

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Методика обучения решению показательных уравнений и неравенств в школе»

Студент


(подпись, дата)

Сарычева Д.А.
(ФИО полностью)

Руководитель


(подпись, дата)

Никитина О.Г.
(фамилия, инициалы)

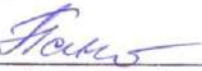
Нормоконтролёр


(подпись, дата)

Сурина О.П.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 04.06.2020 № 9)

Заведующий кафедрой


(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 22.06.20 № 4)

Секретарь ГЭК


(подпись, дата)

Сурина О.П.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2020

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Теоретические основы решения показательных уравнений и неравенств в школе.....	5
1.1 Анализ школьных учебников по алгебре и началам анализа по теме «Показательные уравнения и неравенства».....	5
1.2 Основные методы решения показательных уравнений и неравенств.....	13
1.3 Значение изучения темы «Показательные уравнения и неравенства».....	27
1.4 Анализ показательных уравнений и неравенств в заданиях ЕГЭ.....	29
Глава 2. Методические особенности обучения школьников решению показательных уравнений и неравенств.....	34
2.1 Методические особенности изучения темы «Показательные уравнения и неравенства».....	34
2.2 Изучение метода замены множителей при решении показательных неравенств.....	38
2.3 Конспекты уроков по теме «Решение показательных уравнений и неравенств».....	43
Заключение.....	57
Список используемой литературы.....	58
Приложение 1.....	60
Приложение 2.....	61

Введение

Школьное обучение не стоит на месте, а продолжает развиваться с космической скоростью. При этом на сегодняшний день педагоги так и продолжают использовать основные постулаты, на которых основывается дидактика. Вспоминая Яна Амоса Коменского, чешского педагога, преподаватели всех предметов испокон веков строят программу обучения по принципам: связь теории с практикой, доступность, научность, прочность и т.п. Однако, как отмечают преподаватели высших учебных заведений, огромная часть поступивших на первый курс студентов, имеет сложности в закреплении и дальнейшем практическом подтверждении тем алгебры, связанных с решением показательных уравнений. Именно поэтому актуальна тема моего диплома – методические особенности обучения школьников решению показательных уравнений и неравенств. Сделав упор на методику преподнесения и закреплении показательных уравнений и неравенств в школах сегодня, уже завтра мы получим счастливых абитуриентов, сдавших ЕГЭ на высокие баллы, а послезавтра – берущих интегралы и свободно оперирующих с матрицами первокурсников.

Таким образом, цель моего исследования – разбор существующих методов решения показательных уравнений и неравенств и разработка методики обучения школьников решению показательных уравнений и неравенств. Для достижения данной цели необходимо выполнить следующие задачи:

- 1) изучить методическую литературу по данной теме;
- 2) рассмотреть различные методы решения показательных уравнений и неравенств;
- 3) провести анализ этой темы в учебниках алгебры и начал анализа школьного курса математики;
- 4) разработать конспекты уроков по данной теме.
- 5) провести анализ показательных уравнений и неравенств в заданиях ЕГЭ.

Объектом исследования является процесс обучения математике в старших классах средней общеобразовательной школы.

Предметом исследования являются методические особенности обучения решению показательных уравнений и неравенств.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. В первой главе проведен анализ школьных учебников по алгебре и началам анализа по теме «Показательные уравнения и неравенства»; рассмотрены основные типы показательных уравнений и неравенств и методы их решения; а также значение этой темы в обучении школьников.

Во второй главе рассмотрены методические особенности изучения темы «Показательные уравнения и неравенства», рассмотрен метод замены множителей при решении показательных неравенств.

Разработаны конспекты уроков и технологическая карта урока.

Глава 1. Теоретические основы решения показательных уравнений и неравенств в школе

1.1 Анализ школьных учебников по алгебре и началам анализа по теме «Показательные уравнения и неравенства»

Для того чтобы рассмотреть, как тема «Показательные уравнения и неравенства» преподносится в разных школьных учебниках, будет проведён анализ некоторых из них. Данный анализ поможет рассмотреть не только сходства и различия в содержательной линии, а также узнать на каком этапе и как начинают изучать показательные уравнения и неравенства в школьном курсе. Будут проанализированы следующие учебники алгебры 10-11 классов общеобразовательной школы:

- Мордкович А.Г., Семенов П.В. «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы».

- Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и др. «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы».

- Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс, 11 класс».

Мордкович А.Г., Семенов П.В. «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы»:

Данный учебник представляет собой комплект, состоящий из двух книг: учебник и задачник. Стоит отметить, что учебник имеет ряд плюсов. Его отличительные особенности: большое количество примеров с подробным решением, доступное для учеников изложение материала, приоритет функционально-графической линии и дополнительные темы для более углубленного изучения материала. Весь материал, представленный в учебнике, отвечает всем требованиям обязательного минимума содержания образования, а также даёт полное представление о курсе алгебры и начал анализа.

Школьный учебник состоит из шести глав. Для того чтобы школьники в дальнейшем могли легко освоить теоретический материал и свободно решать практические задания по теме «Показательные уравнения и неравенства» автор изначально знакомит с понятием n -степени из действительного числа и его свойствами, далее с функцией $y = \sqrt[n]{x}$. Знакомство с данной темой происходит в шестой главе. Далее в учебнике предлагают рассмотреть показательную функцию, её свойства и график. Тема решение показательных уравнений и неравенств в учебнике встречается в седьмой главе «Показательная и логарифмическая функции», которая состоит из девяти параграфов.

При рассмотрении темы, изначально вводится определение показательного уравнения. Показательным уравнением называют уравнения вида: вида: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где a – положительное число, отличное от 1, и уравнения сводящиеся к нему. Далее дана теорема решения показательного уравнения с одинаковыми основаниями. После теоремы автор предлагает рассмотреть несколько примеров с подробным решением показательных уравнений. Даны несколько примеров.

Пример 1:

$$A) 2^{2x-4} = 64;$$

$$Б) \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$B) 5^{x^2-3x} = 5^{3x-8}.$$

Пример 2:

$$\frac{(0,2)^{x-0,5}}{\sqrt{5}} = 5 \cdot 0,04^{x-2}.$$

Пример 3:

$$(2^x)^2 + 2 \cdot 2^x - 24 = 0.$$

Пример 4:

$$2^{2x+2\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 6.$$

Пример 5:

$$\sqrt[x]{64} - \sqrt[x]{2^{3x+3}} + 12 = 0.$$

Рассмотрев несколько примеров с подробным решением, получаем вывод, что показательные уравнения можно решать несколькими методами: функционально-графическим методом, методом приравнивание показателей при одинаковых основаниях, методом введения новой переменной. Далее рассматривается алгоритм решения системы показательных уравнений на подробном решении примера.

После рассмотрения показательных уравнений, автор переходит к показательным неравенствам. Изначально вводится определение показательного неравенства. Показательным неравенством называется неравенство вида:

$$a^{f(x)} > a^{g(x)},$$

где a — положительное число, отличное от 1, и неравенства, сводящееся к этому виду. После введения определения рассматривают два случая, когда $a > 1$ и $0 < a < 1$. Эти два случая рассматриваются при доказательстве теоремы: показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству того же ла $f(x) > g(x)$, если $a > 1$; показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$, если $0 < a < 1$. После теоремы автором рассматриваются примеры решений показательных неравенств, используя два способа решения. Первый, который был описан выше, второй — введение новой переменной.

Пример 1:

$$A) 2^{2x-4} > 64;$$

$$B) \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-3,5} < \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$B) 0,5^{x^2-3x} \leq 0,5^{3x-8}.$$

Пример 2:

$$\frac{4 \cdot 3^x - 10}{3^{x+1} - 1} < 1.$$

Пример 3:

$$4(9^x - 3^x) > \frac{5}{3^{x-2}} + 3^{x+1}.$$

Пример 4:

$$8^x + 18^x > 2 \cdot 27^x.$$

Пример 5:

$$(x^2 + x + 1)^x \leq 1.$$

Задания по данной теме можно разделить на две части. Первая часть включает задания базовой и средней подготовки, вторая часть - упражнения повышенной сложности.

По теме «Показательные уравнения и неравенства» автор учебника предлагает решить следующие задания:

- решить уравнение;
- решить систему уравнений;
- решить неравенство;
- найти наибольшее целочисленное решение неравенства;
- найти, сколько натуральных чисел являются решением неравенства.

Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и др. «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы».

Учебник Алимова Ш.А. Колягина Ю.М. «Алгебра и начала математического анализа» не является популярным среди школьных учебников алгебры. При анализе данного пособия, можно отметить, что материал обучения наполнен разнообразными примерами разного уровня, средний и высокий. Также автор внес в учебник задания повышенной трудности, которые содержат в себе богатый материал для подготовки в вузы с повышенными требованиями по математике.

Учебник состоит из 13 глав, есть дополнительные параграфы в приложении. Показательные уравнения и неравенства рассматриваются в 3 главе. Перед тем как рассмотреть показательные уравнения и неравенства автор рассматривает показательную функцию, её свойства и график. Далее в 12,13,14 параграфах рассматриваются методы решений уравнений и неравенств, а затем методы решения систем, содержащих показательные уравнения и неравенства. При анализе параграфов, можно отметить, что автор рассматривает изучение пока-

зательных уравнений и неравенств сразу на примерах, без введения определений и теорем. У примеров нет подробного решения.

Пример 1:

$$4 \cdot 2^x = 1.$$

Пример 2:

$$2^{3x} \cdot 3^x = 576.$$

Пример 3:

$$3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25.$$

Пример 4:

$$3^x = 7^x.$$

Пример 5:

$$3 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}.$$

Пример 6:

$$3^x < 81.$$

Пример 7:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x > \sqrt{8}.$$

Пример 8:

$$3^{x^2-x} < 9.$$

Пример 9:

$$16^x + 4^x - 2 > 0.$$

Пример 10:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x = x - \frac{2}{3}.$$

После примеров с решениями идут задания для практики. При решении уравнений и неравенств автор выделяет следующие методы:

- метод введения новой переменной;
- вынесение общего множителя за скобки;
- уравнивание показателей.

По теме «Показательные уравнения и неравенства» автор учебника предлагает решить следующие задания:

- решить уравнения;
- доказать, что уравнение имеет один корень при фиксированном значении;
- решить графически уравнения;
- решить неравенства;
- найти целые значения неравенства на отрезке;
- решить графически неравенства;
- решить систему.

Никольский С.М., Потапов М.К., Решетников Н.Н., Шевкин А.В. «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс, 11 класс».

Школьные учебники данных авторов являются универсальными, так как содержат материал, который изучается как в классах базовой подготовки по математике, так и для классов с углубленным изучением математики. При этом, стоит отметить, что материал для углубленного изучения специально выделен, что помогает вести дифференцированное обучение. Авторы учебников для более углубленного и упрощенного изучения математики в теоретическую часть ввели большое количество образцов решения задач по всем темам, далее идут практические задания. Каждый учебник по изучению всех тем заканчивается разделом «Задания на повторение», которые помогают ученикам закрепить не только материал по текущим темам, но и подготовиться к выпускным экзаменам и иметь хорошую базу для обучения в вузах.

Учебник для 10 класса состоит из трёх глав. Показательные уравнения и неравенства изучаются в первой главе. Перед изучением уравнений и неравенств, автор знакомит с понятием показательная функция в четвертом параграфе, далее рассматривается тема «Логарифмы», и только в шестом параграфе идет обзор темы «Показательные и логарифмические уравнения и неравенства».

Изначально даются определения простейших уравнений и неравенств:

1. Пусть a – данное положительное, не равное 1 число, b – данное действительное число. Тогда уравнение $a^x = b$ называют простейшим показательным уравнением.

2. Пусть a – данное положительное, не равное 1 число, b – данное действительное число. Тогда неравенства

$$a^x > b,$$

$$a^x < b$$

называют простейшими показательными неравенствами.

