третьей ветвях:

$$I_2 = \frac{U_{\dot{a}\dot{a}}}{R_2}; \quad I_3 = \frac{U_{\dot{a}\dot{a}}}{R_3}.$$

2.10.1. Задачи для самостоятельного выполнения

1) В схеме рис. 2.20 все сопротивления равны 1 Ом. Найти эквивалентное сопротивление цепи относительно выводов «а–с», «б–д» и «с–д».

2) В схеме рис. 2.24 все сопротивления равны 1 Ом. Найти эквивалентное сопротивление цепи относительно выводов «а–б», «а–в», «в–д», «в–г», «д–е», «г–е» и «б–г».

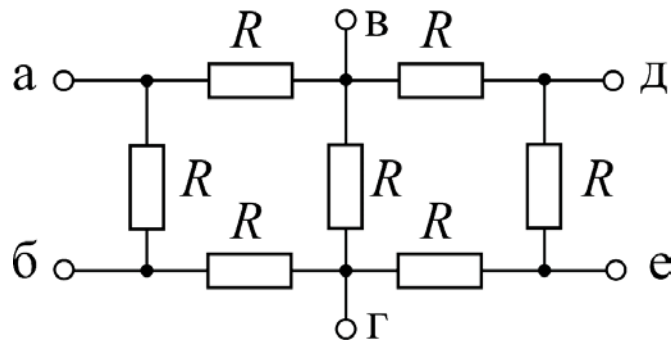


Рис. 2.24

3) Перерисуйте схему рис. 2.25, *а, б* так, чтобы не было пересечения ветвей. Укажите для нее число узлов, ветвей, общее количество контуров и число независимых контуров.

4) Чему равно эквивалентное сопротивление нагрузки для источника ЭДС в схеме рис. 2.25, *а, б*?

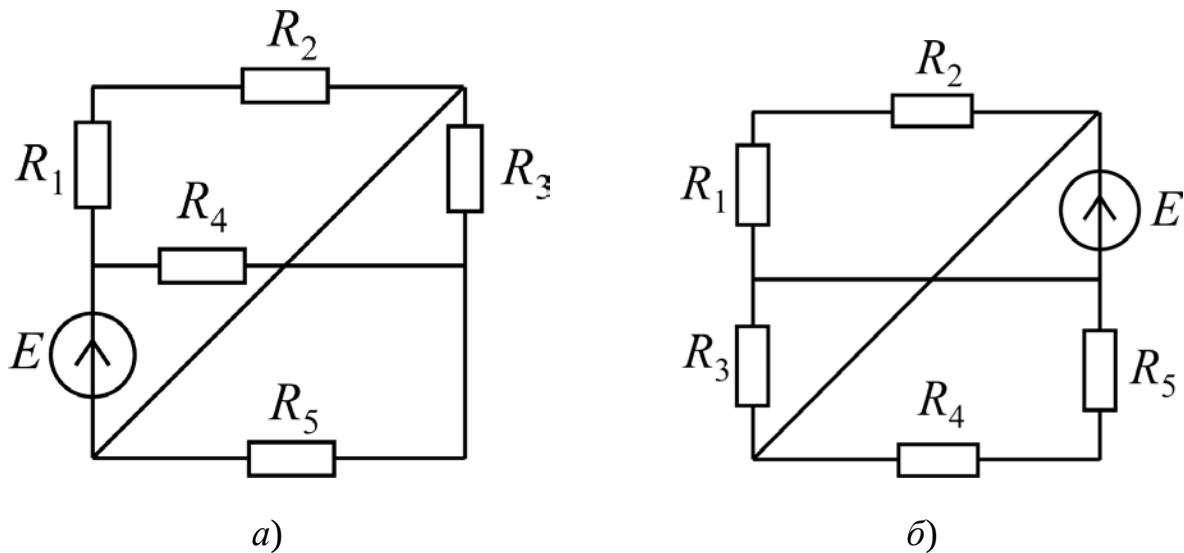
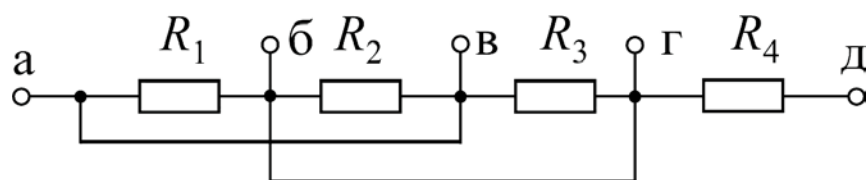


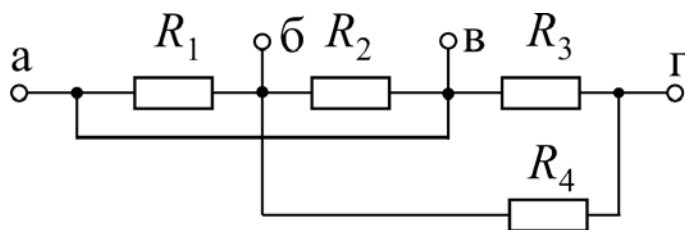
Рис. 2.25

1) В схеме рис. 2.24 все сопротивления равны 1 Ом. Найти эквивалентное сопротивление цепи относительно выводов «*а–е*», «*б–д*».

2) В схеме рис. 2.26, *а, б* все сопротивления равны 1 Ом. Найти эквивалентное сопротивление цепи относительно любых двух выводов (для всех возможных комбинаций выводов).



а)



б)

Рис. 2.26

2.11. Методы расчета сложных электрических цепей

Под *сложной электрической цепью* будем понимать разветвленную цепь, содержащую более одного источника энергии.

В общем случае для расчета любой электрической цепи с заданными параметрами можно составить для нее систему уравнений по законам Кирхгофа и решить ее, используя любой метод.

2.11.1. Метод законов Кирхгофа

При расчете электрической цепи по *методу законов Кирхгофа* целесообразно придерживаться приведенного ниже алгоритма.

1) Произвольно задать направление токов во всех ветвях, кроме ветвей с источниками тока (токи источников тока считаются известными).

2) Для всех узлов цепи, кроме одного, выбранного произвольно, составить уравнения по первому закону Кирхгофа.

3) Произвольно выбрать на схеме цепи независимые контуры, не включая в них ветви с источником тока. Число независимых контуров равно:

$$N = N_B - N_U + 1 - N_{ИТ},$$

где N_B , N_U , $N_{ИТ}$ – соответственно общее число ветвей, узлов и источников тока в цепи.

4) Произвольно задать направление обхода выбранных независимых контуров.

5) Составить для выбранных контуров уравнения по второму закону Кирхгофа.

В результате будет получена система уравнений, количество уравнений которой равно числу неизвестных токов в цепи.

Рассмотрим этот алгоритм для ранее рассмотренной схемы рис. 2.13.

В данной схеме четыре узла ($N_y = 4$), шесть ветвей ($N_B = 6$) и одна ветвь с источником тока ($N_{ИТ} = 1$).

Таким образом, для расчета данной цепи необходимо составить три уравнения по первому закону Кирхгофа (например, для узлов а, б, г) и два уравнения по второму закону Кирхгофа ($N = 6 - 4 + 1 - 1 = 2$):

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = J; \\ I_3 = I_1 + I_4; \\ I_5 = I_3 + I_2; \\ I_5 R_6 + I_3 (R_4 + R_3) = E_2; \\ I_1 R_1 - I_2 (R_2 + R_5) + I_3 (R_3 + R_4) = E_1. \end{cases} \quad (2.3)$$

2.11.2. Метод контурных токов

Метод контурных токов, широко применяемый на практике, является одним из основных методов расчета сложных электрических цепей. При расчете электрической цепи по методу контурных токов сначала находятся на основании второго закона Кирхгофа так называемые контурные токи, замыкающиеся в выбранных контурах. Затем через них выражаются токи в ветвях.

При расчете электрической цепи по методу контурных токов целесообразно придерживаться приведенного ниже алгоритма.

1) Произвольно задать направление токов во всех ветвях, кроме ветвей с источниками тока (токи источников тока считаются известными).

2) Произвольно выбрать на схеме цепи независимые контуры, не включая в них ветви с источником тока, и стрелками обозначить направления контурных токов в них. Для обозначения контурных токов удобнее использовать двойную индексацию ($I_{\hat{e}\hat{e}}$). Токи от источников тока, как и другие контурные токи, также необходимо замкнуть через какой-либо контур, указав их направление стрелкой.

3) Обходя каждый из выбранных независимых контуров в направлении собственного контурного тока, записать для него урав-

нение по второму закону Кирхгофа относительно контурных токов, протекающих по ветвям данного контура, в том числе и от контурных токов, полученных от источников тока.

При этом падение напряжения от собственного контурного тока берется со знаком плюс. Падение напряжения от других контурных токов, протекающих по ветвям выбранного контура, берется со знаком плюс, если их направление совпадает с направлением собственного контурного тока, и со знаком минус – если иначе. Алгебраическая сумма ЭДС в контуре записывается со знаком плюс, если направление собственного контурного тока совпадает с направлением ЭДС, иначе – со знаком минус.

В результате будет получена система уравнений, количество уравнений которой равно числу неизвестных контурных токов. Решив эту систему относительно контурных токов, выражают токи в ветвях как алгебраическую сумму контурных токов, протекающих по каждой ветви.

Рассмотрим этот алгоритм для ранее рассмотренной схемы рис. 2.13. На схеме рис. 2.27 стрелками показаны контурные токи I_{11} и I_{22} , а также контурный ток от источника тока J .

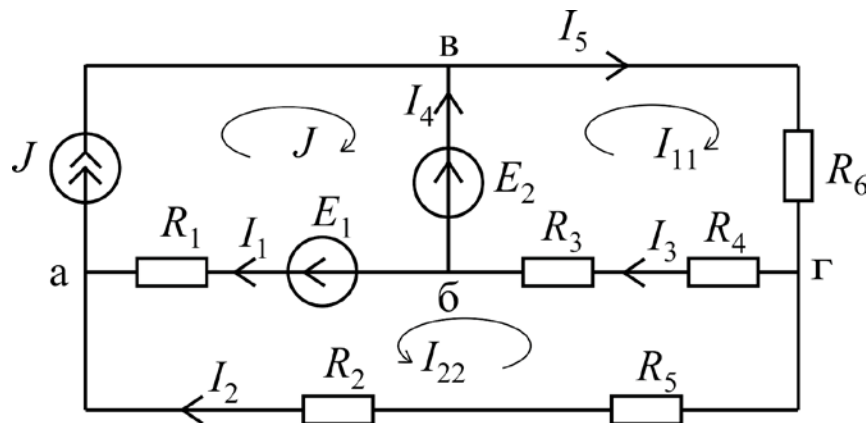


Рис. 2.27

Запишем для двух независимых контуров, не содержащих ветви с источником тока J , уравнения по второму закону Кирхгофа относительно контурных токов:

$$\begin{cases} I_{11}(R_6 + R_4 + R_3) + I_{22}(R_4 + R_3) = E_2; \\ I_{22}(R_2 + R_5 + R_4 + R_3 + R_1) + I_{11}(R_4 + R_3) + JR_1 = E_1. \end{cases}$$

Таким образом, полученная система уравнений по сравнению с системой уравнений (2.3), составленной для той же электрической цепи по методу законов Кирхгофа, содержит на три уравнения меньше.

В результате решения данной системы уравнений получим значения для неизвестных контурных токов, а токи в ветвях найдем как алгебраическую сумму протекающих по ветви контурных токов:

$$I_1 = I_{22} + J;$$

$$I_2 = -I_{22};$$

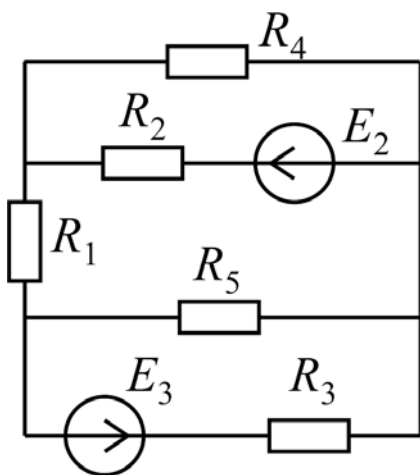
$$I_3 = I_{11} + I_{22};$$

$$I_4 = I_{11} - J;$$

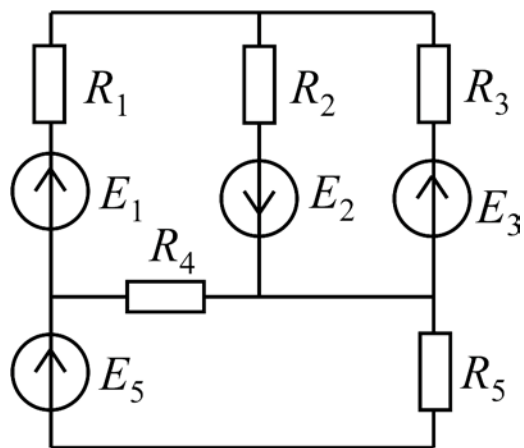
$$I_5 = I_{11}.$$

2.11.3. Задачи для самостоятельного выполнения

1) Записать системы уравнений для расчета цепи (рис. 2.28, а–б) по методу законов Кирхгофа и по методу контурных токов.



а)



б)

Рис. 2.28. Начало

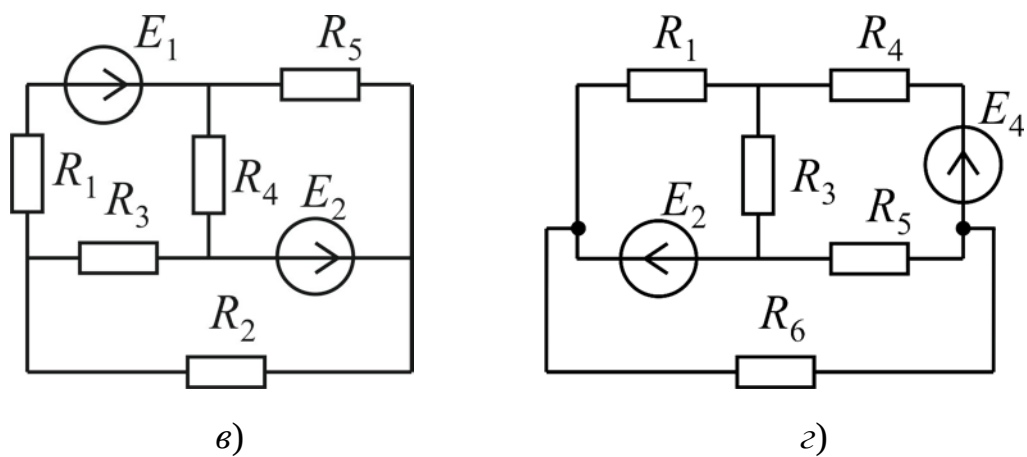


Рис. 2.28. Окончание

1) Записать системы уравнений для расчета цепи (рис. 2.29, а–г) по методу законов Кирхгофа и по методу контурных токов.

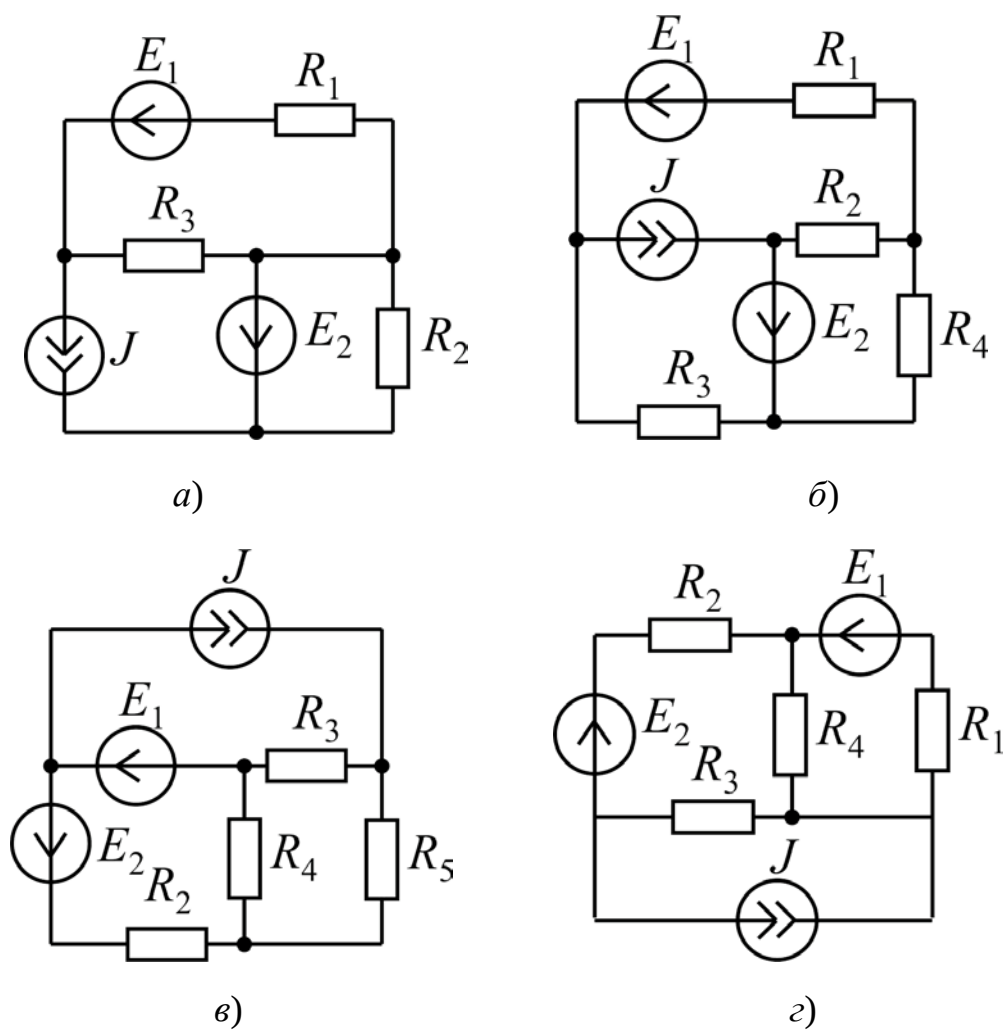


Рис. 2.29

2.12. Моделирование цепей постоянного тока

На рис. 2.30 приведена программа, записанная в среде MathCad, с помощью которой проведен расчет электрической цепи по схеме рис. 2.11 для следующих значений параметров схемы: $E = 10 \text{ В}$, $R_1 = 100 \text{ Ом}$, $R_2 = 200 \text{ Ом}$, $R_3 = 300 \text{ Ом}$.

$E := 10 \text{ V}$	$R1 := 100 \text{ }\Omega$	$R2 := 200 \text{ }\Omega$	$R3 := 300 \text{ }\Omega$
$R_{6a} := \frac{R2 \cdot R3}{R2 + R3}$	$R_{\Sigma} := R1 + R_{6a}$	$I1 := \frac{E}{R_{\Sigma}}$	$I1 = 45 \text{ mA}$
	$U_{6a} := I1 \cdot R_{6a}$	$I2 := \frac{U_{6a}}{R2}$	$I2 = 27 \text{ mA}$
		$I3 := \frac{U_{6a}}{R3}$	$I3 = 18 \text{ mA}$

Рис. 2.30

На рис. 2.31 приведен пример моделирования электрической цепи по схеме рис. 2.11 в среде EWB. При моделировании амперметры должны быть включены в режиме измерения постоянного тока (DC). Результаты моделирования на цифровых индикаторах амперметров (см. рис. 2.31) совпадают с результатами расчета.

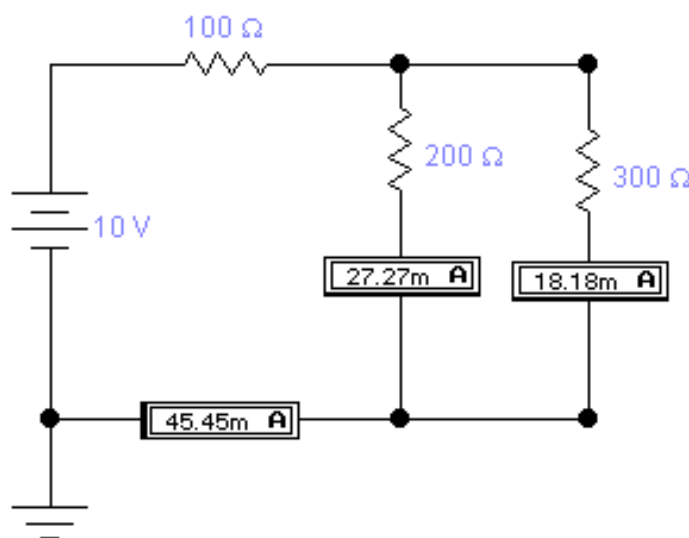


Рис. 2.31

На рис. 2.32 приведена программа, записанная в среде MathCad, с помощью которой проверен расчет электрической цепи по схеме (см. рис. 2.7) для следующих значений параметров схемы: $E = 10 \text{ В}$, $R_{\hat{a}i} = 100 \text{ Ом}$. Программа предназначена для построения графиков зависимости $U_i(I_i)$ и $U_{\hat{a}i}(I_i)$. Первые точки на графиках соответствуют режиму холостого хода (при $R_i = \infty$), вторые точки соответствуют значению $R_i = 10 R_{\hat{a}i}$, последние точки на графиках соответствуют режиму короткого замыкания (при $R_i = 0$).

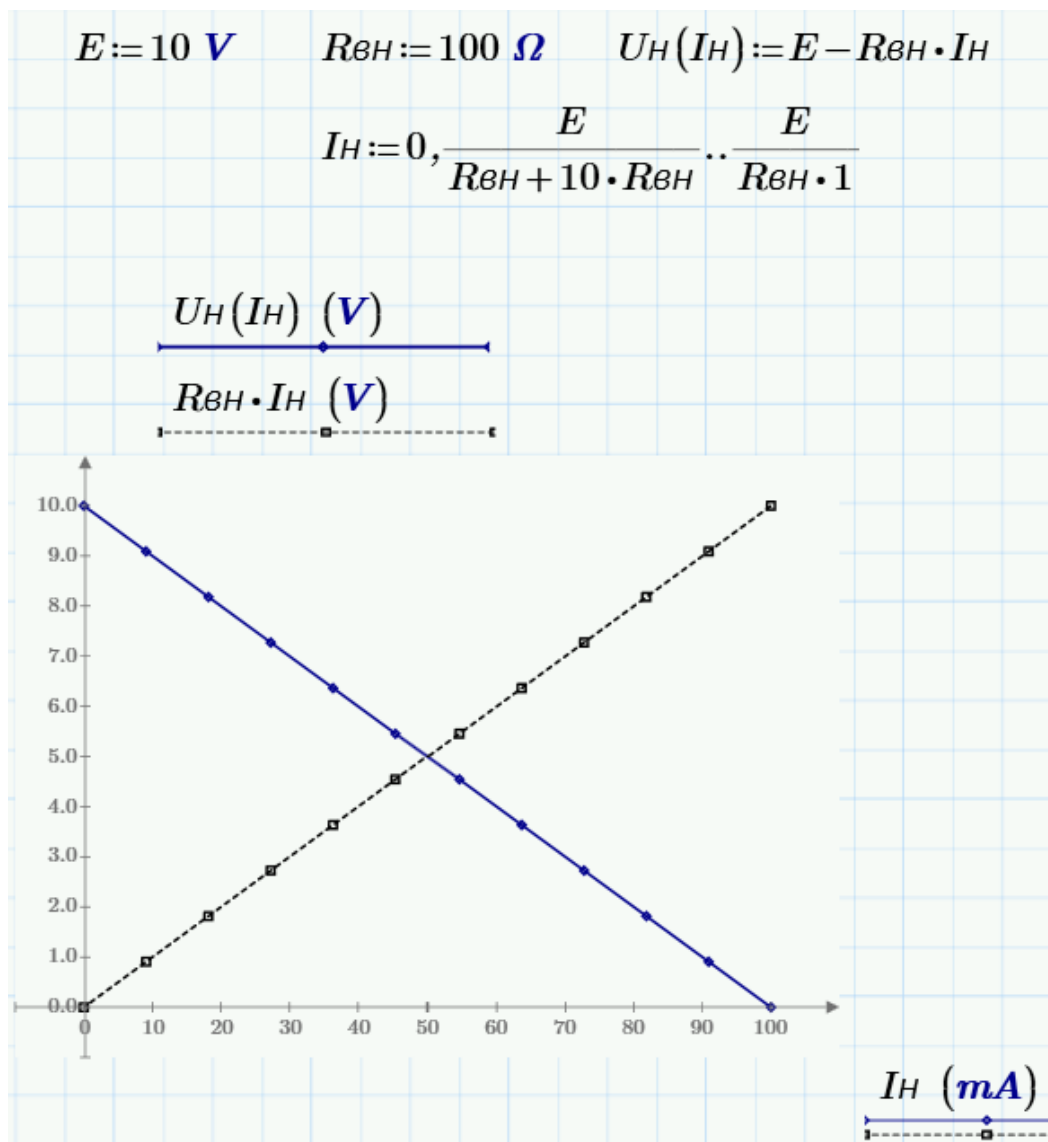


Рис. 2.32

Из анализа полученных графиков следует, что для каждой точки графиков суммарное напряжение в соответствии со вторым законом Кирхгофа равно ЭДС, действующей в контуре ($E = 10 \text{ В}$).

Глава 3. Линейные электрические цепи гармонического тока в установившихся режимах

Электромагнитный процесс в электрической цепи, при котором мгновенные значения напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$ повторяются через промежутки времени, равные периоду T , называются *периодическими*. Величина, обратная периоду, называется частотой и обозначается f :

$$f = 1/T.$$

В системе СИ единица измерения периода – секунда (с), а единица измерения частоты – герц (Гц).

Простейшей периодической функцией является синусоида. Все остальные периодические функции могут быть разложены в соответствии с разложением Фурье в бесконечный ряд синусоид, имеющих кратные частоты.

3.1. Основные параметры гармонического сигнала

На рис. 3.1 приведен график *гармонической* (синусоидальной) функции $i(t)$.

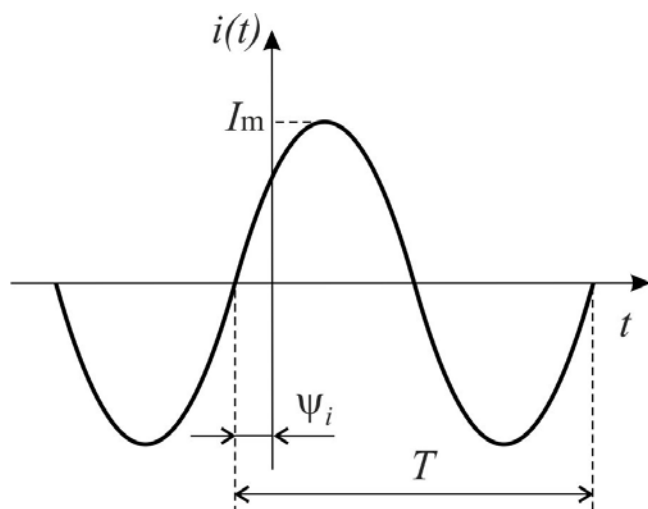


Рис. 3.1

Гармонические функции (*сигналы*), например, для мгновенных значений токов, описываются следующими выражениями:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i), \quad (3.1)$$

где I_m – *амплитуда* (максимальное по модулю значение функции за период); $\omega = 2\pi f$ – *угловая частота* или скорость изменения аргу-

мента функции, которая задается в радианах в секунду; ψ_i – начальная фаза функции (аргумент функции при $t = 0$).

Начальная фаза и период гармонической функции может задаваться либо в радианах, либо в градусах ($^\circ$). Период гармонической функции равен 2π радианам или 360° .

Аргумент гармонической функции ($\omega t + \psi$) называется *фазой* или *фазовым углом*. Он определяет значение функции $i(t)$ в любой момент времени.

Так как среднее значение гармонического сигнала за период равно нулю, то в качестве одного из его параметров принято использовать среднее значение за полпериода. Это значение называется *средневыпрямленным* и определяется как

$$I_{\text{ср}} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} i dt = \frac{2}{\pi} I_m \approx 0,637 I_m.$$

Если на участке цепи с сопротивлением R протекает ток $i(t)$, то за время T , равное периоду, на нем будет выделено количество тепла, равное

$$Q = \int_0^T i^2 R dt. \quad (3.2)$$

При протекании постоянного тока I по сопротивлению R за то же время, равное T , на нем выделится тепло, равное

$$Q = I^2 R T. \quad (3.3)$$

Найдем значение постоянного тока I , эквивалентного переменному току $i(t)$ по количеству выделяемого тепла на том же сопротивлении R за время, равное периоду, приравняв выражения (3.2) и (3.3):

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 I_m. \quad (3.4)$$

Эта величина называется *действующим* или *среднеквадратичным* значением переменного тока. Действующие значения обозначаются прописными буквами без индекса.

3.2. Метод комплексных амплитуд для расчета электрических цепей гармонического сигнала

С помощью гармонических функций времени удобно описывать электромагнитные процессы только в простейших цепях гармонического тока. При смешанном соединении элементов электрической цепи их расчет относительно мгновенных значений крайне затруднителен.

Применение комплексных чисел позволяет существенно упростить расчет гармонических цепей. Комплексная плоскость образована вещественной осью «+1» и мнимой осью «+j». При этом *мнимая единица j* определяется из следующего выражения:

$$j = \sqrt{-1}.$$

Гармонический сигнал (3.1) можно представить на комплексной плоскости в виде вектора $\underline{I}_m$, длина которого равна I_m и называется *модулем*, а угол, который он составляет с действительной осью, равен ψ_i и называется *аргументом* (рис. 3.2).

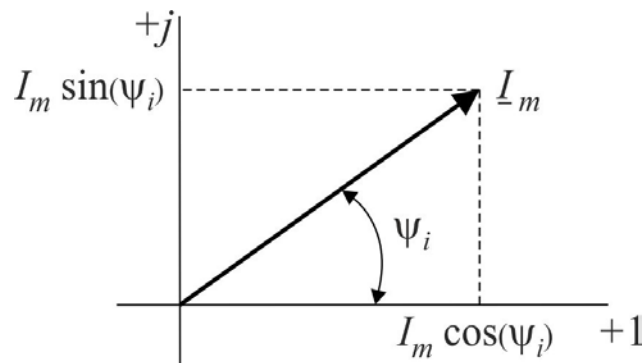


Рис. 3.2

Вектор $\underline{I}_m$ получил название *комплексная амплитуда*.

При расчете удобнее использовать не амплитудное значение тока в комплексной форме $\underline{I}_m$, а *комплекс действующего значения* тока $\underline{I}$, который определяется как

$$\underline{I} = \underline{I}_m / \sqrt{2}.$$

Существуют три формы записи комплексных чисел: алгебраическая, показательная и тригонометрическая. В табл. 3.1 приводятся различные формы записи комплексного числа $\underline{I}$, а также формулы перехода от одной формы записи к другой.

Таблица 3.1

Форма записи комплексного числа		
алгебраическая $\underline{I} = p + jq$	показательная $\underline{I} = Ie^{j\psi_i}$	тригонометрическая $\underline{I} = I \cos(\psi_i) + jI \sin(\psi_i)$
где $p = I \cos(\psi_i)$ $q = I \sin(\psi_i)$	где $I = \sqrt{p^2 + q^2}$ $\psi_i = \arctg\left(\frac{q}{p}\right)$	

Для операции *сложения* и *вычитания* комплексных чисел можно использовать только *алгебраическую* форму, отдельно складывая или вычитая действительную и мнимую части. На комплексной плоскости векторы складываются по правилу параллелограмма. При вычитании можно построить вектор разности между концами векторов.

Умножение и *деление* комплексных чисел удобнее производить в *показательной* форме. При этом модуль произведения равен произведению модулей сомножителей, аргумент произведения – сумме аргументов сомножителей с учетом знака, модуль частного равен отношению модулей делимого и делителя, а аргумент частного – разности аргументов делимого и делителя с учетом знака.

При умножении или делении комплексной функции на $j\omega$ выполняется соответственно операция ее *дифференцирования* или *интегрирования*. На комплексной плоскости эта операция соответствует изменению длины исходного вектора в ω раз и повороту его на 90° в положительную или отрицательную сторону.

Для гармонических сигналов законы Кирхгофа (2.1) и (2.2) можно записать как для мгновенных значений, а также в комплексной форме:

$$\sum_{k=1}^m i_k = \sum_{k=1}^{n-m} i_k; \quad \sum_{k=1}^p \pm u_k = \sum_{k=1}^q \pm e_k;$$

$$\sum_{k=1}^m \underline{I}_k = \sum_{k=1}^{n-m} \underline{I}_k; \quad \sum_{k=1}^p \pm \underline{U}_k = \sum_{k=1}^q \pm \underline{E}_k.$$

При этом следует иметь в виду, что для модулей комплексных действующих значений токов и напряжений законы Кирхгофа не выполняются!

Учитывая, что на реактивных элементах (C , L) взаимосвязь между мгновенными значениями напряжений и токов описывается либо через интеграл, либо через дифференциал, расчет гармонических цепей сводится к решению интегро-дифференциальных уравнений k -го порядке, где k – число реактивных элементов в цепи, способных накапливать энергию независимо друг от друга.

Замена гармонических функций $i(t)$ (*оригиналов*) комплексными числами и изображающими их векторами I_m (*символами*) позволяет перейти от интегро-дифференциальных уравнений относительно тригонометрических функций времени к алгебраическим уравнениям с комплексными величинами, что существенно упрощает расчет. При этом могут быть использованы все методы расчета, используемые для расчета цепей постоянного тока.

Поэтому метод расчета электрических цепей, использующий такое представление функций, называется *символическим методом* или *методом комплексных амплитуд*. При этом, так как в гармонической цепи устанавливаются колебания той же частоты, что и само гармоническое воздействие, то неизвестными параметрами их напряжений и токов будут лишь их амплитуды и фаза, которые однозначно определяются с помощью *комплексных амплитуд*.

Метод комплексных амплитуд предполагает три этапа:

1) прямое преобразование: переход из области текущего времени t в область комплексной частоты $j\omega$;

2) составление для электрической цепи алгебраических уравнений электрического равновесия (по законам Кирхгофа) и параметрических уравнений (по законам Ома) в комплексной форме и их решение;

3) обратный переход из области комплексной частоты $j\omega$ в область текущего времени t .

3.3. Гармонический ток при последовательном соединении сопротивления, индуктивности и емкости

Рассмотрим участок электрической цепи, содержащий последовательно соединенные R , L и C элементы (рис. 3.3), по которому протекает гармонический ток $i(t)$ (3.1).

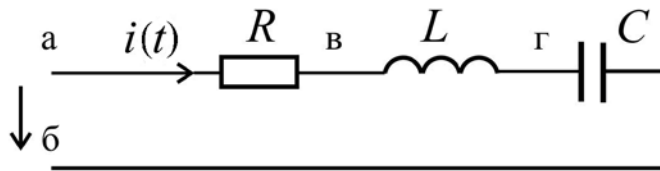


Рис. 3.3

Напряжение на концах этого участка будет складываться из суммы падений напряжения на каждом из трех участков:

$$\begin{aligned}
 u_{\text{аа}}(t) &= u_R + u_L + u_C = iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int i dt = RI_m \sin(\omega t + \psi_i) + \\
 &+ L\omega I_m \cos(\omega t + \psi_i) - \frac{1}{\omega C} I_m \cos(\omega t + \psi_i) = U_{Rm} \sin(\omega t + \psi_i) + \\
 &+ U_{Lm} \sin(\omega t + \psi_i + 90^\circ) + U_{Cm} \sin(\omega t + \psi_i - 90^\circ). \quad (3.5)
 \end{aligned}$$

Из выражения (3.5) следует, что напряжение на сопротивлении совпадает по фазе с током, напряжение на индуктивности опережает ток на 90° , а напряжение на емкости отстает от тока на 90° .

