

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра «МСМ»

Курсовая работа
по дисциплине «Математический практикум»
на тему «Метод последовательного исключения неизвестных»
ПГУ С1.1.21.010501.18ВФ1.02

Специальность – 01.05.01 Фундаментальная математика и механика
Специализация – Вычислительная математика и вычислительная механика

Выполнил студент: Дейцев И.Н.

Группа: 18ВФ1

Руководитель:

к.ф-м.н., доцент Васюнин Д.И.

Работа защищена с оценкой: _____

Преподаватель _____

Дата защиты: _____

Пенза 2022

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»

Зав.кафедрой МСМ

_____ Ю.Г. Смирнов

«_____» 20__ г.

ЗАДАНИЕ

на курсовую работу по дисциплине

«Математический практикум»

Тема: «Метод последовательного исключения неизвестных».

Необходимо:

1. Изучить литературу по теме курсовой работы.
2. Изложить реферативно изученный по теме теоретический материал.
3. Методом последовательного исключения неизвестных решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 36 \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 47. \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 37 \end{cases}$$

4. Написать программу, реализующую данный метод.

Руководитель работы, к.ф.-м.н., доцент.

Васюнин Д.И.

Содержание

Введение.....	4
Глава 1. Теоретическая часть.....	5
Глава 2. Практическая часть	9
Заключение	11
Список литературы	12

Введение

Целью работы является изучение алгоритма решения систем линейных алгебраических уравнений методом последовательного исключения неизвестных для применения их на практике.

Актуальность заключается в том, что системы линейных алгебраических уравнений – это математический аппарат, который имеет широкое применение в решении многих задач практического приложения математики.

Метод последовательного исключения неизвестных применим к любой системе линейных уравнений, он идеально подходит для решения систем, содержащих больше трех линейных уравнений. Метод последовательного исключения неизвестных для решения СЛАУ с числовыми коэффициентами в силу простоты и однотипности выполняемых операций пригоден для счета на электронно-вычислительных машинах.

Рассмотрим систему из m линейных уравнений с n неизвестными (m может быть равно n):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases},$$

где $x_1, x_2, \dots, x_n$ – неизвестные переменные, $a_{ij}, i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ – числа, $b_1, b_2, \dots, b_m$ – свободные члены.

Если $b_1 = b_2 = \dots = b_m$, то система линейных алгебраических уравнений называется однородной, в противном случае – неоднородной. Если существует хотя бы одно решение системы линейных алгебраических уравнений, то она называется совместной, в противном случае – несовместной.

Если СЛАУ имеет единственное решение, то она называется определенной. Если решений больше одного, то система называется неопределенной.

Глава 1. Теоретическая часть

Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

Коэффициенты при неизвестных составляют прямоугольную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (2)$$

называемую матрицей системы. Первый индекс у коэффициента a_{ij} означает номер уравнения, второй — номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент. Коэффициенты $b_1, b_2, \dots, b_n$ называются свободными членами уравнений системы. Если свободные члены равны нулю, то система называется однородной, в противном случае — неоднородной. Матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}, \quad (3)$$

называют расширенной матрицей системы (1).

Решение системы (1) — это любой упорядоченный набор из n чисел, при подстановке которых в уравнения системы вместо соответствующих неизвестных каждое уравнение системы превращается в тождество. Система, не имеющая ни одного решения, называется несовместной, или противоречивой. Система, имеющая хотя бы одно решение, называется совместной.

Совместные системы подразделяют на определенные, обладающие единственным решением, и неопределенные, обладающие большим числом решений. Однородная система всегда совместна, так как имеет по крайней мере нулевое решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Выражения, содержащие неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_n$ и некоторый набор произвольных постоянных, из которых при соответствующем выборе значений произвольных постоянных можно получить любое конкретное решение

системы, называют общим решением системы, а любое конкретное решение системы — ее частным решением. Две системы с одними и теми же неизвестными эквивалентны (равносильны), если каждое решение одной из них является решением другой или обе системы несовместны.

Над уравнениями системы обычно приходится проводить следующие элементарные преобразования:

- умножение обеих частей какого-либо уравнения на число, отличное от нуля;
- прибавление (вычитание) к одному уравнению другого, умноженного на некоторое число;
- перестановку уравнений;
- вычеркивание уравнений вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$, т.е. тождество $0 = 0$;
- перестановку неизвестных в системе уравнений.