Далее автор рассматривает решение показательных уравнений и неравенств на подробно разобранных примерах.

Пример 1:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2.$$

Пример 2:

$$3^x = 5.$$

Пример 3:

$$25^x = -25.$$

Пример 4:

$$5^{x+2} - 2 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^{x+1} = 200.$$

Пример 5:

$$4 \cdot 3^x - 9 \cdot 2^x = 0.$$

Пример 6:

$$2^x < 8.$$

Пример 7:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^x < 5.$$

Пример 8:

$$2^x < -1.$$

Пример 9:

$$2^{x-2} + 2^{x+1} < 18.$$

Пример 10:

$$49 \cdot 5^x - 25 \cdot 7^x > 0.$$

Изучение показательных уравнений и неравенств идёт с чередованием логарифмических уравнений и неравенств. При решении автор рассматривает метод замены неизвестного.

Учебник для 11 класса состоит из также из 3 глав. Решение показательных уравнений и неравенств автор показывает во 2 главе. Так как решение простейших показательных уравнений и неравенств были описаны в учебника 10-ого класса, то в учебнике 11 класса, задача для учеников усложняется, и автор предлагает рассмотреть более сложные примеры и разные методы решения. Рассматриваются такие темы, как: равносильность уравнений и неравенств, уравнения-следствия, равносильность уравнений и неравенств системам, равносильность неравенств на множествах, метод промежутков для уравнений и неравенств, использование свойств функций при решении уравнений и неравенств, системы уравнений с несколькими неизвестными.

По теме «Показательные уравнения и неравенства» автор учебника предлагает решить следующие задания:

- решить уравнения;
- решить неравенства;
- решить систему;
- является ли число решением неравенства.

Исходя из анализа, можно отметить, что методы решений заданий представлены по-разному, а алгоритм изучения данной темы почти одинаков во всех трёх учебниках. Более углубленно и раскрыто тема «Показательные уравнения и неравенства» раскрывается в учебнике под редакцией Мордковича А.Г., Семёнова П.В. (10-11классы).

1.2 Основные методы решения показательных уравнений и неравенств

Основные методы решения показательных уравнений

Уравнение вида: $a^x = a^b$, где $a > 0, a \neq 1, x$ – неизвестное, называется показательным уравнением.

Для того решить показательное уравнение, необходимо воспользоваться свойством степени: степени с одинаковым основанием $a > 0, a \neq 1$, равны тогда и только тогда, когда равны их показатели.

Например,

$$1) 3^{x-1} - 3^x + 3^{x+1} = 63;$$

$$2) 0,2^{x^2+4x-5} = 1;$$

$$3) (2^{\frac{1}{3}})^{-x^2-2x+3} = 1.$$

Любое показательное уравнение всегда решается путём сведения к простейшему показательному уравнению.

Уравнение вида: $a^x = b$, где a – положительное число, не равное 1, b – данное действительное число, называют простейшим показательным уравнением.

Например,

$$1) 3^x = 9;$$

$$2) \left(\frac{1}{4}\right)^x = 16;$$

$$3) 6^x = 1296.$$

Для того чтобы правильно преобразовать и решить показательное уравнение необходимо знать основные свойства степеней.

Свойства:

$$1. a^0 = 1 \quad (a \neq 0).$$

$$2. a^1 = a.$$

$$3. a^n \times a^m = a^{n+m}.$$

$$4. \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}.$$

$$5. (a^n)^m = a^{nm}.$$

$$6. \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

$$7. a^n b^n = (ab)^n.$$

$$8. \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

$$9. \sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}}.$$

Для решения показательных уравнений используются следующие методы:

1. Метод уравнивания показателей;
2. Метод введения новой переменной;
3. Метод вынесения общего множителя за скобки;
4. Функционально-графический метод решения;
5. Метод почленного деления (для однородных уравнений);
6. Метод группировки;
7. Метод логарифмирования.

1. Метод уравнивания показателей

Для того чтобы решить показательное уравнение данным способом необходимо воспользоваться свойством: если основания степеней равны, то равны и их показатели. Следовательно, для того чтобы найти корни уравнения, необходимо левую и правую часть уравнения привести к степени с одинаковыми основаниями. Далее приравнять показатели и решить уравнение, которое получилось.

Пример:

$$(\sqrt{3} + 2)^{\sqrt{x-1}+x} = (\sqrt{3} + 2)^0.$$

Решение:

Данное показательное уравнение имеет вид: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где $a = \sqrt{3} + 2$, $f(x) = \sqrt{x-1} + x$, $g(x) = 0$. Так как основания данного уравнения одинаковы, то решение уравнения сводится к решению уравнения вида:

$$\sqrt{x-1} + x = 0.$$

Таким образом, остается решить только иррациональное уравнение.

$$\sqrt{x-1} + x = 0,$$

$$\sqrt{x-1} = -x, \quad -x \geq 0$$

$$(\sqrt{x-1})^2 = (-x)^2,$$

$$x-1 = x^2,$$

$$x^2 - x + 1 = 0.$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0 \rightarrow \text{нет решений}$$

Значит, и показательное уравнение

$$(\sqrt{3} + 2)^{\sqrt{x-1}+x} = (\sqrt{3} + 2)^0$$

не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Дополнительные примеры: $5^{x-4} = 25^2$; $5^{x^2-8x+12} = 1$; $2^{5x+1} = 4^{2x}$.

2. Метод введения новой переменной

Для того чтобы решить показательное уравнение данным способом необходимо определить возможность переписать данное уравнение в новом виде, которое позволит ввести новую переменную. Следующим шагом будет введение новой переменной. Далее решаем уравнение относительно новой переменной и записываем ответ.

Пример:

$$27^x - 13 \cdot 18^x - 12^x + 13 \cdot 8^x = 0.$$

Решение:

Записываем уравнение в виде:

$$3^{3x} - 13 \cdot 3^{2x} \cdot 2^x - 3^x \cdot 2^{2x} + 13 \cdot 2^{3x} = 0.$$

Данное уравнение является однородным третьей степени относительно степеней 3^x и 2^x .

Разделим все члены данного уравнения на 2^{3x} , при этом $2^{3x} \neq 0$, получаем:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{3x} - 13 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - \left(\frac{3}{2}\right)^x + 13 = 0.$$

Далее вводим новую переменную $p = \left(\frac{3}{2}\right)^x$, уравнение принимает форму кубического уравнения вида:

$$p^3 - 13p^2 - p + 13 = 0.$$

Разложим методом группировки левую часть уравнения на множители и найдём его корни:

$$p^3 - p - 13(p^2 - 1) = 0, p(p^2 - 1) - 13(p^2 - 1) = 0,$$

$$(p^2 - 1)(p - 13) = 0, p_1 = -1, p_2 = 1, p_3 = 13.$$

Исходное уравнение равносильно совокупности трёх показательных уравнений $\left(\frac{3}{2}\right)^x = -1, \left(\frac{3}{2}\right)^x = 1, \left(\frac{3}{2}\right)^x = 13$. Получаем: первое уравнение не имеет решений, $x_1 = 0, x_2 = \log_{\frac{3}{2}} 13$

Ответ: $0; \log_{\frac{3}{2}} 13$.

Дополнительные примеры: $2^{4x} - 50 \cdot 2^{2x} = 896; 16^x + 4 \cdot 4^x - 5 = 0;$
 $36^x - 4 \cdot 6^x - 12 = 0.$

3. Метод вынесения общего множителя за скобки

Для того чтобы решать показательное уравнение данным способом необходимо чтобы выполнялись следующие условия:

- 1) все степени имеют одинаковые показатели,
- 2) все показатели степеней имеют одинаковые коэффициенты при переменных.

При решении уравнений данным способом удобнее выносить степень с наименьшим показателем, если основание $a > 1$, с наибольшим – при $a < 1$.

Пример:

$$3^x + 4 \cdot 3^{x-1} + 2 \cdot 5^{x-1} = 19 \cdot 5^{x-2} - 4 \cdot 3^{x-2}.$$

Решение:

Преобразуем уравнение, перенеся члены с одинаковыми показателями в одну и тоже часть уравнения и вынося за скобки степень с наименьшим показателем к виду:

$$\begin{aligned} 3^x + 4 \cdot 3^{x-1} + 4 \cdot 3^{x-2} &= 19 \cdot 5^{x-2} - 2 \cdot 5^{x-1} \rightarrow 3^{x-2}(9 + 4 \cdot 3 + 4) \\ &= 5^{x-2}(19 - 2 \cdot 5) \rightarrow 3^{3x-2} \cdot 25 = 5^{x-2} \cdot 9 \end{aligned}$$

Запишем последнее равенство в виде пропорции и получим:

$$\frac{3^{3x-2}}{5^{x-2}} = \frac{9}{25} \leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^{x-2} = \left(\frac{3}{5}\right)^2$$

Данное уравнение равносильно уравнению $x - 2 = 2$, откуда $x = 4$

Ответ: 4.

Дополнительные примеры: $7^{x-2} + 4 \cdot 7^{x+1} = 539$; $3^{x+1} - 2 \cdot 3^{x-2} = 25$; $2^{3x+2} - 2^{3x-2} = 30$.

4. Функционально-графический метод решения

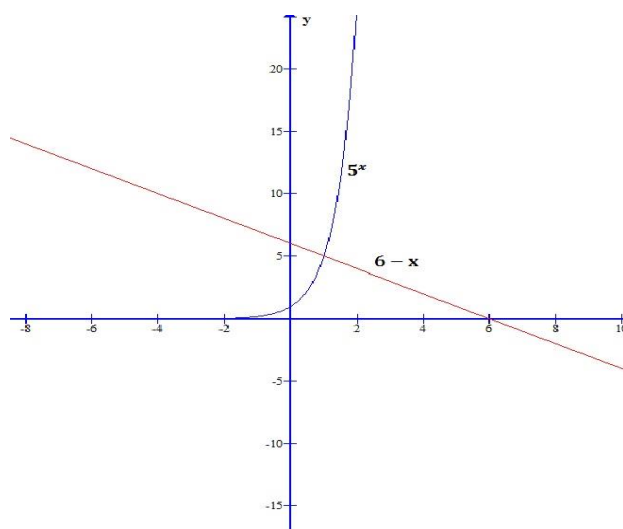
Для того чтобы решить показательное уравнение данным способом необходимо левую и правую части представить в виде функций. Далее построить графики двух функций (левая и правая части уравнения). Затем найти абсциссы точек пересечения графиков, эти значения и будут являться решением данного уравнения. При решении уравнений данным способом необходимо понимать, что результаты, которые получаются в результате решения, являются только приближенными и зависят от точности построения. Обычно, показательные уравнения решаются графическим способом только тогда, когда не видно более простого метода решения.

Пример:

$$5^x = 6 - x.$$

Решение:

Изначально необходимо построить в одной системе координат графики функций $y = 5^x$ и $y = 6 - x$:



Графики функций пересекаются в одной точке (1;5). Проверка показывает, что на самом деле точка (1;5) удовлетворяет и уравнению $y = 5^x$, и уравнению $y = 6 - x$. Абсцисса этой точки является единственным корнем заданного уравнения, так как $y = 5^x$ -возрастающая функция, а $y = 6 - x$ - убывающая функция.

Уравнение:

$$5^x = 6 - x$$

имеет единственный корень $x = 1$.

Ответ: 1.

Дополнительные примеры: $4^x = 5 - x$; $3^{-x} = -\frac{3}{x}$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} = 2x - 3$.

5. Метод почленного деления

Для того чтобы решить показательное уравнение данным способом, необходимо разделить каждый член уравнения, содержащий степени с одинаковыми показателями, но разными основаниями, на одну из степеней. Он применяется для решения однородных показательных уравнений.