На рис. 3.4 приведены графики, на которых в общем виде показаны зависимости $i(t)$, $u_R(t)$, $u_L(t)$ и $u_C(t)$.

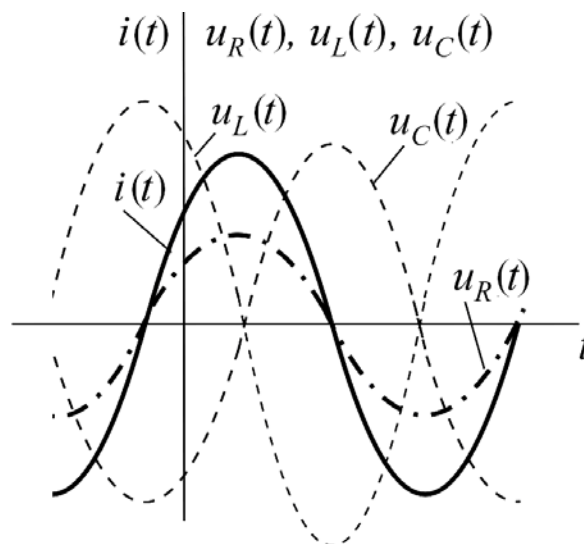


Рис. 3.4

Учитывая, что амплитудное значение гармонического сигнала в $\sqrt{2}$ раз больше его действующего значения, из (3.5) получим выражения для действующих значений напряжений на R , L и C элементах:

$$U_R = IR, \quad U_L = I\omega L = IX_L, \quad U_C = I \frac{1}{\omega C} = IX_C.$$

Величины $X_L = \omega L$ и $X_C = \frac{1}{\omega C}$, имеющие размерность сопротивления, называются *реактивным индуктивным* и *емкостным сопротивлением* соответственно и измеряются в омах.

Гармонические функции $u_{\text{аа}}(t)$, $u_L(t)$ и $u_C(t)$ можно представить в виде векторов и соответствующих им комплексных чисел:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{\text{аа}} = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C &= \underline{I}R + \underline{I}j\omega L - j \frac{\underline{I}}{\omega C} = \underline{I} \left(R + j\omega L - j \frac{1}{\omega C} \right) = \\ &= \underline{I}(R + j(X_L - X_C)) = \underline{I}(R + jX) = \underline{I}\underline{Z}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $\underline{Z} = R + jX$ – *комплексное полное сопротивление цепи*; R – вещественная часть комплексного сопротивления цепи; X – мнимая часть комплексного сопротивления цепи (*реактивное сопротивление*), которая может быть как положительной, так и отрицательной.

Комплекс полного сопротивления цепи может быть записан в показательной форме записи как

$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi},$$

где Z – модуль комплекса полного сопротивления цепи, равный *полному сопротивлению* цепи; φ – аргумент комплекса полного сопротивления цепи, равный сдвигу по фазе между напряжением и током на участке цепи

$$\varphi = \psi_u - \psi_i.$$

Сдвиг по фазе определяет характер сопротивления цепи: он может изменяться в пределах от -90° (характер сопротивления цепи *чисто емкостной*) до 90° (характер сопротивления цепи *чисто индуктивный*).

На эквивалентной схеме для электрической цепи рис. 3.3 один или оба реактивных элемента могут отсутствовать: если $X_L > X_C$, то будет отсутствовать емкость и схема будет иметь *резистивно-индуктивный характер сопротивления*; если $X_L < X_C$, то будет отсутствовать индуктивность и схема будет иметь *резистивно-емкостной характер сопротивления*; при $X_L = X_C$ в эквивалентной схеме вообще не будет реактивных элементов и схема будет иметь *чисто резистивный характер сопротивления (режим резонанса)*.

Эквивалентная индуктивность L_{Σ} или емкость C_{Σ} может быть найдена как

$$L_{\Sigma} = \frac{X}{\omega}, \text{ где } X > 0;$$

$$C_{\Sigma} = \frac{1}{|X|\omega}, \text{ где } X < 0.$$

Комплекс полного сопротивления цепи и его проекции на вещественную и мнимую оси могут быть представлены на комплексной плоскости в виде *треугольника сопротивлений* (рис. 3.5). Для перехода от показательной формы записи комплекса полного сопротивления к алгебраической форме записи и обратно можно воспользоваться соотношениями, аналогичными соотношениям из табл. 3.1:

$$R = Z \cos \varphi; \quad X = Z \sin \varphi; \quad Z = \sqrt{R^2 + X^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{X}{R}.$$

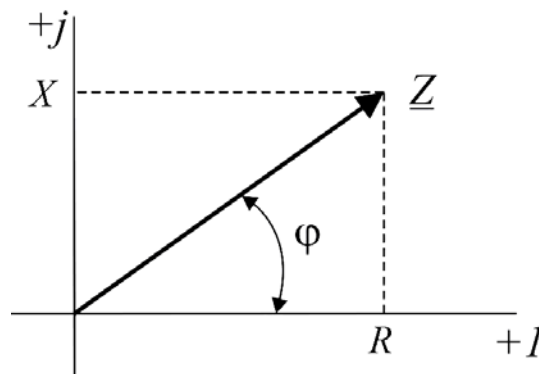


Рис. 3.5

На рис. 3.6 показана качественная векторная диаграмма для тока и напряжений на отдельных элементах в схеме рис. 3.3. Векторной диаграммой называется совокупность векторов на комплексной плоскости, соответствующая комплексным величинам и/или параметрам электрической цепи и их связям.

Построение качественной диаграммы лучше начать с вектора тока $\underline{I}$, выбрав его длину и направление произвольно (см. рис. 3.6). Далее строим вектор $\underline{U}_R$ произвольной длины, но совпадающий по направлению с вектором тока. Затем строим вектор $\underline{U}_L$ произвольной

длины, но опережающий вектор тока на 90° . И, наконец, строим вектор $\underline{U}_C$ произвольной длины, но отстающий от вектора тока на 90° .

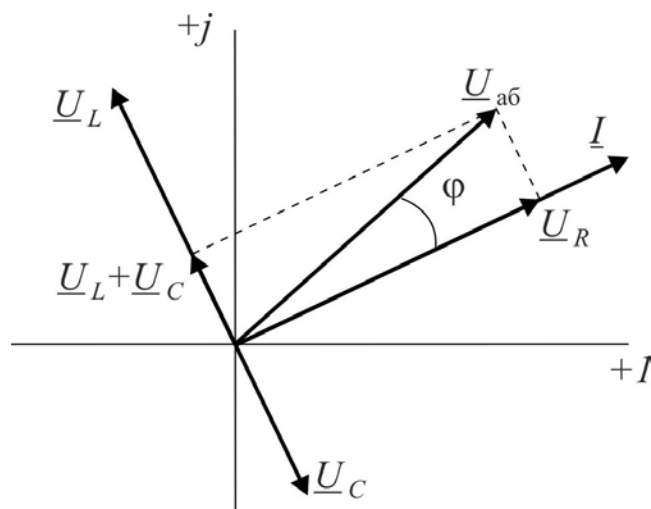


Рис. 3.6

Векторная сумма $\underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C$ на рис. 3.6, равная входному напряжению $\underline{U}_{\text{аб}}$, в данном случае опережает вектор тока на угол φ . Следовательно, характер сопротивления цепи резистивно-индуктивный.

Точные векторные диаграммы строятся по результатам численного анализа электрической цепи с соблюдением масштабов всех величин. Они позволяют проверить правильность расчетов.

Для цепи гармонического тока можно *построить топографическую диаграмму*, на которой в отличие от векторной диаграммы векторы падений напряжения строятся строго по порядку расположения соответствующих элементов на схеме.

Построение топографической диаграммы начинается с точки, потенциал которой принят за нуль. Конец вектора напряжения на каждом последующем элементе примыкает к началу вектора напряжения предыдущего элемента. При этом каждой точке электрической цепи будет соответствовать определенная точка на топографической диаграмме.

На рис. 3.7 приводится топографическая диаграмма напряжений, соответствующая построенной ранее векторной диаграмме рис. 3.6.

Построение диаграммы начинается с вектора $\underline{U}_C$ (сплошная линия на рис. 3.7). Затем из конца вектора $\underline{U}_C$ строится вектор $\underline{U}_L$ (пунктирная линия на рис. 3.7), а из конца последнего вектора строится вектор $\underline{U}_R$ (сплошная линия на рис. 3.7).

Соединив начало первого вектора (точка б) и конец последнего (точка а), получим вектор, соответствующий входному напряжению $\underline{U}_{\text{аа}}$.

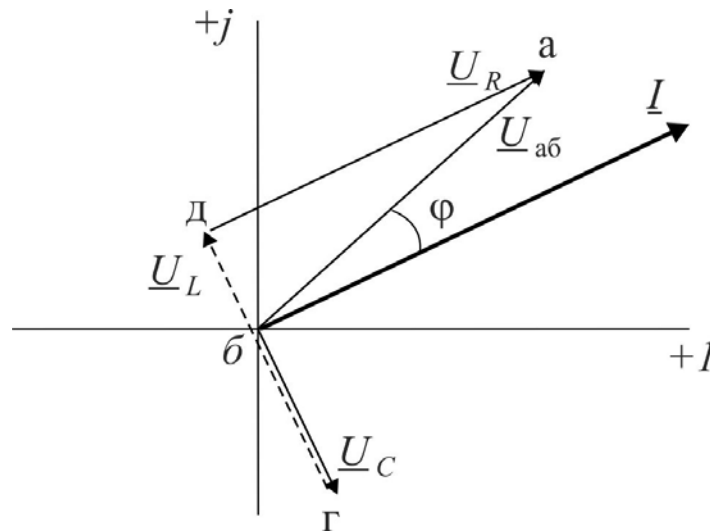


Рис. 3.7

3.4. Гармонический ток при параллельном соединении сопротивления, индуктивности и емкости

Подключим на вход электрической цепи, содержащей параллельно соединенные R , L и C элементы (рис. 3.8), гармоническое напряжение, комплекс действующего значения которого равен

$$\underline{U} = Ue^{j\psi_u}.$$

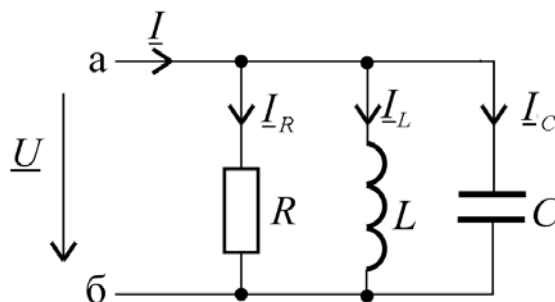


Рис. 3.8

Для рассматриваемой цепи можно записать первый закон Кирхгофа в комплексной форме:

$$\begin{aligned}\underline{I} &= \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C = \frac{\underline{U}}{R} - j \frac{\underline{U}}{\omega L} + \underline{U} j \omega C = \underline{U} (G - jB_L + jB_C) = \\ &= \underline{U} (G - j(B_L - B_C)) = \underline{U} (G - jB) = \underline{U} \underline{Y},\end{aligned}\quad (3.7)$$

где $\underline{Y}$ – комплекс полной проводимости цепи; G – вещественная часть комплексной проводимости цепи; B – мнимая часть комплексной проводимости цепи (*реактивная проводимость*).

Величины $B_L = \frac{1}{X_L} = \frac{1}{\omega L}$ и $B_C = \frac{1}{X_C} = \omega C$ называются *реактивной индуктивной* и *емкостной проводимостью* цепи, соответственно, и измеряются в сименсах.

Комплекс полной проводимости цепи может быть записан в показательной форме записи как

$$\underline{Y} = Y e^{-j\varphi},$$

где Y – модуль комплекса полной проводимости цепи, равный *полной проводимости цепи*.

Мнимая часть комплексной проводимости может быть как положительной, так и отрицательной, в зависимости от того, какая реактивная проводимость больше, емкостная B_C или индуктивная B_L .

Для $\underline{Y}$ так же, как и для $\underline{Z}$, может быть построен треугольник проводимостей на комплексной плоскости, у которого угол φ будет иметь другой знак по сравнению с треугольником сопротивлений.

На рис. 3.9 показана качественная векторная диаграмма для напряжения и токов на отдельных элементах в схеме рис. 3.8.

Векторная сумма $\underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C$ на рис. 3.9, равная входному току $\underline{I}$, в данном случае опережает вектор входного напряжения $\underline{U}$ на угол φ . Следовательно, характер сопротивления цепи резистивно-емкостной.

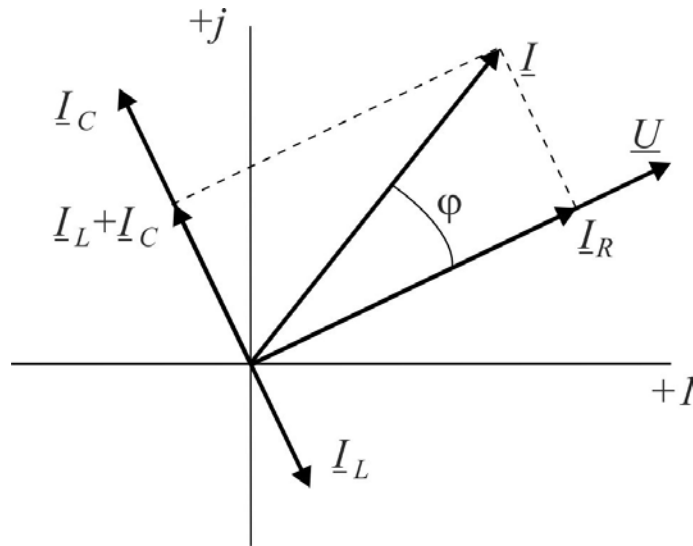


Рис. 3.9

3.5. Мощность в цепи гармонического тока

Рассмотрим в общем случае участок цепи с активным сопротивлением R и реактивным сопротивлением X (рис. 3.10), напряжение на котором равно $u(t) = U_m \sin \omega t$, а ток $i(t) = I_m \sin(\omega t - \varphi)$.

Мгновенная мощность, поступающая в цепь, будет равна

$$p = ui = U_m I_m \sin \omega t \sin(\omega t - \varphi) = UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]. \quad (3.8)$$

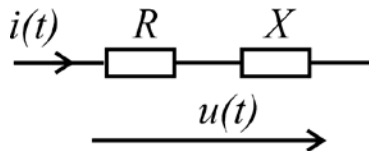


Рис. 3.10

Средняя мощность за период (называется также активной мощностью), измеряемая в ваттах, может быть найдена как

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = \frac{UI}{T} \int_0^T [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)] dt = UI \cos \varphi. \quad (3.9)$$

Так как активная мощность выделяется на сопротивлении, то так же, как и для постоянного тока, ее можно найти как

$$P = I^2 R = \frac{U_R^2}{R}, \quad (3.10)$$

где U_R – напряжение, падающее на сопротивлении.

Из анализа выражения (3.9) следует, что максимальная мощность соответствует нулевому сдвигу фаз и равна произведению UI . При $\varphi = \pm 90^\circ$ средняя мощность будет равна нулю.

Величина $\cos \varphi$ называется *коэффициентом мощности*. На практике для обеспечения рациональной работы электрической цепи на полную мощность стремятся обеспечить значение коэффициента мощности как можно ближе к единице.

На рис. 3.11 приведены графики зависимости $i(t)$, $u(t)$ и соответствующей им мгновенной мощности $p(t)$.

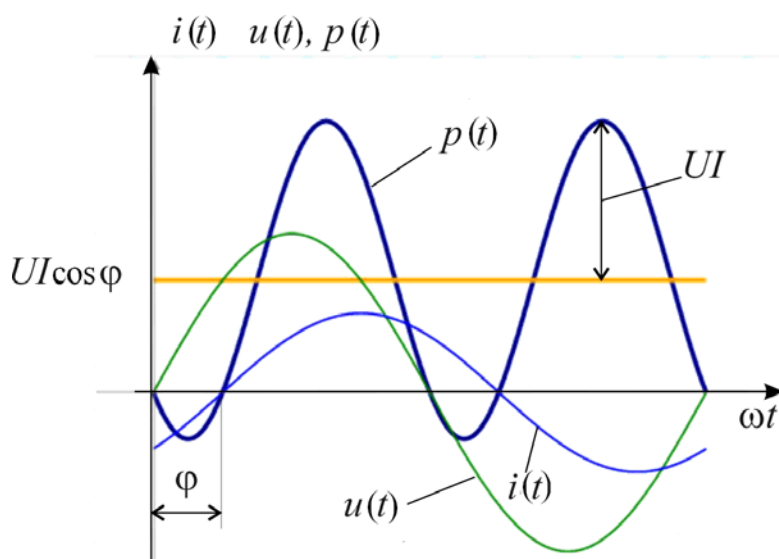


Рис. 3.11

Из выражения (3.8) следует, что мгновенная мощность изменяется с двойной частотой сети относительно постоянной составляющей $UI \cos \varphi$, равной средней мощности. Амплитуда этих колебаний называется полной мощностью, измеряется в вольт-амперах (ВА) и равна

$$S = UI. \quad (3.11)$$

Хотя понятие полной мощности не имеет физического смысла, но численно она равна максимально возможной активной мощности в чисто резистивной цепи при данном напряжении и токе (при $\cos \varphi = 1$).

Полная мощность в электрической цепи (см. рис. 3.10) с полным сопротивлением $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$ может быть также найдена как

$$S = I^2 Z = \frac{U^2}{Z}. \quad (3.12)$$

Для чисто реактивной цепи энергия поступает в нее от источника энергии в течение четверти периода и запасается в магнитном поле (для индуктивности) или электрическом поле (для емкости). В течение следующей четверти она полностью возвращается из электрической цепи в источник энергии. При этом средняя мощность, отдаваемая источником нагрузке, равна нулю.

В общем случае для произвольной нагрузки преобладает процесс преобразования электрической энергии в тепло или механическую работу ($P > 0$) (см. рис. 3.11).

Для оценки энергии, не преобразуемой в электрической цепи, пользуются понятием *реактивной мощности*, которая измеряется в реактивных вольт-амперах (ВАр) и вычисляется по формуле

$$Q = UI \sin \varphi.$$

Реактивная мощность может быть также найдена как

$$Q = I^2 X = \frac{U_X^2}{X}. \quad (3.13)$$

В электротехнике используется также понятие *комплексной полной мощности* $\underline{S}$, которая определяется как

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*, \quad (3.14)$$

где $\underline{U}$ – комплексное напряжение на данном участке цепи; $\underline{I}^*$ – комплексно-сопряженный ток, у которого аргумент имеет противоположный знак по сравнению с комплексным током, протекающим на данном участке цепи.

Для схемы (см. рис. 3.10) комплексная полная мощность равна

$$\underline{S} = U e^{j\psi_u} I e^{-j\psi_i} = UI e^{j(\psi_u - \psi_i)} = UI e^{j\varphi} = S e^{j\varphi}.$$

Комплексная полная мощность и ее проекции на вещественную ось (P) и мнимую ось (Q) могут быть представлены на комплексной плоскости в виде треугольника мощностей (рис. 3.12).

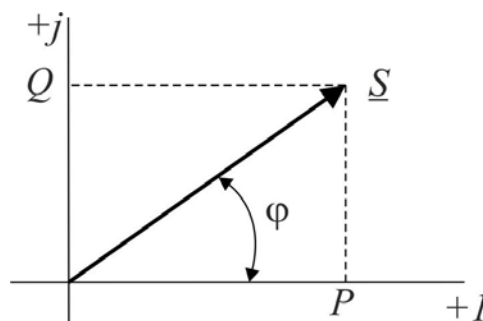


Рис. 3.12

Проекции полной мощности на вещественную и мнимую ось равны соответственно активной P и реактивной мощности Q .

Для перехода от показательной формы записи комплекса полной мощности к алгебраической форме записи можно воспользоваться соотношениями из табл. 3.1:

$$\underline{S} = P + jQ; \quad P = S \cos \varphi; \quad Q = S \sin \varphi. \quad (3.15)$$

3.6. Пример расчета разветвленной гармонической цепи методом преобразования

Рассчитаем разветвленную электрическую цепь рис. 3.13 для следующих значений параметров:

$$R = 100 \text{ Ом}, L = 10 \text{ мГн}, C = 0,5 \text{ мкФ}, E = 8 \text{ В}, f = 5000 \text{ Гц}.$$

Рассчитаем комплексные сопротивления всех ветвей

$$\underline{Z}_C = -jX_C = \frac{-j}{2\pi f \tilde{C}} = \frac{-j}{6,28 \cdot 5000 \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}} = -j63,66 = 63,66 e^{-j90^\circ} \hat{\text{ì}} ;$$

$$\underline{Z}_R = R = 100 \hat{\text{ì}} ;$$

$$\underline{Z}_L = jX_L = j2\pi f L = j6,28 \cdot 5000 \cdot 0,01 = j314,16 = 314,16 e^{j90^\circ} \hat{\text{ì}} .$$

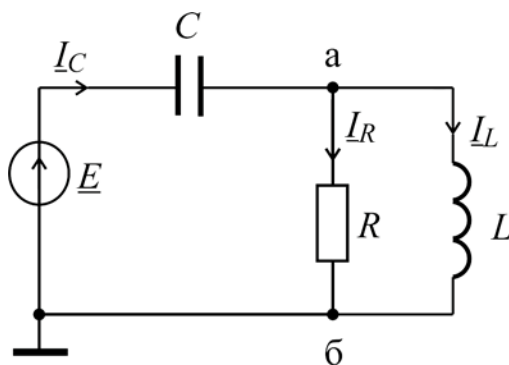


Рис. 3.13

Тогда комплекс полного сопротивления цепи относительно входных зажимов источника ЭДС равен

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{\dot{y}} &= \underline{Z}_C + \underline{Z}_{a\dot{a}} = \underline{Z}_C + \frac{\underline{Z}_R \underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = -j63,66 + \frac{100 \cdot 314,16 e^{j90^\circ}}{100 + j314,16} = \\ &= -j63,66 + \frac{31416 e^{j90^\circ}}{\sqrt{100^2 + 314,16^2} e^{j \arctg\left(\frac{314,16}{100}\right)}} = -j63,66 + \frac{31416 e^{j90^\circ}}{329,69 \cdot e^{j72^\circ}} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -j63,66 + 95,29e^{j(90-72)^\circ} = -j63,66 + 90,80 + j28,90 = \\
&= 90,80 - j34,76 = 97,23e^{j\arctg\left(\frac{-34,76}{90,80}\right)} = 97,23e^{-j21^\circ} \hat{I} \hat{I}.
\end{aligned}$$

Так как реактивная составляющая $\underline{Z}_{\dot{Y}}$ отрицательная, то характер сопротивления цепи резистивно-емкостной, а эквивалентная емкость равна

$$\tilde{N}_{\dot{Y}} = \frac{1}{2\pi f X_{C_{\dot{Y}}}} \approx 0,92 \text{ мкФ}.$$

Так как начальная фаза входного напряжения по условию задачи не задана, то примем ее равной нулю. Найдем по закону Ома входной ток цепи:

$$\underline{I}_C = \frac{\underline{E}}{\underline{Z}_{\dot{Y}}} = \frac{8}{97,2e^{-j21^\circ}} = 0,0823e^{j21^\circ} = 0,0768 + j0,0294 \text{ А}.$$

Найдем напряжение $\underline{U}_{\dot{a}\dot{a}}$:

$$\underline{U}_{\dot{a}\dot{a}} = \underline{I}_C \underline{Z}_{\dot{a}\dot{a}} = 0,0823e^{j21^\circ} 95,29e^{j18^\circ} = 7,84e^{j39^\circ} = 6,13 + j4,89 \text{ В}.$$

Определим другие токи:

$$\underline{I}_R = \frac{\underline{U}_{\dot{a}\dot{a}}}{R} = \frac{7,84e^{j39^\circ}}{100} = 0,0784e^{j39^\circ} \text{ А};$$

$$\underline{I}_L = \frac{\underline{U}_{\dot{a}\dot{a}}}{jX_L} = \frac{7,84e^{j39^\circ}}{j314,16} = 0,0250e^{-j51^\circ} \text{ А}.$$

Напряжение, падающее на емкости, равно

$$\underline{U}_C = \underline{I}_C \underline{Z}_C = 0,0823e^{j21^\circ} 63,66e^{-j90^\circ} = 5,24e^{-j69^\circ} \text{ В}.$$

Рассчитаем комплексную полную мощность по формуле (3.14):

$$\underline{S} = \underline{E} \underline{I}_C^* = 8 \cdot 0,0823e^{-j21^\circ} = 0,658e^{-j21^\circ} = (0,615 - j0,235) \text{ ВА}.$$

Найдем активную и реактивную мощности, как вещественную и мнимую части комплексной полной мощности соответственно $P = 0,615 \text{ Вт}$ и $Q = -0,235 \text{ ВАр}$.

По результатам расчета построим векторную диаграмму токов (рис. 3.14) и топографическую диаграмму напряжений (рис. 3.15).

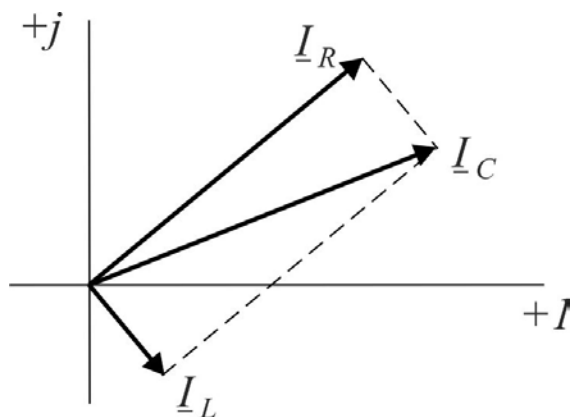


Рис. 3.14

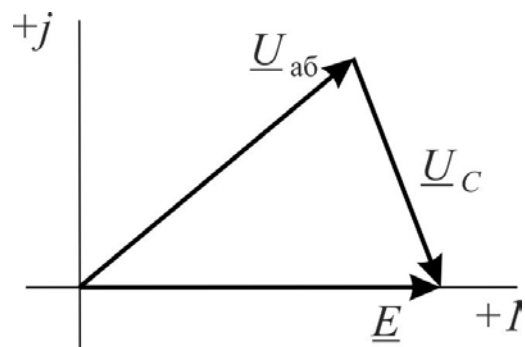


Рис. 3.15

Сравнивая две диаграммы, можно сделать вывод: так как вектор входного тока цепи $\underline{I}_C$ опережает вектор входного напряжения цепи $\underline{E}$ на угол, равный 21° , то характер сопротивления цепи резистивно-емкостной. Тот же самый вывод следует из полученного расчетного значения сдвига по фазе между напряжением и током $\varphi \approx -21^\circ$.

3.6.1. Задачи для самостоятельного выполнения

1) Чему равно мгновенное значение гармонического напряжения, если его комплексная амплитуда равна $\underline{U}_m = (5 + j5)$ В?

2) В схеме (рис. 3.16, а, б) заданы следующие значения параметров: $R = 6$ Ом, $X_L = 4 \hat{\Gamma} \hat{\imath}$, $X_C = 10 \hat{\Gamma} \hat{\imath}$. Выполнить для заданной схемы следующие задания:

- найти модуль комплексного полного сопротивления цепи;
- найти активную, реактивную и полную мощность при протекании в цепи тока, равного $i(t) = 14\sin(\omega t + 15^\circ)$ А;
- нарисовать векторную диаграмму напряжений и тока для каждой цепи.

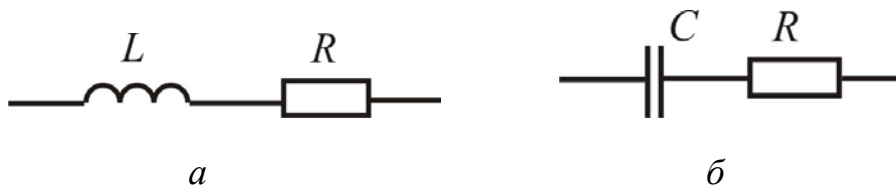


Рис. 3.16

1) Записать выражение для мгновенного значения гармонического тока $i(t)$, протекающего в цепи (см. рис. 3.16, а, б), если к ней приложено напряжение, равное

$$u = U_m \sin(\omega_1 t - 60^\circ) \text{ В.}$$

2) Для схемы (рис. 3.17, а, б, в) найти показание одного из амперметров по известным показаниям двух других.

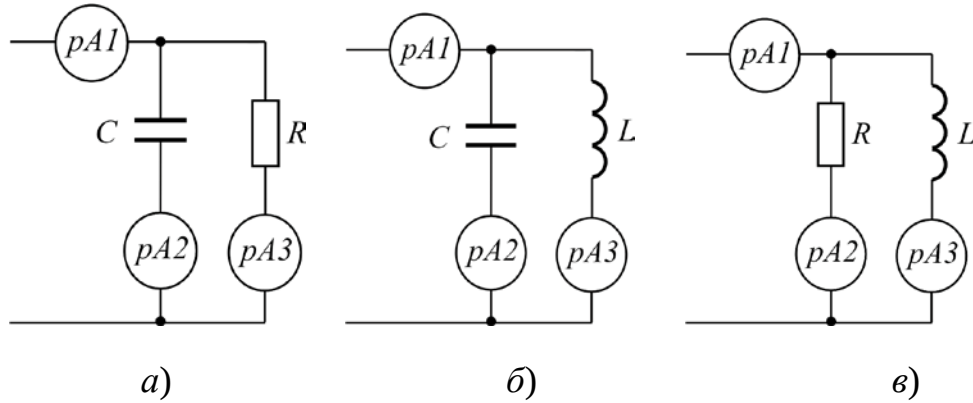


Рис. 3.17

3) Как изменится показание заданного амперметра при возрастании (уменьшении) частоты напряжения на входе схемы (см. рис. 3.17, а, б, в)?

3.7. Расчет сложных электрических цепей гармонического тока

При расчете сложных электрических цепей гармонического тока можно использовать уже рассмотренные ранее методы, только уравнения равновесия должны быть записаны в комплексной форме.

Рассчитаем электрическую цепь (рис. 3.18) разными методами.

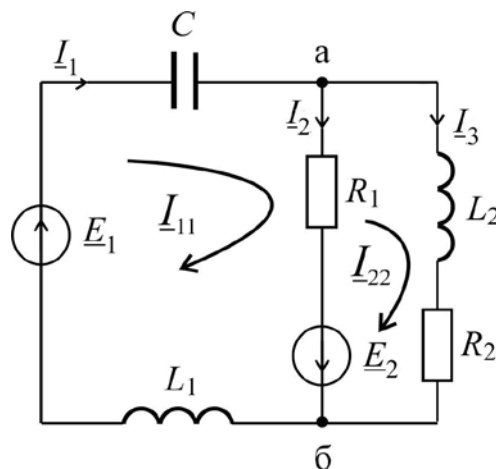


Рис. 3.18

По методу законов Кирхгофа запишем уравнения для расчета электрической цепи (см. рис. 3.18):

$$\begin{cases} \underline{I}_1 = \underline{I}_2 + \underline{I}_3; \\ j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C}\right)\underline{I}_1 + R_1\underline{I}_2 = \underline{E}_1 + \underline{E}_2; \\ (j\omega L_2 + R_2)\underline{I}_3 - R_1\underline{I}_2 = -\underline{E}_2. \end{cases}$$

По методу контурных токов запишем уравнения для расчета той же электрической цепи по схеме рис. 3.18:

$$\begin{cases} \underline{I}_{11}\left(R_1 + j\omega L_1 - \frac{j}{\omega C}\right) - \underline{I}_{22}R_1 = \underline{E}_1 + \underline{E}_2; \\ \underline{I}_{22}(R_1 + R_2 + j\omega L_2) - \underline{I}_{11}R_1 = -\underline{E}_2. \end{cases}$$

Выразим токи в ветвях через найденные контурные токи:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{11}; \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{11} - \underline{I}_{22}; \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{22}.$$

3.8. Моделирование сложных электрических цепей гармонического тока

На рис. 3.19 приведена программа, записанная в среде MathCad, с помощью которой проверен расчет электрической цепи по схеме рис. 3.13. При расчете использовались следующие значения параметров схемы: $R = 100 \text{ Ом}$, $L = 10 \text{ мГн}$, $C = 0,5 \text{ мкФ}$, $E = 8 \text{ В}$, $f = 5000 \text{ Гц}$.

На рис. 3.20 приведен пример моделирования электрической цепи по схеме рис. 3.13 в среде EWB. При моделировании амперметры и вольтметры должны быть включены в режиме измерения переменного тока (AC). Результаты моделирования на цифровых индикаторах амперметров и вольтметров (рис. 3.20) совпадают с результатами расчета (рис. 3.19) с погрешностью не более 2 %.