В результате элементарных преобразований система преобразуется в эквивалентную. Общий способ отыскания решений обычно основывается на последовательном переходе с помощью элементарных преобразований от данной системы к такой эквивалентной системе, для которой решение находится просто. Одним из таких способов является метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса). Алгоритм этого метода состоит в следующем.

Предположим, что коэффициент a_n системы (1) отличен от нуля. Этого всегда можно добиться, переставляя в случае необходимости уравнения системы или неизвестные в ней и меняя нумерацию неизвестных. Умножим первое уравнение на $\frac{a_2}{a_n}$ и вычтем из второго уравнения, затем на $\frac{a_3}{a_n}$ и вычтем из третьего уравнения и т.д. Наконец, умножим первое уравнение на $a_{m,j}a$ и вычтем из последнего уравнения. В результате неизвестное x будет исключено из всех уравнений, кроме первого, и система примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1', \\ a_{22}'x_2 + \dots + a_{2n}'x_n = b_2', \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ a_{m2}'x_2 + \dots + a_{mn}'x_n = b_m'. \end{cases} \quad (4)$$

В системе (4) следует вычеркнуть уравнения вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 0$, если такие появились. На этом первый шаг метода Гаусса заканчивается.

Следующие шаги прямого хода метода Гаусса осуществляются аналогично. Так, на втором шаге при $a_{22}' \neq 0$ последовательно умножаем второе уравнение на $\frac{a_{32}'}{a_{22}'}, \dots, \frac{a_{mn}'}{a_{22}'}$ и вычитаем его из 3-го, 4-го, ..., m -го уравнений. В результате неизвестное x_2 исключается из всех уравнений, кроме 1-го и 2-го. На третьем шаге неизвестное x_3 исключается из всех уравнений, кроме первых трех, и т.д.

Возможно, что на некотором шаге прямого хода метода Гаусса встретится уравнение вида

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_i, \quad b_i \neq 0. \quad (5)$$

Тогда рассматриваемая система несовместна, и дальнейшее ее решение прекращается. Если же при выполнении прямого хода метода Гаусса не встретятся уравнения вида (5), то рассматриваемая система не более чем через m шагов прямого хода преобразуется в эквивалентную систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \dots + a_{rn}x_n = b_r. \end{cases} \quad (6)$$

Для упрощения записи в системе (6) штрихи над коэффициентами опущены. В ней не более m уравнений, т.е. r , так как некоторые уравнения, возможно, были приведены к виду $0 = 0$ и вычеркнуты, и, очевидно также, что $r = n$.

При $r = n$ система (5) имеет треугольный вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \quad a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \quad \quad \quad \quad \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (7)$$

и в ней легко совершить обратный ход метода Гаусса. Для этого из последнего уравнения этой системы найдем значение неизвестного x_n . Подставив его в предпоследнее уравнение, найдем значение x_{n-1} . Продолжая так далее, однозначно определим все неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_n$. Следовательно, если система (1) при прямом ходе метода Гаусса сводится к системе треугольного вида, то такая система определенная, т.е. имеет единственное решение.

При $r < n$ система (6) имеет вид трапеции. В ней неизвестные $x_1, x_2, \dots, x_n$ принимают за главные, а неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ — за свободные. Свободные неизвестные могут принимать любые фиксированные значения. Полагая $x_{r+1} = b_{r+1}, x_{r+2} = b_{r+2}, \dots, x_n = b_n$, где $b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_n$ — произвольные постоянные, и проведя в системе обратный ход метода Гаусса, получим формулы:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{1,r+1}\gamma_{r+1} + \dots + \alpha_{1,n}\gamma_n, \\ x_1 = \beta_1 + \alpha_{1,r+1}\gamma_{r+1} + \dots + \alpha_{1,n}\gamma_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_1 = \beta_1 + \alpha_{1,r+1}\gamma_{r+1} + \dots + \alpha_{1,n}\gamma_n, \\ x_{r+1} = \gamma_{r+1}, \\ \dots \quad \dots \\ x_n = \gamma_n, \end{cases} \quad (8)$$

которые составляют общее решение системы (1). Из общего решения (8) при конкретных значениях $b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_n$ будут получаться частные решения системы (1). Так как каждое свободное неизвестное может принимать бесчисленное множество значений, система (1) при $r < n$, т.е. в случае, когда она приводится к трапецеидальному виду, обладает бесчисленным множеством решений. Это справедливо для совместных систем, имеющих меньше уравнений, чем неизвестных, и, в частности, для однородных, имеющих меньше уравнений, чем неизвестных.