Например,

$$3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x.$$

Решение:

Преобразуем уравнение:

$$3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} - 5 \cdot (4 \cdot 9)^x = 0,$$

$$3 \cdot 4^{2x} + 2 \cdot 9^{2x} - 5 \cdot 4^x \cdot 9^x = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $9^{2x} > 0$, получим уравнение:

$$3 \cdot \frac{4^{2x}}{9^{2x}} + 2 - \frac{5 \cdot 4^x \cdot 9^x}{9^{2x}} = 0,$$

$$3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 = 0.$$

Пусть $\left(\frac{4}{9}\right)^x = y$, $y > 0$, получим

$$\begin{cases} 3y^2 - 5y + 2 = 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{2}{3}, \\ y_2 = 1, \\ y > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{2}{3}, \\ y_2 = 1, \end{cases}$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{2}{3}, \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \frac{2}{3}, 2x = 1, x_1 = \frac{1}{2}; \left(\frac{4}{9}\right)^x = 1, x_2 = 0.$$

Ответ: $0; \frac{1}{2}$.

Дополнительные примеры: $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$; $3 \cdot 4^{2x} - 4^x \cdot 9^x + 2 \cdot 9^{2x} = 0$; $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$

6. Метод группировки

Для того чтобы решить показательное уравнение данным способом необходимо собрать степени с одинаковыми основаниями в одной части уравнения, а затем разделить обе части уравнения на одну из степеней.

Например,

$$5^{x-1} + 2^x - 5^x + 2^{x+2} = 0.$$

Решение:

Сгруппируем степени с основанием 5 в левой части, а степени с основанием 2 в левой части уравнения и вынесем общие множители за скобки:

$$5^{x-1} + 2^x - 5^x + 2^{x+2} = 0,$$

$$5^{x-1} - 5^x = -2^x - 2^{x+2},$$

$$5^{x-1} \cdot (1 - 5) = -2^x \cdot (1 + 2),$$

$$-4 \cdot 5^{x-1} = -2^x \cdot (1 + 2^2),$$

$$2^2 \cdot \frac{1}{5} \cdot 5^x = 5 \cdot 2^x,$$

$$2^2 \cdot 5^x = 5^2 \cdot 2^x,$$

$$\frac{5^x}{5^2} = \frac{2^x}{2^2},$$

$$5^{x-2} = 2^{x-2}.$$

Разделим обе части уравнения на 2^{x-2} или на 5^{x-2} , каждая из этих степеней больше 0.

Разделим на 2^{x-2} , получим: $\left(\frac{5}{2}\right)^{x-2} = 1, x - 2 = 0, x = 2$.

Ответ: 2

Дополнительные примеры: $2^{x^2-1} - 3^{x^2} = 3^{x^2-1} - 2^{x^2+2}$; $7^{x-5} \cdot 5^{x^2} - 49 \cdot 5^{x^2} + 3 \cdot 7^{x-5} = 147$; $3 \cdot 2^{x+1} + 2 \cdot 5^{x-2} = 5^x + 2^{x-2}$.

7. Метод логарифмирования

Метод логарифмирования при решении показательных уравнений используется в следующих случаях:

1) В одной части уравнения находится степень (произведение или частное степеней), в другой – положительное число.

2) В обеих частях уравнения находится степень (произведение или частное степеней), возможно с положительным числовым коэффициентом

Для того чтобы решить показательное уравнение данным методом необходимо:

- Убедиться, что обе части показательного уравнения принимают только положительные значения на ОДЗ для исходного уравнения.
- Провести логарифмирование обеих частей уравнения по одному и тому же положительному и отличному от единицы основанию.
- Решить уравнение, которое получается в результате логарифмирования.

Пример:

$$2^{x^2+7} = 3 \cdot 7.$$

Решение:

Прологарифмируем обе части показательного уравнения по основанию 2.
Получаем уравнение:

$$\log_2 2^{x^2+7} = \log_2(3 \cdot 7^x).$$

Свойства логарифмов позволяют провести ряд равносильных преобразований уравнения:

$$\log_2 2^{x^2+7} = \log_2(3 \cdot 7^x),$$

$$x^2 + 7 = \log_2 3 + \log_2 7^x,$$

$$x^2 + 7 = \log_2 3 + x \cdot \log_2 7.$$

Последнее уравнение сводится к квадратному уравнению путём переноса слагаемых:

$$x^2 - (\log_2 7) \cdot x + 7 - \log_2 3 = 0.$$

$$D = (-\log_2 7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (7 - \log_2 3) = (\log_2 7)^2 + 4 \cdot \log_2 3 - 28,$$

$$(\log_2 7)^2 < 9.$$

Так как

$$0 < \log_2 7 < \log_2 8,$$

$$0 < \log_2 7 < 3,$$

$$0^2 < (\log_2 7)^2 < 3^2,$$

$$0 < (\log_2 7)^2 < 9,$$

$$4 \cdot \log_2 3 < 8.$$

Так как

$$\log_2 3 < \log_2 4,$$

$$\log_2 3 < 2,$$

$$4 \cdot \log_2 3 < 4 \cdot 2,$$

$$4 \cdot \log_2 3 < 8 \rightarrow$$

$$(\log_2 7)^2 + 4 \cdot \log_2 3 - 28 < 9 + 8 - 28,$$

$$(\log_2 7)^2 + 4 \cdot \log_2 3 - 28 < -11.$$

Следовательно, квадратное уравнение

$$x^2 - (\log_2 7) \cdot x + 7 - \log_2 3 = 0$$

не имеет решений, а это значит, что и исходное показательное уравнение не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Дополнительные примеры: $2^x = 3$; $2^{x^2+7} = 3 \cdot 7^x$; $5^x = 2^{x+1}$

Основные методы решения показательных неравенств

Неравенства, содержащие переменные в показателе степени, называются показательными неравенствами. Любое показательное уравнение всегда решается путём сведения к простейшему показательному уравнению.

Неравенства вида:

$$a^x > b,$$

$$a^x < b,$$

где a – данное положительное, не равное 1 число, b – данное действительное число, называют простейшими показательными неравенствами.

Методы решения показательных неравенств во многом схожи со способами решения показательных уравнений. Но, в отличие, от решения уравнений, в неравенствах необходимо искать промежутки (т.е. множества значений переменной, на которой данное неравенство выполняется).

Для решения показательных неравенств используются следующие методы:

1. Метод разложения на множители;
2. Функционально-графический метод;
3. Метод замены переменной.

1. Метод разложения на множители

Для того чтобы решить показательное неравенство методом разложения на множители, изначально выполняют разложение на множители, затем находят, при каких значениях переменной произведение принимает положительные или отрицательные значения (в зависимости от знака данного неравенства).

При этом стоит помнить:

- после разложения на множители в левой части неравенства необходимо анализировать полученные множители;
- произведение двух множителей больше 0, если множители имеют одинаковый знак;
- произведение двух множителей меньше нуля, если множители имеют разные знаки.

Пример:

$$(0,3)^{\frac{x}{x-2}} < (0,3)^{\frac{6}{x-1}}.$$

Решение:

Так как $0,3 < 1$, то

$$\frac{x}{x-2} > \frac{6}{x-1}.$$

Приведём дроби к общему знаменателю:

$$\frac{x(x-1)}{(x-2)(x-1)} > \frac{6(x-2)}{(x-2)(x-1)},$$

$$\frac{x(x-1)-6(x-2)}{(x-2)(x-1)} > 0,$$

$$\frac{x^2 - x - 6x + 12}{(x-2)(x-1)} > 0,$$

$$\frac{x^2 - 7x + 12}{(x-2)(x-1)} > 0.$$

Разложим $x^2 - 7x + 12$ на множители: $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$, тогда получим:

$$\frac{(x-3)(x-4)}{(x-2)(x-1)} > 0.$$

Решаем полученное неравенство методом интервалов и записываем ответ:

$$x \in (-\infty; 1) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; 3) \cup (4; +\infty)$.

2. Метод введения новой переменной

Для того чтобы решить показательное неравенство данным способом необходимо сделать подстановку $a^{f(x)} = t$, где $t > 0$. В данном случае неравен-

ство приводится к квадратному неравенству относительно переменной t , либо к какому-нибудь другому неравенству относительно переменной t . Далее уравнение решается относительно t . Затем ищется значение переменной x .

Пример:

$$16^x + 4^x - 2 > 0.$$

Решение:

$$16^x + 4^x - 2 > 0 \Leftrightarrow (4^2)^x + 4^x - 2 > 0 \Leftrightarrow (4^x)^2 + 4^x - 2 > 0.$$

Пусть

$$4^x = t, t > 0.$$

Тогда

$$t^2 + t - 2 > 0 \Leftrightarrow (t + 2) \cdot (t - 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t + 2 > 0, \\ t - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > -2, \\ t > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t + 2 < 0, \\ t - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t < -2, \\ t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 1 \\ t < -2 \end{cases}.$$

Вернемся к переменной x и получим два неравенства:

$$4^x > 1 \Leftrightarrow 4^x > 4^0 \Leftrightarrow x > 0.$$

$$4^x < -2, \text{ решений нет, так как } 4^x > 0, \text{ для } \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ответ: $x \in (0; +\infty)$.

3. Функционально-графический метод

Наглядность, свойственная графическому методу, при решении неравенств ещё более ценна, чем при решении уравнений. Способы решения остаются теми же. Сами же решения, в отличие от решений уравнений, чаще изображаются на графике не только отдельными точками, но и целыми участками числовой оси. Для того чтобы решить показательное неравенство графическим методом нужно рассмотреть две функции, построить их графики в одной системе координат и выяснить при каких значениях аргумента значения одной функции больше (меньше) значений другой функции. Найденные значения аргумента и есть решения неравенства.

Пример:

$$3^x > 11 - x.$$

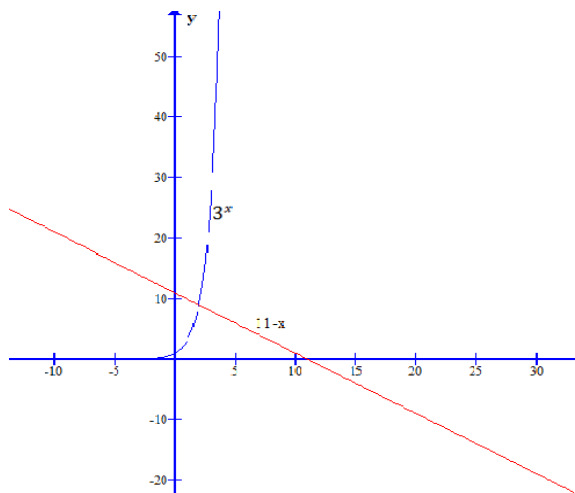
Решение:

Для того чтобы решить данное уравнение графическим способом необходимо рассмотреть две функции: $f(x) = 3^x$ и $g(x) = 11 - x$, $D(f)=R$, $D(g)=R$.

Функция $f(x) = 3^x$ - показательная функция, основание 3. Для построения графика зададим таблицу её значений.

Функция $g(x) = 11 - x$ - линейная функция, её графиком является прямая.

Далее построим графики этих функций в одной системе координат и выясним, при каких значениях переменной x выполнено неравенство $f(x) > g(x)$.



Рассмотрим два интервала: $(-\infty; 2)$ и $(2; +\infty)$. Если $x \in (-\infty; 2)$, то $f(x) < g(x)$, если $x \in (2; +\infty)$, то $f(x) > g(x)$. Значит, решением неравенства $3^x > 11 - x$ являются значения x , которые принадлежат промежутку $(2; +\infty)$.

Ответ: $x \in (2; +\infty)$.

Системы, содержащие одно или два показательных уравнений

При решении систем уравнений, содержащие показательные уравнения, чаще используют метод подстановки и метод замены переменных.

Систему двух уравнений с двумя переменными обозначают фигурными скобками и обычно записывают в виде:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_2(x, y) = g_2(x, y) \end{cases}.$$

Несколько уравнений с двумя или более переменными образуют систему уравнений, если ставится задача найти множество общих решений этих уравнений.

$$\begin{cases} f_1(x, y) = g_1(x, y) \\ f_2(x, y) = g_2(x, y) \end{cases}$$

Решением системы уравнений называется множество упорядоченных пар, точек (в случае систем с тремя переменными) и т.д. значений переменных, обращающих в истинное равенство каждое уравнение системы.