Сдвиг по фазе φ измерим с помощью осциллографа. На рис. 3.21 красный курсор (1) виртуального осциллографа установлен в точку перехода через ноль осциллограммы сигнала, совпадающего по фазе с входным током моделируемой цепи, а синий курсор (2) виртуального осциллографа – в точку перехода через ноль осциллограммы входного напряжения моделируемой цепи. На рис. 3.21 показание « $T2 - T1 = 11.5000 \text{ }\mu\text{s}$ » в верхней строке правого цифрового индикатора соответствует сдвигу по фазе между напряжением и током в моделируемой цепи φ_C в секундах.

$$\begin{aligned}
E &:= 5 \text{ V} \quad R := 100 \text{ } \Omega \quad C := 0.24 \text{ } \mu\text{F} \quad L := 8.2 \text{ mH} \quad f := 5000 \text{ Hz} \\
XL &:= 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L = 258 \text{ } \Omega \quad XC := \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C} = 133 \text{ } \Omega \quad i := \sqrt{-1} \\
Z_{a6} &:= \frac{R \cdot i \cdot XL}{R + i \cdot XL} = (87 + 34i) \text{ } \Omega \quad Z_{\Sigma} := -i \cdot XC + Z_{a6} = (87 - 99i) \text{ } \Omega \\
|Z_{\Sigma}| &= 132 \text{ } \Omega \quad \varphi := \arg(Z_{\Sigma}) \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -48.69^\circ \\
C_{\Sigma} &:= \frac{1}{-\operatorname{Im}(|Z_{\Sigma}|) \cdot 2 \cdot \pi \cdot f} = 0.32 \text{ } \mu\text{F} \\
IC &:= \frac{E}{Z_{\Sigma}} = (25 + 29i) \text{ mA} \quad |IC| = 38 \text{ mA} \quad \varphi := \arg(IC) = 49^\circ \\
U_{a6} &:= IC \cdot Z_{a6} = (1.22 + 3.32i) \text{ V} \quad |U_{a6}| = 3.54 \text{ V} \quad \varphi := \arg(U_{a6}) = 70^\circ \\
IR &:= \frac{U_{a6}}{R} = (12 + 33i) \text{ mA} \quad |IR| = 35 \text{ mA} \quad \varphi := \arg(IR) = 70^\circ \\
IL &:= \frac{U_{a6}}{i \cdot XL} = (13 - 5i) \text{ mA} \quad |IL| = 14 \text{ mA} \quad \varphi := \arg(IL) = -20^\circ \\
UC &:= IC \cdot (-i) \cdot XC = (3.78 - 3.32i) \text{ V} \quad \varphi := \arg(UC) = -41^\circ \\
|UC| &= 5.04 \text{ V} \quad S := |E \cdot IC| = 0.190 \text{ W} \\
P &:= S \cdot \cos(\arg(Z_{\Sigma})) = 0.125 \text{ W} \quad Q := S \cdot \sin(\arg(Z_{\Sigma})) = -0.143 \text{ W}
\end{aligned}$$

Рис. 3.19

Из осциллограммы следует, что входное напряжение моделируемой цепи отстает по фазе от входного тока. Учитывая, что периоду соответствует изменение фазы на 360° , рассчитаем соответствующий фазовый сдвиг в градусах по формуле

$$\varphi = \frac{-\varphi_{\check{N}} \cdot 360^\circ}{T} = -11,5 \cdot 10^{-6} 360^\circ 5000 \approx -20,7^\circ.$$

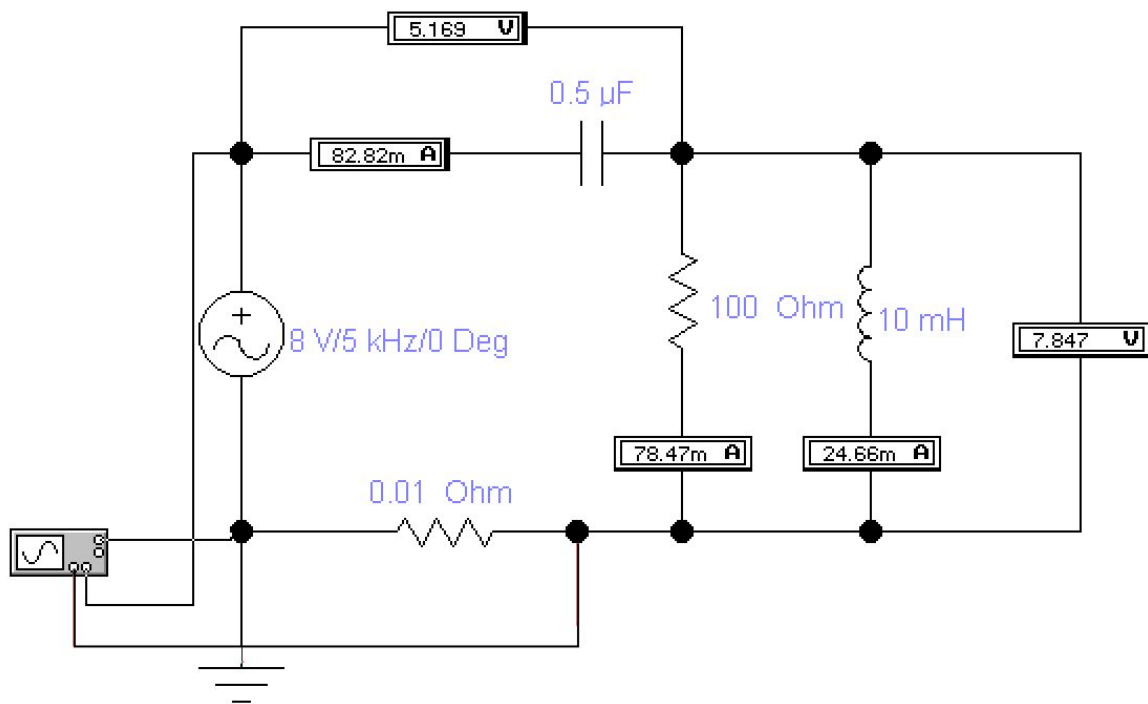


Рис. 3.20

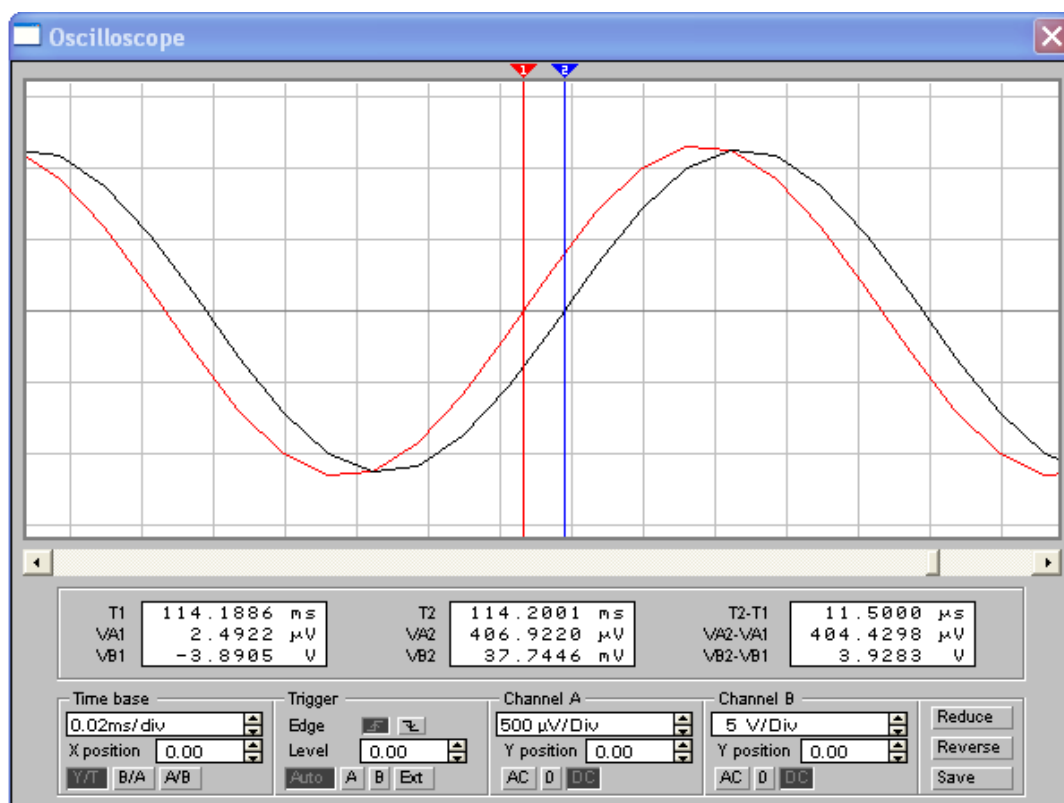


Рис. 3.21

Полученное значение фазового сдвига совпадает с погрешностью не более 2 % с расчетным значением, равным -21° .

Глава 4. Переходные процессы в линейных электрических цепях

4.1. Причины возникновения переходных процессов.

Законы коммутации

Процессы, возникающие в электрической цепи при переходе от одного установившегося энергетического режима к другому установившемуся энергетическому режиму, называются *переходными процессами (режимами)*.

В установившихся режимах токи и напряжения в электрической цепи определяются только видом действующих в цепи источников энергии. Источники энергии могут быть либо постоянными, либо гармоническими, либо несинусоидальными, но периодически. В отличие от установившихся режимов изменение токов и напряжений в электрической цепи во время переходного процесса происходит не периодически. Мгновенные значения токов и напряжений, возникающих в переходных режимах, могут во много раз превысить их установившиеся значения. Это обуславливает важность задачи анализа переходных процессов.

Возникновение переходных процессов в электрической цепи связано с *коммутациями*, т.е. скачкообразным изменением структуры цепи, параметров ее элементов, а также подключением или отключением источников энергии. Хотя изменения не могут происходить мгновенно, что связано с изменением количества энергии, запасенной в электрических и магнитных полях, для упрощения расчетов обычно пренебрегают временем коммутации.

На схеме электрической цепи процесс коммутации можно изобразить с помощью идеального *ключа* S : замыкающего, размыкающего и переключающего, показанных соответственно на рис. 4.1, *а–в*.

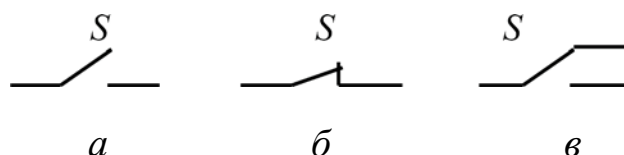


Рис. 4.1

Идеальный ключ S в замкнутом состоянии обладает нулевым сопротивлением, в разомкнутом состоянии – бесконечно большим

сопротивлением и переходит из одного состояния в другое за бесконечно малый промежуток времени.

В теории переходных процессов момент времени непосредственно до коммутации принято обозначать $t = 0_-$, а момент времени сразу же после коммутации $-t = 0_+$.

Переход от одного установившегося режима к другому происходит мгновенно лишь в цепях, не содержащих накопителей энергии. Если электрическая цепь содержит индуктивные и емкостные элементы, то энергия электрического или магнитного поля, запасенная в соответствующем элементе, не может измениться скачком при коммутации. Данное положение формулируется в виде законов коммутации.

1-й закон коммутации. Если в процессе коммутации индуктивность элемента не изменяется, то значение тока в ней сразу же после коммутации $i_L(0_+)$ равно значению тока до коммутации $i_L(0_-)$, а затем плавно изменяется от этого значения:

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \text{ при } L = \text{const.}$$

2-й закон коммутации. Если в процессе коммутации емкость элемента не изменяется, то значение напряжения в ней сразу же после коммутации $u_C(0_+)$ равно значению напряжения до коммутации $u_C(0_-)$, а затем плавно изменяется от этого значения:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \text{ при } C = \text{const.}$$

Значения токов и напряжений в электрической цепи в момент времени до коммутации называются *начальными условиями*. Сразу же после коммутации эти значения могут изменяться или оставаться постоянными. Начальные условия, не изменяющиеся при коммутации и определяемые по состоянию цепи до нее, называются *независимыми начальными условиями*. В соответствии с законами коммутации к ним при определенных условиях относятся токи в индуктивностях и напряжения на емкостях.

Ток и напряжение на сопротивлении, напряжение на индуктивности и ток через емкость могут меняться скачком при коммутации. Эти величины определяются по состоянию цепи после коммутации с учетом независимых начальных условий и называются *зависимыми начальными условиями*.

Постоянство тока в индуктивности при коммутации позволяет при расчете начальных условий заменить индуктивность источником тока, а емкость – источником ЭДС. В частности, при нулевых начальных условиях ветвь с индуктивностью можно считать разомкнутой, а участок цепи с емкостью – накоротко замкнутым.

Значения токов и напряжений в цепи после переходного процесса, т.е. при $t \rightarrow \infty$, называются установившимися значениями.

Начальные и установившиеся значения величин можно определить с помощью любых методов расчета электрических цепей в установившемся режиме.

4.2. Классический метод расчета переходных процессов

Расчет переходных процессов в электрической цепи классическим методом [5] сводится к составлению и решению дифференциального уравнения или системы дифференциальных уравнений электрической цепи, составленных по законам Кирхгофа для электрической цепи после коммутации, с использованием закона Ома относительно мгновенных значений токов и напряжений. Из полученной системы для каждого неизвестного может быть выделено одно дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами, порядок которого n будет определяться конфигурацией цепи и характером ее элементов:

$$a_n \frac{d^n i}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 i = f(t). \quad (4.1)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения позволяет найти полный ток в цепи (i), который складывается из суммы принужденной ($i_{пр}$) и свободной ($i_{св}$) составляющих:

$$i = i_{пр} + i_{св}.$$

Принужденная составляющая представляет собой частное решение уравнения (4.1) и определяет значение интересующей нас переменной в новом установившемся режиме. Этот режим называют принужденным, поскольку установившиеся токи и напряжения в этом режиме изменяются с той же частотой, что и действующие в электрической цепи принуждающие ЭДС или токи. Так, если в электрической цепи имеются только источники постоянного напряжения или тока, то принужденный ток будет также постоянным, а если напряжения или токи источников меняются по гармоническому за-

кону, то принужденная составляющая представляет собой гармоническую функцию времени той же частоты.

Свободная составляющая соответствует процессам в электрической цепи при отсутствии внешних источников энергии, т.е. режиму, при котором энергия электрических и магнитных полей, запасенная в реактивных элементах, преобразуется без внешнего воздействия. Она определяется как решение однородного дифференциального уравнения:

$$a_n \frac{d^n i_{c\hat{a}}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} i_{c\hat{a}}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 i_{c\hat{a}} = 0. \quad (4.2)$$

Этому дифференциальному уравнению соответствует следующее *характеристическое* уравнение:

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = 0.$$

Известно, что решение уравнения (4.2), когда все корни характеристического уравнения простые (различные), имеет вид

$$i_{c\hat{a}} = A_n e^{p_n t} + A_{n-1} e^{p_{n-1} t} + \dots + A_1 e^{p_1 t}, \quad (4.3)$$

где $p_n, p_{n-1}, \dots, p_1$ – корни характеристического уравнения; $A_n, A_{n-1}, \dots, A_1$ – постоянные интегрирования, которые имеют размерность искомой величины.

Когда характеристическое уравнение имеет n одинаковых (кратных) действительных корней p , то решение уравнения (4.2) можно записать как

$$i_{c\hat{a}} = \left(A_n t^{n-1} + A_{n-1} t^{n-2} + \dots + A_1 \right) e^{pt}. \quad (4.4)$$

С учетом (4.3) и (4.4) общее решение уравнения (4.1) для разных и кратных корней характеристического уравнения соответственно равно

$$i = i_{i\delta} + A_n e^{p_n t} + A_{n-1} e^{p_{n-1} t} + \dots + A_1 e^{p_1 t}; \quad (4.5)$$

$$i = i_{i\delta} + \left(A_n t^{n-1} + A_{n-1} t^{n-2} + \dots + A_1 \right) e^{pt}. \quad (4.6)$$

Основная трудоемкость классического метода расчета связана с нахождением значений постоянных интегрирования $A_n, A_{n-1}, \dots, A_1$. Причем с ростом порядка дифференциального уравнения, описывающего электрическую цепь, эта задача существенно усложняется.

Для нахождения постоянных интегрирования записывают выражения для искомого тока $i(t)$ и его $(n - 1)$ производных в момент $t = 0_+$. В результате для случая разных корней характеристического уравнения из уравнения (4.5) получается система из n уравнений с n неизвестными постоянными интегрирования:

$$\begin{cases} A_n + A_{n-1} + \dots + A_1 = i(0_+) - i_{\bar{i} \delta}; \\ p_n A_n + p_{n-1} A_{n-1} + \dots + p_1 A_1 = \frac{di(0_+)}{dt} - \frac{di_{\bar{i} \delta}}{dt}; \\ p_n^{n-1} A_n + p_{n-1}^{n-1} A_{n-1} + \dots + p_1^{n-1} A_1 = \frac{d^{n-1}i(0_+)}{dt^{n-1}} - \frac{d^{n-1}i_{\bar{i} \delta}}{dt^{n-1}}. \end{cases} \quad (4.7)$$

Для нахождения свободных членов в системе уравнений (4.7), которые совпадают с начальными значениями тока $i(0_+)$ и его $(n - 1)$ производной в момент $t = 0_+$, составляют уравнения равновесия электрической цепи и подставляют в них известные независимые начальные условия, т.е. значения напряжений на емкостях и токов в индуктивностях до коммутации.

Система (4.7) может быть записана в матричной форме:

$$\Delta \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C}, \quad (4.8)$$

где $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^{n-1} & p_2^{n-1} & \dots & p_n^{n-1} \end{vmatrix}$ – определитель системы;

$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \dots \\ A_n \end{bmatrix}$ – матрица-столбец постоянных интегрирования;

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} i(0_+) - i_{np} \\ \frac{di(0_+)}{dt} - \frac{di_{np}}{dt} \\ \dots \\ \frac{d^{n-1}i(0_+)}{dt^{n-1}} - \frac{d^{n-1}i_{np}}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} \quad - \text{ матрица-столбец свободных}$$

членов.

Решение системы (4.8) можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{A} = \Delta^{-1} \cdot \mathbf{C}.$$

Полученная система может быть легко решена с применением программирования либо с помощью современных компьютерных программ математического моделирования типа MathCad.

Получим аналогичную систему для случая кратных корней характеристического уравнения. Для этого найдем значения функции $i(t)$ и ее $(n - 1)$ производных из выражения (4.6) для момента времени $t = 0_+$, в результате получим систему, аналогичную системе уравнений (4.8):

$$\Delta_{кр} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C},$$

где векторы-столбцы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{C}$ совпадают с аналогичными значениями в системе уравнений (4.8), а главный определитель $\Delta_{кр}$ представляет собой треугольную матрицу, элементы которой равны нулю, если номер строки k меньше номера столбца j , а значения остальных ее элементов можно посчитать по формуле $\frac{(k-1)!}{(k-j)!} p^{k-j}$ [6].

Полученное в общем виде выражение для определителя $\Delta_{кр}$ позволяет быстро формировать его для любого n . Так, например, для пяти кратных корней этот определитель равен

$$\Delta_{\text{к\ddot{o}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ p & 1 & 0 & 0 & 0 \\ p^2 & 2p & 2 & 0 & 0 \\ p^3 & 3p^2 & 6p & 6 & 0 \\ p^4 & 4p^3 & 12p^2 & 24p & 24 \end{bmatrix}.$$

Приведем рекомендуемую последовательность расчета классическим методом:

- 1) анализ цепи до коммутации и определение независимых начальных условий;
- 2) составление уравнений по законам Кирхгофа для расчета цепи после коммутации и выражение из них искомого тока или напряжения;
- 3) составление и решение соответствующего характеристического уравнения; определение свободной составляющей решения;
- 4) составление уравнений по законам Кирхгофа для расчета цепи после коммутации и определение принужденной составляющей решения;
- 5) нахождение общего вида решения уравнения в виде суммы принужденной и свободной составляющих;
- 6) определение постоянных интегрирования.

4.3. Переходный процесс в цепи с R и L элементами

Рассмотрим пример расчета переходного процесса классическим методом для электрической цепи, содержащей последовательно соединенные сопротивление R и индуктивность L , при подключении ее к источнику постоянной ЭДС E (рис. 4.2,а). Найдем закон изменения тока $i(t)$ в этой цепи после коммутации.

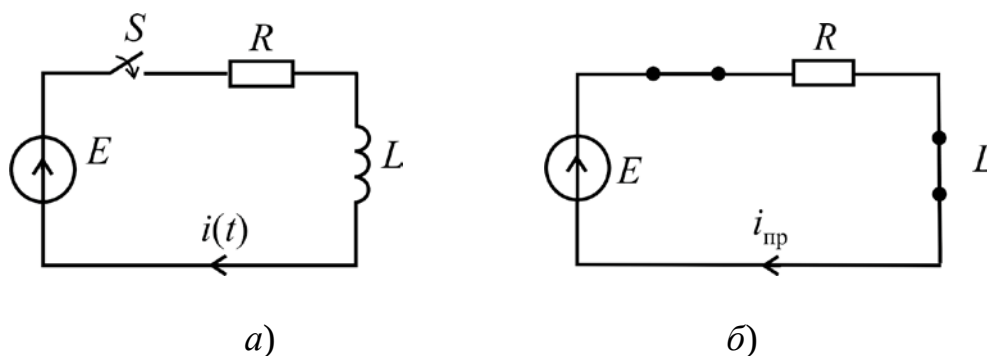


Рис. 4.2

1) Анализ цепи до коммутации показывает, что ток $i(0_-) = 0$, так как цепь разомкнута. В соответствии с первым законом коммутации ток через индуктивность не может меняться скачком и независимые начальные условия для этой цепи нулевые:

$$i(0_+) = i(0_-) = 0.$$

2) Составим для цепи уравнение по второму закону Кирхгофа после коммутации:

$$u_L(t) + u_R(t) = E,$$

или с использованием законов Ома

$$u_L(t) + u_R(t) = L \frac{di}{dt} + Ri = E.$$

3) Данному дифференциальному уравнению соответствует следующее характеристическое уравнение:

$$Lp + R = 0. \quad (4.9)$$

Это уравнение имеет один корень $p = -\frac{R}{L}$, поэтому свободная составляющая тока в соответствии с выражением (4.3) равна

$$i_{\text{н\acute{a}}} = Ae^{pt} = A^{-t/\tau}, \quad (4.10)$$

где $\tau = -\frac{1}{p} = \frac{L}{R}$ – *постоянная времени цепи*, которая равна времени в секундах, по истечении которого ток изменяется в $e \approx 2,7$ раз от своего начального значения по отношению к установившемуся значению.

Хотя теоретически переходной процесс длится бесконечно долго, но через время, равное 3τ , все токи и напряжения в цепи достигнут своего установившегося значения с погрешностью порядка 5 % и на практике считается, что переходной процесс завершился.

4) При определении принужденной составляющей учтем, что рассматриваемая электрическая цепь – цепь постоянного тока, поэтому $f = 0$, а реактивное индуктивное сопротивление на постоянном токе $X_L = 2\pi fL = 0$. Поэтому эквивалентная схема цепи в установившемся режиме будет иметь вид (рис. 4.2,б). В этой цепи протекает ток

$$i(\infty) = i_{\text{и } \delta} = \frac{E}{R}.$$

5) Таким образом, общее решение дифференциального уравнения для тока можно представить в виде:

$$i = i_{\text{и } \delta} + i_{\text{н\acute{а}}} = \frac{E}{R} + Ae^{pt}.$$

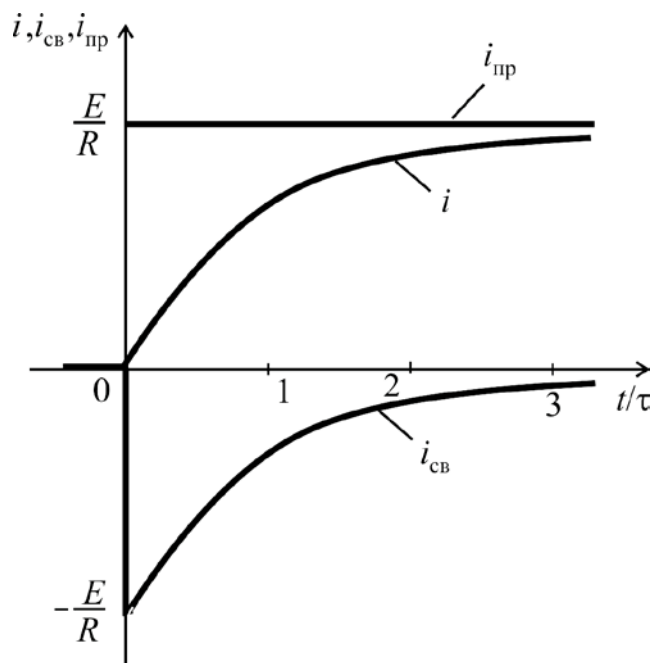
6) Для нахождения постоянной интегрирования A рассмотрим последнее выражение для момента времени $t = 0_+$ и с учетом независимых начальных условий получим

$$i(0_+) = \frac{E}{R} + A = 0.$$

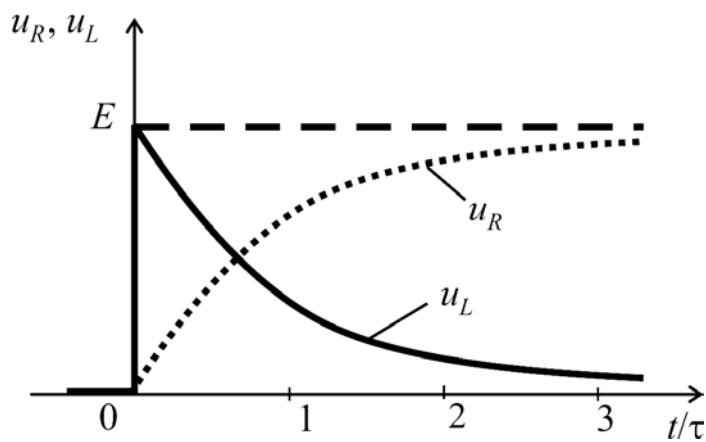
Откуда $A = -\frac{E}{R}$, а общее решение дифференциального уравнения можно представить в виде:

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-t/\tau} \right). \quad (4.11)$$

На рис. 4.3,а приведены графики зависимостей $i_{св}(t/\tau)$ и $i_{пр}(t/\tau)$, а также суммарный график $i(t/\tau)$ с учетом их начального значения.



а



б

Рис. 4.3

Из графиков видно, что суммарный ток i в цепи возрастает по экспоненте с постоянной времени $\tau = \frac{L}{R}$ от нуля до значения, равного отношению $\frac{E}{R}$.

Построение графика $i_{\text{св}}(t/\tau)$ удобно проводить в следующей последовательности:

– отложить на графике значение $i_{\text{н\hat{a}}}(0) = -\frac{E}{R}e^{-0} = -\frac{E}{R}$;

– по истечении времени t , равного τ , значение свободной составляющей тока будет равно

$$i_{\text{н\hat{a}}}\left(\frac{t}{\tau}\right) = i_{\text{н\hat{a}}}(1) = -\frac{E}{Re} \approx -\frac{E}{2,7R},$$

т.е. модуль свободной составляющей уменьшается примерно в 2,7 раза относительно начального значения;

– в момент времени $t = 2\tau$ значение свободной составляющей тока будет равно

$$i_{\text{н\hat{a}}}\left(\frac{t}{\tau}\right) = i_{\text{н\hat{a}}}(2) = -\frac{E}{Re^2} = \frac{i_{\text{н\hat{a}}}(1)}{e},$$

т.е. модуль свободной составляющей снова уменьшается примерно в 2,7 раза относительно значения $i_{\text{н\hat{a}}}(1)$;

– аналогично получим значение тока для момента времени $t = 3\tau$:

$$i_{\text{н\hat{a}}}(3) = \frac{i_{\text{н\hat{a}}}(2)}{e}.$$

Из выражения (4.11) по закону Ома можно определить падение напряжения на сопротивлении $u_R(t)$ и индуктивности $u_L(t)$ в виде:

$$u_R(t) = Ri = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right);$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = L \left(-\frac{E}{R} \left(-\frac{1}{\tau} \right) e^{-t/\tau} \right) = L \left(\frac{E}{R} \left(\frac{R}{L} \right) e^{-t/\tau} \right) = E e^{-t/\tau}.$$

Графики зависимостей $u_R(t/\tau)$, $u_L(t/\tau)$ приведены на рис. 4.3,б. Поскольку $u_R = i_R R$, то напряжение на сопротивлении повторяет по форме кривую тока. Напряжение на индуктивности в момент коммутации скачкообразно возрастает от нуля до уровня E , а затем снижается до нуля по экспоненте с постоянной времени, равной τ .

Подставляя выражения для $u_R(t)$, $u_L(t)$ в уравнение по второму закону Кирхгофа для данной цепи после коммутации, можно убедиться в его справедливости в любой момент времени:

$$u_L(t) + u_R(t) = E \left(1 - e^{-t/\tau} \right) + E e^{-t/\tau} = E.$$

Для упрощения инженерных расчетов переходных процессов в сложных электрических цепях характеристическое уравнение цепи удобно получить из так называемого *операторного сопротивления*. Для этого необходимо выполнить следующие действия:

- исключить из схемы все источники ЭДС и тока, заменив их соответствующим внутренним сопротивлением (при этом участки цепи с идеальными источниками ЭДС необходимо накоротко замкнуть, так как их внутреннее сопротивление равно нулю, а ветви с идеальным источником тока необходимо разомкнуть, так как их внутреннее сопротивление равно бесконечности);

- разорвать любую ветвь электрической цепи и определить комплексное сопротивление цепи $\underline{Z}(j\omega)$ относительно точек разрыва (при этом рекомендуется выбрать такую точку на схеме, чтобы относительно точек разрыва получить цепь с наиболее простым

алгебраическим выражением для комплекса полного сопротивления);

- заменить в выражении для комплексного сопротивления $j\omega$ на оператор p и приравнять полученное выражение к нулю;

- привести полученное выражение для $Z(p)$ к общему знаменателю (при этом в зависимости от точки разрыва выражение для $Z(p)$ в общем случае может быть различным, но его числитель всегда совпадает с соответствующим характеристическим уравнением электрической цепи).

Так, например, для электрической цепи (см. рис. 4.2,а) комплекс полного сопротивления цепи относительно входных зажимов равен

$$\underline{Z} = j\omega L + R,$$

а соответствующее операторное сопротивление цепи равно

$$Z(p) = pL + R.$$

Приравняв его к нулю, получим характеристическое уравнение цепи, совпадающее с выражением (4.9).

Рассмотрим электрическую цепь, содержащую последовательно соединенные сопротивление R и индуктивность L , которая длительное время была подключена к источнику постоянной ЭДС E , при переключении ключа из положения 1 в положение 2 (рис. 4.4,а).

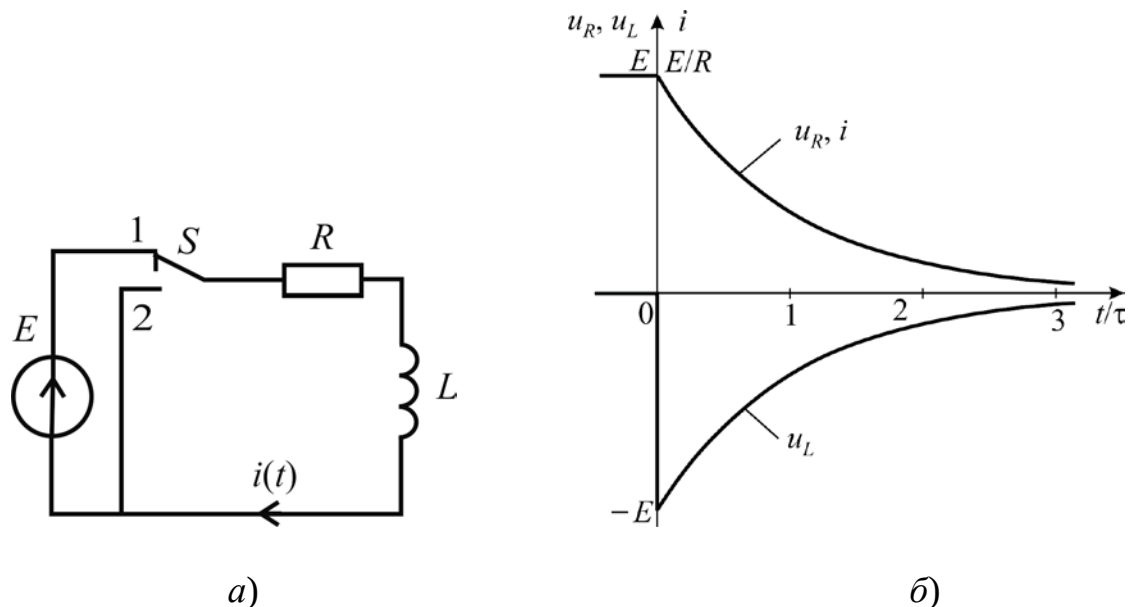


Рис. 4.4

1) Анализ цепи до коммутации показывает, что ее эквивалентная схема совпадает со схемой рис. 4.2,б, но в ней течет ток $i(0_+)$. Независимые начальные условия для этой цепи ненулевые:

$$i(0_+) = i(0_-) = \frac{E}{R}.$$

2) Уравнение по второму закону Кирхгофа для цепи после коммутации равно

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0.$$

3) Данному дифференциальному уравнению соответствуют характеристическое уравнение (4.9) и свободная составляющая тока, совпадающая с выражением (4.10).

4) Принужденная составляющая тока в данной цепи будет равна нулю:

$$i_{\text{пр}} = \frac{0}{R} = 0,$$

так как в цепи после коммутации отсутствуют источники энергии.

В этом случае по сравнению с рассмотренным ранее примером начальные и установившиеся значения меняются местами.

5) Таким образом, общее решение для тока при переходном процессе в цепи можно представить в виде:

$$i(t) = Ae^{pt}.$$

6) Для нахождения постоянной интегрирования A рассмотрим последнее выражение для момента времени $t = 0_+$ и с учетом независимых начальных условий получим

$$i(0_+) = A = \frac{E}{R}.$$

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения запишется следующим образом:

$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}. \quad (4.12)$$

Из выражения (4.12) по закону Ома можно определить падение напряжения на сопротивлении $u_R(t)$ и индуктивности $u_L(t)$ в виде:

$$u_R(t) = Ri(t) = Ee^{-t/\tau};$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = L \frac{E}{R} \left(-\frac{R}{L} e^{-t/\tau} \right) = -Ee^{-t/\tau}.$$

Из выражения (4.12) следует, что при замыкании цепи коротко ток в ней уменьшается по экспоненте от уровня $\frac{E}{R}$ до нуля с постоянной времени $\tau = \frac{L}{R}$ (рис. 4.4,б). Напряжение на сопротивле-

нии изменяется по такому же закону, что и ток, а напряжение на индуктивности в момент коммутации скачком изменяется от нуля до уровня $-E$, а затем плавно по экспоненте снижается до нуля (см. рис. 4.4,б).

Подставляя выражения $u_R(t)$, $u_L(t)$ в уравнение по второму закону Кирхгофа для данной цепи после коммутации, можно убедиться в его справедливости в любой момент времени:

$$u_L(t) + u_R(t) = Ee^{-t/\tau} - Ee^{-t/\tau} = 0.$$

Для рассматриваемых цепей длительность переходного процесса в цепи прямо пропорциональна L , так как индуктивность определяет количество энергии, запасаемой в магнитном поле цепи, и обратно пропорциональна R , так как сопротивление определяет количество энергии, рассеиваемой в виде тепла. При отсутствии внешних воздействий на цепь в виде источника ЭДС (в свободном режиме) переходный процесс заканчивается тогда, когда вся энергия магнитного поля будет преобразована в тепло.

Если в реальной цепи (см. рис. 4.2,а), содержащей катушку индуктивности с индуктивностью L и резистор с сопротивлением R , ключ работает на размыкание, то в силу того, что ток через индуктивность не сможет измениться скачком до нуля, в первый момент после коммутации в ключе возникает искра между контактами. В результате образуется контур для протекания тока через катушку индуктивности. Так как остаточное сопротивление ключа в замкнутом состоянии значительно больше, чем в открытом состоянии, то постоянная времени в цепи после коммутации будет значительно меньше, чем до коммутации. Это приведет к тому, что ток в цепи после коммутации очень быстро про падет.

Подобный режим работы используется для воспламенения рабочей смеси в цилиндре бензинового двигателя внутреннего сгорания с помощью искры, возникающей в искровом промежутке свечи зажигания.

Рассмотрим электрическую цепь, в которой до размыкания ключа параллельно цепи был подключен вольтметр (рис. 4.5). Так

как ток через индуктивность $i(0_+) = i(0_-) = \frac{E}{R}$ не сможет измениться скачком, то после коммутации он будет протекать в контуре $R - L - pV$.

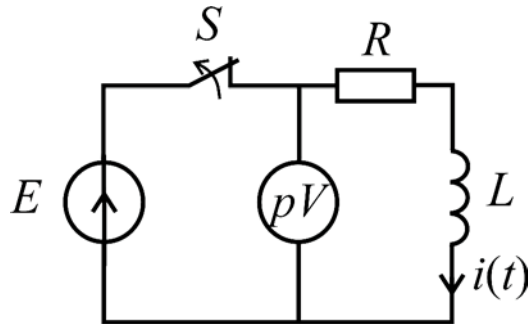


Рис. 4.5

При этом на вольтметре с сопротивлением R_V будет падать напряжение:

$$u_V(0_+) = R_V i(0_+) = R_V \frac{E}{R} = E \frac{R_V}{R}.$$

Вместе с тем для контура $R - L - pV$ можно записать следующее уравнение Кирхгофа:

$$u_L(0_+) + Ri(0_+) + R_V i(0_+) = 0.$$

Откуда падение напряжения на индуктивности равно

$$u_L(0_+) = -(R + R_V)i(0_+) = -E \left(1 + \frac{R_V}{R} \right).$$

Если $R_V > R$, то напряжение на вольтметре и индуктивности при отключении цепи от источника ЭДС в первый момент времени повысится в $\frac{R_V}{R}$ раз. Если энергия магнитного поля, запасенная в катушке индуктивности, достаточно велика, то может выйти из строя вольтметр и будет нарушена изоляция самой катушки индуктивности.

Во избежание возникновения больших перенапряжений при отключении цепей постоянного тока с большой индуктивностью (например, обмоток возбуждения генераторов постоянного тока) эти цепи предварительно замыкают на малое сопротивление.

4.4. Переходный процесс в цепи с R и C элементами

Рассмотрим переходной процесс в цепи с последовательным соединением сопротивления R и емкости C , которая с помощью ключа S переключается от источника постоянной ЭДС E_1 к источнику E_2 (рис. 4.6).

1) Если цепь до коммутации была достаточно давно подключена к E_1 , то с учетом того, что реактивное емкостное сопротивление на постоянном токе $X_C = \frac{1}{2\pi fC} = \infty$, ток в цепи отсутствовал, но емкость была заряжена до напряжения E_1 . Поэтому независимое начальное условие для этой цепи на основании второго закона коммутации можно записать следующим образом:

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = E_1.$$

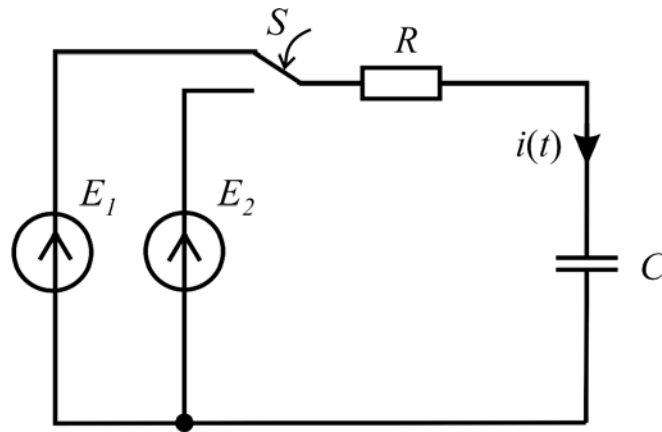


Рис. 4.6

2) Запишем второй закон Кирхгофа для этой цепи после коммутации:

$$u_R(t) + u_C(t) = Ri(t) = u_C(t) = E_2.$$

Учитывая, что $i(t) = C \frac{du_C}{dt}$, последнее уравнение можно записать следующим образом:

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E_2. \quad (4.13)$$

3) Для решения этого дифференциального уравнения относительно $u_C(t)$ необходимо составить характеристическое уравнение в виде

$$RCp + 1 = 0.$$

Это уравнение имеет один корень, равный $p = -\frac{1}{RC}$, а свободная составляющая $u_{C_{\text{н\ddot{a}}}}$ равна

$$u_{C_{\text{н\ddot{a}}}} = Ae^{pt} = Ae^{-t/\tau},$$

где $\tau = -\frac{1}{p} = RC$ – постоянная времени переходного процесса.

Заметим, что характеристическое уравнение для этой цепи можно также получить из числителя соответствующего операторного сопротивления:

$$Z(p) = R + \frac{1}{pC} = \frac{pRC + 1}{pC} = 0.$$

4) В установившемся режиме на вход рассматриваемой электрической цепи подано постоянное напряжение с выхода источника E_2 , поэтому ток в цепи в установившемся режиме будет отсутствовать, а установившееся значение напряжения на емкости будет равно E_2 . Таким образом, принужденная составляющая

$$u_{C_{\text{и\ddot{o}}}} = E_2.$$

5) Общее решение уравнения (4.13) для напряжения u_C при переходном процессе в цепи можно представить суммой свободной и принужденной составляющих:

$$u_C(t) = u_{C_{\text{н\ddot{a}}}} + u_{C_{\text{и\ddot{o}}}} = Ae^{-t/\tau} + E_2.$$

6) Для нахождения постоянной интегрирования A рассмотрим последнее выражение для момента времени $t = 0_+$ и с учетом независимых начальных условий получим

$$u_C(0_+) = A + E_2 = E_1. \quad (4.14)$$

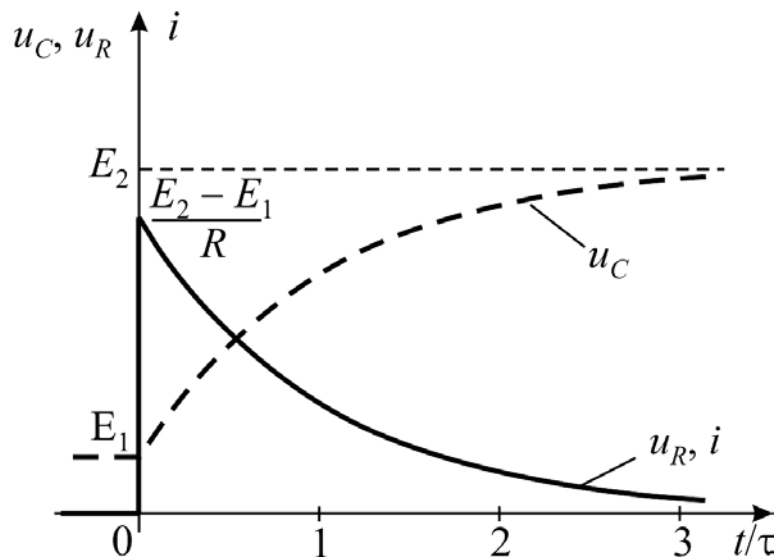
Откуда $A = E_1 - E_2$, а общее решение уравнения (4.13) равно

$$u_C(t) = E_2 + (E_1 - E_2)e^{-t/\tau}.$$

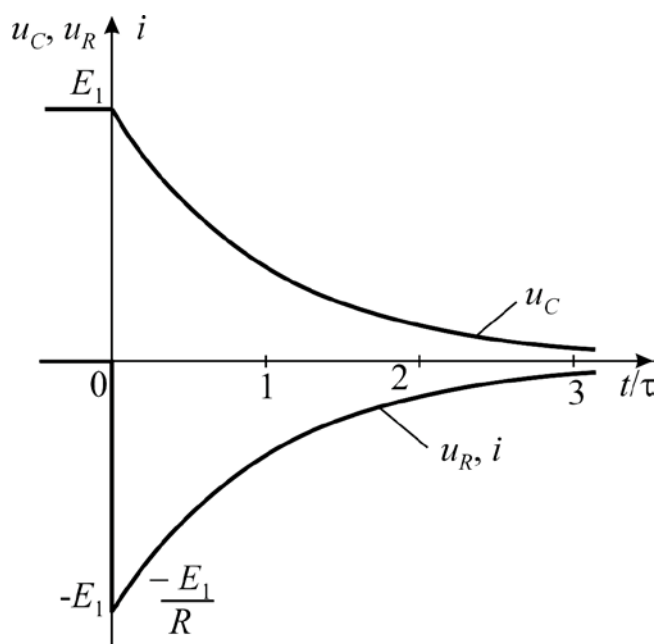
Из последнего выражения можно определить падение напряжения на сопротивлении $u_R(t)$ в виде:

$$u_R(t) = E_2 - u_C(t) = (E_2 - E_1)e^{-t/\tau}.$$

На рис. 4.7,*а* приведены графики зависимостей $u_C(t/\tau)$, $u_R(t/\tau)$ для случая $E_2 > E_1$, из которых видно, что напряжение на емкости до коммутации и сразу же после коммутации остается неизменным и равно E_1 , а затем плавно нарастает по экспоненте с постоянной времени $\tau = RC$ до значения E_2 . Напряжение на сопротивлении в первый момент времени после коммутации скачком изменяется от нуля до уровня $(E_2 - E_1)$, а затем плавно убывает до нуля по экспоненте с постоянной времени τ . Ток в цепи повторяет по форме напряжение на сопротивлении.



a)



б)

Рис. 4.7

Если $E_2 = 0$, то после коммутации произойдет полный разряд емкости, так как в цепи не останется внешних источников энергии и вся энергия, накопленная в электрическом поле емкости, преобразуется в тепло в резисторе. Напряжение на емкости в переходном процессе будет иметь только свободную составляющую, а постоянная интегрирования для данной цепи из (4.14) будет равна E_1 .

Таким образом, напряжения на емкости и на сопротивлении в переходном процессе будут изменяться по следующим законам:

$$u_C(t) = E_1 e^{-t/\tau};$$

$$u_R(t) = 0 - u_C(t) = -E_1 e^{-t/\tau}.$$

Графики зависимостей $u_C(t/\tau)$, $u_R(t/\tau)$ для случая $E_2 = 0$ приведены на рис. 4.7,б, из которых видно, что напряжение на емкости до коммутации и сразу же после коммутации остается неизменным и равно E_1 , а затем плавно убывает по экспоненте с постоянной времени $\tau = RC$ до нуля.

Напряжение на сопротивлении в первый момент времени после коммутации скачком изменяется от нуля до уровня $-E_1$, а затем плавно убывает до нуля по экспоненте. Ток в цепи повторяет по форме напряжение на сопротивлении.

4.5. Переходный процесс в цепи с R , L и C элементами

Рассмотрим переходный процесс в электрической цепи, содержащей последовательно соединенные R , L и C элементы, при подключении ее к источнику постоянной ЭДС E (рис. 4.8).

1) Если цепь до коммутации была достаточно давно отключена от источника постоянной ЭДС E , то на момент коммутации ток в ней отсутствовал, а емкость была разряжена. Запишем независимые начальные условия для этой цепи на основании первого и второго законов коммутации:

$$i(0_+) = i(0_-) = 0; \quad (4.15)$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0. \quad (4.16)$$

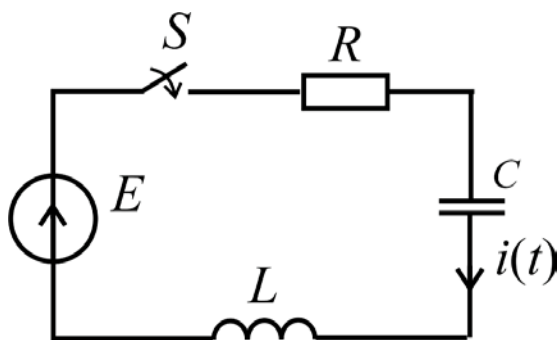


Рис. 4.8

2) Уравнение по второму закону Кирхгофа для этой цепи после замыкания ключа представляет собой интегро-дифференциальное уравнение:

$$u_R(t) + u_L(t) + u_C(t) = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int i dt = E. \quad (4.17)$$

Рассмотрим это уравнение в начальный момент времени сразу же после коммутации:

$$L \frac{di(0_+)}{dt} + Ri(0_+) + \frac{1}{C} \int_0^t i(0_+) dt = E.$$

В последнем уравнении второе слагаемое с учетом (4.15) и третье слагаемое с учетом (4.16) будут равны нулю. Следовательно,

можно получить *зависимое начальное условие* для этой цепи относительно дифференциала тока в виде:

$$\frac{di(0_+)}{dt} = \frac{E}{L}. \quad (4.18)$$

Продифференцируем уравнение (4.17) и с учетом постоянной ЭДС E получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0. \quad (4.19)$$

3) Для решения дифференциального уравнения (4.19) относительно $i(t)$ необходимо составить характеристическое уравнение в виде:

$$Lp^2 + Rp + \frac{1}{C} = 0 \Rightarrow p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Корнями этого характеристического уравнения являются

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}, \quad (4.20)$$

где $\delta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания, пропорциональный затуханию в последовательном колебательном контуре при резонансной частоте; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ – угловая частота, на которой в цепи (см. рис. 4.8) возникает резонанс.

Введем понятие критического сопротивления цепи $R_{кр}$, которое определяется из условия равенства нулю дискриминанта в (4.20):

$$\sqrt{\left(\frac{R_{кр}}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = 0.$$

Откуда

$$R_{кр} = 2\sqrt{L/C} = 2\rho,$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ – волновое сопротивление цепи.

Корни характеристического уравнения в зависимости от соотношения параметров R и $R_{кр}$ могут быть трех видов:

– при $R > R_{кр}$ или $R > 2\rho$ уравнение имеет два вещественных разных отрицательных корня;

– при $R = R_{кр}$ или $R = 2\rho$ уравнение имеет два одинаковых вещественных отрицательных корня $p = -\frac{R}{2L} = -\delta$;

– при $R < R_{кр}$ или $R < 2\rho$ уравнение имеет два комплексно сопряженных корня:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{\tilde{n}\tilde{a}},$$

где $\omega_{\tilde{n}\tilde{a}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ – частота свободных колебаний в цепи.

При этом для случая $R \neq R_{кр}$ свободная составляющая тока в соответствии с (4.3) будет равна

$$i_{c\tilde{a}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t},$$

а для случая $R = R_{кр}$ свободная составляющая тока в соответствии с (4.4) будет равна

$$i_{c\tilde{a}} = e^{pt} (\dot{A}_1 + A_2 t).$$

4) Принужденная составляющая тока в данной цепи $i_{пр}$ будет равна нулю, так как в цепи с постоянным источником ЭДС ток через емкость в установившемся режиме не протекает.

5) Таким образом, общее решение для тока в случае $R \neq R_{кр}$ или $R = R_{кр}$ можно представить соответственно следующим образом:

$$i = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} \quad (4.21)$$

или

$$i = e^{pt} (\dot{A}_1 + A_2 t). \quad (4.22)$$

6) Для нахождения постоянных интегрирования в выражениях (4.21), (4.22) необходимо получить систему из двух уравнений относительно A_1 и A_2 , аналогичную системе (4.7).

В случае $R > R_{кр}$ или $R > 2\rho$ рассмотрим выражения (4.21) для момента времени $t = 0_+$ и с учетом независимого начального условия (4.15) получим первое уравнение системы:

$$i(0_+) = A_1 + A_2 = 0.$$

Продифференцируем выражение (4.21) и рассмотрим полученное уравнение $\frac{di}{dt} = A_1 p_1 e^{p_1 t} + A_2 p_2 e^{p_2 t}$ в момент времени $t = 0_+$ с учетом зависящего начального условия (4.18). В результате получим второе уравнение системы:

$$\frac{di}{dt}(0_+) = A_1 p_1 + A_2 p_2 = \frac{E}{L}.$$

Решение полученной системы даст следующие значения для искомых постоянных интегрирования:

$$A_1 = -A_2 = \frac{E}{L(p_1 - p_2)} = \frac{E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}}.$$

Следовательно, для случая $R > R_{кр}$ общее решение уравнения (2.19) можно представить следующим образом:

$$i(t) = \frac{E}{2L\sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} (e^{p_1 t} - e^{p_2 t}) = i_1(t) + i_2(t). \quad (4.23)$$

Графики зависимостей $i_1(t/\tau)$, $i_2(t/\tau)$ и $i(t/\tau)$ приведены на рис. 4.9.

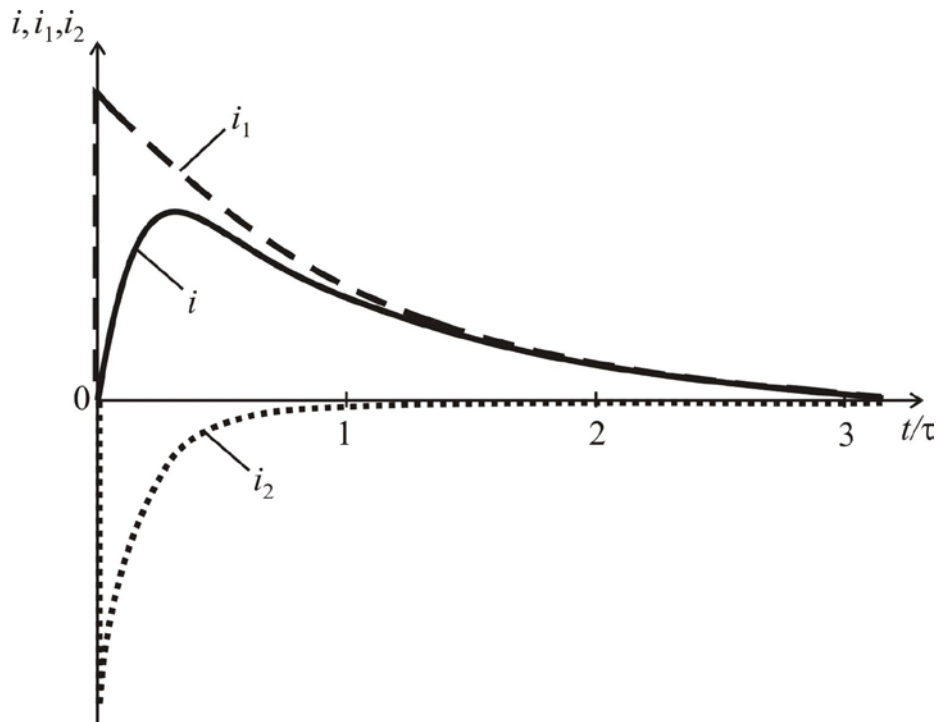


Рис. 4.9

Так как при $\delta > \omega_0$ оба корня отрицательные и разные, то обе экспоненты будут со временем уменьшаться по модулю до нуля со скоростью, определяемой постоянными времени для каждой из них:

$$\tau_1 = \frac{-1}{p_1} \text{ и } \tau_2 = \frac{-1}{p_2}.$$

Однако τ_1 всегда больше, чем τ_2 , поэтому переходный процесс через время, равное примерно трем τ_1 , практически завершится. Отметим, что в начальный момент времени график $i(t/\tau)$ проходит через нуль, следовательно, выполняется первый закон коммутации и ток через индуктивность не меняется скачком.

Такой переходный процесс называется *апериодическим*.

При увеличении разности $(\delta^2 - \omega_0^2)$ значения корней $p_{1,2}$ расходятся, при этом $p_2 \rightarrow -\infty$, а $p_1 \rightarrow 0$ и длительность переходного процесса стремится к бесконечности.

В случае $R = R_{кр}$ рассмотрим выражения (4.22) для момента времени $t = 0_+$ и с учетом независимого начального условия (4.15) получим

$$i(0_+) = \dot{a}^0 (A_1 + A_2 \cdot 0) = \dot{A}_1 = 0.$$

Продифференцируем выражение (2.22), в результате получим

$$\frac{di}{dt} = A_1 p e^{pt} + A_2 e^{pt} + A_2 t p e^{pt}.$$

Рассмотрим последнее выражение в момент времени $t = 0_+$ и с учетом независимого начального условия (2.18) получим

$$\frac{di}{dt}(0_+) = A_2 = \frac{E}{L}.$$

Таким образом, для случая $R = R_{кр}$ общее решение уравнения (4.19) можно представить следующим образом:

$$i(t) = \frac{E}{L} t e^{\delta t} = \frac{E}{L} t e^{-\delta t}. \quad (4.24)$$

График зависимости $i(t/\tau)$ для случая кратных корней приведен на рис. 4.10. Отметим, что в начальный момент времени график

также проходит через нуль, следовательно, выполняется первый закон коммутации и ток через индуктивность не меняется скачком.

В этом случае переходный процесс практически завершается за время, равное примерно 3τ , где $\tau = 1/\delta$.

Такой переходный процесс называется *апериодическим критическим*.

Для случая $R < R_{кр}$ корни характеристического уравнения получаются комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью.

В этом случае свободная составляющая решения дифференциального уравнения также будет суммой двух экспонент, но эти экспоненты могут быть объединены, и общее решение уравнения (4.19) можно представить следующим образом:

$$i(t) = \frac{Ee^{-\delta t}}{L\omega_{\tilde{n}\hat{a}}} \left(\frac{e^{j\omega_{\tilde{n}\hat{a}}t} - e^{-j\omega_{\tilde{n}\hat{a}}t}}{2j} \right) = \frac{Ee^{-\delta t}}{L\omega_{\tilde{n}\hat{a}}} \sin(\omega_{\tilde{n}\hat{a}}t). \quad (4.25)$$

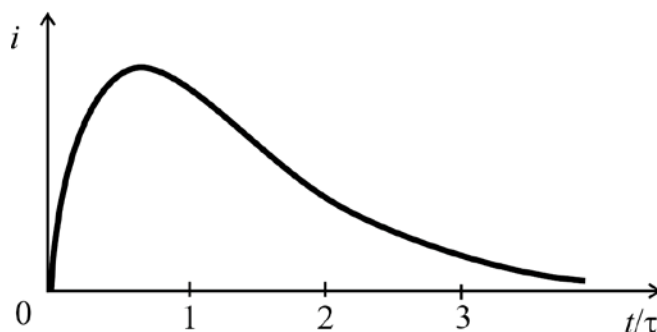


Рис. 4.10

График зависимости (4.25) приведен на рис. 4.11.

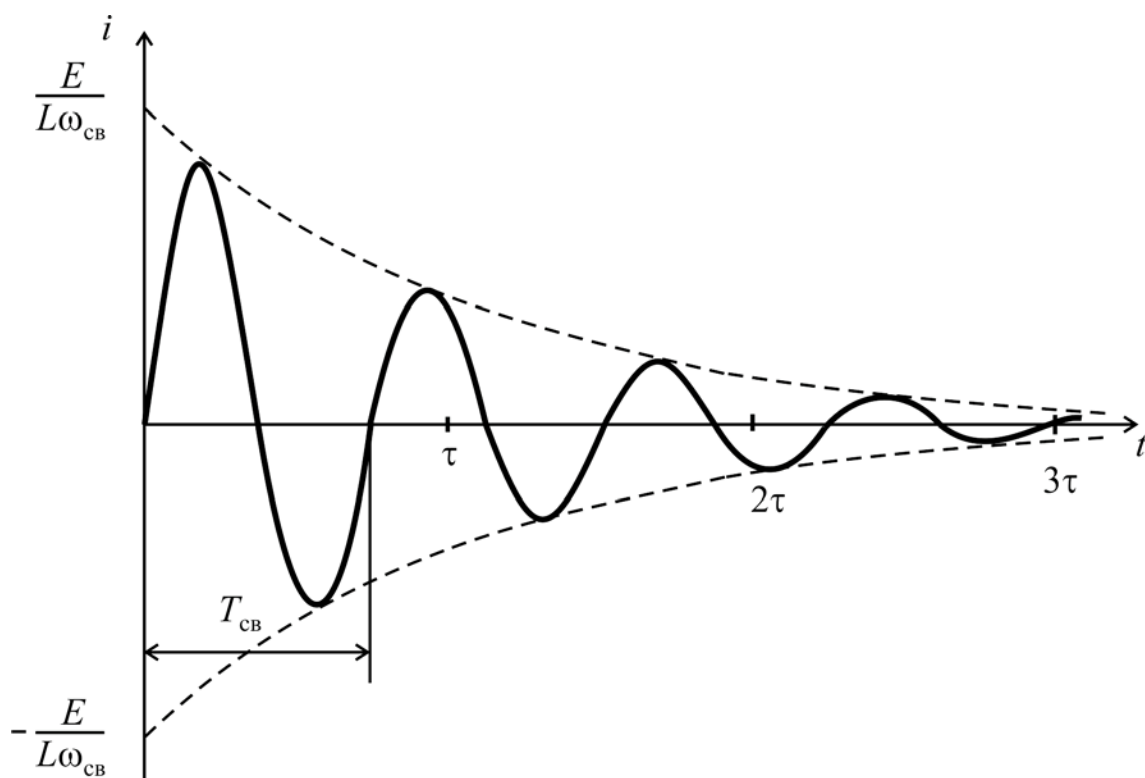


Рис. 4.11

Эта функция представляет собой синусоиду с изменяющейся во времени амплитудой. Период этих колебаний $T_{\text{н\acute{a}}}$ определяется частотой свободных колебаний $\omega_{\text{н\acute{a}}}$ и равен

$$T_{\text{н\acute{a}}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{н\acute{a}}}}.$$

Затухание δ определяет скорость уменьшения амплитуды колебаний свободной составляющей. Максимальное значение затухания соответствует режиму, граничному с апериодическим режимом. Частота свободных колебаний $\omega_{\text{н\acute{a}}}$ тока и напряжений при увеличении затухания стремится к нулю, а при уменьшении – к резонансной частоте цепи.

Подобный переходный процесс в цепи называется *колебательным*.

4.6. Переходный процесс в разветвленной цепи первого порядка

Рассмотрим, как протекает переходный процесс при смешанном соединении элементов (рис. 4.12), если до коммутации ключ был разомкнут, а после коммутации замыкается. Расчет проведем

для следующих значений параметров: $R_1 = R_2 = 10 \text{ Ом}$, $R_3 = 5 \text{ Ом}$, $E = 1 \text{ В}$, $L = 2 \text{ мГн}$.

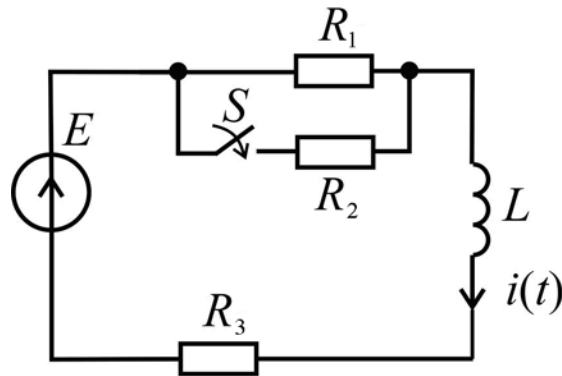


Рис. 4.12

1) Анализ цепи до коммутации показывает, что независимые начальные условия для нее – это ток через индуктивность $i(t)$, который равен

$$i(0_+) = (0_-) = \frac{E}{R_1 + R_2} = \frac{1}{15} \approx 0,067 \text{ А.}$$

2) Операторное сопротивление для этой цепи равно

$$Z(p) = R_{12} + R_3 + pL = 10 + 0,002p,$$

где $R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = 5 \text{ Ом}$.

3) Найдем корень характеристического уравнения и постоянную времени цепи:

$$p = -\frac{10}{0,002} = -5000 \text{ с}^{-1}; \tau = -\frac{1}{p} = \frac{1}{5000} = 0,2 \text{ мс.}$$

Свободная составляющая тока равна

$$i_{\text{св}} = Ae^{pt} = Ae^{-t/\tau}.$$

4) Принужденная составляющая тока в данной цепи

$$i_{\text{пр}} = \frac{E}{R_{12} + R_3} = \frac{1}{10} \approx 0,1 \text{ А.}$$

5) Таким образом, общее решение для тока в цепи в амперах равно

$$i = Ae^{pt} + 0,1 \text{ (A)}.$$

б) Для нахождения постоянной интегрирования A запишем последнее выражение в момент времени $t = 0_+$ и с учетом независимых начальных условий получим

$$i(0_+) = A + 0,1 = 0,067 \text{ A}.$$

Из последнего уравнения найдем: $A = -0,033 \text{ A}$.

Общее решение дифференциального уравнения для тока запишется следующим образом:

$$i(t) = (0,100 - 0,033e^{-5000t}) \text{ A}.$$

Из последнего выражения можно определить падения напряжения на индуктивности и сопротивлениях:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = 0,002 \cdot (-0,033) \cdot (-5000) \cdot e^{-5000t} = 0,330e^{-5000t} \text{ В};$$

$$\begin{aligned} u_{R_{12}}(t) = u_{R_3}(t) = R_{12}i(t) &= 5 \cdot (0,100 - 0,033 \cdot e^{-5000t}) = \\ &= (0,500 - 0,165e^{-5000t}) \text{ В}. \end{aligned}$$

Проверим выполнение второго закона Кирхгофа для цепи после коммутации:

$$\begin{aligned} E &= u_{R_{12}}(t) + u_L(t) + u_{R_3}(t) = \\ &= 2 \cdot (0,500 - 0,165 \cdot e^{-5000t}) + 0,33 \cdot e^{-5000t} = 1 \text{ В}. \end{aligned}$$

Как видно из последнего выражения, для данной цепи после коммутации выполняется второй закон Кирхгофа.

Так как R_1 и R_2 равны и включены параллельно, то по ним протекают равные по значению токи:

$$i_{R_1}(t) = i_{R_2}(t) = \frac{u_{R_{12}}(t)}{R_1} = \frac{u_{R_{12}}(t)}{R_2} = (0,0500 - 0,0165e^{-5000t}) \text{ A}.$$

Проверим выполнение первого закона Кирхгофа для цепи после коммутации:

$$i_{R_1}(t) + i_{R_2}(t) = 2 \cdot (0,0500 - 0,0165e^{-5000t}) = (0,100 - 0,033e^{-5000t}) \text{ A} = i(t).$$

Как видно из последнего выражения, для заданной цепи после коммутации первый закон Кирхгофа выполняется.

Графики изменения токов и напряжений для рассмотренной цепи показаны на рис. 4.13, а, б.

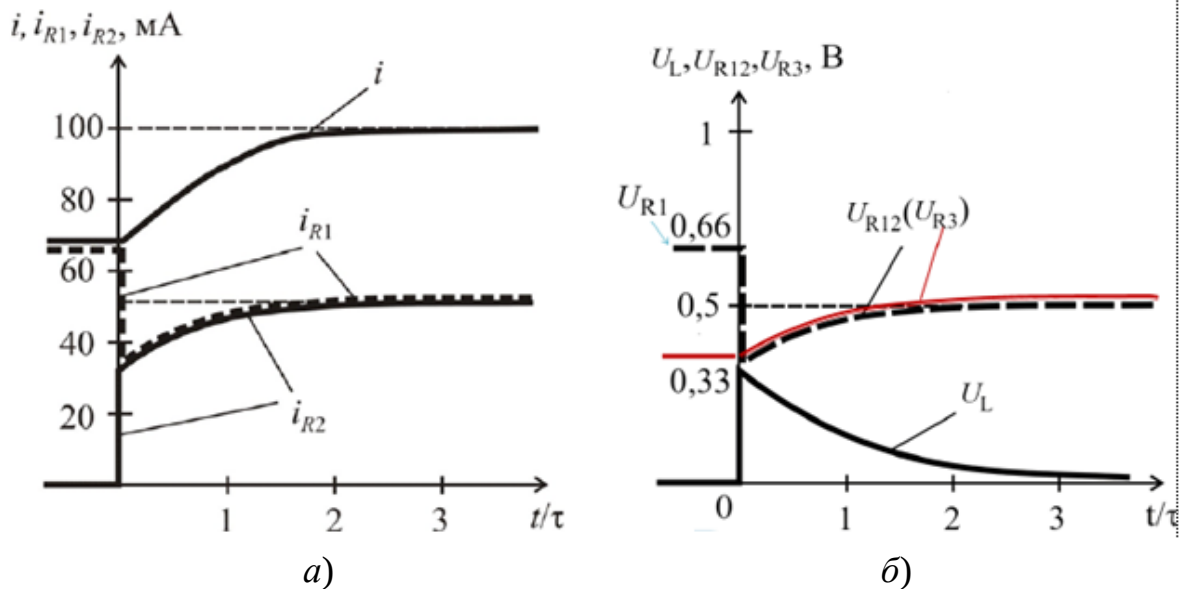


Рис. 4.13

4.7. Моделирование переходных процессов в программе Electronics Workbench

На рис. 4.14 приведен пример моделирования в среде EWB переходного процесса для схемы рис. 4.4, а.

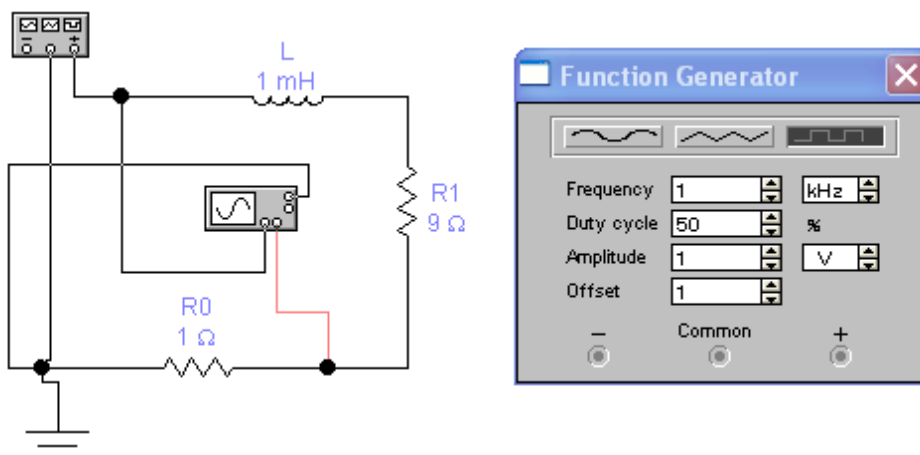


Рис. 4.14

При моделировании выбраны следующие значения параметров схемы: $E = 2$ В, $L = 1$ мГн, $R = 10$ Ом. Составим сопротивление из двух последовательно включенных сопротивлений: $R_1 = 9$ Ом и $R_0 = 1$ Ом.

Подадим прямоугольные импульсы с выхода генератора импульсов $u_{ГИ}(t)$ на вход осциллографа *Channel A*. При этом момент переключения ключа из положения «1» в положение «2» (см. рис. 4.4,а) соответствует заднему фронту импульсов с выхода генератора прямоугольных импульсов, а момент переключения ключа из положения «2» в положение «1» – переднему фронту импульсов. По умолчанию изображение сигнала $u_{ГИ}(t)$ на экране осциллографа будет черного цвета.

Подключим на канал осциллографа *Channel B* напряжение u_{R0} и установим красный цвет для соответствующего проводника, выполнив двойной щелчок по его изображению. Сопротивление R_0 предназначено для наблюдения на экране осциллографа изображения сигнала красного цвета $u_{R0}(t)$ в милливольтках, равного по значению току в этой цепи $i(t)$ в миллиамперах (рис. 4.15).

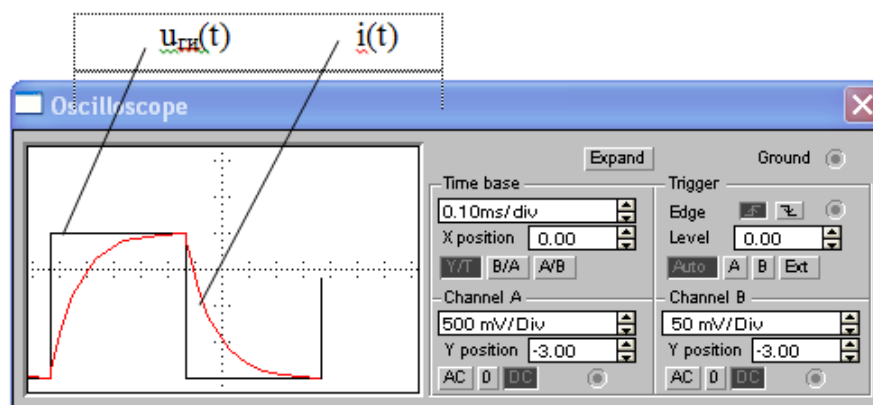


Рис. 4.15

Общий выход функционального генератора *Common* соединим со входом *Ground* осциллографа и с общей шиной $\perp$.

Как было показано ранее, постоянная времени для этой цепи равна $\tau = \frac{L}{R} = 100$ мкс, значение тока в цепи до коммутации

$i(0_-) = \frac{E}{R} = 200$ мА, принужденная составляющая тока равна нулю,

а ток после коммутации в рассматриваемой цепи изменяется по экспоненте $i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau} = \frac{2}{10} e^{-t/\tau} = 200 e^{-t/\tau}$ мА.

Установим с помощью соответствующих элементов управления следующий режим работы генератора прямоугольных импульсов:

– частота выходных прямоугольных импульсов

$$f = \frac{1}{10\tau} = \frac{1}{10 \cdot 0,0001} = 1 \text{ кГц} - \text{Frequency} = 1 \text{ kHz};$$

– коэффициент заполнения, который равен отношению длительности импульса к периоду, – *Duty cycle* = 50 %;

– амплитуда импульсов 1 В, – *Amplitude* = 1V;

– постоянная составляющая, равная смещению двухполярных прямоугольных импульсов на 1 В, – *Offset* = 1V.

При этом на выходе генератора будут формироваться однополярные прямоугольные импульсы с амплитудой 2 В.

Запустить процесс моделирования, нажав на клавишу включения питания . Для остановки процесса моделирования необходимо повторно нажать соответствующую клавишу включения питания.

Подобрать масштаб изображения на экране осциллографа, используя временную и амплитудную развертки для каждого канала, а также смещение по вертикали *Y position*, указанные на рис. 2.15. Это позволит более точно провести последующие измерения значений напряжений.