Решить систему уравнений – значит найти все её решения или доказать, что решений нет. Система уравнений называется определенной, если она имеет конечное число решений, неопределенной, если она имеет бесчисленное множество решений.

Система называется совместной, если имеет хотя бы одно решение и несовместной, если она не имеет ни одного решения.

Пример:

$$\begin{cases} 2 \cdot 3^{2x-1} + 3 \cdot 2^y = 10 \\ 3^x - 3 \cdot 2^{y-1} = -3 \end{cases}$$

Решение.

Преобразуем систему уравнений:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2 \cdot 3^{2x-1} + 3 \cdot 2^y = 10 \\ 3^x - 3 \cdot 2^{y-1} = -3 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot \frac{3^{2x}}{3} + 2^y = 10 \\ 3^x - 3 \cdot \frac{2^y}{2} = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 3^{2x} + 3 \cdot 2^y = 30 \\ 2 \cdot 3^x - 3 \cdot 2^y = -6 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^x = 24, 3^{2x} + 3^x - 12 = 0. \end{aligned}$$

Пусть $3^x = z$, $z > 0$, получим $z^2 + z - 12 = 0$, $z_1 = -4$, $z_2 = 3$.

$z_1 = -4$ не удовлетворяет условию $z > 0$ и является посторонним корнем.

$3^x = 3$, $x = 1$. Подставляя значения x в одно из уравнений системы, найдем значение y : $2 \cdot 3^{2 \cdot 1 - 1} + 2^y = 10$, $2^y = 10 - 6$, $2^y = 4$, $y = 2$.

Получим $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Ответ: $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$.

Системы неравенств. Совокупность неравенств.

Несколько неравенств с одной переменной образуют систему неравенств, если ставится задача об отыскании всех тех значений переменной, которые удовлетворяют одновременно каждому из этих неравенств.

Значение переменной, при котором каждое неравенство системы обращается в верное числовое неравенство, называется решением системы неравенств.

Решением системы неравенств является пересечение решений неравенств, образующих систему, а решением совокупности неравенств является объединение решений неравенств, образующих совокупность.

Пример:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-x} > \frac{27}{64} \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 8\sqrt{2} \end{cases}$$

Решение:

$$\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{-x} > \frac{27}{64} \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 8\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^x > \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\ 2^{x^2-6x-3,5} < 2^{\frac{7}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3 \\ x^2 - 6x - 3,5 < 3,5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 3 \\ (x+1)(x-7) < 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-1, 3)$.

1.3 Значение изучения темы «Показательные уравнения и неравенства»

Уравнения и неравенства достаточно широко используются в различных разделах математики. Соответственно решение заданий, содержащие уравнения и неравенства составляют значительную часть школьного курса математики. Уравнений и неравенства сами по себе вызывают интерес у учащихся, так как с помощью них можно записываются задачи на символическом языке, которые помогают познать окружающий нас мир и реальную действительность. Но это не главная роль изучения данной темы. При изучении любой темы уравнения и неравенства используются как эффективное средство закрепления, углубления, повторения и расширения теоретических и практических знаний и навыков, а также для развития творческой математической деятельности учащихся. Функции и свойства функций, метрические соотношения между элементами геометрических фигур, операции над числами и свойства этих операций, тождества и тождественные преобразования в процессе изучения сразу могут находить отражение в заданиях, содержащих уравнения и неравенства. Например, разнообразные формы упражнений, где учащиеся должны решить предложенное уравнение (неравенство); составить уравнение (неравенство) по заданному множеству его решений; решить задачу с помощью уравнения (неравенства); составить задачу по заданному уравнению (неравенству); составить несколько уравнений (неравенств) помогают развивать сообразительность, инициативу и находчивость учащихся, а также способствовать развитию исследовательских способностей. Решение уравнений и неравенств графическим способом способствуют развитию пространственного воображения. Также уравнения и неравенства имеют большую роль при решении задач, связанных с производством, экономикой и другими смежными дисциплинами. Так как решение задач такого характера помогает сформировать связь преподавания математики с жизнью и подготовить учащихся к дальнейшему выбору профессии в будущем.

При изучении математики в школе большое внимание уделяется изучению и решению уравнений и неравенств разных типов, в том числе и показательных. Впервые ученики встречаются с показательными уравнениями неравенства в десятом классе. Перед тем как приступить к изучению уравнений и неравенств, ученики знакомятся с показательной функцией, её свойствами и графиком. Далее знакомство с данной темой продолжается в одиннадцатом классе. Изучению уравнений и неравенств данного типа в школьном курсе должно уделяться большое внимание, так как показательные уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств и комбинированные задания встречаются в заданиях ЕГЭ по математике как на базовом, так и на профильном уровнях. Для того чтобы справиться с данными заданиями, необходимо иметь хорошие знания алгоритма решения, основные методы решения показательных уравнений и неравенств.

При выполнении заданий, включающих решение показательных уравнений и неравенств у многих школьников возникают трудности. Во-первых, это связано с незнанием четкого алгоритма решения. Во-вторых, ошибки в преобразовании, которые в последующем приводят к неправильному пути решения. В-третьих, при использовании метода введения новой переменной в решении задания, школьники забывают вернуться к обратной замене. В-четвёртых, школьники не знают формулы и формулировки теорем, которые необходимы для решения показательных уравнений и неравенств.

1.4 Анализ показательных уравнений и неравенств в заданиях ЕГЭ

Рассмотрим задания из ЕГЭ, которые содержат примеры на решение показательных уравнений и неравенств 2017 - 2020 г. Задачи на решение показательных уравнений и неравенств встречаются как в первой части, так и во второй части. В первой части в основном предлагают решить простейшие показательные уравнения. Во второй части встречаются более сложные показатель-

ные уравнения. Также во второй части могут встречаться комбинированные уравнения, т.е. быть показательными и рациональными, показательными и иррациональными, показательными и тригонометрическими, показательными и логарифмическими и т.д. Такие задания, как правило, встречаются в задании №15.

Примеры заданий первой части ЕГЭ:

Пример 1:

$$3^{x-5} = 81.$$

Пример 2:

$$4^x = \frac{1}{2}.$$

Пример 3:

$$5^{7-2x} = 25.$$

Пример 4:

$$2017^{5+x} = 1.$$

Примеры заданий второй части ЕГЭ:

Пример 1:

$$\frac{9^x - 2 \cdot 3^{x+1} + 4}{3^x - 5} + \frac{2 \cdot 3^{x+1} - 51}{3^x - 9} \leq 3^x + 51.$$

Пример 2:

$$\frac{4 \sin x \cdot \sin 2x - \sin^2 2x - 4 + 4 \cos^2 x}{\sqrt{16 - 2^{(x-5)^2}}} \geq 0.$$

Пример 3:

$$\begin{cases} \log_x(x^3 - 1) \leq \log_x(x^3 + 2x - 4), \\ \sqrt{3 \cdot 4^x - 5 \cdot 2^{x-1}} - 3 \geq 2^{x-3}. \end{cases}$$

Пример 4:

$$\begin{cases} \log_{3x+1}(4x - 6) + \log_{4x-6}(3x + 1) \leq 2, \\ 16^x - 12^x - 2 \cdot 9^x \leq 0. \end{cases}$$

Пример 5:

$$\log_{\sqrt{3}-1}(9^{|x|} - 2 \cdot 3^{|x|}) \leq \log_{\sqrt{3}-1}(2 \cdot 3^{|x|} - 3).$$

Пример 6:

$$(3^{x+2} + 3^{2-x})x^2 \geq \frac{45x^2}{2}.$$

Обзор основных ошибок, допускаемых в заданиях ЕГЭ

Задание	Процент выполнения	Типичные ошибки
1	90%	Неумение читать условие и непонимание процентов
2	95%	Невнимательное чтение условия и непонимание единиц измерения
3	88%	Невнимательное чтение условия
4	89%	Невнимательное чтение условия
5	91%	Ошибки в свойствах степеней
6	65%	Непонимание математической записи угла и неверное чтение чертежа
7	54%	Невнимательное чтение условия
8	57%	Отсутствие базовых пространственных представлений и знаний соотношений
9	47%	Ошибки в определении знака тригонометрической функции
10	65%	Невнимательное чтение условия или непонимание текста
11	36%	Невнимательное чтение условия
12	38%	Непонимание алгоритма исследования функции с помощью производной
13	36%	Неумение и небрежность отбора корней тригонометрического уравнения с помощью еди-

		ничной окружности
14	6%	Неумение доказывать, непонимание взаимосвязи элементов геометрической конструкции, ошибки в теоретических фактах
15	15%	Невнимательное чтение математической записи неравенства, непонимание алгоритма решения совокупностей и систем логарифмических неравенств, забыт знаменатель при решении дробно-рационального неравенства, небрежность при изображении множества решений на координатной прямой
16	3%	Неверное понимание логики построения доказательства, ошибки в построении чертежа
17	11%	Неверное составление модели задачи (непонимание взаимосвязи величин) и вычислительные ошибки
18	3,5%	Недостаточная сформированность графического метода решения – отсутствие объяснений и обоснований, отсутствие ответа на поставленный вопрос
19	3,5%	Непонимание того, что на вопрос «Может ли...?» нужно давать аргументированное решение, а не ответ «да» или «нет»

Пример задания №5:

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{x-2} = 6^x.$$

В этом задании проверялись навыки учащихся решать показательные и логарифмические уравнения. Из 7% выпускников, которые не справились с заданием, 2% ошиблись в свойствах степеней.

Пример задания №15:

$$(3^{x+2} + 3^{2-x})x^2 \geq \frac{45x^2}{2}.$$

При решении задания были допущены такие типичные ошибки:

- потеря части решения неравенства;
- неверное преобразование неравенств;
- ошибки в записи числового промежутка;
- нет четкого понимания сути понятий «система» и «совокупность»;
- неверное применение метода декомпозиции;
- ошибки в преобразовании показательного неравенства;
- ошибки при выполнении тождественных преобразований.

Исходя из статистики можно сделать вывод, что изучению уравнений и неравенств данного типа в школьном курсе должно уделяться большое внимание, так как показательные уравнения и неравенства, системы уравнений и неравенств и комбинированные задания встречаются в заданиях ЕГЭ по математике на базовом и на профильном уровнях. Для того чтобы справиться с данными заданиями, необходимо иметь хорошие знания алгоритма решения, основные методы решения показательных уравнений и неравенств.

Глава 2. Методические особенности обучения школьников решению показательных уравнений и неравенств

2.1 Методические особенности обучения школьников решению показательных уравнений и неравенств

Уравнение, которое содержит переменную в показателе степени, называется показательным. Ещё в советской методике о целесообразности изучения показательных уравнений и неравенств были разные точки зрения. Например, В.М. Брадис в своей книге «Методика преподавания математики в средней школе» говорит, что в школьном курсе показательные уравнения и неравенства занимают место «несоответствующее их ничтожному значению» [2, с. 171]. Члены секции высшей технической школы Математического общества совместно с членами секции средней школы имели противоположное мнение. Члены секции считали, что среди недостатков, поступающих в вузы, наблюдается значительные пробелы в знаниях при решении показательных уравнений и неравенств. В настоящее время показательные уравнения и неравенства являются важной частью математики школьного курса, а также входят в задания ЕГЭ.

К методам решения показательных уравнений относят:

1. метод уравнивания показателей;
2. метод введения новой переменной;
3. метод вынесения общего множителя за скобки;
4. функционально-графический метод;
5. метод почленного деления;
6. метод группировки;
7. метод логарифмирования.

Изначально, обучающиеся знакомятся с показательной функцией, затем приступают к изучению показательных уравнений. Определение функции необходимо дать такое, чтобы оно способствовало отысканию всех действи-

тельных корней показательных уравнений, так как решению показательных уравнений находится в тесной связи с показательной функцией.