Для экспериментального определения постоянной времени цепи с помощью осциллографа необходимо развернуть его изображение, нажав на кнопку *Expend*, и с помощью ползунка выбрать участок осциллограммы, совпадающий с задним фронтом импульсов (рис. 4.16). Точность измерения постоянной времени можно повысить, установив максимально возможную временную развертку осциллографа для заданного значения частоты выходных импульсов генератора (на рис. 4.15 – *Time base 0.05 ms/div*).

Совместим красный курсор 1 осциллографа с задним фронтом импульса (что соответствует моменту переключения ключа из положения «1» в положение «2»). Снимем показания с его крайнего левого цифрового индикатора.

На рис. 4.16 показание $V_{A1} = 0.0000 \text{ V}$ соответствует окончанию импульса с выхода генератора импульсов, а показание $V_{B1} = 198.5850 \text{ mV}$ равно напряжению $u_{R0}(0_-)$ и соответствует начальному значению тока в цепи до коммутации $i(0_-)$. Расчетное значение $u_{R0}(0_-) = Ri(0_-) = 1 \text{ Ом} \cdot 200 \text{ мА} = 200 \text{ мВ}$.

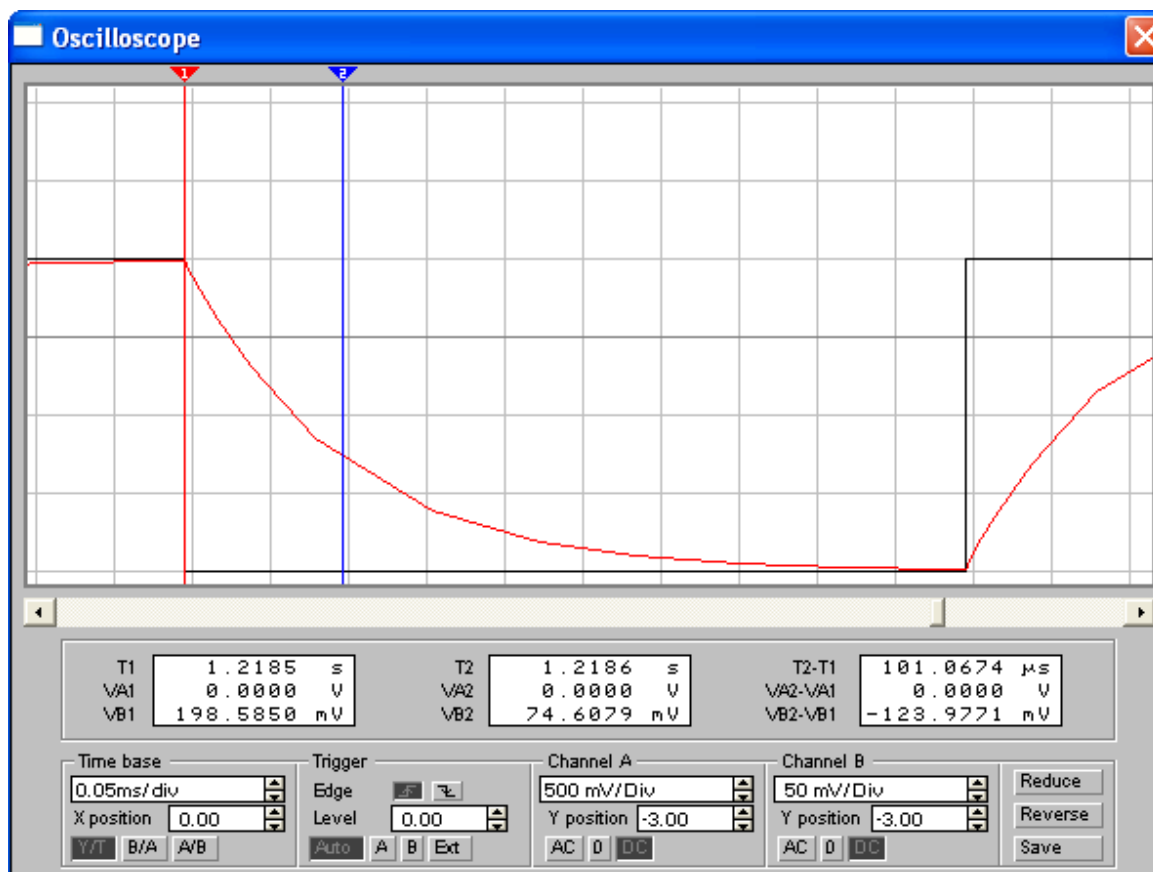


Рис. 4.16

С учетом того, что установившееся значение тока в цепи, как показано ранее, примерно равно нулю, определим по результатам эксперимента напряжение u_{R0} в цепи по истечении времени $t = \tau$:

$$u_{R0}(\tau) \approx VB1e^{-\tau/\tau} \approx \frac{198,5850}{2,7} \approx 74 \text{ мВ}.$$

Для экспериментального определения значения τ переместим синий курсор 2 осциллографа таким образом, чтобы показания среднего цифрового индикатора VB2 наиболее близко совпадали с расчетным значением 74 мВ (на рис. 2.16 – $VB2 = 74.6079 \text{ мВ}$).

Результат измерения постоянной времени снимем с крайнего правого цифрового индикатора (на рис. 4.16 постоянная времени в микросекундах соответствует показанию – $T_2 - T_1 = 101.0674 \mu\text{s}$).

Таким образом, измеренное значение постоянной времени цепи совпадает с его расчетным значением (100 мкс) с погрешностью порядка 1 %.

С помощью ползунка выберем участок осциллограммы, совпадающий с передним фронтом импульсов (рис. 4.17), и проведем измерение постоянной времени цепи при подключении ее к источнику

постоянного напряжения 2В (переключение ключа из положения «2» в положение «1»).

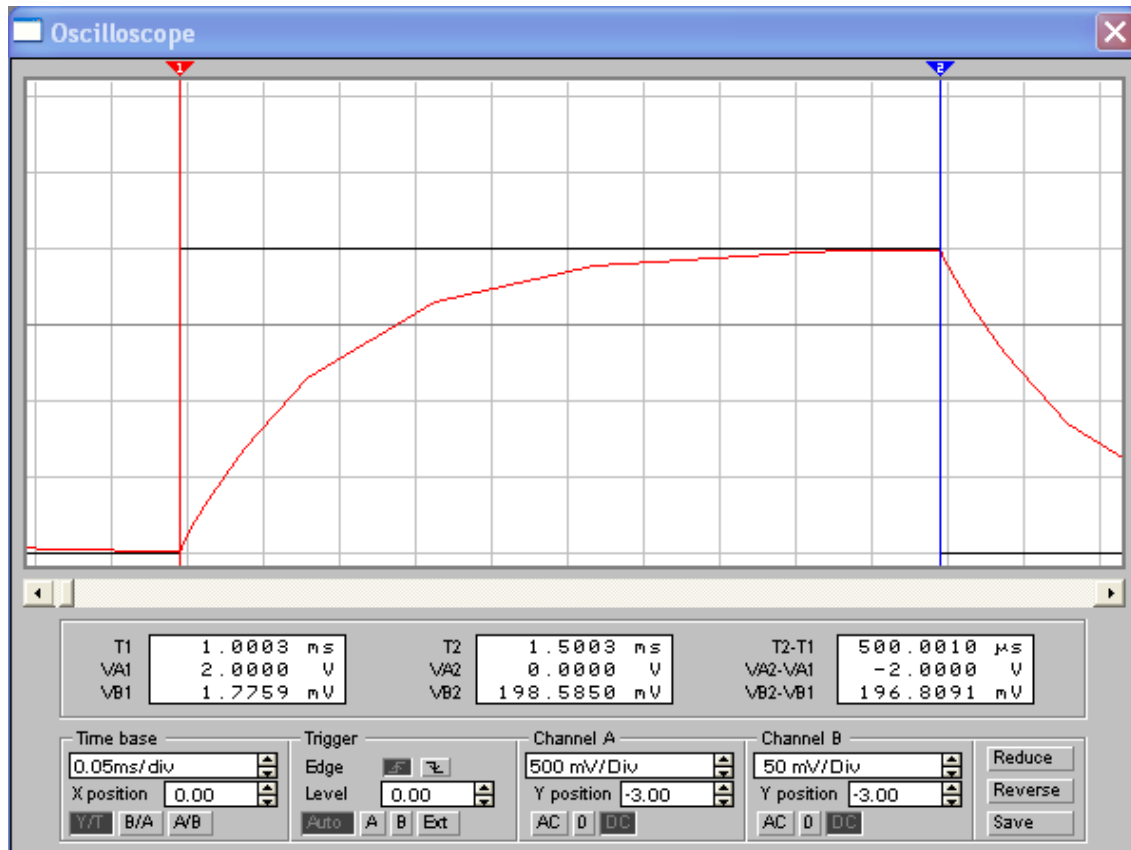


Рис. 4.17

Совместим красный курсор 1 осциллографа с передним фронтом импульса. Снимем показания с его крайнего левого цифрового индикатора.

На рис. 4.17 $V_{BA1} = 2.0000V$ – это амплитуда прямоугольного импульса, а показание $VB1 = 1.7759 mV$, равное напряжению $u_{R0}(0_-)$, примерно соответствует расчетному значению начального тока в цепи до коммутации $i(0_-) = 0$, умноженному на 1 Ом.

Совместим синий курсор 2 осциллографа с задним фронтом импульса. Снимем показания с его среднего цифрового индикатора.

На рис. 4.17 показание $VB2 = 198.5850 mV$, равное напряжению $u_{R0}(5\tau)$, что примерно соответствует установившемуся значению тока в цепи

$$i_{i\delta} = \frac{E}{R} = 200 \text{ mA},$$

умноженному на 1 Ом.

Определим по результатам эксперимента напряжение u_{R0} по истечении времени $t = \tau$:

$$u_{R0}(\tau) = (VB2 - VB1)(1 - e^{-1}) \approx 125 \text{ мВ}.$$

Для экспериментального определения значения τ переместим синий курсор 2 осциллографа таким образом, чтобы показания среднего цифрового индикатора VB2 наиболее близко совпадали с расчетным значением, равным 125 мВ (на рис. 4.18 – $VB2 = 125.2008 \text{ мВ}$).

Результат измерения постоянной времени τ снимем с крайнего правого цифрового индикатора (на рис. 4.18 – $T_2 - T_1 = 101.0868 \text{ мкс}$).

Таким образом, измеренное значение постоянной времени цепи для переднего фронта импульса с выхода генератора импульсов совпадает с его расчетным значением (100 мкс) с погрешностью порядка 1 %.

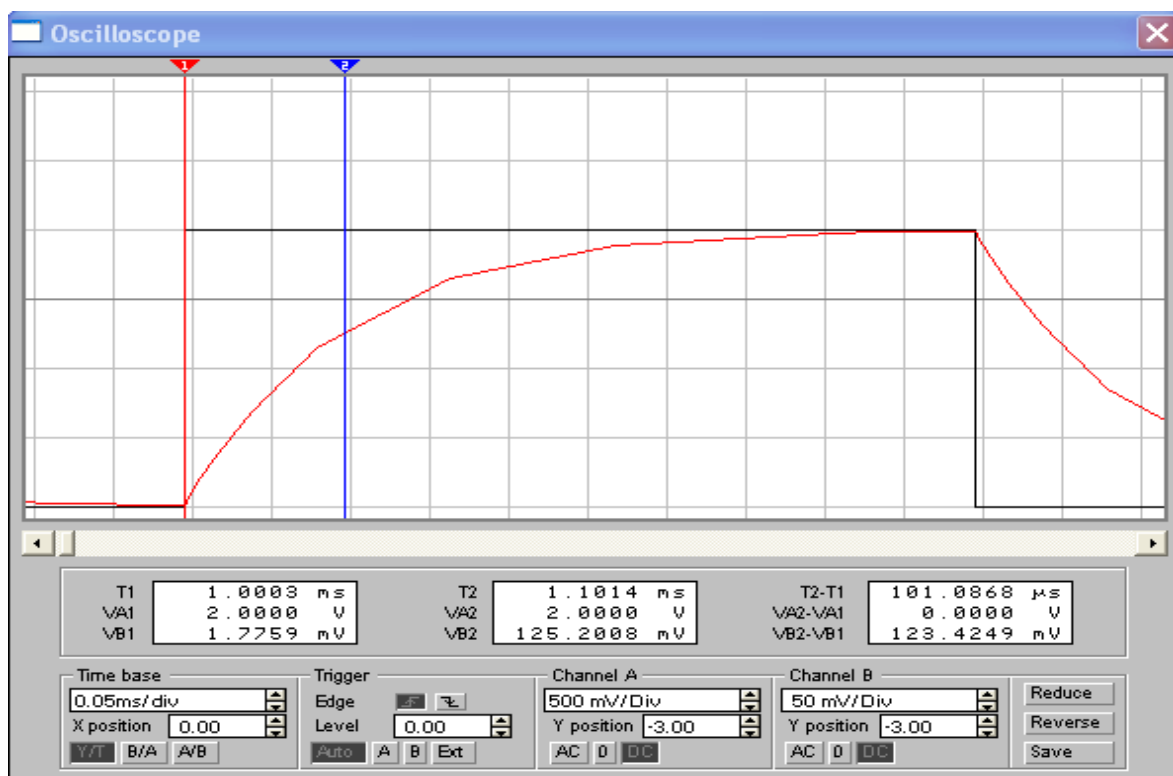


Рис. 4.18

На рис. 4.19 приведен пример моделирования в среде EWB переходного процесса для схемы рис. 4.12. В качестве коммутирующего элемента на этой схеме использован управляемый напряжением ключ (*Voltage-Controlled Switch*). При подаче положительного фронта управляющего сигнала с выхода генератора прямоугольных импульсов ключ замыкается, а при подаче отрицательного фронта – размыкается.

При моделировании выбраны следующие значения параметров схемы: $E = 1\text{В}$, $L = 2 \text{ мГн}$. Сопротивление $R0 = 10\text{Ом}$ предназначено для наблюдения на экране осциллографа сигнала u_{R0} в милливольтках,

соответствующего по значению тока, протекающему в данной ветви в миллиамперах.

В схеме рис. 4.19 осциллограф подключен для наблюдения на его экране тока через индуктивность, расчетное значение которого равно

$$i(t) = (0,100 - 0,033e^{-5000t}) \text{ А.}$$

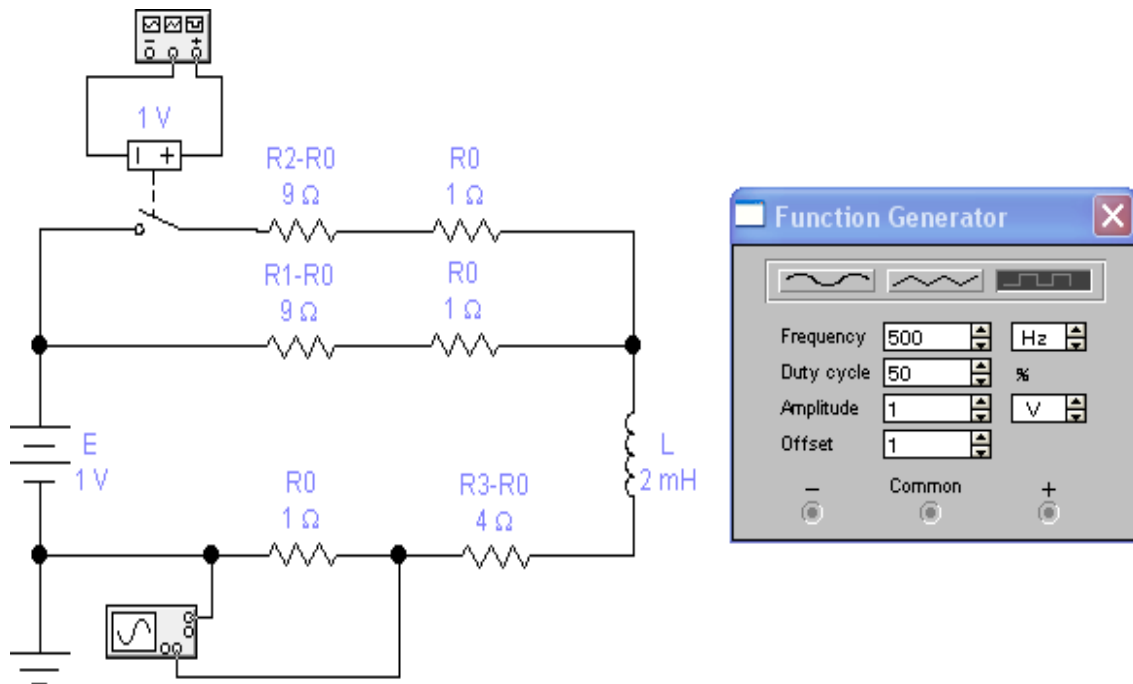


Рис. 4.19

При этом значение тока в цепи до коммутации равно

$$i(0_-) = 67 \text{ мА.}$$

Принужденная составляющая тока равна

$$i_{\text{пр}} = 100 \text{ мА.}$$

Так как постоянная времени для этой цепи равна $\tau = 200 \text{ мкс}$, то установим с помощью соответствующих элементов управления следующий режим работы генератора прямоугольных импульсов:

– частота выходных прямоугольных импульсов

$$f = \frac{1}{10\tau} = \frac{1}{10 \cdot 0,0002} = 500 \text{ Гц} - \text{Frequency} = 500 \text{ Hz};$$

– коэффициент заполнения – $\text{Duty cycle} = 50 \%$;

– амплитуда импульсов 1В – $\text{Amplitude} = 1\text{V}$;

– постоянная составляющая, равная смещению двухполярных прямоугольных импульсов на 1В, $-Offset = 1V$.

Подберем масштаб изображения на экране осциллографа, используя временную и амплитудную развертки осциллографа, а также смещение по вертикальной оси, указанные на рис. 4.20.

Установим красный курсор 1 осциллографа в положение, соответствующее току через индуктивность до коммутации, примерно равному 67 мА.

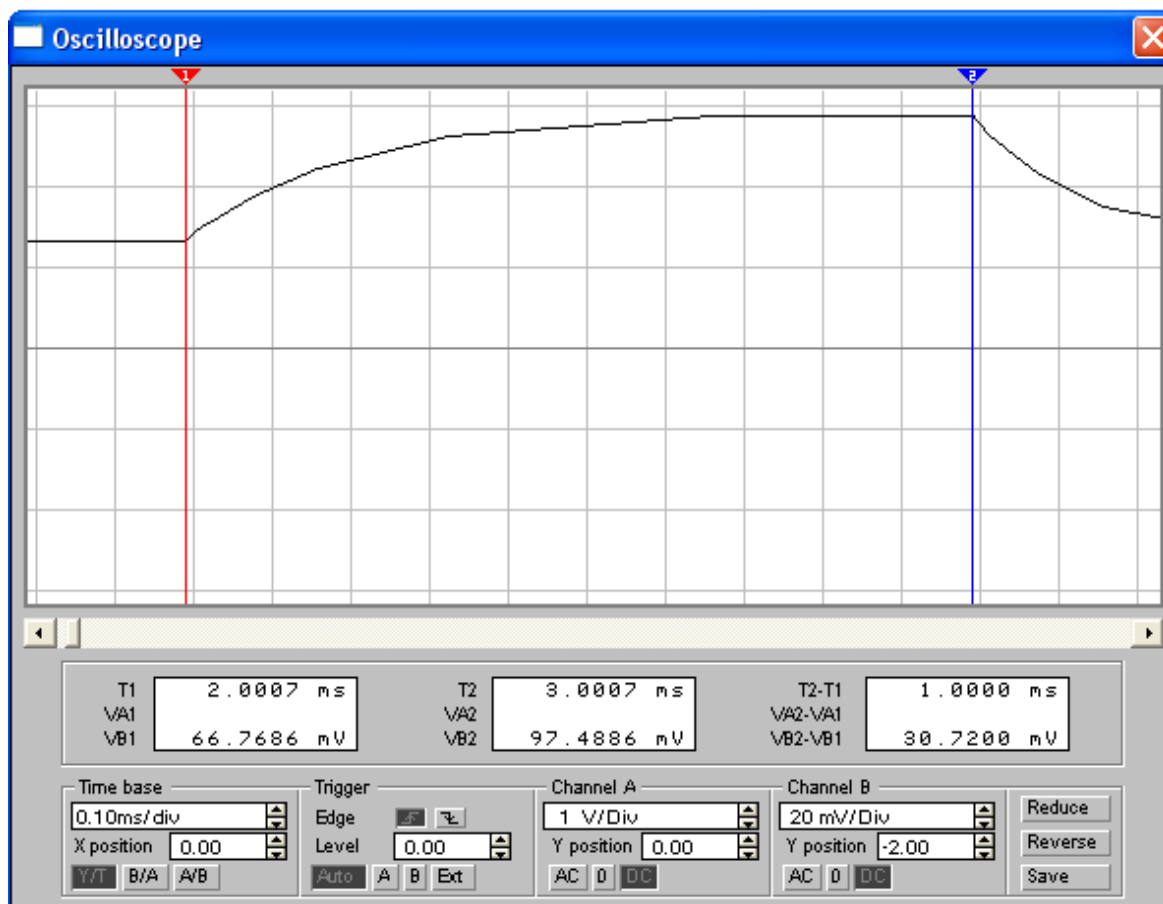


Рис. 4.20

На рис. 4.20 показание $VB1 = 66.7686 \text{ mV}$ равно значению напряжения $u_{R0}(0_-)$, что соответствует начальному значению тока в цепи до коммутации $i(0_-) = 67 \text{ mA}$.

Переместим синий курсор 2 осциллографа на тот участок осциллограммы, где ток через индуктивность примерно достиг своего установившегося значения 100 мА (на рис. 4.19 – $VB2 = 97.4886 \text{ mV}$ равно значению напряжения $u_{R0}(5\tau)$ в милливольтгах, которое совпадает со значением тока $i(5\tau)$ в миллиамперах, умноженному на 1 Ом).

По результатам эксперимента рассчитаем значение напряжения $u_{R0}(\tau)$ по истечении времени $t = \tau$ следующим образом:

$$u_{R0}(\tau) \approx VB2 - \left(\frac{VB2 - VB1}{2,7} \right) \approx 86 \text{ мВ}.$$

Для экспериментального определения значения τ переместим синий курсор 2 осциллографа таким образом, чтобы показания среднего цифрового индикатора $VB2$ наиболее близко совпадали с расчетным значением 86 мВ (на рис. 4.21 – $VB2 = 86.0410 \text{ мВ}$).

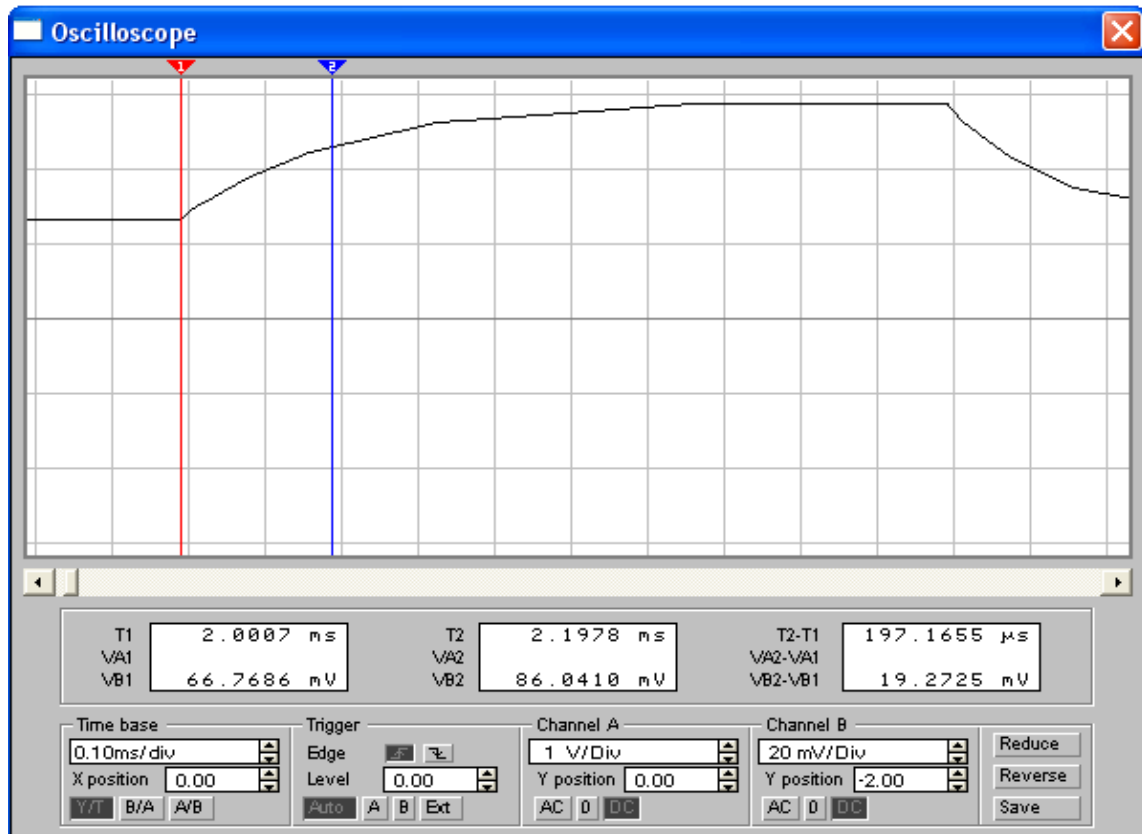


Рис. 4.21

Результат измерения постоянной времени τ снимем с крайнего правого цифрового индикатора (на рис. 4.20 – $T_2 - T_1 = 197.1655 \mu s$), что совпадает с расчетным значением 200 мкс с погрешностью порядка 1,5 %.

4.8. Моделирование переходного процесса в одноконтурной электрической цепи второго порядка

При расчете переходных процессов в относительно сложных электрических цепях, например, с двумя и более реактивными элементами, целесообразно автоматизировать расчет, например, с помощью программы MathCad. По результатам расчета в этой же программе можно построить полученные графики зависимости.

Рассчитаем переходный процесс для цепи с последовательным соединением R , L , C элементов (см. рис. 4.8) для следующих значений параметров элементов: $E = 1\text{В}$; $L = 10\text{ мГн}$; $C = 1\text{ мкФ}$.

При данных значениях параметров собственная резонансная частота данного последовательного колебательного контура равна

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0,01 \cdot 0,000001}} = 10000 \text{ рад/с.}$$

В разд. 4.5 показано, что характер переходного процесса в рассматриваемой цепи зависит от значения сопротивления R по отношению к ее критическому сопротивлению $R_{\text{кр}}$. Рассчитаем значение критического сопротивления следующим образом:

$$R_{\text{êð}} = 2\sqrt{L/C} = 2\rho = 2\sqrt{\frac{0,01}{0,000001}} = 200 \text{ Î ì .}$$

Рассчитаем переходный процесс в данной цепи для трех различных значений сопротивления R : больше, меньше или равно $R_{\text{êð}}$.

На рис. 4.22 приведена программа, записанная в среде MathCad, с помощью которой проведен расчет для случая вещественных разных корней и построен график зависимости $i(t)$ в соответствии с выражением (4.23).

По оси абсцисс на графике отложено время в секундах в диапазоне от 0 до $5\tau_1$, а по оси ординат – ток в амперах.

При $R = 2 R_{\text{кр}} = 400\text{ Ом}$ коэффициент затухания для этой цепи равен $\delta = \frac{R}{2L} = \frac{400}{0,02} = 20000 \text{ с}^{-1}$, а соответствующее характеристическое уравнение имеет два отрицательных вещественных разных корня (4.20):

$$p_1 = -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -2679 \text{ с}^{-1};$$

$$p_2 = -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -37320 \text{ с}^{-1}.$$

Корни вещественные разные

$$R := 400 \quad L := 0.01 \quad C := 0.000001 \quad E := 1$$

$$\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \omega_0 = 1 \times 10^4$$

$$\delta := \frac{R}{2 \cdot L} \quad \delta = 2 \times 10^4 \quad RKP := 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad RKP = 200$$

$$P1 := -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad P2 := -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

$$P1 = -2.679 \times 10^3 \quad P2 = -3.732 \times 10^4$$

$$\tau_1 := \frac{-1}{P1} \quad \tau_1 = 3.732 \times 10^{-4}$$

$$t := 0, \frac{\tau_1}{10000} .. 5 \cdot \tau_1 \quad \tau_2 := \frac{-1}{P2} \quad \tau_2 = 2.679 \times 10^{-5}$$

$$i(t) := \frac{E}{2 \cdot L \cdot \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}} \cdot \left(e^{\frac{-t}{\tau_1}} - e^{\frac{-t}{\tau_2}} \right)$$

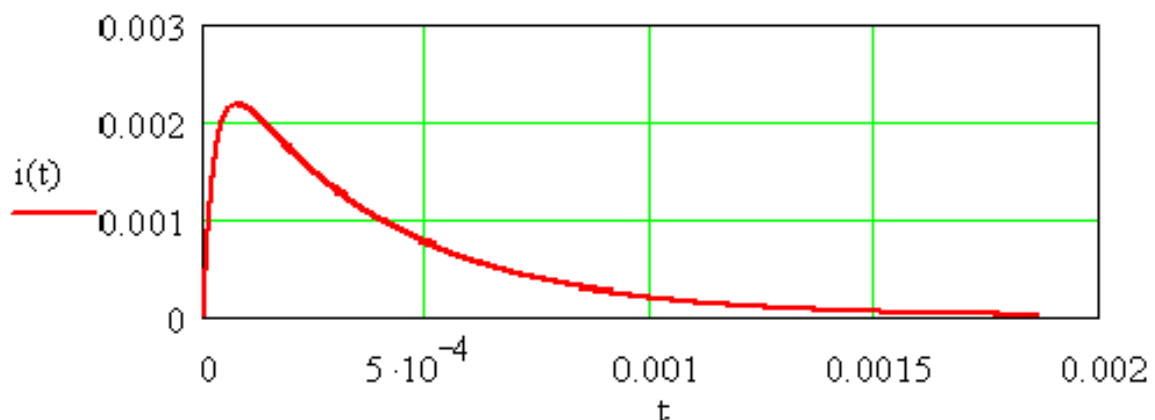


Рис. 4.22

При этом соответствующие постоянные времени цепи равны

$$\tau_1 = \frac{-1}{\delta_1} = 373,2 \text{ нс};$$

$$\tau_2 = \frac{-1}{\delta_2} = 26,79 \text{ нс}.$$

На рис. 4.23 приведен пример моделирования данной цепи в программе Electronics Workbench.

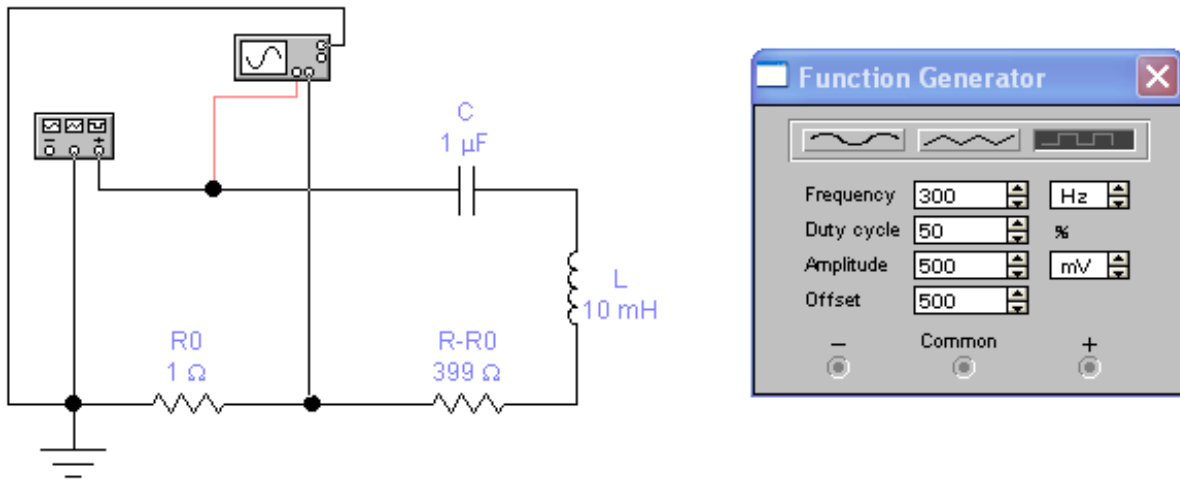


Рис. 4.23

При моделировании последовательно с сопротивлением, равным $R - R_0$, включено сопротивление $R_0 = 1 \text{ Ом}$, которое предназначено для наблюдения на экране осциллографа сигнала u_{R_0} в милливольтках, соответствующего по значению току $i(t)$ в миллиамперах. В сумме оба сопротивления равны сопротивлению $R = 400 \text{ Ом}$ (на схеме рис. 4.8).

Передний фронт прямоугольных импульсов с выхода функционального генератора соответствует моменту замыкания ключа.

Установим частоту импульсов генератора порядка:

$$f = \frac{1}{10\tau_1} \approx 300 \text{ Гц} - \text{Frequency} = 300 \text{ Hz}.$$

Подберем масштаб изображения на экране осциллографа, используя временную и амплитудную развертки осциллографа, а также смещение по оси X , указанные на рис. 4.24.

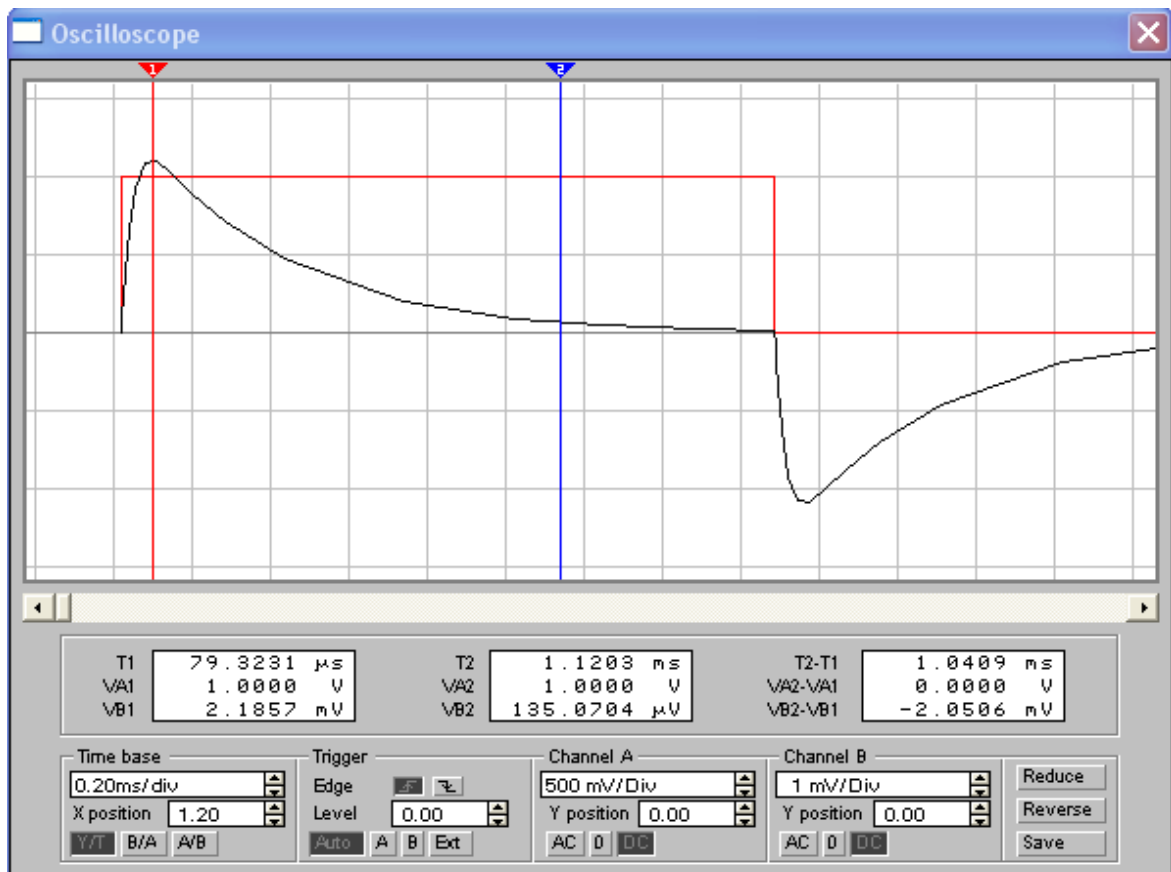


Рис. 4.24

Сравнение теоретического и экспериментального графиков зависимости $i(t)$ показывает, что они совпадают. Напомним, что такой переходный процесс называется апериодическим.