Исходя из этого, обучающиеся начинают решать уравнения, уже зная определение показательной функции, её свойства, график, новые обозначения и понятия.

Независимо от личной позиции и методики преподавателя, теоретический материал по данной теме должен включать различные методы решения для более углубленного изучения данной темы. Устаревший или вызывающий сомнения материал не должен использоваться. Необходимо делать краткие выводы по теме, которые в последующем должны помочь обучающимся усвоить новые методы решения.

Практические занятия должны включать примеры выполнения заданий с подробным анализом наиболее часто встречающихся ошибок и должны быть направлены на выработку навыков и умений применения теоретических знаний.

Как правило, при решении показательных уравнений используют те приемы, которые могут привести к возникновению посторонних корней или же к потере корней, что затрудняет изучение этой темы.

В процессе исследования был проведен анализ учебников «Алгебра и начала анализа» для 10–11 классов трех разных авторов: А. Г. Мордковича, А. Н. Колмогорова и Ш. В. Алимова. Анализ данных учебников показал, что методика обучения решению показательных уравнений практически одинакова, но при этом методы решения показательных уравнений описаны по-разному. Из всех рассмотренных учебников наилучшее представление теоретического и практического материала, с нашей точки зрения, дано в учебнике под редакцией А. Г. Мордковича. Для того, чтобы облегчить усвоение обучающимися теоретического материала была составлена карточка-консультант (Приложение 1). Так же была разработана конспект урока совершенствования знаний, умений и

навыков по теме: «Решение показательных уравнений», с учетом требований ФГОС.

При решении показательных уравнений обучающиеся приобретают навыки логического мышления и обобщения материала, развивают умственные и творческие способности.

Рассмотрим подробнее методику обучения функционально – графического метода.

Функционально – графический метод решения показательных уравнений основан на использовании графических иллюстраций или каких-либо свойств функций.

При решении некоторых показательных уравнений полезно использовать понятия области определения и области значений функции.

Выделим этапы обучения школьников функционально-графическому способу решения уравнений и неравенств.

1. Подготовительный этап.

На данном этапе происходит формирование следующих действий, реализующих функционально-графический метод решения уравнений и неравенств:

а) выполнение операций над функциями и нахождение суперпозиции функций;

б) построение графиков функций, в том числе с применением компьютерных технологий.

Здесь же осуществляется систематизация, обобщение, расширение и углубление знаний и умений учащихся по тематическим блокам «Числовые функции и их свойства», «Построение графиков функций различными способами», «Решение уравнений и неравенств алгебраическими методами», выделенным на основе анализа действий, составляющих функционально-графический метод.

2. Этап решения уравнений и неравенств на применение отдельных свойств функций.

На втором этапе учащиеся выполняют задания, которые являются составной частью уравнений и неравенств повышенной сложности. Это специальные уравнения и неравенства, в которых для решения необходимо применить отдельные свойства функции (монотонности, ограниченности, выпуклости (вогнутости), чётности (нечётности), периодичности, области определения).

Далее происходит формирование следующих действий, входящих в состав функционально-графического метода решения уравнений и неравенств:

а) определение структуры уравнения и неравенства: выяснение, из каких функций и каким образом они составлены;

б) выделение свойств, присущих функциям, входящим в уравнение и неравенство (ограниченность, монотонность, чётность, нечётность и т.д.), то есть исследование функции;

в) решение уравнения (неравенства) с применением отдельных свойств элементарных функций.

Для действий, формируемых на первом и втором этапах, разработаны специальные системы задач.

3. Этап составления уравнений и неравенств, решаемых функционально-графическим методом.

На третьем этапе учащиеся получают навыки, позволяющие составлять уравнения и неравенства, которые решаются функционально-графическим методом с применением одного из свойств элементарных функций. Задания такого типа способствуют активизировать познавательную самостоятельность обучающихся и помогают осуществлять переход от решения простейших уравнений и неравенств к решению уравнений и неравенств повышенной сложности.

4. Этап выбора метода решения уравнений и неравенств повышенной сложности.

Целью этого этапа - овладение учащимися функционально-графическим методом в процессе решения уравнений и неравенств повышенной сложности.

Здесь происходит формирование умения решать уравнения и неравенства повышенной сложности, с выбором метода решения уравнений и неравенств.

2.2 Изучение метода замены множителей при решении показательных неравенств

Большинство пособий по математике и многие школьные учебники не включают в себя материал, который способствовал эффективному решению задач тем или иным способом. Из-за этого многие школьники, опираясь на рекомендации в данных источниках, в основном выбирают единственный путь решения предложенной задачи. Следствием данной ситуацией является игнорирование многими школьниками задача, сопряженных большим объёмом (по мнению школьника) работы по преодолению технических трудностей.

Многое, вероятно, объясняется отсутствием навыков, но не исключено, что школьник и не предполагает о наличии тех или иных эффектных ходов, тактических тонкостей при реализации выбранной схемы решения, которые давно практикуются многими учителями.

Речь идет об очень эффективном методе решения неравенств - методе замены множителей, который применяется при решении различных видов неравенств в 9 - 11 классах. Он позволяет быстро и эффективно решать целый класс неравенств повышенной сложности, переводя их тем самым в разряд «стандартных задач».

Метод рационализации позволяет перейти от неравенства, содержащего сложные показательные, логарифмические и т. п. выражения, к равносильному ему более простому рациональному неравенству.

Равносильными или эквивалентными называются уравнения (неравенства), множества корней которых совпадают. Равносильными также считаются уравнения (неравенства), которые не имеют корней.

При решении логарифмических и показательных неравенств воспользуемся следующими правилами.

1. Знак разности $a(x)^{f(x)} - a(x)^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения $(a(x) - 1)(f(x) - g(x))$ на области определения.
2. Знак разности $\log_{a(x)} f(x) - \log_{a(x)} g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a(x) - 1)(f(x) - g(x))$ на области определения.

Данные правила распространяются и на случай, когда в основании степени и в основании логарифма стоят константы.

Рассмотрим решение некоторых неравенств.

Наиболее часто используемые замены (без учета О Д З).

а) Замена знакопостоянных множителей.

- 1) $(ax^2 + bx + c) \leftrightarrow 1, (a > 0, D < 0),$
- 2) $(ax^2 + bx + c) \leftrightarrow -1, (a < 0, D < 0),$
- 3) $(|f| + |g|) \leftrightarrow 1, (|f| + |g| \neq 0),$
- 4) $(\sqrt{f} + \sqrt{g}) \leftrightarrow 1, (|f| + |g| \neq 0),$
- 5) $(\sqrt{f} + |g|) \leftrightarrow 1, (|f| + |g| \neq 0),$
- 6) $(|f| + g) \leftrightarrow 1, (g > 0),$
- 7) $(\sqrt{f} + g) \leftrightarrow 1, (g > 0),$
- 8) $a^f \leftrightarrow 1,$
- 9) $(a^f + |g|) \leftrightarrow 1,$
- 10) $(a^f + \sqrt{g}) \leftrightarrow 1, (g \geq 0),$
- 11) $(a^f + a^g + a^h + \dots) \leftrightarrow 1.$

б) Замена незнакопостоянных множителей с модулем.

- 12) $(|f| - |g|) \leftrightarrow f^2 - g^2 = (f - g)(f + g),$
- 13) $(|f| - g) \leftrightarrow (f - g)(f + g), (g \geq 0),$
- 14) $(|f| - (ax^2 + bx + c)) \xleftrightarrow{(a>0, D<0)} (f + ax^2 + bx + c)(f - ax^2 - bx - c),$
- 15) $(|f| - \sqrt{g}) \leftrightarrow f^2 - g,$

$$16) (\sqrt{f} - g) \leftrightarrow f - g^2, (g \geq 0),$$

$$17) (\sqrt{f} - \sqrt{g}) \leftrightarrow (f - g),$$

$$18) (\sqrt{f} - \sqrt{|g|}) \leftrightarrow (f - g)(f + g),$$

$$19) (\sqrt{|f|} - g) \leftrightarrow (f - g^2)(f + g^2), (g \geq 0),$$

$$20) (|f| - \sqrt{|g|}) \leftrightarrow (f^2 - g)(f^2 + g),$$

$$21) (\sqrt{|f|} - \sqrt{|g|}) \leftrightarrow (f - g)(f + g),$$

$$22) |f| \leftrightarrow f^2,$$

$$23) \sqrt{f} \leftrightarrow f,$$

$$24) \sqrt{|f|} \leftrightarrow f^2.$$

в) Замена незначкопостоянных множителей с показательными и логарифмическими выражениями.

$$25) (a^f - a^g) \leftrightarrow (f - g)(a - 1),$$

$$26) (a^f - g) \leftrightarrow (f - \log_a g)(a - 1), (g \geq 0),$$

$$27) (a^f - 1) \leftrightarrow f(a - 1),$$

$$28) (\log_a f - \log_a g) \leftrightarrow (f - g),$$

$$29) (\log_a f - \log_a g) \leftrightarrow (f \cdot (g - 1))(a - 1),$$

$$30) (\log_a f - g) \leftrightarrow (f - a^g)(a - 1),$$

$$31) (\log_a f + g) \leftrightarrow (f \cdot a^g - 1),$$

$$32) (\log_a f - 1) \leftrightarrow (f - a)(a - 1),$$

$$33) \log_a f \leftrightarrow (f - 1)(a - 1).$$

Решение неравенств.

Привожу относительно подробные решения двух сложных неравенств методом замены множителей.

$$1. \frac{((x^2+x+1)^{x+1} - (x^2+x+1)^3)(x^2-7|x|+10)}{1-\log_{x^2}(x^2+3x-18)} < 0$$

Решение: ОДЗ:

$$\begin{cases} x^2 + x + 1 > 0, \\ x^2 + 3x - 18 > 0, \Leftrightarrow (x + 6)(x - 3) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -6) \cup (3; \infty) \\ x \neq \pm 1, x \neq 0 \end{cases}$$

Замена множителей:

$$1) ((x^2 + x + 1)^{x+1} - (x^2 + x + 1)^3) \Leftrightarrow (x + 1 - 3)(x^2 + x + 1 - 1) = (x - 2)(x^2 + x) = x(x - 2)(x + 1).$$

$$2) x^2 + 7|x| + 10 = (|x| - 2)(|x| - 5) \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 5) = (x - 2)(x + 2)(x - 5)(x + 5).$$

$$3) 1 - \log_{x^2}(x^2 + 3x - 18) = \log_{x^2} x^2 - \log_{x^2}(x^2 + 3x - 18) \Leftrightarrow (x^2 - x^2 - 3x + 18)(x^2 - 1) = -3(x - 6)(x - 1)(x + 1).$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{x(x - 2)^2(x + 1)(x + 2)(x - 5)(x + 5)}{(x - 6)(x - 1)(x + 1)} > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -6) \cup (3; 5) \cup (6; \infty), \\ (x + 6)(x - 3) > 0 \end{cases}$$
$$2. \frac{|x^2 - 2x| + 2x - 1}{x^2 - x + |x^2 + 3x|} > 0.$$

Решение:

$$\frac{|x^2 - 2x| + 2x - 1}{x^2 - x + |x^2 + 3x|} > 0.$$

В этом неравенстве уже нельзя множители $(|x^2 - 2x| - (1 - 2x))$ и $(|x^2 + 3x| - (x - x^2))$ рассматривать как разности неотрицательных величин, так как выражения $1 - 2x$ и $x - x^2$ в ОДЗ могут принимать как положительные так и отрицательные значения.

$$1 - 2x > 0 \text{ при } x < 0,5, \text{ а } (x - x^2) > 0 \text{ при } 0 < x < 1.$$

$$\text{При } x \in (-\infty; 0) \text{ } (1 - 2x) > 0, \text{ а } (x - x^2) < 0.$$

Замена множителей:

$$1) \quad |x^2 - 2x| - (1 - 2x) \leftrightarrow (x^2 - 2x)^2 - (1 - 2x)^2 = (x^2 - 2x - 1 + 2x)(x^2 - 2x + 1 - 2x) = (x^2 - 1)(x^2 - 4x + 1) = (x - 1)(x + 1)(x - (2 - \sqrt{3}))(x + (2 - \sqrt{3})).$$

$$2) \quad (|x^2 + 3x| - (x - x^2)) \leftrightarrow 1, \text{ т. к. } 0 \in \text{ОДЗ}$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} (x + 1)(x - 1)(x - (2 + \sqrt{3}))(x - (2 - \sqrt{3})) > 0 \\ x < 0 \end{cases} \leftrightarrow x \in (-\infty; -1).$$

При $x \in (0; 0,5]$ $(1 - 2x) > 0$, а $(x - x^2) > 0$.