При $R = R_{кр} = 200$ Ом характеристическое уравнение для этой цепи имеет два одинаковых отрицательных вещественных корня:

$$p = -\frac{R}{2L} = -\delta = -10\,000\text{ с}^{-1}.$$

При этом соответствующая постоянная времени для этой цепи будет равна $\tau = \frac{-1}{\delta} = 100\text{ мкс}$.

На рис. 4.25 приведена программа, записанная в среде MathCad, с помощью которой проведен расчет для случая равных корней и построен график зависимости $i(t)$ в соответствии с выражением (4.24).

По оси абсцисс графика отложено время в секундах в диапазоне от 0 до 5τ , а по оси ординат – ток в амперах.

На рис. 4.26 приведен пример моделирования данной цепи в программе Electronics Workbench.

При моделировании последовательно с сопротивлением $R-R0$ включено сопротивление $R0 = 1$ Ом. В сумме оба сопротивления равны сопротивлению $R = 200$ Ом (на схеме рис. 4.8).

Корни вещественные равные

$$L := 0.01$$

$$C := 0.000001$$

$$E := 1$$

$$RKP := 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$RKP = 200$$

$$R := 200$$

$$\omega_0 := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

$$\delta := \frac{R}{2 \cdot L}$$

$$\tau := \frac{1}{\delta}$$

$$\omega_0 = 1 \times 10^4$$

$$\delta = 1 \times 10^4$$

$$\tau = 1 \times 10^{-4}$$

$$t := 0, \frac{\tau}{100} .. 5 \cdot \tau$$

$$i(t) := \frac{E}{L} \cdot t \cdot e^{-\delta \cdot t}$$

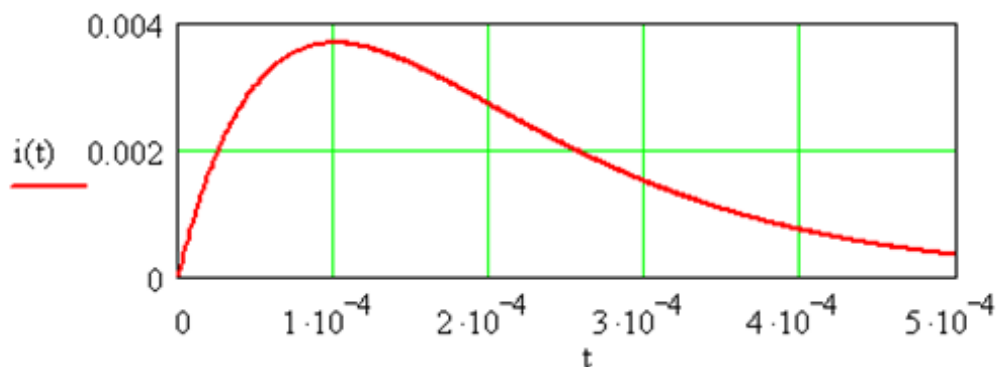


Рис. 4.25

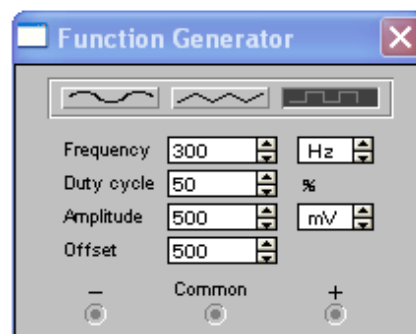
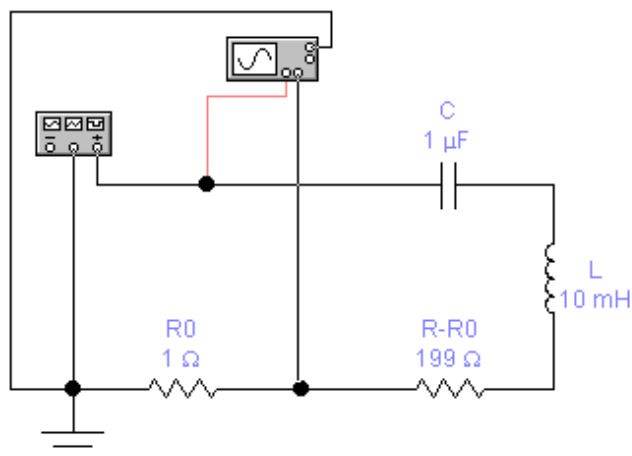


Рис. 4.26

Подберем масштаб изображения на экране осциллографа, используя временную и амплитудную развертки осциллографа, а также смещение по временной оси, указанные на рис. 4.27.

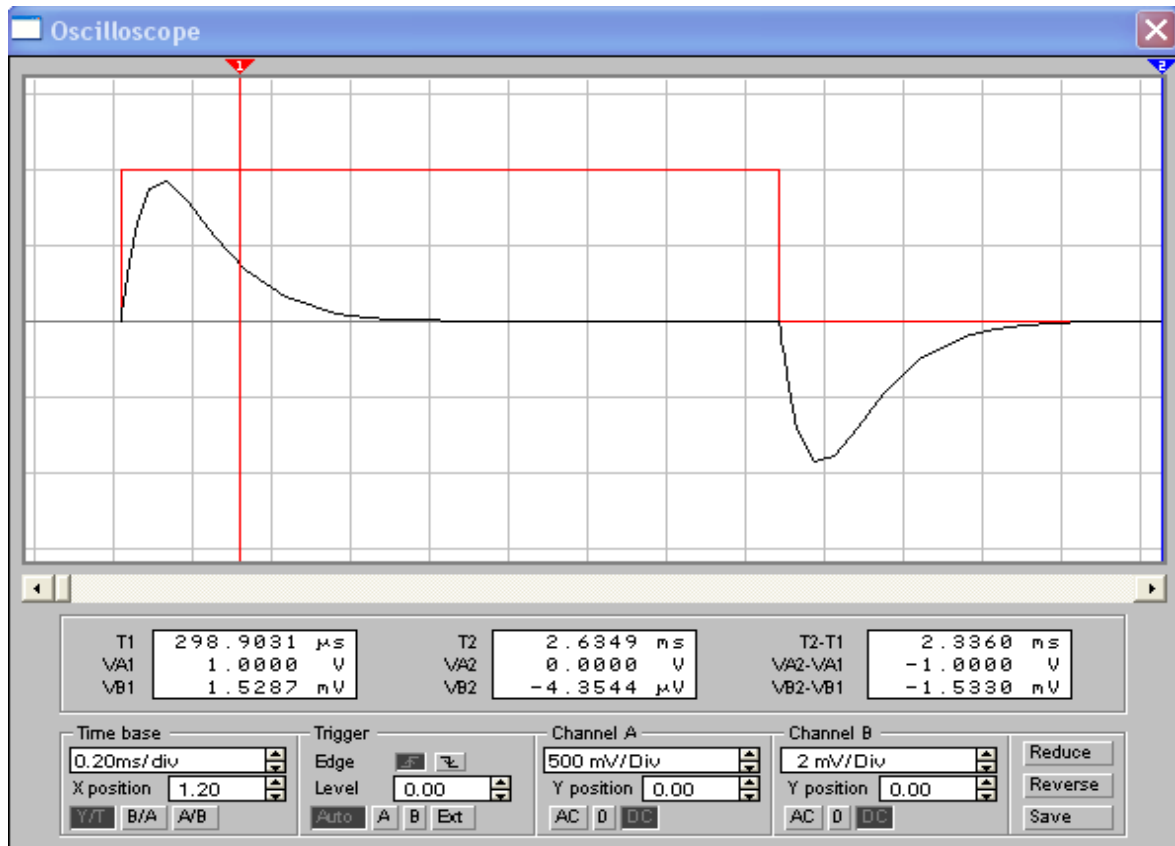


Рис. 4.27

Сравнение теоретического и экспериментального графиков зависимости $i(t)$ показывает, что они совпадают.

Напомним, что такой переходный процесс называется апериодическим критическим.

При $R = 0,5 R_{кр} = 40$ Ом коэффициент затухания будет равен

$$\delta = \frac{R}{2L} = \frac{40}{0,02} = 2000 \text{ с}^{-1}.$$

Найдем постоянную времени цепи для огибающей графика (см. рис. 4.11), определяющую скорость затухания переходного процесса:

$$\tau = \frac{-1}{\delta} = 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ с}.$$

В случае $R < R_{кр}$ характеристическое уравнение будет иметь два комплексно-сопряженных корня с отрицательной вещественной частью $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{\hat{n}}$, где частота свободных колебаний в цепи равна

$$\omega_{\hat{n}} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = 9798 \text{ рад/с}.$$

Период свободных колебаний найдем как

$$T_{\text{н\acute{a}}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{н\acute{a}}}} = 6,413 \cdot 10^{-4} \text{ с.}$$

На рис. 4.28 приведена программа, записанная в среде MathCad, с помощью которой проверена правильность расчета для случая комплексно-сопряженных корней и построен график зависимости $i(t)$ в соответствии с выражением (4.25). По оси абсцисс графика отложено время в секундах в диапазоне от 0 до 5τ , а по оси ординат – ток в миллиамперах.

Корни комплексно-сопряженные

$$E := 1 \quad L := 0.01 \quad C := 0.000001$$

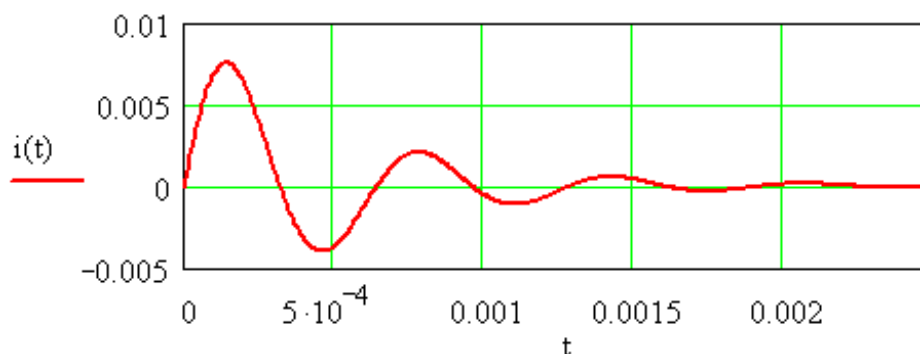
$$RKP := 2 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad RKP = 200 \quad R := 40$$

$$\delta := \frac{R}{2 \cdot L} \quad \tau := \frac{1}{\delta} \quad \omega_0 := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}}$$

$$\delta = 2 \times 10^3 \quad \tau = 5 \times 10^{-4} \quad \omega_0 = 1 \times 10^4$$

$$\omega_{CB} := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad \omega_{CB} = 9.798 \times 10^3$$

$$t := 0, \frac{\tau}{100} .. 5 \cdot \tau \quad i(t) := \frac{E \cdot e^{-\delta \cdot t}}{L \cdot \omega_{CB}} \cdot \sin(\omega_{CB} \cdot t)$$



$$T_{cb} := \frac{2 \cdot \pi}{\omega_{CB}} \quad T_{cb} = 6.413 \times 10^{-4}$$

Рис. 4.28

На рис. 4.29 приведен пример моделирования данной цепи в программе Electronics Workbench. При моделировании последовательно с сопротивлением R – R_0 включено сопротивление $R_0 = 1$ Ом. В сумме оба сопротивления равны сопротивлению $R = 40$ Ом (на схеме рис. 4.8).

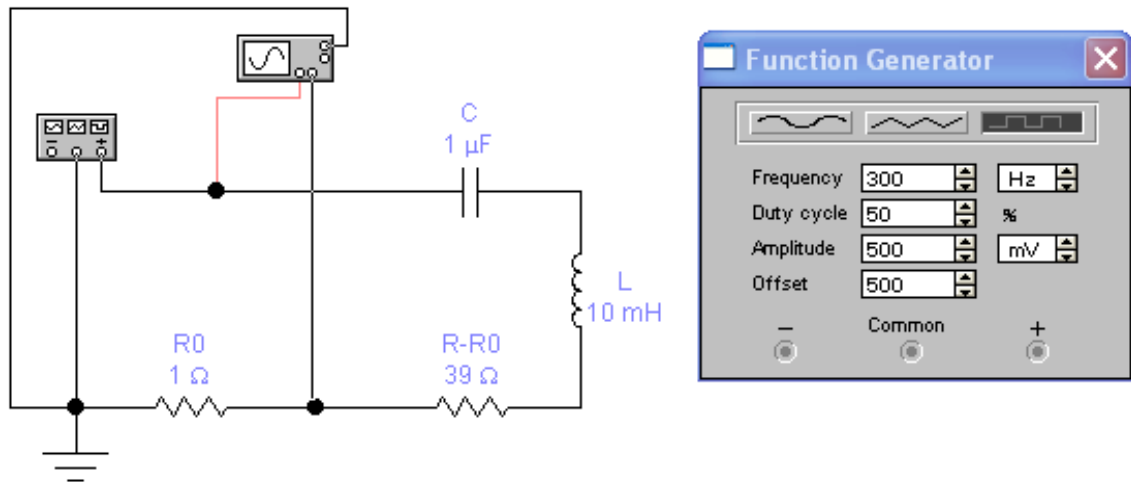


Рис. 4.29

Подберем масштаб изображения на экране осциллографа, используя временную и амплитудную развертки осциллографа, а также смещение по временной оси, указанные на рис. 4.30.

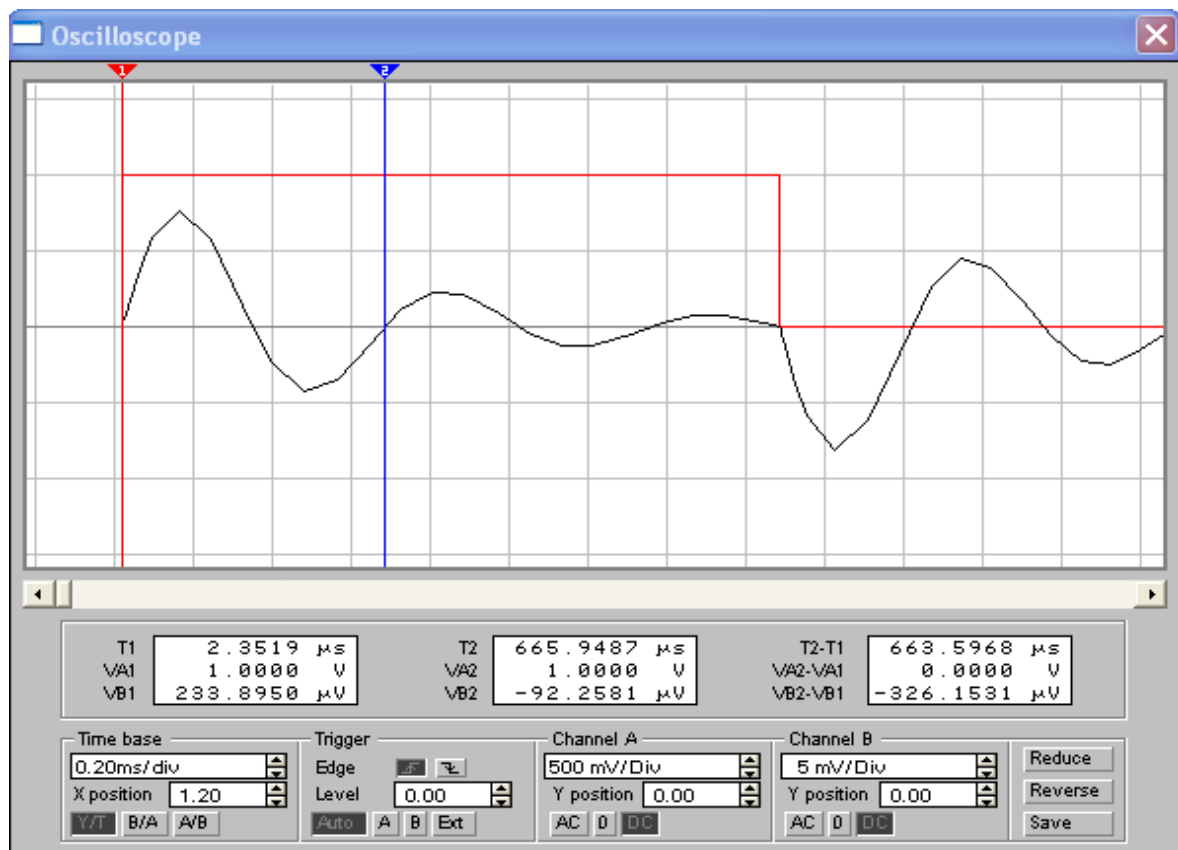


Рис. 4.30

Сравнение теоретического и экспериментального графиков зависимости $i(t)$ показывает, что они совпадают. Напомним, что такой переходный процесс называется колебательным затухающим.

Для экспериментального определения значения периода свободных колебаний (см. рис. 4.30) совместим красный курсор 1 осциллографа с передним фронтом импульса. Синий курсор 2 переместим в точку перехода через нуль второй положительной полуволны сигнала u_{R0} таким образом, чтобы показания среднего цифрового индикатора VB2 наиболее близко совпадали со значением 0 мВ (на рис. 4.30 – $VB2 = -92.2581 \mu V$).

Результат измерения периода свободных колебаний снимем с крайнего правого цифрового индикатора (на рис. 4.30 – $T_2 - T_1 = 663.5968 \mu s$).

Сравнивая расчетное значение периода свободных колебаний (на рис. 4.28 $T_{cb} = 6.413 \cdot 10^{-4}$) со значением, полученным экспериментально, можно сделать вывод, что они совпадают с погрешностью порядка 3 %.

4.9. Моделирование переходного процесса в разветвленной электрической цепи второго порядка

Рассчитать классическим методом $i_L(t)$ для схемы рис. 4.31, если до коммутации ключ был замкнут. При расчете использовать следующие значения параметров элементов: $E = 1V$; $L = 1 мГн$; $R_1 = 10 Ом$; $C = 10 мкФ$.

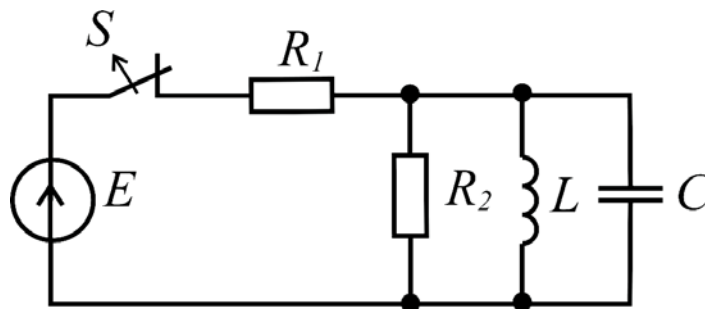


Рис. 4.31

1) Найдем независимые начальные условия для цепи до коммутации, с учетом того, что на постоянном токе $X_L = 0$ и R_2 и C закорочены:

$$\text{– ток через индуктивность } i_L(0_+) = i_L(0_-) = \frac{E}{R_1} = \frac{1}{10} = 0,1 \text{ А};$$

– напряжение на емкости $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$ В.

2) Операторное сопротивление для этой цепи равно

$$Z(p) = \frac{1}{pC} + \frac{R_2 pL}{R_2 + pL} = \frac{R_2 + pL + p^2 R_2 CL}{(R_2 + pL)pC} = 0.$$

3) Откуда получим характеристическое уравнение цепи:

$$R_2 + pL + p^2 R_2 CL = 0 \Rightarrow p^2 + \frac{1}{R_2 C} p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = -\frac{1}{2R_2 C} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2R_2 C}\right)^2 - \frac{1}{LC}}. \quad (4.26)$$

Определим, при каком сопротивлении R_2 дискриминант в выражении (4.26) равен нулю, и обозначим его $R_{эд}$:

$$R_{эд} = \frac{1}{2} \sqrt{L/C}.$$

Так как характеристическое уравнение имеет два корня, то для случая $R_2 \neq R_{эд}$ или $R_2 = R_{эд}$ свободная составляющая тока в соответствии с (4.3) или (4.4) будет равна соответственно

$$i_{Lc\hat{a}} = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

или

$$i_{Lc\hat{a}} = e^{pt} (\dot{A}_1 + A_2 t).$$

4) Принужденная составляющая тока в данной цепи $i_{Lпр}$ будет равна нулю, так как в цепи после коммутации отсутствуют источники энергии.

5) Таким образом, общее решение для тока $i_L(t)$ в случае $R_2 \neq R_{эд}$ или $R_2 = R_{эд}$ можно представить в соответствии с (4.5) или (4.6) следующим образом:

$$i_L = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

или

$$i_L = e^{pt} (\dot{A}_1 + A_2 t).$$

б) Для нахождения постоянных интегрирования A_1 и A_2 в случае разных корней составим систему уравнений, аналогичную (4.7).

С учетом того, что для данной цепи порядок дифференциального уравнения $n = 2$, получим

$$\begin{cases} A_2 + A_1 = i_L(0_+) \\ p_2 A_2 + p_1 A_1 = \frac{di_L(0_+)}{dt} \end{cases} \quad (4.27)$$

Так как элементы L и C включены параллельно, то для любого момента времени, в том числе и сразу же после коммутации, на них падает одинаковое напряжение, равное

$$L \frac{di_L(0_+)}{dt} = u_C(0_+).$$

Из последнего выражения найдем зависимое начальное условие для рассматриваемой цепи:

$$\frac{di_L(0_+)}{dt} = \frac{u_C(0_+)}{L} = \frac{0}{L} = 0.$$

Система (4.27) может быть записана в матричной форме (2.8) как

$$\Delta \cdot \mathbf{A} = \mathbf{C},$$

где Δ – определитель системы, который равен $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix}$ – для случая разных корней характеристического уравнения или $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_1 & 1 \end{bmatrix}$ – для случая кратных корней характеристического уравнения;

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \text{ – матрица-столбец постоянных интегрирования;}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} i_L(0_+) \\ \frac{di_L(0_+)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ – матрица-столбец свободных членов.}$$

Решение системы (4.27) можно представить в матричной форме:

$$\mathbf{A} = \Delta^{-1} \cdot \mathbf{C}.$$

Полученная система может быть легко решена с помощью программы MathCad.

На рис. 4.32 приведена программа, написанная в среде MathCad, реализующая описанный выше алгоритм для случая, когда сопротивление R_2 меньше $R_{эд}$ в пять раз.

$$\begin{aligned}
 & \text{ORIGIN} := 1 \quad L := 0.001 \quad C := 0.00001 \quad R1 := 10 \\
 & E := 1 \quad RKP := 0.5 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad RKP = 5 \quad R2 := 1 \\
 & iL0 := \frac{E}{R1} \quad iL0 = 0.1 \quad uC0 := 0 \quad iLpr := 0 \\
 & \delta := \frac{1}{2 \cdot R2 \cdot C} \quad \delta = 5 \times 10^4 \quad \omega0 := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \omega0 = 1 \times 10^4 \\
 & p1 := -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega0^2} \quad p2 := -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega0^2} \\
 & p1 = -1.01 \times 10^3 \quad p2 = -9.899 \times 10^4 \\
 & \Delta := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p1 & p2 \end{pmatrix} & \text{if } p1 \neq p2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p1 & 1 \end{pmatrix} & \text{otherwise} \end{cases} \quad CC := \begin{pmatrix} iL0 - iLpr \\ \frac{uC0}{L} \end{pmatrix} \quad A := \Delta^{-1} \cdot CC \\
 & \tau1 := \frac{-1}{p1} \quad \tau1 = 9.899 \times 10^{-4} \quad A = \begin{pmatrix} 0.101 \\ -1.031 \times 10^{-3} \end{pmatrix} \\
 & t := 0, \frac{\tau1}{10} .. 5 \cdot \tau1 \quad iL(t) := \begin{cases} iLpr + A_1 \cdot e^{p1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p2 \cdot t} & \text{if } p1 \neq p2 \\ iLpr + A_1 \cdot e^{p1 \cdot t} + t \cdot A_2 \cdot e^{p2 \cdot t} & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{aligned}$$

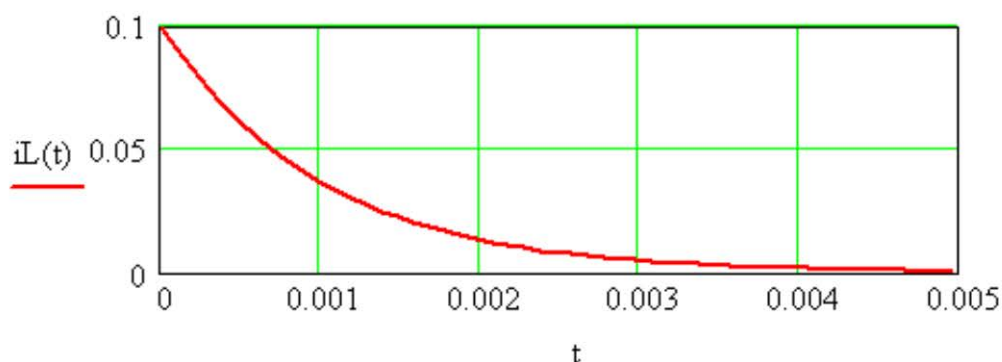


Рис. 4.32

В программе приняты следующие обозначения:

- критическое сопротивление цепи – R_{KR} ;
- ток через индуктивность до коммутации – i_{L0} ;
- напряжение на емкости до коммутации – u_{C0} ;
- принужденное значение тока через индуктивность i_{Lpr} .

При вычислении главного определителя Δ системы (4.27) и при задании аналитического выражения для $i_L(t)$ используются программные блоки, которые создаются с помощью команды *Add Line*.

В первом программном блоке при выполнении условия $p_1 \neq p_2$ главный определитель $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ p_1 & p_2 \end{bmatrix}$, иначе $\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_1 & 1 \end{bmatrix}$.

Во втором программном блоке при выполнении условия $p_1 \neq p_2$ значения функции $i_L(t)$ в амперах вычисляются в соответствии с выражением (4.5), иначе – в соответствии с выражением (4.6). Значения аргумента функции $i_L(t)$ в секундах задаются с помощью ранжированной переменной t , которая изменяется в диапазоне от нуля до $5\tau_1$ с шагом, равным $\frac{\tau_1}{10}$.

На рис. 4.33 приведен пример моделирования рассматриваемой цепи в EWB, а на рис. 4.34 – осциллограмма $i_L(t)$.

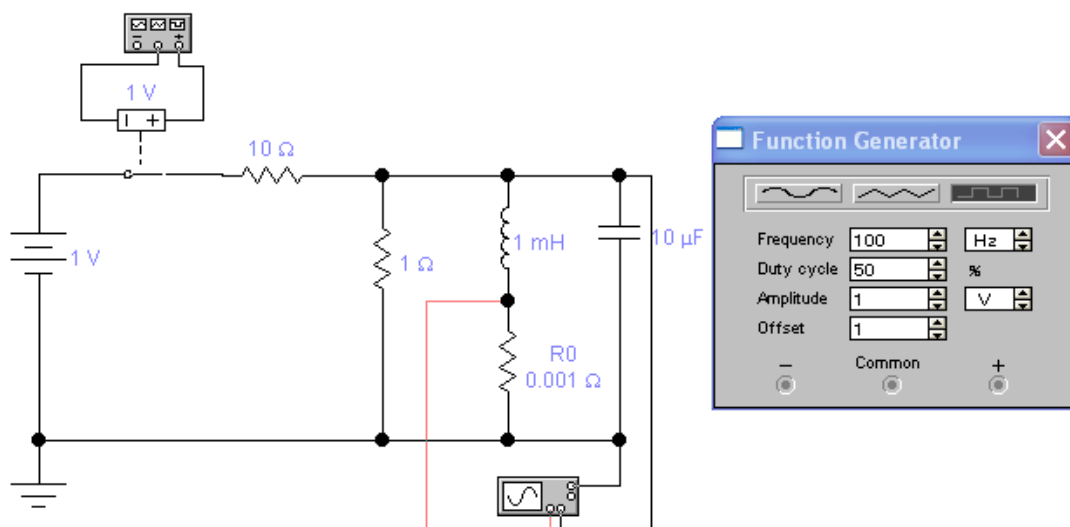


Рис. 4.33

При моделировании последовательно с индуктивностью L включено сопротивление $R_0 = 0,001$ Ом, которое предназначено для наблюдения на экране осциллографа сигнала u_{R0} в микровольтах, соответствующего по значению току $i_L(t)$ в миллиамперах, уменьшенному в 1000 раз.

Подберем масштаб изображения на экране осциллографа, используя временную и амплитудную развертки осциллографа, указанные на рис. 4.34.

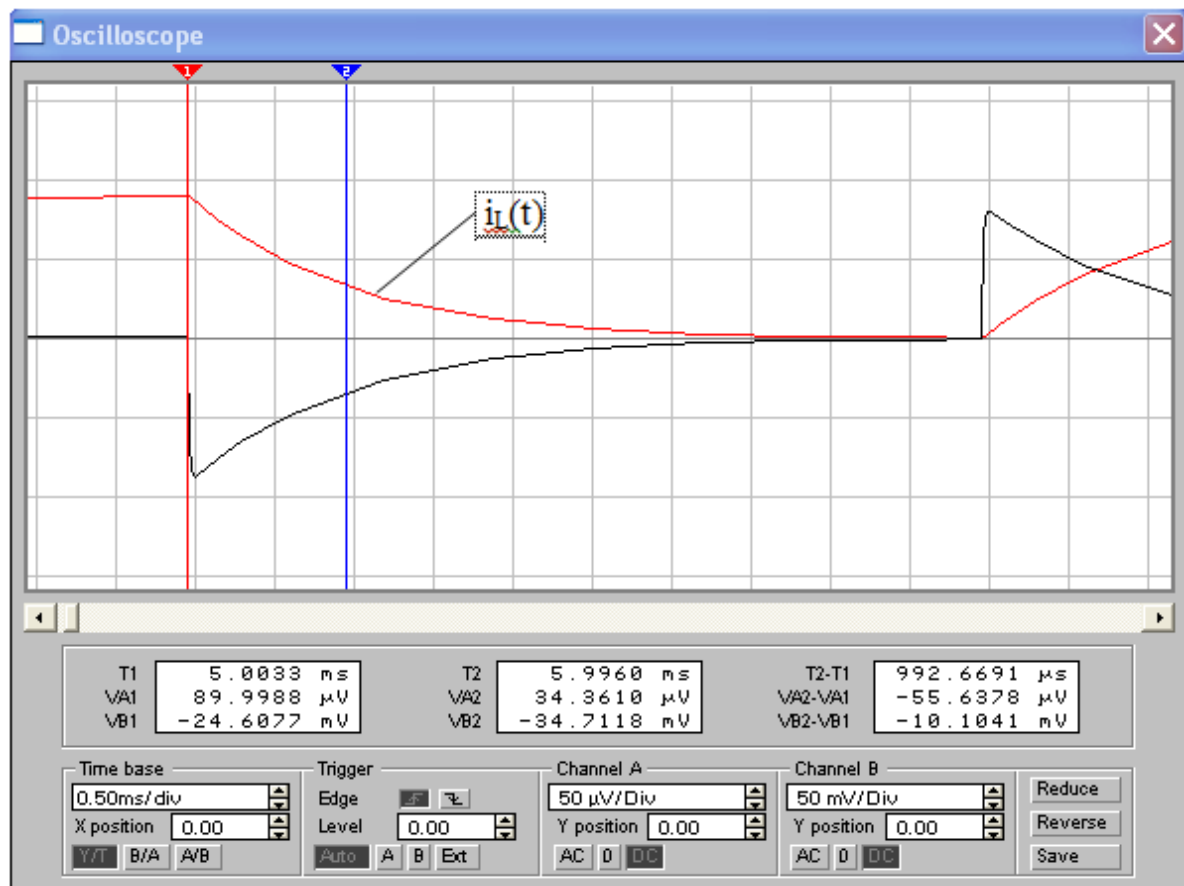


Рис. 4.34

Сравнение теоретического и экспериментального графиков зависимости $i_L(t)$ показывает, что они совпадают.

Напомним, что такой переходный процесс называется аперiodическим.

На рис. 4.35, 4.36 приведены программы, написанные в среде MathCad, с помощью которых рассчитаны значения токов $i_L(t)$ и построены соответствующие графики зависимости для двух случаев, когда сопротивления $R_2 = R_{эд}$ и $R_2 = 4R_{эд}$.

На рис. 4.37 приведен пример моделирования данной цепи в программе Electronics Workbench для случая, когда $R_2 = R_{эд}$, а на рис. 4.38 показана соответствующая осциллограмма $i_L(t)$.

$$\begin{aligned}
 \text{ORIGIN} &:= 1 & L &:= 0.001 & C &:= 0.00001 & R1 &:= 10 \\
 E &:= 1 & RKP &:= 0.5 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} & RKP &= 5 & R2 &:= 5 \\
 iL0 &:= \frac{E}{R1} & iL0 &= 0.1 & uC0 &:= 0 & iLpr &:= 0 \\
 \delta &:= \frac{1}{2 \cdot R2 \cdot C} & \delta &= 1 \times 10^4 & \omega 0 &:= \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} & \omega 0 &= 1 \times 10^4 \\
 p1 &:= -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega 0^2} & p2 &:= -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega 0^2} \\
 p1 &= -1 \times 10^4 & p2 &= -1 \times 10^4 \\
 \Delta &:= \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p1 & p2 \end{pmatrix} & \text{if } p1 \neq p2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p1 & 1 \end{pmatrix} & \text{otherwise} \end{cases} & CC &:= \begin{pmatrix} iL0 - iLpr \\ \frac{uC0}{L} \end{pmatrix} & A &:= \Delta^{-1} \cdot CC \\
 \tau 1 &:= \frac{-1}{p1} & \tau 1 &= 1 \times 10^{-4} & A &= \begin{pmatrix} 0.1 \\ 1 \times 10^3 \end{pmatrix} \\
 t &:= 0, \frac{\tau 1}{10} .. 5 \cdot \tau 1 & iL(t) &:= \begin{cases} iLpr + A_1 \cdot e^{p1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p2 \cdot t} & \text{if } p1 \neq p2 \\ iLpr + A_1 \cdot e^{p1 \cdot t} + t \cdot A_2 \cdot e^{p2 \cdot t} & \text{otherwise} \end{cases}
 \end{aligned}$$

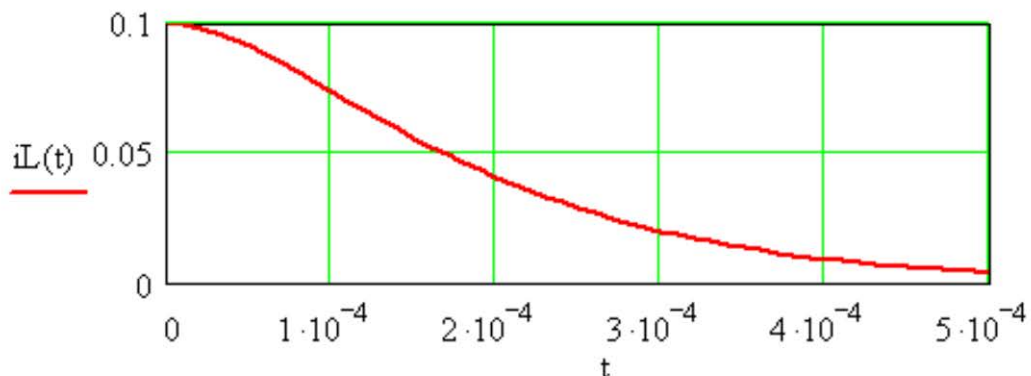
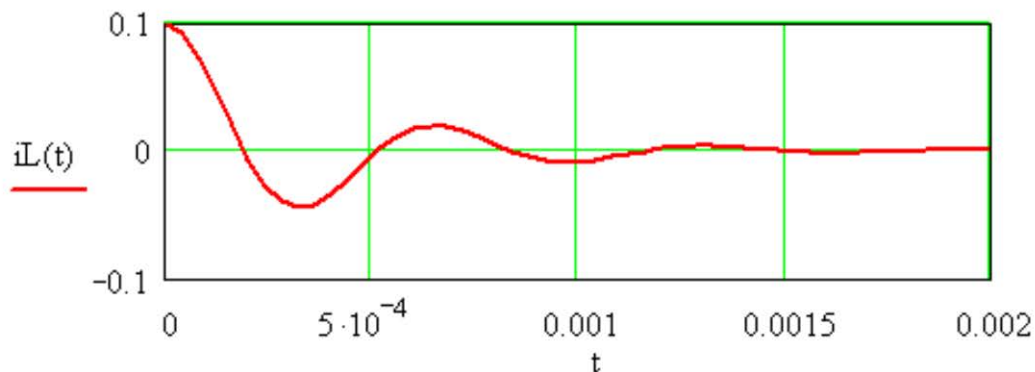


Рис. 4.35

$$\begin{aligned}
& \text{ORIGIN} := 1 \quad L := 0.001 \quad C := 0.00001 \quad R1 := 10 \\
& E := 1 \quad RKP := 0.5 \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \quad RKP = 5 \quad R2 := 20 \\
& iL0 := \frac{E}{R1} \quad iL0 = 0.1 \quad uC0 := 0 \quad iLpr := 0 \\
& \delta := \frac{1}{2 \cdot R2 \cdot C} \quad \delta = 2.5 \times 10^3 \quad \omega0 := \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \quad \omega0 = 1 \times 10^4 \\
& p1 := -\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega0^2} \quad p2 := -\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega0^2} \\
& p1 = -2.5 \times 10^3 + 9.682i \times 10^3 \quad p2 = -2.5 \times 10^3 - 9.682i \times 10^3 \\
& \Delta := \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ p1 & p2 \end{pmatrix} & \text{if } p1 \neq p2 \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p1 & 1 \end{pmatrix} & \text{otherwise} \end{cases} \quad CC := \begin{pmatrix} iL0 - iLpr \\ \frac{uC0}{L} \end{pmatrix} \quad A := \Delta^{-1} \cdot CC \\
& \tau := \frac{1}{\delta} \quad \tau = 4 \times 10^{-4} \quad A = \begin{pmatrix} 0.05 - 0.013i \\ 0.05 + 0.013i \end{pmatrix} \\
& t := 0, \frac{\tau}{10} .. 5 \cdot \tau \quad iL(t) := \begin{cases} iLpr + A_1 \cdot e^{p1 \cdot t} + A_2 \cdot e^{p2 \cdot t} & \text{if } p1 \neq p2 \\ iLpr + A_1 \cdot e^{p1 \cdot t} + t \cdot A_2 \cdot e^{p2 \cdot t} & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \omega_{CB} := \sqrt{\omega0^2 - \delta^2} \quad T_{cb} := \frac{2 \cdot \pi}{\omega_{CB}} \quad T_{cb} = 6.489 \times 10^{-4}
\end{aligned}$$

Рис. 4.36

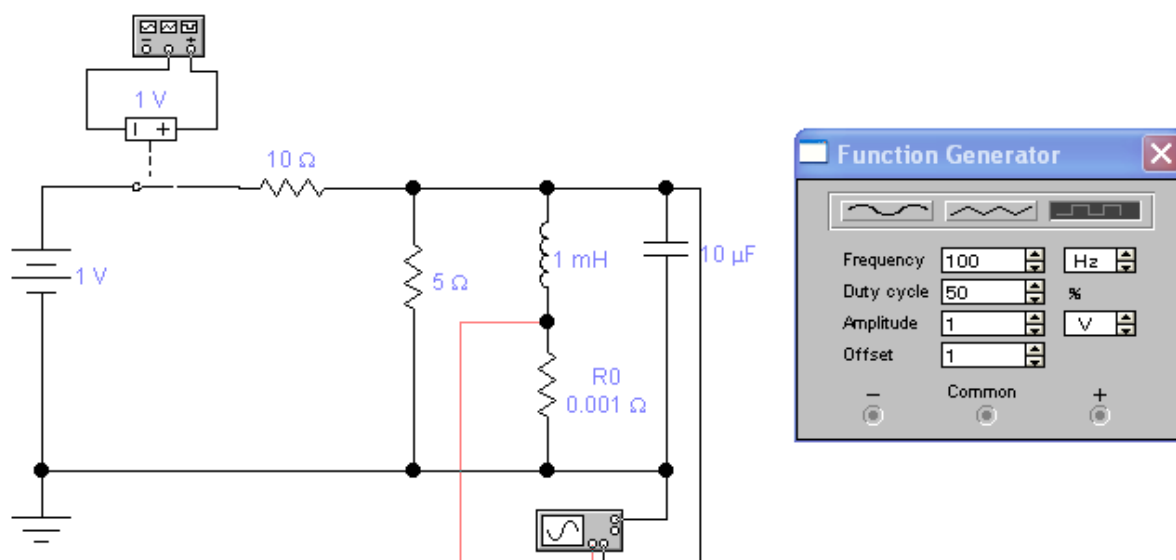


Рис. 4.37

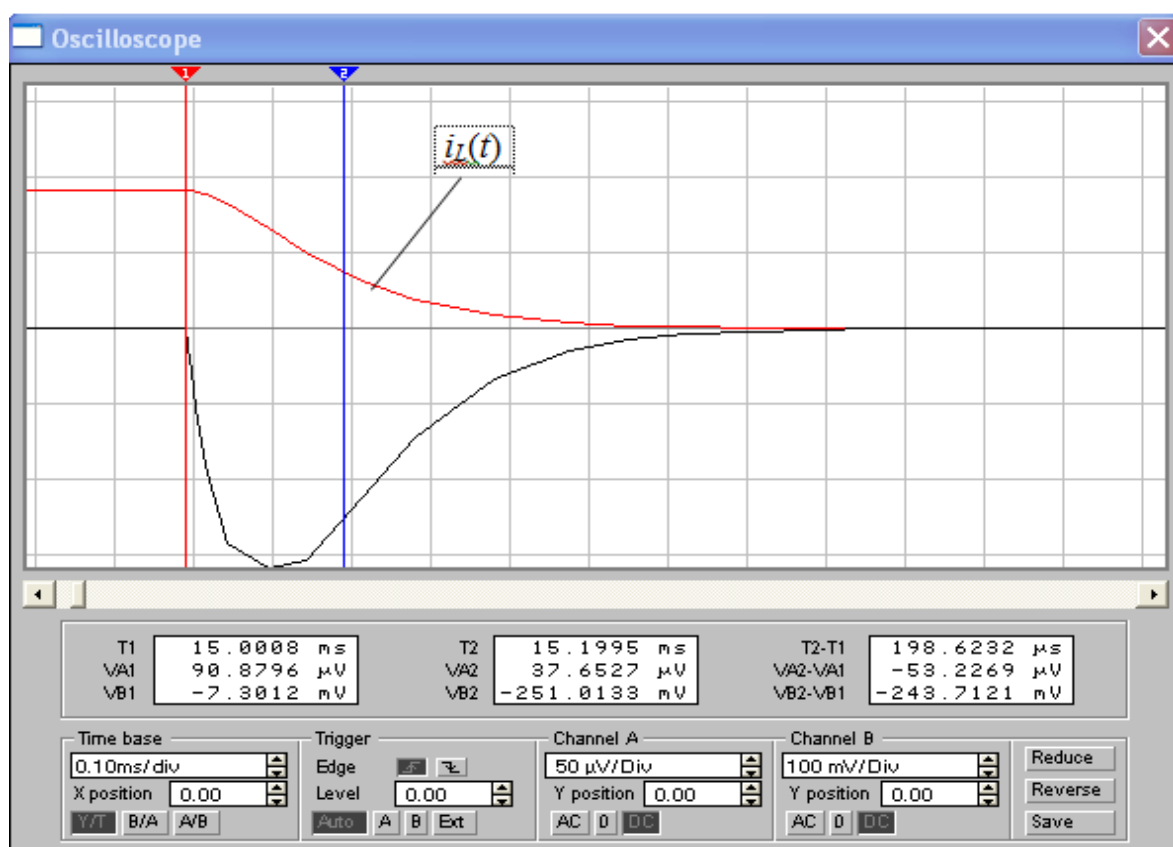


Рис. 4.38

Сравнение теоретического и экспериментального графиков зависимости $i_L(t)$ показывает, что они совпадают. Напомним, что такой переходный процесс называется апериодическим критическим.

На рис. 4.39 приведен пример моделирования данной цепи в программе Electronics Workbench для случая, когда $R_2 = 4R_{эд}$, а на рис. 4.40 показана соответствующая осциллограмма $i_L(t)$.

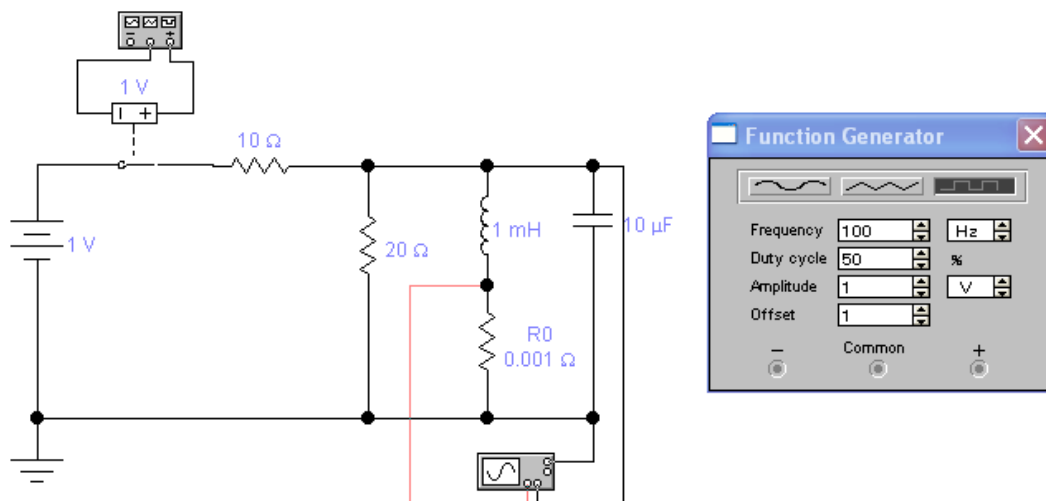


Рис. 4.39

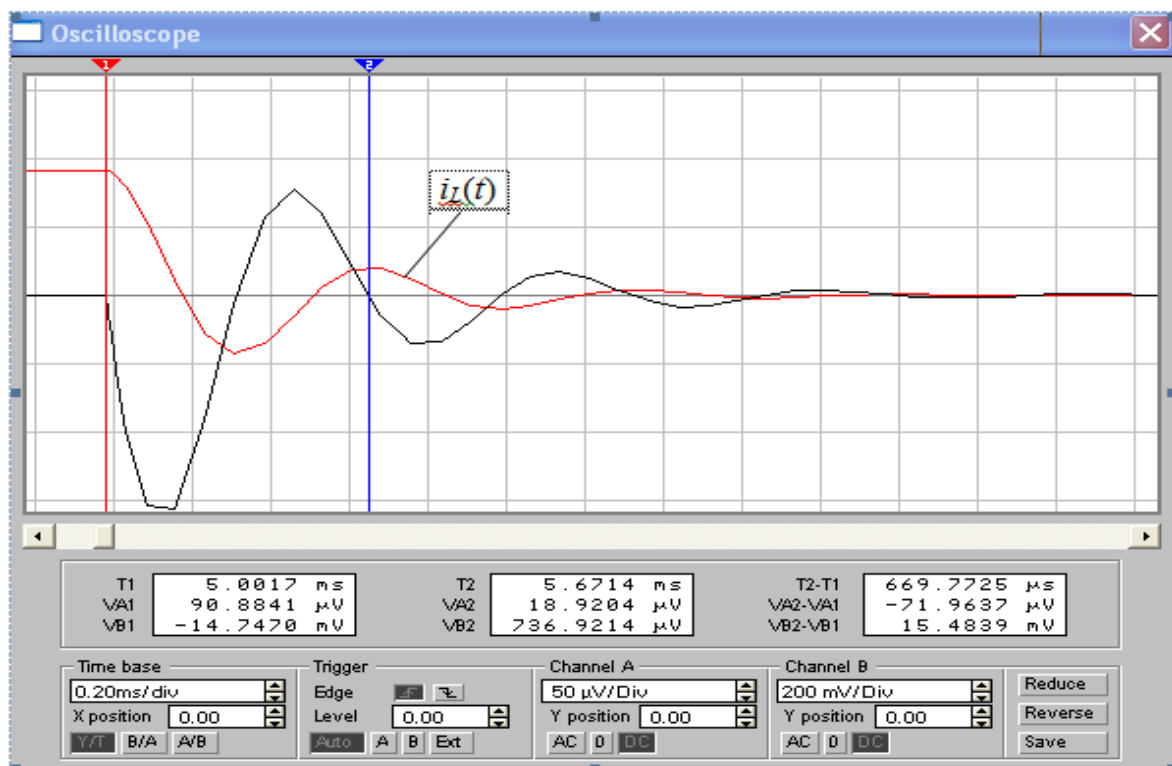


Рис. 4.40

Сравнение теоретического и экспериментального графиков зависимости $i_L(t)$ показывает, что они совпадают.

Напомним, что такой переходный процесс называется колебательным затухающим.

На правом цифровом индикаторе осциллографа можно посмотреть результаты измерения периода свободных колебаний с помощью передвижных курсоров осциллографа (на рис. 4.40 – $T_2 - T_1 = 669.7725 \mu s$). Измеренное значение совпадает с теоретическим значением, рассчитанным в MathCad (на рис. 4.36 – $T_{cb} = 6.489 \cdot 10^{-4} c$).

Список литературы

1. Изучение курса ТЭЦ с использованием систем автоматизации инженерных расчетов : учеб. пособие : в 2 ч. / В. В. Регода, О. Н. Регода. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2010. – Ч. 1.
2. Гурский, Д. Вычисления в MathCad 12 / Д. Гурский, Е. Турбина. – СПб. : Питер, 2006.
3. ГОСТ Р 52002–2003. Электротехника. Термины и определения.
4. Демирчян, К. С. Теоретические основы электротехники : учеб. для вузов / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин. – 4-е изд. – СПб. : Питер, 2006. – Т. 1.
5. Демирчян, К. С. Теоретические основы электротехники : учеб. для вузов / К. С. Демирчян, Л. Р. Нейман, Н. В. Коровкин, В. Л. Чечурин. – 4-е изд. – СПб. : Питер, 2006. – Т. 2.
6. Регода, В. В. К вопросу расчета переходных процессов в измерительных цепях / В. В. Регода, О. Н. Регода // Информационно-измерительная техника : межвуз. сб. науч. тр. – Пенза : Изд-во ПГУ, 2002. – Вып. 26.

Лабораторная работа № 1

Исследование линейных электрических цепей
постоянного тока

Цель работы: исследование простых линейных электрических цепей постоянного тока для проверки законов Ома и Кирхгофа, а также приобретение практических навыков в составлении электрических цепей постоянного тока и по применению измерительных приборов при их экспериментальных исследованиях.

Рабочее задание

1. Предварительный расчет

1.1. Записать для электрической цепи (рис. ПА.1) уравнение по второму закону Кирхгофа; вывести из него выражения для расчета тока I_H и напряжения U_H , падающего на сопротивлении R_H .

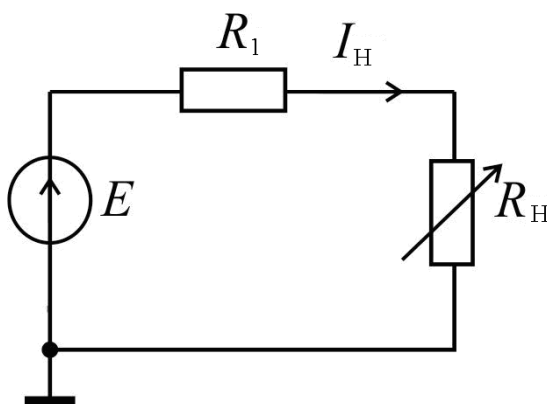


Рис. ПА.1

1.2 Вычислить ток I_H и напряжение U_H для трех значений напряжения источника ЭДС E , в вольтах, равных 0; $0,5E$ и E . При расчете использовать значение сопротивления R_1 и напряжения источника ЭДС E из табл. ПА.1 в зависимости от номера варианта. Принять значение сопротивления $R_H = R_1$. Результаты вычислений занести в табл. ПА.2.

Таблица ПА.1

		Номер варианта							
$E, \text{ В}$	5	1	2	3	4	5	6	7	8
	6	9	10	11	12	13	14	15	16
	7	17	18	19	20	21	22	23	24
	8	25	26	27	28	29	30	31	32
	9	33	34	35	36	37	38	39	40
	10	41	42	43	44	45	46	47	48
	11	49	50	51	52	53	54	55	56
$R_1, \text{ Ом}$		70	80	90	100	110	120	130	140

Таблица ПА.2

$E, \text{ Ом}$	$I_H, \text{ мА}$		$U_H, \text{ В}$	
	Расчет	Эксперимент	Расчет	Эксперимент

1.3. Рассчитать методом преобразования электрическую цепь рис. ПА.2 (токи во всех ветвях I_1, I_2, I_3 и падения напряжения на всех сопротивлениях U_{R1}, U_{R2}, U_{R3}). При расчете использовать значение сопротивления R_1 и напряжения источника ЭДС E из табл. ПА.1

в зависимости от номера варианта. Принять значения сопротивлений $R_2 = R_1$; $R_3 = R_1 + 50 \text{ Ом}$. Результаты вычислений занести в табл. ПА.3.

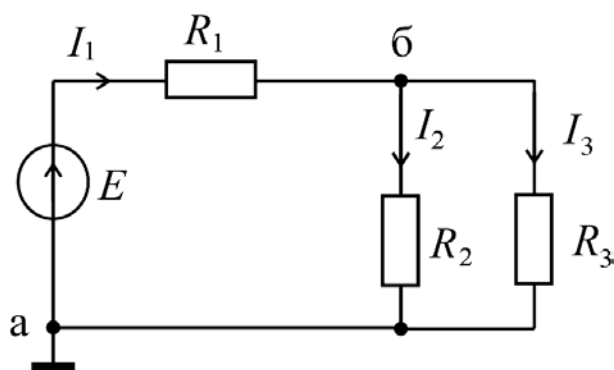


Рис. ПА.2

Таблица ПА.3

Способ определения величин	$E, \text{ В}$	$I_1, \text{ мА}$	$I_2, \text{ мА}$	$I_3, \text{ мА}$	$U_{R1}, \text{ В}$	$U_{R2}, \text{ В}$	$U_{R3}, \text{ В}$
Расчет							
Эксперимент							

1.4. Вычислить в электрической цепи (см. рис. ПА.1) значения тока I_H , напряжений U_H и U_{R1} , а также активной мощности P_H , потребляемой на нагрузке, и активной мощности $P_{\text{И}}$, отдаваемой в схему источником ЭДС, для значений сопротивления R_H в омах, равных 0; 0,5 R_1 ; R_1 ; 5 R_1 и 10 R_1 . При расчете использовать значение сопротивления R_1 и напряжения источника ЭДС E из табл. ПА.1 в зависимости от номера варианта. Результаты вычислений занести в табл. ПА.4.

Таблица ПА.4

R_H , Ом	I_H , мА		U_H , В		U_{R1} , В		P_H , Вт		$P_{\text{И}}$, Вт	
	Расчет	Эксперимент	Расчет	Эксперимент	Расчет	Эксперимент	Расчет	Эксперимент	Расчет	Эксперимент

2. Экспериментальная часть

2.1. Собрать электрическую цепь по схеме рис. ПА.3. Установить значения сопротивления R_H в соответствии с п. 1.2. Измерить значения I_H и U_H , последовательно устанавливая ЭДС E в вольтах, равным 0; 0,5 E и E . Результаты измерений занести в табл. ПА2.

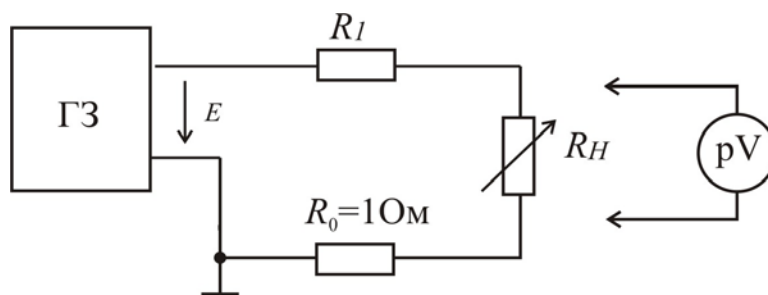


Рис. ПА.3

2.2. Собрать электрическую цепь по схеме рис. ПА.4. Установить значения параметров электрической цепи в соответствии с п.1.3. Измерить значения токов в ветвях I_1 , I_2 , I_3 и падения напря-

жения на сопротивлениях U_{R1} , U_{R2} , U_{R3} . Результаты измерений занести в табл. ПА.3.

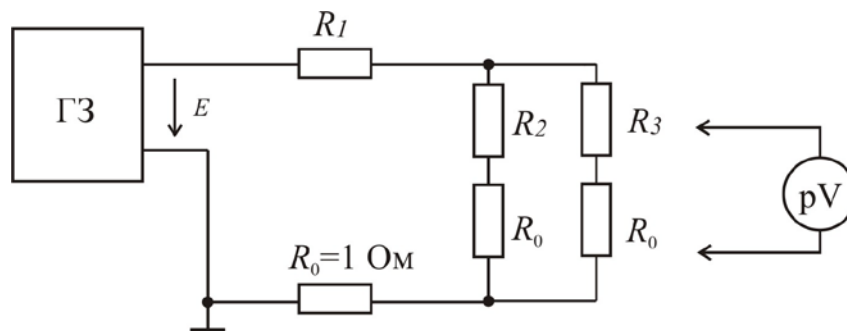


Рис. ПА.4

2.3. Собрать электрическую цепь по схеме рис. ПА.3. Установить значения ЭДС E в вольтах в соответствии с табл. ПА.1 в зависимости от номера варианта. Измерить значения параметров, приведенных в табл. ПА.4, последовательно устанавливая значения сопротивления R_H в омах, равным 0 ; $0,5R_1$; R_1 ; $5R_1$ и $10R_1$. Результаты измерений занести в табл. ПА.4.

3. Обработка экспериментальных данных

3.1. По результатам экспериментальных данных из табл. ПА.2 построить график зависимости $U_H(I_H)$, проанализировать его и сделать вывод о линейности электрической цепи и выполнении закона Ома.

3.2. По результатам экспериментальных данных из табл. ПА.3 для одного из узлов электрической цепи (см. рис. ПА.2) проверить выполнение первого закона Кирхгофа и сделать выводы.

3.3. По результатам экспериментальных данных из табл. ПА.3 для всех контуров электрической цепи (см. рис. ПА.2) проверить выполнение второго закона Кирхгофа и сделать выводы.

3.4. По результатам экспериментальных исследований (см. табл. ПА.3) проверить выполнение баланса мощности в электрической цепи и сделать выводы.

3.5. Сравнить между собой результаты расчета и эксперимента, приведенные в табл. ПА.2 и ПА.3, и сделать выводы.

3.6. Составить отчет о проделанной работе, включив в него: результаты предварительного расчета (пп. 1.1–1.3); соответствующие схемы эксперимента; таблицу с техническими характеристика-

ми используемых измерительных приборов и перечнем оборудования; экспериментальные данные; краткие выводы по пп. 3.1–3.5, обобщающие результаты исследований.

3.7. По данным табл. ПА.3 построить в выбранном масштабе потенциальную диаграмму для внешнего контура схемы рис. ПА.2.

3.8. По результатам экспериментальных данных из табл. ПА.4 построить график зависимости $U_H(I_H)$. Проанализировать полученный график и объяснить уменьшение U_H при увеличении I_H . Продолжить полученный график до пересечения оси ординат и определить значение напряжения $U_H(I_H = 0)$, которое соответствует режиму холостого хода в цепи. Сделать выводы.

3.9. По результатам экспериментальных данных из табл. ПА.4 построить график зависимости $P_H(I_H)$, проанализировать его и сделать вывод о том, при каком соотношении сопротивлений R_H и R_1 в цепи выделяется максимальная полезная мощность.

3.10. Добавить в отчет о проделанной работе: результаты предварительного расчета (п. 1.4); экспериментальные данные; краткие выводы по пп. 3.7–3.9, обобщающие результаты исследований.

4. Задание на моделирование

4.1. Проверить правильность проведенных расчетов (п. 1.4) в среде MathCad. Построить средствами MathCad соответствующие графики зависимости $U_H(I_H)$ и $P_H(I_H)$. Вставить в отчет о проделанной работе через буфер обмена результаты моделирования в среде MathCad.

4.2. Собрать в среде Electronics Workbench схему, рассчитанную в п. 1.4. Установить значения параметров, указанные в п. 1.4. Подключить к схеме амперметр для измерения постоянного тока I_H и два вольтметра параллельно сопротивлениям R_H и R_1 . Для каждого значения R_H , указанного в п. 1.4, запустить на моделирование программу Electronics Workbench и вставить в отчет через буфер обмена результаты моделирования с показаниями приборов. Сравнить результаты моделирования с результатами вычисления из табл. ПА.4 и сделать выводы.

4.3. Собрать в среде Electronics Workbench схему, рассчитанную в п. 1.3. Установить значения параметров, указанные в п. 1.3. Подключить в каждую ветвь цепи амперметр, а также два вольтметра параллельно сопротивлениям R_1 и R_3 . Запустить на моделирова-

ние программы Electronics Workbench и вставить в отчет через буфер обмена результаты моделирования с показаниями приборов. Сравнить результаты моделирования с результатами вычисления из табл. ПА.3 и сделать выводы.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение электрической цепи. На какие группы делятся элементы электрической цепи?

2. Назовите определение и единицы измерения электрического тока. Какой ток считается постоянным? Что в электротехнике принимается за положительное направление тока?

3. Назовите определение и единицы измерения электрического потенциала и напряжения. Что в электротехнике принимается за положительное направление напряжения?

4. Назовите определение и единицы измерения мгновенной и активной мощности электрической цепи, а также электрической энергии.

5. Назовите определение и единицы измерения идеализированного резистивного элемента электрической цепи, активного сопротивления и активной проводимости.

6. Какие формулы можно использовать для расчета активной мощности, выделяемой на сопротивлении? Сформулируйте закон Джоуля–Ленца.

7. Назовите определение и единицы измерения идеализированного индуктивного элемента электрической цепи.

8. Что понимается под потокосцеплением и ЭДС самоиндукции и как рассчитывается напряжение на индуктивном элементе?

9. Назовите определение и единицы измерения идеализированного емкостного элемента электрической цепи.

10. Чему равны мгновенная мощность и энергия, запасаемая на индуктивном и емкостном элементе?

11. Какими паразитными параметрами обладают реальные пассивные элементы электрической цепи?

12. Какие существуют активные элементы электрической цепи?

13. Что представляет из себя внешняя характеристика источника энергии и каково ее назначение? На что влияет наличие внутреннего сопротивления у реальных источников энергии?

14. Как по внешней характеристике источника ЭДС определить значение тока короткого замыкания и напряжения холостого хода?
15. Какие топологические элементы существуют в электрической цепи? Дайте их определение.
16. Запишите закон Ома для заданного участка цепи.
17. Запишите первый и второй законы Кирхгофа для заданной электрической цепи.
18. Что представляет из себя и как строится потенциальная диаграмма электрической цепи?
19. Запишите энергетический баланс мощности для заданной электрической цепи.
20. При каком соотношении внешнего и внутреннего сопротивления в цепи выделяется максимальная полезная мощность?
21. Какие существуют виды соединений элементов электрической цепи и каким образом находится эквивалентное сопротивление цепи относительно заданных точек?
22. Какие методы, применяемые для расчета электрических цепей, вы знаете?
23. Сколько уравнений необходимо записать по первому и второму законам Кирхгофа при расчете сложной электрической цепи по методу законов Кирхгофа?
24. Сколько уравнений необходимо записать по второму законам Кирхгофа при расчете сложной электрической цепи по методу контурных токов?

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Лабораторная работа № 2

Исследование линейных электрических цепей гармонического тока

Цель работы: определение соотношений между токами, напряжениями и мощностями в цепях гармонического тока; приобретение практических навыков в составлении электрических цепей гармонического тока, а также по применению измерительных приборов и осциллографа при их экспериментальных исследованиях.

Рабочее задание

1. Предварительный расчет

1.1. Для последовательного соединения R , L и C элементов (рис. ПБ.1) рассчитать ток I , напряжения на элементах U_R , U_L , U_C , разность фаз входного напряжения и тока φ , активную, реактивную и полную мощность P , Q , S , а также эквивалентную индуктивность L_{Σ} или емкость C_{Σ} . При расчете использовать значения сопротивления, индуктивности и емкости по указанию преподавателя, а значение напряжения источника ЭДС E и частоты f взять из табл. ПБ.1 в зависимости от номера варианта.

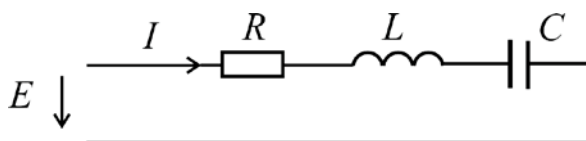


Рис. ПБ.1

Таблица ПБ.1

		Номер варианта							
$E, \text{В}$	5	1	2	3	4	5	6	7	8
	6	9	10	11	12	13	14	15	16
	7	17	18	19	20	21	22	23	24
	8	25	26	27	28	29	30	31	32
	9	33	34	35	36	37	38	39	40
	10	41	42	43	44	45	46	47	48
	11	49	50	51	52	53	54	55	56
$f, \text{Гц}$		3500	4000	4500	5000	5500	6000	6500	7000

Результаты вычислений занести в табл. ПБ.2. По результатам расчета построить совмещенную векторную диаграмму напряжений и тока.

Таблица ПБ.2

Электрические величины	Способ определения величины		
	Расчет	Эксперимент	
$E, В$			Измеренные значения
$I, мА$			
$U_R, В$			
$U_L, В$			
$U_C, В$			
φ°			
$P, Вт$			Расчетные значения по результатам измерения
$Q, ВАр$			
$S, ВА$			
$Z_{\Sigma}, Ом$			
$R_{\Sigma}, Ом$			
$X_{\Sigma}, Ом$			
$L_{\Sigma}, мГн$			
$C_{\Sigma}, мкФ$			

1.2. Рассчитать значения величин, указанных в табл. ПБ.3, для заданной электрической цепи (рис. ПБ. 2, *а, б, в*).

При расчете использовать значения сопротивления, индуктивности и емкости по указанию преподавателя, а значение напряжения источника ЭДС E и частоты f взять из табл. ПБ.1 в зависимости от номера варианта. Принять начальную фазу источника ЭДС E равной нулю.

Результаты вычислений занести в табл. ПБ.3. По результатам расчета построить векторную диаграмму токов и топографическую диаграмму напряжений для внешнего контура.

Таблица ПБ.3

Электрические величины	Способ определения величины		
	Расчет	Эксперимент	
$E, В$			Измеренные

Электрические величины	Способ определения величины	
	Расчет	Эксперимент
$U_{R1}, \text{В}$		значения
$U_{R2}, \text{В}$		
$U_L, \text{В}$		
$U_C, \text{В}$		
$I_1, \text{мА}$		
$I_2, \text{мА}$		
$I_3, \text{мА}$		
φ°		
$P, \text{Вт}$		Расчетные значения по результатам измерения
$Q, \text{ВАр}$		
$S, \text{ВА}$		
$Z_\Sigma, \text{Ом}$		
$R_\Sigma, \text{Ом}$		
$X_\Sigma, \text{Ом}$		
$L_\Sigma, \text{мГн}$		
$C_\Sigma, \text{мкФ}$		

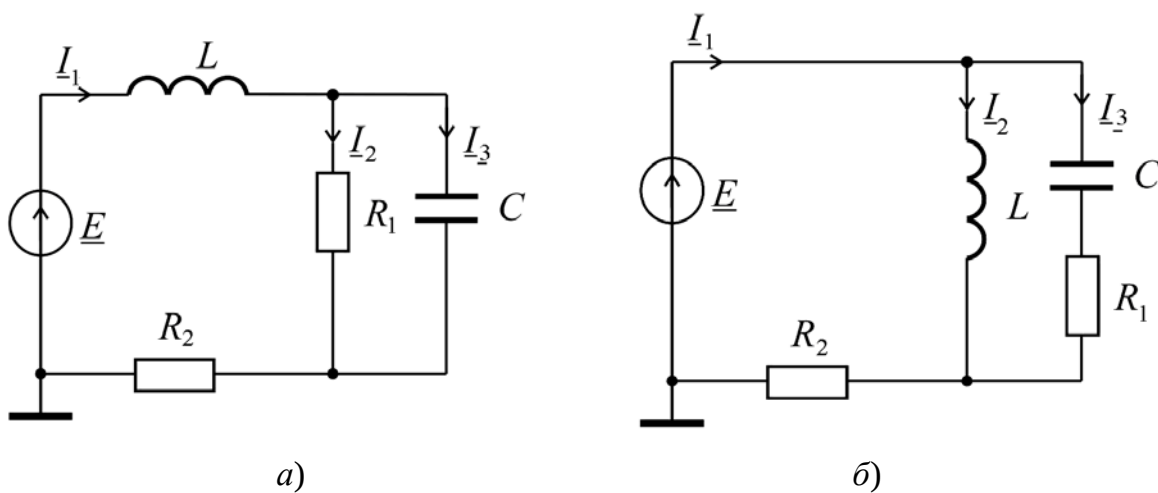
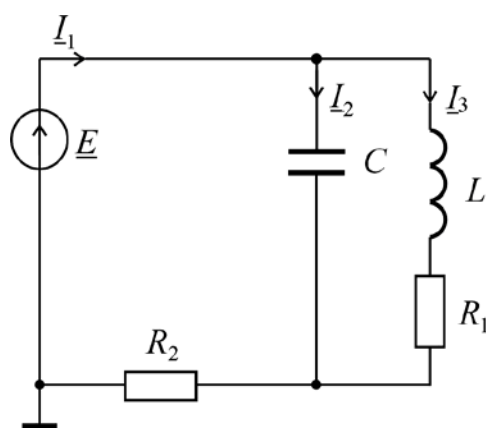


Рис. П.Б.2. Начало



в)

Рис. ПБ.2. Окончание

2. Экспериментальная часть

2.1. Собрать электрическую цепь по схеме рис. ПБ.3. Соединить кабель питания вольтметра, звукового генератора и осциллографа с источником питающего напряжения 220 В и включить их тумблеры СЕТЬ. Установить с помощью вольтметра заданное напряжение на входе цепи при заданной частоте генератора в соответствии с п.1.1. Измерить с помощью вольтметра напряжения на каждом элементе. Результаты измерений в вольтах занести в табл. ПБ.2.