Замена множителей:

$$1) \quad |x^2 - 2x| - (1 - 2x) \leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x - (2 - \sqrt{3}))(x + (2 - \sqrt{3})).$$

$$\begin{aligned} 2) \quad (|x^2 + 3x| - (x - x^2)) &\leftrightarrow (x^2 + 3x)^2 - (x - x^2)^2 \\ &= (x^2 + 3x - x + x^2)(x^2 + 3x + x - x^2) - 4x(2x^2 + 2x) \\ &= 8x^2(x + 1). \end{aligned}$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{(x - 1)(x + 1)(x - (2 - \sqrt{3}))}{x^2(x + 1)} > 0 \\ 0 \leq x \leq 0,5 \end{cases} \leftrightarrow x \in (2 - \sqrt{3}; 0,5].$$

При $x \in (0,5; 1]$ $(1 - 2x) < 0$, а $(x - x^2) > 0$.

Замена множителей:

$$1) \quad |x^2 - 2x| - (1 - 2x) \leftrightarrow 1.$$

$$2) \quad (|x^2 + 3x| - (x - x^2)) \leftrightarrow x^2(x + 1).$$

Имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2(x + 1)} > 0 \\ 0,5 < x \leq 1 \end{cases} \leftrightarrow x \in (0,5; 1]$$

При $x \in (1 + \infty)$ $(1 - 2x) < 0$, а $(x - x^2) < 0$.

Замена множителей:

$$1) |x^2 - 2x| - (1 - 2x) \leftrightarrow 1.$$

$$2) (|x^2 + 3x| - (x - x^2)) \leftrightarrow x^2(x + 1).$$

Имеем систему: $\begin{cases} 1 > 0 \\ x > 1 \end{cases} \leftrightarrow x \in (1; +\infty).$

В итоге имеем: $x \in (-\infty; -1) \cup (2 - \sqrt{3}; +\infty].$

2.3 Конспекты уроков по теме «Решение показательных уравнений и неравенств»

Тема урока: Решение показательных уравнений.

Класс: 11

Учебник: А.Н. Колмогоров «Алгебра и начала математического анализа».

Тип урока: урок совершенствования знаний, умений и навыков

Оборудование: экран, компьютер, доска, учебник.

Цель урока: систематизировать знания о способах решения показательных уравнений.

Задачи:

- Развивать умения самостоятельно добывать знания.
- Активизировать познавательную деятельность.
- Формировать навыки коллективной работы.
- Развивать логическое мышление.

Ход урока.

1. Организационный момент.

Приветствие. Ученикам сообщается тема и цель урока.

2. Актуализация знаний.

Два ученика работают у доски.

1) Изобразить схематически график функции $y = -3 \cdot 2^x$.

2) Изобразить схематически график функции $y = 2^{|x|}$.

Учитель работает с классом: «Давайте с вами вспомним»:

1. Какая функция является показательной? Приведите пример.

2. Какая показательная функция возрастающая? А какая убывающая?

Примеры.

3. Какова область определения, и каково множество значений этой функции?

(слайды на экране).

Какие функции из данных являются показательными?

1) $y = 5^{|x-3|}$,

2) $y = 5^{-x+12}$,

3) $x^2 + 27$,

4) $y = \left(\frac{2}{5}\right)^{x+12}$,

5) $y = (-10)^{-x}$,

6) $y = -x^2 + 7x - 17$,

7) $y = 35x^3$.

Какие из данных функций возрастают? Какие убывают? Почему?

1) $y = 7^{-x}$,

2) $(0,6)^{3x}$,

3) $y = \left(\frac{1}{9}\right)^x$,

4) $y = (0,5)^{-x}$,

4) $\left(\frac{5}{7}\right)^x - 3$,

5) $y = \left(3\frac{2}{5}\right)^x$.

Какое уравнение называется показательным?

Ответ: уравнение, содержащее переменную в показателе степени.

Является ли уравнение показательным?

1) $12x^2 + 11 = 0$.

$$2) \quad 12x^2 + 31x - 7 = 0.$$

$$3) \quad 2^x = \frac{1}{26}.$$

$$4) \quad y = \left(\frac{1}{9}\right)^x.$$

$$5) \quad 2^{\sqrt{x-1}} = 0.$$

$$6) \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x - 12 = 0.$$

Решить уравнение:

$$1) \quad 2^x = 1.$$

$$2) \quad 2^x = 4.$$

$$3) \quad 2^x = 8.$$

$$4) \quad 2^x = \frac{1}{16}.$$

$$5) \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = 1.$$

$$6) \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = 9.$$

$$7) \quad \left(\frac{1}{3}\right)^x = \frac{1}{9}.$$

3. Изучение нового материала.

Все показательные уравнения, какой бы степени сложности они не были, решаются по единым алгоритмам.

1 способ – уравнивание оснований.

Пример: $3^{(x^2 - \frac{5}{7}x)} = \sqrt[7]{9}.$

Педагог: Как можно записать $3^{(x^2 - \frac{5}{7}x)} = \sqrt[7]{9}$ в виде степени?

Ученики: $\sqrt[7]{9} = 9^{\frac{1}{7}}.$

Педагог: Приведите данную степень к основанию 3.

Ученики: $9^{\frac{1}{7}} = 3^{\frac{2}{7}}$.

Педагог: Какое уравнение получим?

Ученики: $3^{(x^2 - \frac{5}{7}x)} = 3^{\frac{2}{7}}$.

Педагог: Левая и правая части уравнения приведены к одному основанию. Получили уравнение:

$$3^{(x^2 - \frac{5}{7}x)} = \sqrt[7]{9},$$

$$x^2 - \frac{5}{7}x = \frac{2}{7},$$

$$7x^2 - 5x = 2,$$

$$7x^2 - 5x - 2 = 0.$$

$$D = 25 + 4 \cdot 7 \cdot 2 = 25 + 56 = 81.$$

$$x_1 = \frac{5+9}{14} = 1, \quad x_2 = \frac{5-9}{14} = -\frac{2}{7}.$$

Ответ: $-\frac{2}{7}; 1$

Педагог: Решим еще одно уравнение:

$$25^x = -25.$$

Т.к. $-25 < 0$, уравнение не имеет корней.

Педагог: Решить уравнение самостоятельно:

$$4^{(2-3x)} = 4^{(3x-8)}.$$

2 способ – вынесение общего множителя за скобки.

Пример:

$$3^{2x+2} + 3^{2x} = 30.$$

Педагог: Как бы вы стали решать такое уравнение? С чего бы вы начали?

Ученики: Запишем $3^{2x+2} = 3^{2x} \cdot 3^2 = 9 \cdot 3^{2x}$.

$$9 \cdot 3^{2x} + 3^{2x} = 30.$$

Педагог: Что будем делать дальше?

Ученики: Выносим общий множитель 3^{2x} за скобки.

$$3^{2x}(9+1) = 30,$$

$$3^{2x} \cdot 10 = 30,$$

$$3^{2x} = 3,$$

$$2x = 1,$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

Ответ: $\frac{1}{2}$.

Педагог: Решить самостоятельно уравнение:

$$5^{x-2} - 2 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^{x+1} = 200,$$

$$5^x \cdot 5^2 - 2 \cdot 5^x - 3 \cdot 5^x \cdot 5 = 200,$$

$$5^x(25 - 2 - 15) = 200,$$

$$5^x = 5^2,$$

$$x = 2.$$

Метод замены переменной.

$$4^x - 3 \cdot 2^x + 2 = 0.$$

Педагог: С чего бы вы начали решать уравнение?

Ученики: Заменим $4^x = 2^{2x}$.

$$2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 = 0.$$

Педагог: Какое уравнение напоминает это уравнение?

Ученики: Квадратное.

Пусть $2^x = t, t > 0$.

$$t^2 - 3t + 2 = 0,$$

$$D = 1, t_1 = 2, t_2 = 1.$$

Возвращаемся к замене:

$$2^x = 1,$$

$$2^x = 2^0,$$

$$x = 0,$$

$$2^x = 2,$$

$$x = 1.$$

Ответ: 0; 1.

Учащиеся самостоятельно решают уравнение:

$$5^{2x+1} - 4 \cdot 5^x + 1 = 0.$$

Ответ: корней нет.

Метод деления:

$$5^x = 7^x.$$

Обе части разделим на 7^x :

$$\left(\frac{5}{7}\right)^x = 1,$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^x = \left(\frac{5}{7}\right)^0,$$

$$x = 0.$$

Ответ: 0.

Закрепление.

Решить уравнения:

а) $2^{2x-4} = 64,$

б) $4x + 2^{x+1} - 24 = 0,$

в) $5^{2x+1} - 13 \cdot 15x + 54 \cdot 9^{x-1} = 0.$

4. Итог урока.

Педагог: На сегодняшнем уроке мы разобрали:

1. Какие уравнения называются показательными.

2. Рассмотрели методы решения уравнений.

Назовите методы, которые используются при решении показательных уравнений.

(Учащиеся называют, на экране появляются названия методов).

При решении домашнего задания дома, используйте тот метод, который необходимо использовать в том или ином задании.

Я думаю, что при решении показательных уравнений дома, вы правильно найдете метод, который приведет вас к нужному результату.

V. Домашнее задание п. 36, № 463 (б,г), № 464 (а,в), №462(а)

Конспект урока по теме «Решение показательных неравенств»

Класс: 10 класс

Тема: Показательные неравенства.

Учебник: «Алгебра и начала математического анализа» 10-11 класс под редакцией А.Н. Колмогорова.

Тип урока: изучение нового материала.

Оборудование: учебник, доска, презентация

Цели урока:

Образовательные:

- ввести определение показательного неравенства;
- познакомить учащихся с общим методом решения показательных неравенств.

Ход урока.

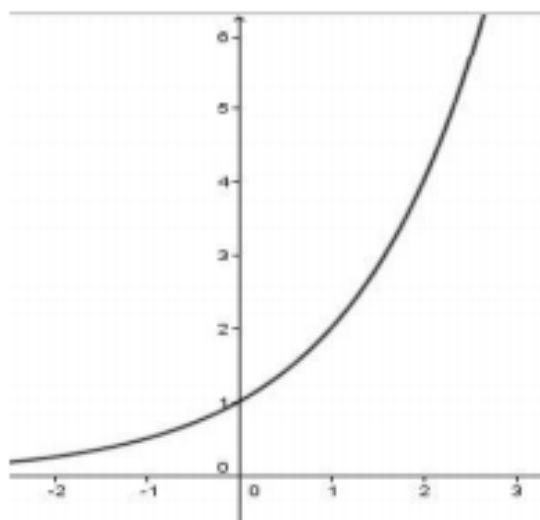
1. Организационный момент.

- Здравствуйте, ребята! Тема нашего сегодняшнего урока – это «Решение показательных неравенств».

2. Проверка знаний.

1 этап: Блиц-опрос (на листочках)

1) Какой график изображен на рисунке?



A) $y = \sin x$.

Б) $y = 2^x$.

В) $y = \log \frac{1}{2} x$.

Г) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Ученики решают и записывают ответы на листочках.

Ответ: Б.

2) Как называется эта функция?

A) Показательная;

Б) Степенная;

В) Тригонометрическая;

Г) Логарифмическая.

Ответ: А.

3) Найдите корень уравнения:

$$3^{-x+2} = \frac{1}{9}.$$

A) 0;

Б) 4;

В) -4;

Г) нет решений.

$$3^{-x+2} = \frac{1}{9},$$

$$3^{-x+2} = \frac{1}{9},$$

$$3^{-x+2} = 3^{-2},$$

$$-x + 2 = -2,$$

$$x = 4.$$

Ответ: Б.

4) Каким методом можно решить уравнение: $2 \cdot 3^{2x} + 3^x - 2 = 0$?

А) Графическим методом.

Б) Методом сведения к одному основанию.

В) Методом группировки.

Г) Методом введения новой переменной.

Ответ: Г.

5) Какова область определения функции: $y = \frac{1}{\sqrt{3^x}}$?

А) $(-\infty; 0)$;

Б) $(-\infty; +\infty)$;

В) $(0; +\infty)$;

Г) $[-1; 1]$.

Ответ: В.

2 этап: работа у доски.

Решите уравнение:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 3 + x.$$

Каким способом можно решить уравнение?

Решение:

Графическим методом.

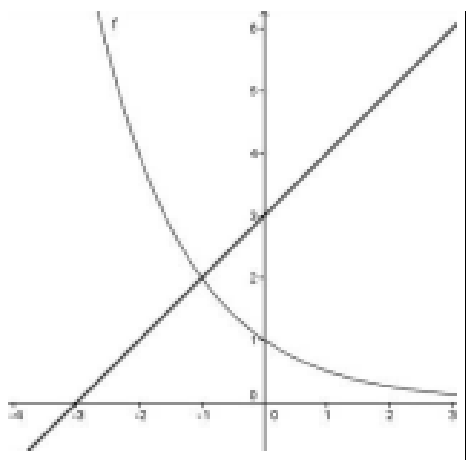
Построим графики функций

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

x	-1	1	2
y	2	1/2	1/4

$$y = 3 + x$$

x	0	-3
y	3	0



Построим график по составленным таблицам.

Координата x точки пересечения двух функций будет решение уравнения.

Ответ: - 1.

3 этап: работа у доски, в тетрадях.

1) Решите уравнение:

$$5^{x+1} - 5^{x-1} = 24$$

Решение:

Перепишем уравнение в виде

$$5 \cdot 5^x - \frac{1}{5} \cdot 5^x = 24$$

Теперь в левой части уравнения вынесем за скобки общий множитель 5^x .

Получим:

$$5^x \cdot \left(5 - \frac{1}{5}\right) = 5^x \cdot \frac{24}{5} = 24,$$

откуда

$$\begin{aligned} 5^x &= 5, \\ x &= 1. \end{aligned}$$

Ответ: 1.

2) Запишите общий вид показательной функции.

Ответ: $y = a^x$.

3) Какими ограничениями обладает показательная функция?

Ответ: $a > 0$, $a \neq 1$.

4) Сколько существует вариантов графиков показательной функции?

Ответ: 2 варианта.

5) От чего зависит вид?

Ответ: $a > 0$, $0 < a < 1$.

3. Изучение нового материала

- Сегодня на уроке мы познакомимся с решением показательных неравенств. Мы уже знаем, что такое показательное уравнение и методы их решения. Можете ли сформулировать определение показательного неравенства?

(Внимательно слушают, записывают свойства показательной функции, при решении примеров, проговаривают эти свойства.)

- Показательное неравенство – это неравенство, содержащее неизвестную переменную в показателе степени.

Простейшее показательное неравенство:

$$a^x < b, a^x > b, \text{ где } a > 0, a \neq 1, x - \text{неизвестное}$$

Педагог: От чего зависит возрастание показательной функции? И как?

Ученики: От значений a . При $a^x > 1$ функция монотонно возрастает.

При $0 < a < 1$ функция монотонно убывает.

Педагог: При решении показательных уравнений и неравенств мы будем пользоваться этими свойствами показательной функции:

$$a > 1$$

В этом случае, как мы уже говорили, показательная функция монотонно возрастает. Поэтому неравенство $a^x > a^b$ будет выполнено для всех $x > b$.

$$0 < a < 1$$

В этом случае, как мы уже говорили, показательная функция монотонно убывает.

Поэтому неравенство $a^x > a^b$ будет выполнено для всех $x < b$.

Рассмотрим неравенство:

$$0,5^{7-3x} < 4.$$

Так как $4 = 0,5^{-2}$, то сможем переписать неравенство в виде:

$$0,5^{7-3x} < 0,5^{-2}.$$

Далее следует отметить, что $0,5 < 1$, следовательно, показательная функция $y = 0,5^x$ убывает. Поэтому данное неравенство равносильно неравенству:

$$7 - 3x > -2, \text{ откуда } x < 3.$$

Ответ: $x \in (-\infty; 3)$.

Пример 2.

$$6^{x^2+2x} \geq 6^3.$$

Основание степени $6 > 1$, следовательно, показательная функция возрастает. Отсюда наше неравенство равносильно неравенству $x^2 + 2x \geq 3$. Решая неравенство, получим:

$$x \in (-\infty; -3] \text{ и } [1; +\infty).$$

Ответ: $x \in (-\infty; -3] \text{ и } [1; +\infty)$.

4. Проверка усвоенного материала

Найди ошибку (ответ аргументируйте).

$$1) 2^x \geq 8,$$

$$2^x \geq 2^3,$$

$$x \leq 3.$$

Решение.

$$2^x \geq 8.$$

Ответ: $x \leq 3$ не верный, т.к. $2 > 1$, знак не меняется, следовательно, $x \geq 3$.

Ответ: $x \in [3; +\infty)$.

$$2) 0,5^x \leq 0,125,$$

$$0,5^x \leq 0,5^3,$$

$$x \leq 3.$$

Решение:

$$0,5^x \leq 0,125,$$

$$0,5^x \leq 0,5^3,$$

$x \leq 3$ - не верно, т.к. $0,5 < 1$, знак меняется, следовательно, $x \geq 3$.

Ответ: $x \in [3; +\infty)$.

5. Закрепление изученного материала

Для закрепления изученного, откроем страницу 231 в учебнике. № 466(б, г) № 467(б, г)

№ 466

$$Б) 0,2^x \leq \frac{1}{25}.$$

Так как $0,2 = \frac{1}{5}$ и $\frac{1}{25} = \left(\frac{1}{5}\right)^2$, то функция монотонно убывает, знак меняется

на противоположный: $x \geq 2$.

$$Г) (1,5)^x < 2,25,$$

$$(1,5)^x < 1,5^2.$$

$1,5 > 1$, следовательно, функция монотонно возрастает, знак не меняется $x < 2$.

6. Подведение итогов

Педагог: Ребята, вы знаете, что существует несколько методов решения. Мы с вами разобрали общий метод решения показательных неравенств. Расскажите, в чём заключается суть данного метода?

Ученики: в показательных неравенствах в правой и левой части должны быть степени с одинаковыми основаниями. Далее необходимо обратить внимание на возрастание и убывание функции, если необходимо, то поменять знак, далее решить неравенство.

Педагог: в каких случаях у нас меняется знак на противоположный?

Ученики: Знак меняется, если показательная функция монотонно убывает, т.е. $0 < a < 1$

Педагог: а в каких случаях знак в показательном неравенстве не измениться?

Ученики: Знак меняться не будет, если показательная функция монотонно возрастает, т.е. $a > 1$).

Педагог: На следующем уроке мы разберем решение показательных неравенств другими методами.

7. Домашняя работа. Прощание.

- читать п.36;
- выучить правила;
- №№ 466(а, в), 467(а, в).

Заключение

В ходе рассмотрения данной темы были выполнены следующие задачи:

- проанализированы учебники по алгебре и началам анализа;
- рассмотрены методы решения показательных уравнений и неравенств, причем как специфические, характерные только для показательных уравнений и неравенств, так и общие функциональные методы решения уравнений и неравенств;
- были разработаны конспекты уроков по данной теме.

При изучении алгебры начал математического анализа в школьном курсе, а также в заданиях ЕГЭ очень часто встречаются показательные уравнения и неравенства. Стоит отметить, что к сожалению, на изучении данной темы в школе уделяется крайне мало времени. В учебниках показана только небольшая часть методов решения, которые можно использовать при выполнении заданий, содержащих показательные уравнения и неравенства. По тематическому планированию, на изучение данной отводится малое количество времени. На изучение темы «Показательные уравнения» отводится 6-8 часов, на изучение темы «Показательные неравенства» всего 2 часа. Следствием этого являются большое количество ошибок при решении практических заданий в школе, а в последующем заданиях из ЕГЭ. Исходя из этого можно сделать вывод, на изучение данной темы стоит уделять больше времени на уроках алгебры и школьных факультативных занятиях. Это нововведение позволит в последующем учащимся сдавать ЕГЭ на высокие баллы и поступать в ВУЗЫ.

Список использованной литературы

1. Алимов Ш. А. Алгебра и начала математического анализа 10-11 классы: учебник / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева. М.: Просвещение, 2015. 463с.
2. Алфутова Н. Б. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ: учеб. пособие / Н. Б. Алфутова, А. В. Устинов. М.: МЦНМО, 2002. 264 с.
3. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Задачи с целыми числами: учеб. пособие для учащихся 7–11 классов / Челябинск: Взгляд, 2005. 271 с.
4. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. М.: МЦНМО, 2004. 560 с.
5. Ивлев Б. М. Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 11 класса / Б. М. Ивлев, С. М. Саакян, С. И. Шварцбург. М.: Просвещение, 2003. 143 с.
6. Колмогоров А. Н. Алгебра и начала анализа: учебник для 10 -11классов / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын и др./ под редакцией А.Н. Колмогорова. М.: Просвещение, 2004. 384 с.
7. Мордкович А. Г. Алгебра и начала анализа. 10-11 классы: задачник / А. Г. Мордкович, Т. Н. Мишустина, Е. Е. Тульчинская. М.: Мнемозина, 2007. 315с.
8. Никольский С. М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс, 11 класс: учебник / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. М.: Просвещение, 2015. 337с.
9. Рисберг В. Г. Решение показательных и логарифмических уравнений, неравенств и систем уравнений повышенного и высокого уровня сложности (часть II): учебное пособие / ФГБОУ ВПО ПНИПУ. / В. Г. Рисберг, И. Ю. Черникова. Пермь: Издательство «Пушка», 2015. 64 с.

10. Титаренко А. М. ЕГЭ 2018. Математика. Справочник / А. М. Титаренко, И. В. Третьяк, Т. М. Виноградова. М: Эксмо, 2018. 448 с.
11. Шарыгин И. Ф. Математика для поступающих в вузы: учебное пособие. М.: Дрофа, 2006. 479 с.

Карточка-консультант по теме «Показательные уравнения и неравенства»

Основные факты. Показательными уравнениями (неравенствами) называются уравнения (неравенства), содержащие переменную в показателе степени.

Пусть здесь и далее a есть положительное и отличное от единицы число. Тогда:

1. Для любых неположительных значений b уравнение $a^x=b$ не имеет решений.
2. Для любого положительного числа b уравнение $a^x=b$ имеет единственное решение, называемое логарифмом по основанию a числа b .
3. Для неположительных значений b неравенство $a^x > b$ выполнено для любых значений переменной, а неравенство $a^x < b$ не имеет решение.

Технологическая карта

на тему:

«Методы решения показательных уравнений»

Тема урока: Методы решения показательных уравнений.

Тип урока: урок совершенствования знаний, умений и навыков.

Класс: 11.

Учебник: Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Ткачева М.В. и др. «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы».

Цель урока: Рассмотреть разные методы решения показательных уравнений и формирование аналитической работы у обучающихся.