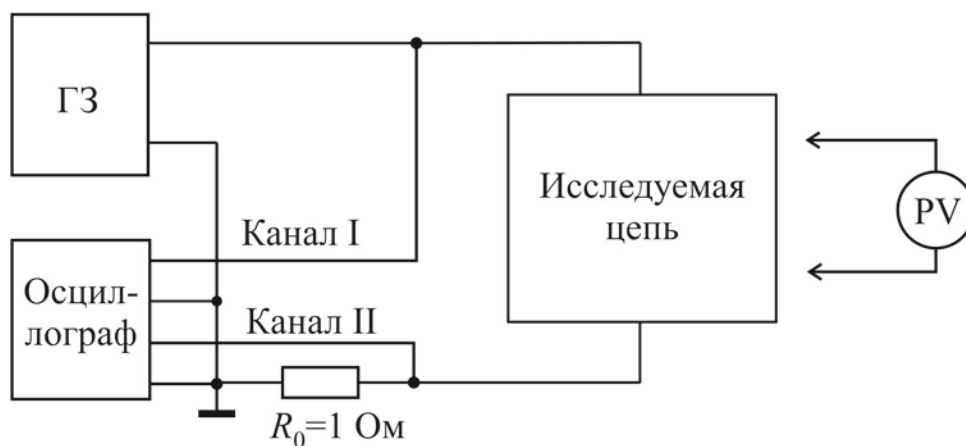


Рис. ПБ.3

2.2. Определить косвенным методом действующее значение тока, измеряя вольтметром напряжение на сопротивлении 1 Ом, включенном последовательно с элементами электрической цепи. Результат измерения в миллиамперах занести в графу для тока « I , мА» табл. ПБ.2.

2.3. Установить переключатель синхронизации осциллографа в положение, соответствующее синхронизации от первого канала.

С помощью переключателя чувствительности каждого из каналов осциллографа и ручки плавного регулирования усиления канала настроить осциллограммы входных сигналов таким образом, чтобы они полностью помещались на его экране в оптимальном масштабе.

Для каждого канала осциллографа в режиме подключения к уровню нулевого потенциала (или при закороченных наконечниках кабеля) совместить луч осциллографа с его центральной горизонтальной линией с помощью соответствующей ручки перемещения изображения по вертикали « $\updownarrow$ ».

Установить осциллограф в режиме с открытым входом (в данном режиме его потенциальный вход открыт для постоянной составляющей входного сигнала) и получить на его экране устойчивое изображение гармонических сигналов (рис. ПБ.4) с помощью ручек «Уровень» и «Стабильность».

2.4. Зарисовать полученную осциллограмму, отметив в ней кривые, соответствующие току $i(t)$ и напряжению $e(t)$. Определить по полученной осциллограмме знак фазового сдвига.

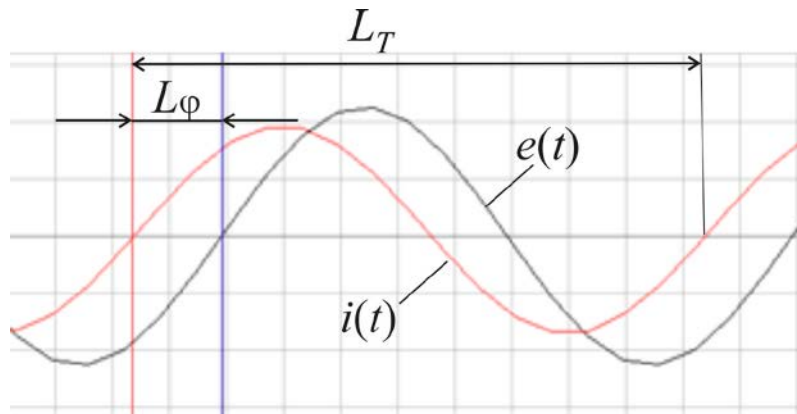


Рис. ПБ.4

Измерить с помощью осциллографа отрезки в миллиметрах, соответствующие периоду L_T и сдвигу по фазе между входным напряжением и током цепи L_ϕ . Рассчитать значение фазового сдвига по формуле

$$\varphi = \frac{L_\phi}{L_T} 2\pi = \frac{L_\phi}{L_T} 360^\circ.$$

Результат вычислений с учетом знака занести в табл. ПБ.2.

2.5. Собрать электрическую цепь, рассчитанную в п. 1.2, добавив в каждую ветвь по сопротивлению 1 Ом для измерения тока косвенным методом (рис. ПБ.3). Установить значения параметров электрической цепи в соответствии с п.1.2. Повторить пп. 2.1–2.4. Результаты измерений и вычислений занести в табл. ПБ.3.

3. *Обработка экспериментальных данных*

3.1. По экспериментальным данным (табл. ПБ.2) определить значения P , Q , S , R_{Σ} , X_{Σ} , Z_{Σ} , а также эквивалентную индуктивность L_{Σ} или емкость C_{Σ} . Результат вычислений занести в табл. ПБ.2. Сравнить между собой результаты расчета и эксперимента, приведенные в табл. ПБ.2, и сделать выводы.

3.2. По экспериментальным данным из табл. ПБ.2 построить совмещенную векторную диаграмму тока и напряжений. Сделать выводы о характере сопротивления цепи.

3.3. По результатам экспериментальных данных из табл. ПБ.2 проверить выполнение баланса активной, реактивной и полной мощности электрической цепи.

3.4. Составить отчет о проделанной работе, включив в него: результаты предварительного расчета (пп. 1.1); соответствующую схему эксперимента; таблицу с техническими характеристиками используемых измерительных приборов и перечнем оборудования; экспериментальные данные; краткие выводы по пп. 3.1–3.3, обобщающие результаты исследований.

3.5. По экспериментальным данным (табл. ПБ.3) определить значения P , Q , S , R_{Σ} , X_{Σ} , Z_{Σ} , а также эквивалентную индуктивность L_{Σ} или емкость C_{Σ} . Результат вычислений занести в табл. ПБ.3. Сравнить между собой результаты расчета и эксперимента, приведенные в табл. ПБ.3, и сделать выводы.

3.6. По экспериментальным данным из табл. ПБ.3 построить векторную диаграмму тока и топографическую диаграмму напряжений. Сделать выводы о характере сопротивления цепи.

3.7. По результатам экспериментальных данных из табл. ПБ.3 проверить выполнения баланса активной, реактивной и полной мощности электрической цепи.

3.8. Добавить в отчет о проделанной работе: результаты предварительного расчета (пп. 1.2); соответствующую схему экспери-

мента; экспериментальные данные; краткие выводы по пп. 3.5–3.7, обобщающие результаты исследований.

4. Задание на моделирование

4.1. Проверить правильность проведенных расчетов (п. 1.2) в среде MathCad. Вставить в отчет о проделанной работе через буфер обмена результаты моделирования в среде MathCad.

4.2. Собрать в среде Electronics Workbench схему, рассчитанную в п. 1.2. Установить значения параметров, указанные в п. 1.2. Подключить к схеме амперметры и вольтметры, необходимые для измерения параметров, указанных в табл. ПБ.3. Запустить на моделирование программу Electronics Workbench и вставить в отчет через буфер обмена результаты моделирования с показаниями приборов. Сравнить результаты моделирования с результатами вычисления из табл. ПБ.3 и сделать выводы.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение мгновенному значению, амплитуде, периоду, частоте, начальной фазе гармонического (синусоидального) тока.

2. Как определяются средневыпрямленное и действующее значения гармонического тока?

3. Что такое комплексное число? В каких формах записи могут быть представлены комплексные числа? Каким образом можно перейти от одной формы записи комплексных чисел к другой?

4. Какие математические операции можно выполнять с комплексными числами и какая форма записи комплексного числа при этом предпочтительна?

5. Как ведет себя сопротивление резистивного / индуктивного / емкостного элемента с ростом частоты гармонического тока?

6. Что из себя представляет треугольник сопротивлений, проводимостей и мощностей для гармонического тока?

7. Какова последовательность расчета электрических цепей гармонического тока методом комплексных амплитуд?

8. Как можно представить мгновенное значение гармонического тока на комплексной плоскости в виде вектора?

9. Что такое модуль и аргумент комплексного числа?

10. Что понимается под сдвигом по фазе для цепей гармонического тока и от чего он зависит?

11. Чему равен сдвиг по фазе между напряжением и током в сопротивлении, индуктивности, емкости, при последовательном соединении сопротивления и индуктивности, при последовательном соединении сопротивления и емкости?

12. Каким образом строится векторная и топографическая диаграмма на комплексной плоскости и с какой целью?

13. Запишите и объясните выражение закона Ома, первого и второго законов Кирхгофа в комплексной форме.

14. Как определяется и что характеризует активная, реактивная и полная мощность в цепи гармонического тока?

15. Какие требования предъявляются к коэффициентам мощности для обеспечения рациональной работы электрической цепи на полную мощность?

16. Поясните методику проверки баланса мощности в электрической цепи.

Лабораторная работа № 3

Исследование переходных процессов в линейных электрических цепях первого порядка

Цель работы: экспериментальное исследование напряжения и тока в разветвленных электрических цепях, работающих в переходных режимах; проверка их соответствия теоретическим значениям.

Рабочее задание

1. Предварительный расчет

1.1. Вычислить для заданной цепи (рис. ПВ.1–ПВ.26) мгновенное значение тока через индуктивность (напряжения на емкости), используя классический метод расчета переходных процессов. Номер рисунка, положение ключа до коммутации или исходное положение переключателя, а также значение ЭДС E в вольтах в зависимости от номера варианта указаны в табл. ПВ.1.

Таблица ПВ.1

Номер варианта	Номер рисунка	Положение ключа до коммутации	Исходное положение переключателя	E , В
1–6	1–6	–	1	2
7 – 24	7 – 24	Разомкнут	–	4
25–26	25–26	–	1	6
27–32	1–6	–	2	6
33 – 50	7 – 24	Замкнут	–	4
51–52	25–26	–	2	2

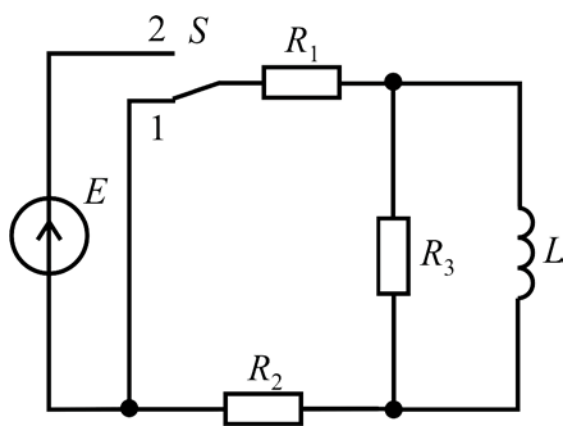


Рис. ПВ.1

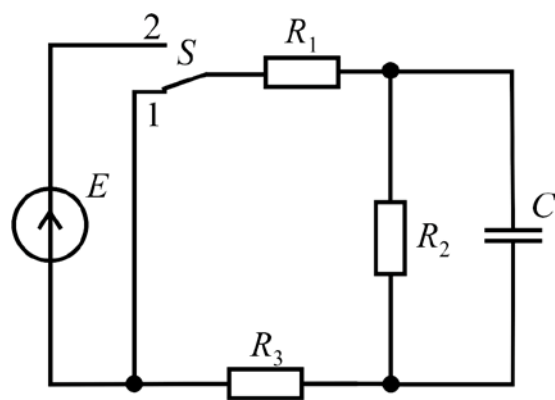


Рис. ПВ.2

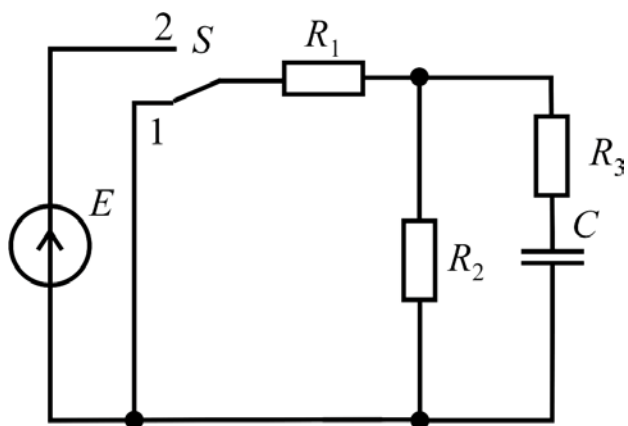


Рис. ПВ.3

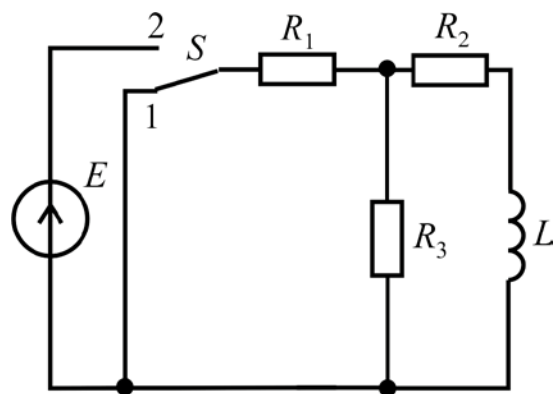


Рис. ПВ.4.

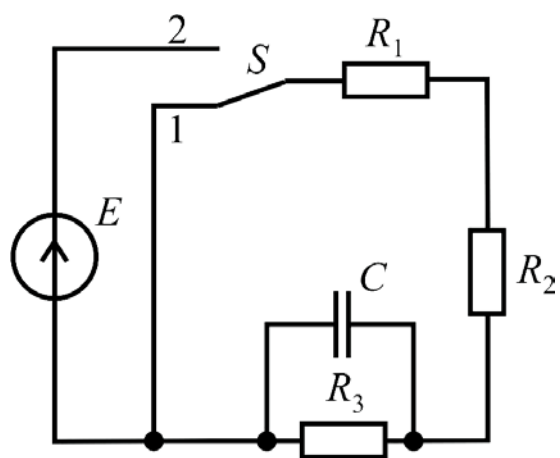


Рис. ПВ.5

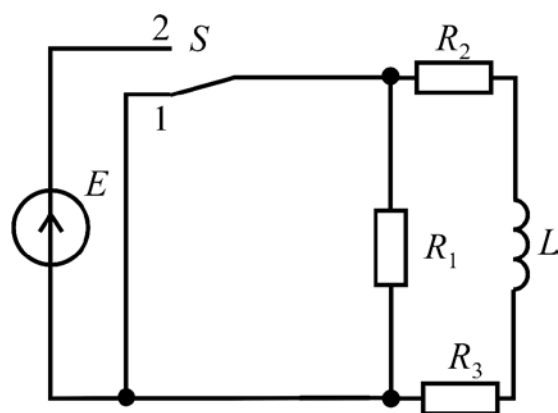


Рис. ПВ.6

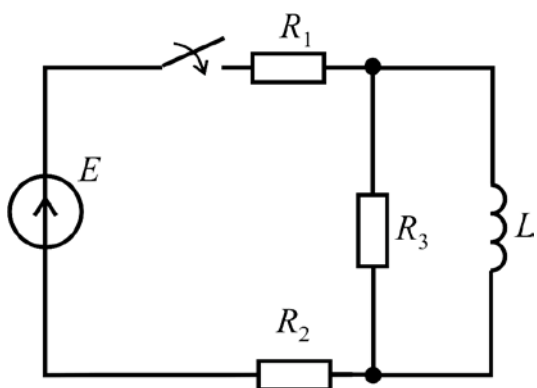


Рис. ПВ.7

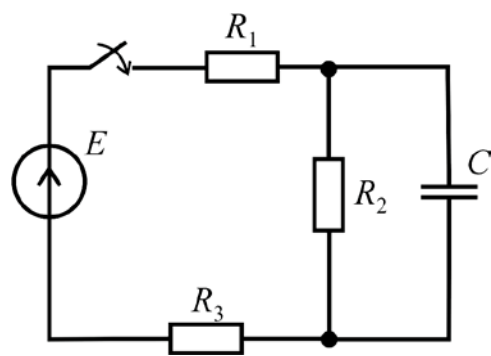


Рис. ПВ.8

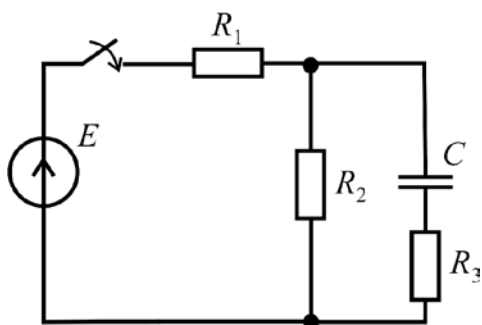


Рис. ПВ.9

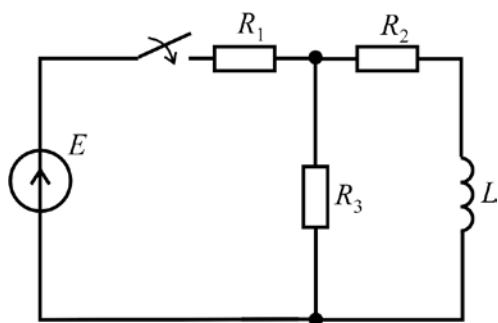


Рис. ПВ.10

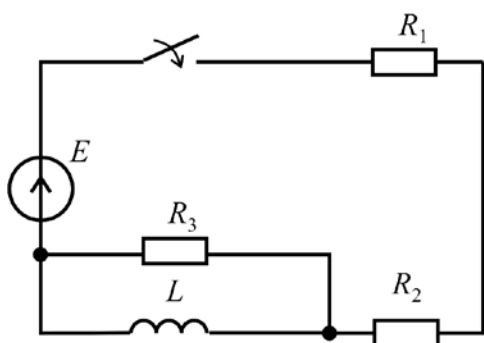


Рис. ПВ.11

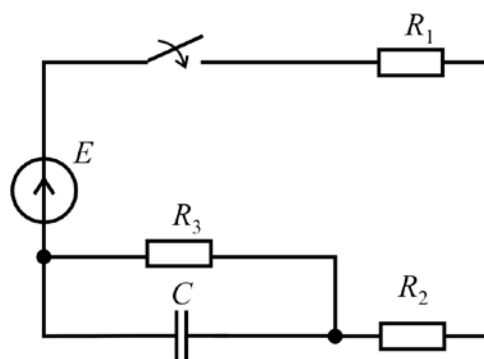


Рис. ПВ.12

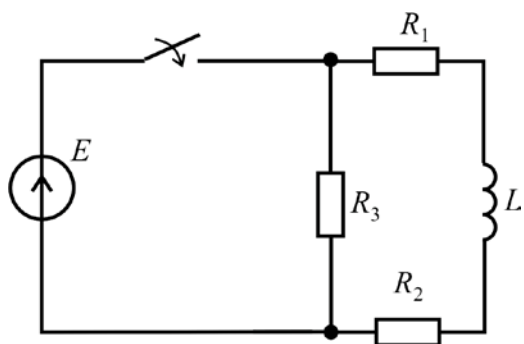


Рис. ПВ.13

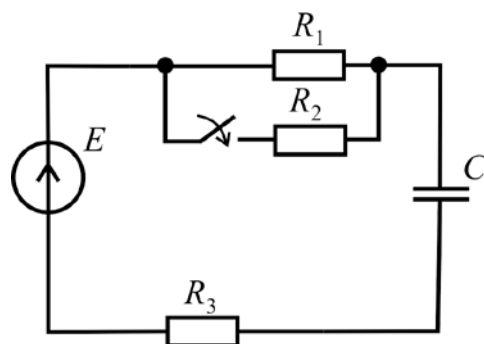


Рис. ПВ.14

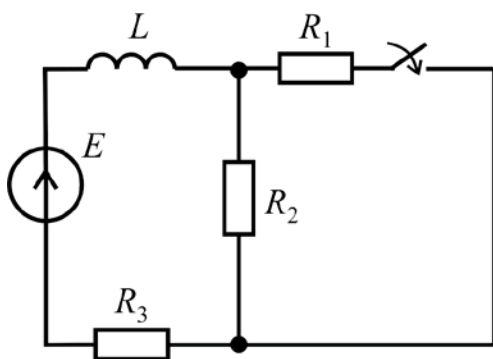


РИС. ПВ.15

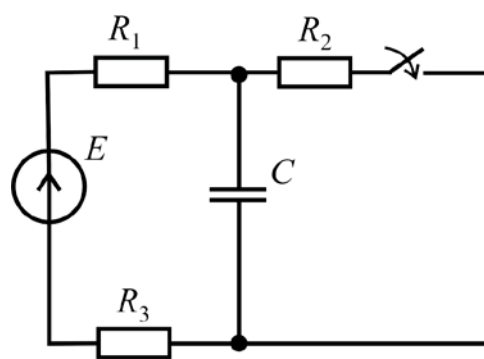


РИС. ПВ.16

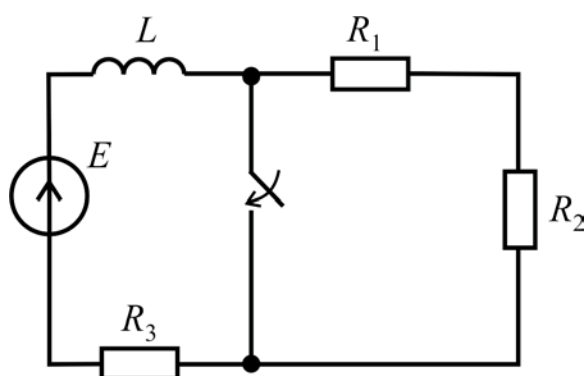


РИС. ПВ.17

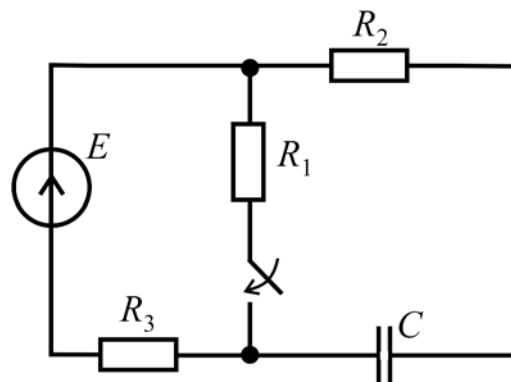


РИС. ПВ.18

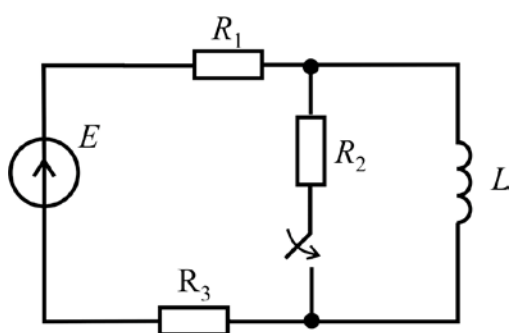


РИС. ПВ.19

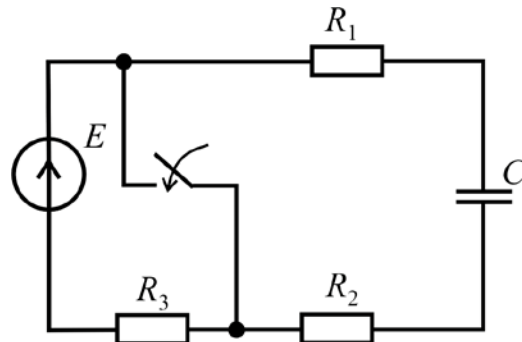


РИС. ПВ.20

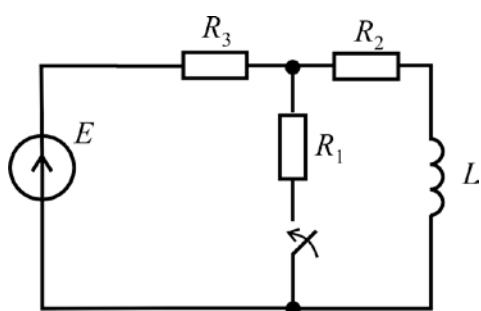


РИС. ПВ.21

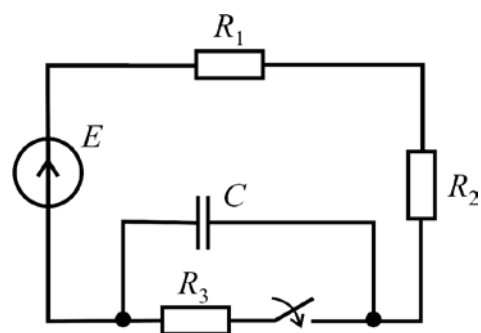


РИС. ПВ.22

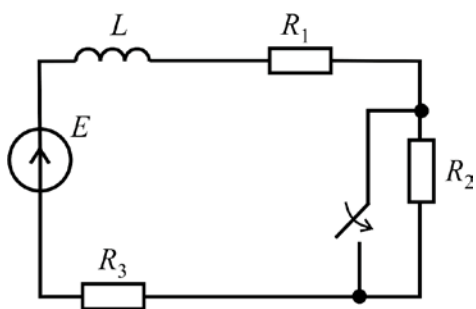


Рис. ПВ.23

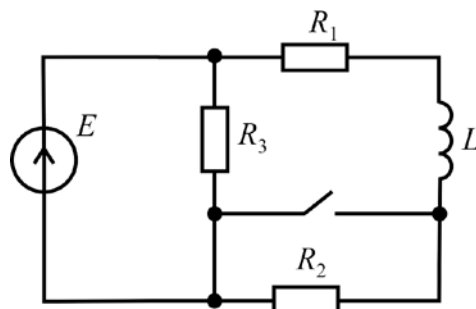


Рис. ПВ.24

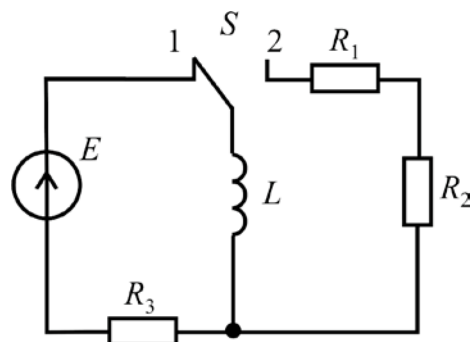


Рис. ПВ.25

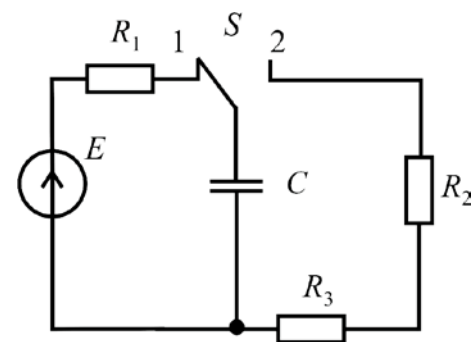


Рис. ПВ.26

При расчете использовать значения сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 по указанию преподавателя.

Значение емкости равно номеру варианта в микрофарадах.

Значение индуктивности равно номеру варианта в миллигенри.

1.2. Построить график полученной зависимости на интервале изменения времени от 0 до 3τ (τ – постоянная времени цепи).

1.3. В зависимости от заданного преподавателем варианта в соответствии с табл. ПВ.2 рассчитать переходный процесс классическим методом относительно искомой величины для одной из электрических схем (рис. ПВ. 27–ПВ.30), используя программу MathCad.

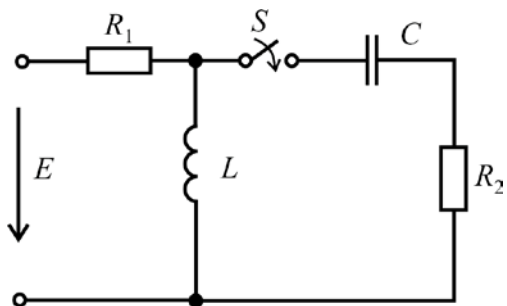


Рис. ПВ.27

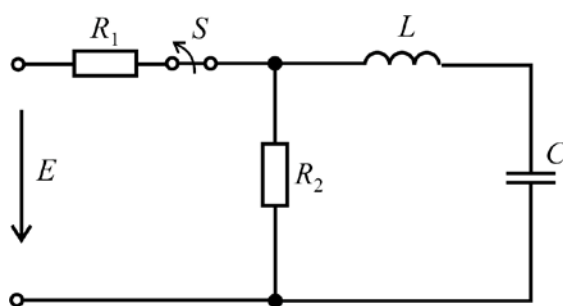


Рис. ПВ.28

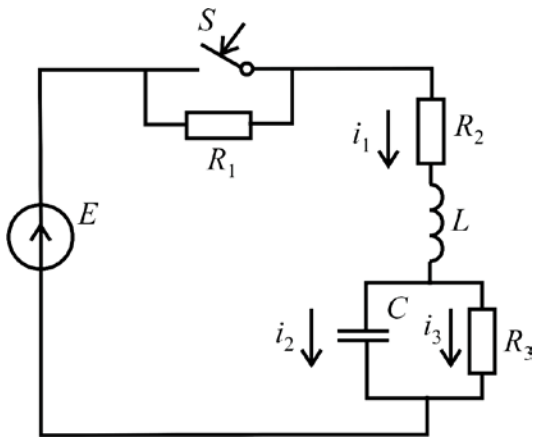


Рис. ПВ.29

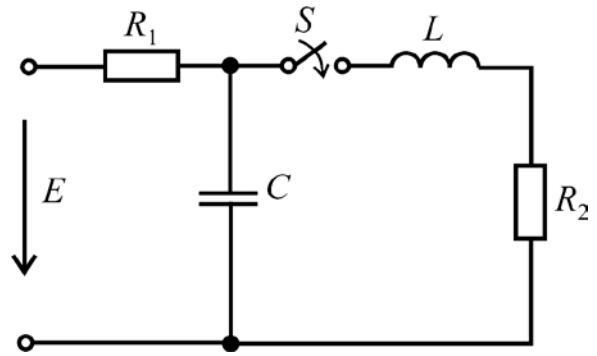


Рис. ПВ.30

Таблица ПВ.2

Номер варианта	Номер рисунка	Искомая величина	Исходное положение ключа
1	2	3	4
1	2.27	$I_{R1(t)}$	Ключ замкнут
2		$u_l(t)$	
3		$i_{R2(t)}$	Ключ разомкнут
4		$I_L(t)$	
5		$u_C(t)$	
6	2.28	$i_l(t)$	Ключ замкнут
7		$u_C(t)$	
8		$u_L(t)$	
9		$i_L(t)$	Ключ разомкнут
10		$i_{R2(t)}$	
11		$u_C(t)$	
12		$i_{R1(t)}$	
13	2.29	$i_L(t)$	Ключ замкнут
14		$I_2(t)$	
15		$I_3(t)$	
16		$u_C(t)$	

1	2	3	4
17		$u_L(t)$	Ключ разомкнут
18		$I_L(t)$	
19		$I_2(t)$	
20		$I_3(t)$	
21		$u_C(t)$	
22		$u_L(t)$	
23	2.30	$i_{R1(t)}$	Ключ замкнут
24		$u_C(t)$	
25		$i_L(t)$	Ключ разомкнут
26		$u_C(t)$	

При расчете использовать значения сопротивлений R_1 , R_2 , R_3 по указанию преподавателя.

Значение емкости равно номеру варианта в микрофарадах.

Значение индуктивности равно номеру варианта в миллигенри.

На вход электрической цепи подается постоянная ЭДС $E = 10$ В.

1.4. Повторить п. 1.1 при подаче на вход электрической цепи гармонической ЭДС $e = 10\sin(10000t + \varphi)$ В, где начальная фаза φ равна номеру варианта в градусах.

1.5. Построить графики полученных в пп. 1.3, 1.4 зависимостей, подобрав требуемый временной интервал.

2. Задание на моделирование

2.1. Собрать в среде Electronics Workbench схему, рассчитанную в п. 1.1. Для номеров рисунков 1–6 при моделировании переходного процесса использовать генератор прямоугольных импульсов. Для номеров рисунков 7–26 при моделировании переходного процесса использовать управляемый напряжением ключ или переключатель *Voltage-Controlled Switch*.

2.2. Установить значения параметров электрической цепи в соответствии с п. 1.1.

2.3. Установить для генератора прямоугольных импульсов:

– значение частоты прямоугольных импульсов *Frequency*, равной значению $f = \frac{1}{10\tau}$ в герцах (значение постоянной времени τ взять из предварительного расчета в п. 1.1);

– коэффициент заполнения *Duty cycle* = 50 %;

– амплитуду *Amplitude* и постоянную составляющую *Offset* прямоугольных импульсов, равной значению $0,5E$ в вольтах.

2.4. Получить осциллограмму рассчитанного в п. 1.1 сигнала.

2.5. Развернуть изображение осциллографа, нажав на кнопку *Expend*, и подобрать соответствующую амплитудную развертку осциллографа для получения оптимального масштаба изображения на его экране.

2.6. Установить такой масштаб временной развертки осциллографа, чтобы на его экране можно было наблюдать осциллограмму в пределах $5-6 \tau$ с момента коммутации.

2.7. Выбрать с помощью ползунка осциллографа участок осциллограммы, совпадающий с моментом коммутации, и зарисовать или сохранить в буфере обмена соответствующую осциллограмму (для добавления в отчет о проделанной работе).

2.8. Провести измерение постоянной времени моделируемой цепи.

2.9. Увеличить в два раза значение индуктивности (емкости) и повторить пп. 2.6–2.8.

2.10. Повторить пп. 2.1–2.8 для схемы, рассчитанной в пп. 1.3, 1.4.

3. *Обработка результатов моделирования*

3.1. Сравнить между собой расчетные графики полученной зависимости и осциллограмму, полученную при выполнении п. 2.7. Сделать выводы.

3.2. Сравнить между собой осциллограммы, полученные для исследуемой схемы в пп. 2.7, 2.9. Сделать вывод о влиянии индуктивности (емкости) на форму исследуемой зависимости и на значение постоянной времени цепи.

3.3. Составить отчет о проделанной работе, включив в него предварительный расчет, полученный теоретический график зависимости, схему эксперимента в среде Electronics Workbench, полученные в результате моделирования осциллограммы и результаты измерения постоянной времени цепи, а также соответствующие выводы по работе.

3.4. На усложненном уровне добавить в отчет предварительный расчет и результаты моделирования переходных процессов для схемы из пп. 1.3–1.4.

Контрольные вопросы

1. Чем обусловлены переходные процессы в электрических цепях?
2. Чем определяется порядок дифференциального уравнения, описывающего переходный процесс?
3. Почему переходной процесс в цепи, содержащей реактивные элементы, не может завершиться мгновенно?
4. Как можно определить постоянную времени в цепи по осциллограмме тока или напряжения?
5. Влияет ли на постоянную времени цепи значение напряжения источника ЭДС?
6. Каким образом влияет критическое сопротивление на переходной процесс в цепи с последовательным соединением R , L , C элементов?
7. В каких цепях и почему возможен колебательный процесс?
8. Определите постоянную времени, начальные условия, принужденную составляющую для заданной цепи.
9. Как определяется критическое сопротивление цепи?
10. Определите, при каких условиях в цепи гармонического сигнала наступают незатухающие колебания?

Учебное издание

Регеда Ольга Николаевна

**Расчет и моделирование
электрических сетей**

Редактор *Н. А. Сидельникова*

Компьютерная верстка *С. В. Денисовой*

Подписано в печать 18.12.13.

Формат 60×84¹/₁₆ Усл. печ. л. 9,88.

Тираж 50. Заказ № 1040.

Издательство ПГУ

440026, Пенза, Красная, 40

Тел./факс: (8412) 56-47-33; e-mail: iic@pnzgu.ru