Формы работы: фронтальная, индивидуальная, групповая

Оборудование: учебник, доска, презентация

Этапы урока	Деятельность учителя	Содержание урока	Деятельность учащихся	Формируемые УУД
1.	Приветствие учеников. (доброжелательное, активное). Создаёт настрой на предстоящую работу.	- Ребята, доброе утро! Сегодня мы с вами будем получать новые знания. Для того чтобы было проще, вы должны помогать друг другу, а также придерживаться дисциплине на уроке, будем уважать друг друга!	Подготовка рабочего места и кабинета для урока; приветствие учителя	Личностные: самоопределение. Коммуникативные: планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками.
2.	Озвучивание новой темы, мотивация обучающихся	-Ребята, чтобы научиться быстро и правильно решать уравнения, мы с вами сегодня познакомимся с новыми методами решения. Тема нашего урока: «Методы решения показательных уравнений.»	Слушают учителя, записывают тему в тетрадь.	Коммуникативные: постановка вопросов. Познавательные: самостоятельное выделение-формулирование познавательной цели; логические - формулирование проблемы.
3.	Закрепление изученного материала, организация самостоятельной деятельности учащихся.	1. Дайте определение показательной функции 2. Перечислите свойства показательной функции 3. Какие из приведенных функций являются показательными? 1. $y = \sqrt{2x - 56 + 3^{x-2}}$	Отвечают на вопросы учителя.	Познавательные: уметь ориентироваться своей системе знаний, отличать новое от уже известного с помощью учителя;

		$2. y = x^{4+5x-6}.$ $3. y = x + \frac{1}{56-2x}$ $4. y = 2^{x+43x}$		
4.	Способствует первичному запоминанию детьми изучаемой темы.	<p>1.Метод уравнивания показателей.</p> <p>Ребята, этот метод основывается на свойстве, что если степени равны, то равны и их показатели. Чтобы решить уравнение данным методом необходимо обе части уравнения привести к степени с одинаковыми основаниями, а затем их приравнять.</p> <p>Давайте рассмотрим на примере:</p> $0,2^{x-0,5} \cdot 0,2^{0,5} =$ $= 0,2^{-1} \cdot (0,2^2)^{x-1}$ <p>С помощью свойства степеней упрощаем выражения в обеих частях, получим:</p> $0,2^x = 0,2^{2x-3},$ $x = 2x - 3,$ $x=3.$ <p>Ответ: 3.</p> <p>2.Метод введения новой переменной.</p>	Внимательно слушают учителя, записывают методы решения показательных уравнений и примеры решения.	<p>Коммуникативные: постановка вопросов, инициативное сотрудничество.</p> <p>Познавательные: самостоятельное выделение-формулирование познавательной цели; доказательство.</p> <p>Регулятивные: планирование, прогнозирование.</p>

		<p>Ребята, данный метод используется, когда есть возможность ввести новую переменную, при этом, все остальные степени также будут выражаться через введенную переменную. Давайте рассмотрим на примере:</p> $4^x + 8 = 6 \cdot 2^x,$ $(2^x)^2 - 6 \cdot 2^x + 8 = 0.$ <p>Теперь введём новую переменную:</p> $2^x = t, t > 0.$ <p>Тогда уравнение примет вид:</p> $t^2 - 6t + 8 = 0$ <p>Решаем квадратное уравнение и получаем, что $t_1 = 2, t_2 = 4$.</p> <p>Возвращаемся к замене и получаем, что $x_1 = 1, x_2 = 2$.</p> <p>Ответ: 1,2.</p> <p>3.Метод группировки. Ребята, этот метод заключается в том, чтобы собрать степени с одинаковыми показателями в одной части уравнения, а дальше разделить обе части</p>		
--	--	--	--	--

		<p>уравнения на одну из степеней.</p> <p>Разберём на примере:</p> $5^{2x} - 4^{x+1} = 4^x + 5^{2x-1}$ $5^{2x} - 5^{2x} \cdot \frac{1}{5} = 4^x + 4^x \cdot 4$ $25^x \cdot \frac{4}{5} = 4^{x+1}$ <p>Разделим обе части уравнения на $(4^x \cdot \frac{4}{5})$,</p> <p>получим уравнение</p> $(\frac{25}{4})^x = \frac{25}{4},$ $x = 1.$ <p>Ответ: 1.</p>		
5.	Закрепление изученного материала, выявление проблемных мест в полученных знаниях, закрепление материала на практике.	<p>Решите уравнения:</p> $2^{3x} = 128$ $4^x = \frac{1}{16}$ $6^{3x} = 216$ $4^x + 7 \cdot 2^{x-1} = 45$ $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^x = 5$ $6^{2x} - 8 = 216^x$ $\frac{2^{x^2}}{4^x} = 4^4$ $4^{x+2} \cdot 3^{x+11} = 576$	Ученики решают задачи, выходя к доске.	<p>Регулятивные: контроль, оценка, коррекция.</p> <p>Познавательные: умение структурировать знания, выбор наиболее эффективных способов решения задач, рефлексия способов и условий действия.</p> <p>Коммуникативные: управление поведением партнера, контроль, коррекция, оценка действий партнера.</p>
6.	Дает оценку работы класса и отдельных	Обобщение материала, изученного на уроке, повторе-	Отвечают на вопросы учителя,	Регулятивные: оценка-осознание уровня и каче-

	обучаемых.	ние основных понятий и формулировок (фронтальный опрос). Оценка работы учеников на работе.	подведение итогов урока	ства усвоения; контроль
7.	Записывает домашнее задание на доски, даёт комментарии по выполнению	Запишите домашнее задание в дневники: Учебник Алимова: № 221, 222, 225	Записывают д/з в дневник.	

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»

Утверждаю: зав. кафедрой
«30» 08 2019 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Сарычевой Дарьи Александровны

(ФИО полностью)

Тема работы «Методика обучения решению показательных уравнений и
неравенств в школе»

Утверждена приказом по Университету от «15.10» 2019 г. № 1113а/о

Срок сдачи студентом законченной работы «23» мая 2020 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Подбор и изучение литературы по теме выпускной квалификационной работы.	Сентябрь-октябрь 2019 г.	<i>выполнено</i>
2.	Анализ материала школьных учебников по алгебре и началам анализа по теме «Показательные уравнения и неравенства».	Ноябрь 2019 г.	<i>выполнено</i>
3.	Изучение основных методов решения показательных уравнений и неравенств. Анализ показательных уравнений и неравенств в заданиях ЕГЭ. Изучение метода замены множителей при решении показательных неравенств.	Декабрь 2019 г. – январь 2020 г.	<i>выполнено</i>
4.	Изучение методических особенностей изложения темы «Показательные уравнения и неравенства».	Февраль 2020 г.	<i>выполнено</i>
5.	Разработка конспектов уроков.	Март 2020 г.	<i>выполнено</i>
6.	Систематизация материала. Оформление работы.	Апрель – май 2020 г.	<i>выполнено</i>

Дата выдачи задания «23» 09 2019 г.

Руководитель *Никитина* Никитина О. Г.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению *Сарычева* Сарычева Д.А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студента (ки) 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения

Сарнива Дарья Александровна

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Сарнива Дарья Александровна,
Ф.И.О. студента

студент(ка) 5 курса заочной формы обучения направления подготовки
44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика»
прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ»
бакалаврской работы на тему «Методика решения систем
линейных уравнений и неравенств в н-мерном
пространстве»
»,
выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а
также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ,
кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная
квалификационная работа обучающихся по образовательным программам
высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета
и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата
является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из
университета.

Д.А.Г.
ПОДПИСЬ
14.06.2024
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 14.06.2024
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР Мельник Нескитина О.Г.
ПОДПИСЬ И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ»
выпускной квалификационной работы на тему:
**«Методика обучения решению показательных уравнений и
неравенств в школе»**

студентки 5 курса **Сарычевой Дарьи Александровны**
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика»
Руководитель ВКР Никитина Ольга Геннадьевна

The screenshot displays the 'Антиплагиат ВУЗ' (Antiplagiat VUZ) interface. At the top, there are logos for 'АНТИПЛАГИАТ ТВОРИТЕ СОБСТВЕННЫМ УМОМ' and 'Sk'. The user is logged in as 'ПГУ' (PGU) and 'ПРЕПОДАВАТЕЛЬ nikitina1035@mail.ru'. The main navigation bar includes 'ГЛАВНАЯ', 'КАБИНЕТ ПРЕПОДАВАТЕЛЯ', and 'РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ'. The 'Полный отчет' (Full report) is selected, with a 'КРАТКИЙ ОТЧЕТ' (Short report) option also visible. Below the report title, there are buttons for 'ОЦЕНИТЬ', 'ПАРАМЕТРЫ ПРОВЕРКИ', 'ЭКСПОРТ', 'СПРАВКА', 'СОХРАНИТЬ', and 'ЕЩЕ...'. The report title is 'Диплом на проверку, Сарычева Д.А.' and the check date is '14.06.2020 20:53:02'. The report is divided into two tabs: 'ТЕКСТОВЫЙ ВИД' (Text view) and 'ИСХОДНЫЙ ВИД' (Original view). The 'ИСХОДНЫЙ ВИД' tab is active, showing a list of sources with columns for 'текстовый вид', 'исходный вид', and 'скрыть номера источников'. The sources listed are: 'Содержание', 'Введение', 'Глава 1. Теоретические основы решения показательных уравнений и неравенств в школе', and '1.1 Анализ школьных учебников по алгебре и началам анализа по теме...'. On the right side, there is a summary table of plagiarism statistics: 'ЗАИМСТВОВАНИЯ' (37,03%), 'САМОЦИТИРОВАНИЯ' (0%), 'ЦИТИРОВАНИЯ' (3,57%), and 'ОРИГИНАЛЬНОСТЬ' (59,4%). Below this is a 'ПОИСК ПО БЛОКАМ' (Search by blocks) section with radio buttons for 'Заимствования', 'Самодитирование', 'Цитирование', and 'Выключенные блоки'. There are also buttons for 'предыдущий' and 'следующий'. At the bottom right, there is a section for 'ИСТОЧНИКИ: 89 ИЗ 89' (Sources: 89 of 89) with a 'ВЕРСИТИ' button and a 'Модуль поиска' (Search module) dropdown menu.

Дата 14 июня 2020 г.

О.Г. Никитина (Никитина О.Г.)

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методика обучения решению показательных уравнений и
неравенств в школе»
студентки Сарычевой Дарьи Александровны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование,
профиль подготовки «Математика», гр. 153ФПМ51

Выпускная квалификационная работа Сарычевой Дарьи Александровны посвящена вопросам методики обучения школьников решению показательных уравнений и неравенств в школе.

Актуальность данной темы состоит в том, что уравнения и, особенно неравенства, имеют огромное значение в формировании логического мышления, исследовательских умений, математической культуры учащихся. Кроме того уравнения и неравенства широко используются в различных разделах математики, в решении важных прикладных задач.

Целью выпускной квалификационной работы является разбор существующих методов решения показательных уравнений и неравенств и разработка методики обучения школьников решению показательных уравнений и неравенств.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, заключения и списка литературы.

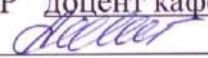
Основная часть состоит из двух глав. В первой главе проведен анализ школьных учебников по алгебре и началам анализа по теме «Показательные уравнения и неравенства»; рассмотрены основные типы показательных уравнений и неравенств и методы их решения; а также значение этой темы в обучении школьников. Здесь же проведен анализ показательных уравнений и неравенств в заданиях ЕГЭ.

Во второй главе рассмотрены методические особенности обучения школьников решению показательных уравнений и неравенств, рассмотрено использование метода замены множителей при решении показательных неравенств.

Разработаны конспекты уроков.

Работа Сарычевой Д.А. является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован автором при работе в школе.

Выпускная квалификационная работа Сарычевой Дарьи Александровны заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель ВКР доцент кафедры «Математическое образование»,
к.ф.-м.н.  Никитина Ольга Геннадьевна