Глава 2. Практическая часть

Задача: методом последовательного исключения неизвестных решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 36 \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 47 \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 37 \end{cases}$$

Запишем в матричной форме

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 47 \\ 37 \end{bmatrix}.$$

Выбираем строку с максимальным коэффициентом a_{i1} и меняем ее с первой.

$$\begin{bmatrix} \boxed{5} & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 36 \\ 37 \end{bmatrix}.$$

Нормируем уравнения относительно коэффициента при x_1 :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 1 & \frac{4}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{4}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{47}{5} \\ \frac{36}{2} \\ \frac{37}{2} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 1 & 2 & 0.5 \\ 1 & 1.5 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 18 \\ 18.5 \end{bmatrix}.$$

Вычитаем 1 уравнение из 2 и 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1.6 & 0.3 \\ 0 & 1.1 & 1.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 8.6 \\ 9.1 \end{bmatrix}.$$

Выбираем строку с наибольшим коэффициентом при a_{i2} (уравнение 1 не рассматривается) и перемещаем ее на место 2.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & \boxed{1.6} & 0.3 \\ 0 & 1.1 & 1.8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 8.6 \\ 9.1 \end{bmatrix}.$$

Нормируем 2 и 3 уравнения относительно коэффициента при x_2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0.1875 \\ 0 & 1 & 1.636 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 5.375 \\ 8.272 \end{bmatrix}.$$

Вычитаем уравнение 2 из 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0.1875 \\ 0 & 0 & 1.4489 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 5.375 \\ 2.897 \end{bmatrix}.$$

Нормируем уравнение 3 относительно коэффициента при x_3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.4 & 0.2 \\ 0 & 1 & 0.166 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 5.333 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Откуда получаем $x_3 = 2$. Подставляем полученное значение в уравнения 2 и 1, получаем:

$$x_2 = 5.333 - 0.1666 \cdot 2 = 5.333 - 0.333 = 5,$$

$$x_1 + 0.4 \cdot x_2 = 9.4 - 0.2 \cdot 2 = 9.4 - 0.4 = 9.$$

Подставляя полученное значение $x_2 = 5$ в уравнение 1, найдем

$$x_1 = 9 - 0.4 \cdot 5 = 9 - 2 = 7.$$

Таким образом, решением системы уравнений будет вектор

$$X = [7 \quad 5 \quad 2]^T.$$

Для данной задачи мной была написана программа, реализующая метод последовательного исключения неизвестных, код которой представлен в приложении 1, а результаты программы показаны в приложении 2.

Заключение

При написании курсовой работы мной была изучена специальная литература, включающая в себя статьи и учебники по элементам теории Гаусса, описаны теоретические аспекты и раскрыты ключевые понятия исследования.

В данной курсовой работе был изучен метод последовательного исключения неизвестных, а также была решена задача, в которой нужно решить систему уравнений с 3 неизвестными:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 36 \\ 5 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 47. \\ 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 37 \end{cases}$$

Результатом данной работы стало построение программы, реализующей метод функционирования данной задачи.

Данная программа была реализована на языке программирования C++, так как, по моему мнению, данный язык более точно подходит для программирования каких-либо методов, математических задач и формул, а также удобен в исправлении ошибок и отладке программы. Его главные достоинства – высокая вычислительная производительность, возможность расширения языка, наличие шаблонов, которые дают возможность построения обобщенных алгоритмов и контейнеров, а самое главное – доступность.

Список литературы

1. Основы высшей математики: Учеб. пособие для вузов/В.С. Шипачев; под ред. акад. А.Н. Тихонова. — 5-е изд., стер. — М. Высш. Шк., 2003. — 279с.
2. Математика. Задачник : учеб. Пособие для образоват. Учреждений нач. и сред. Проф. образования / М.И. Башмаков. — 3-е изд., стер. — М.: Издательский центр «Академия», 2013. — 416с.
3. Демидович Б.П., Марон И.А., Основы вычислительной математики/ Демидович Б.П. – Учебное пособие – Москва, Наука, 3-е издание, 1966 г.
4. Гусак А. А., Гусак Г. М., Бричикова Е. А., Справочник по высшей математике/ Гусак А. А., Гусак Г. М. – Численные методы в 2-х томах. – Москва, Высшая школа, 2001 г.
5. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы.-3-е изд./ Бахвалов Н. С. – БИНОМ. Лаборатория знаний – Москва, 2004 г. – 636с.

```

#include <iostream>
using namespace std;
// Вывод системы уравнений
void sysout(double** a, double* y, int n){
    for (int i = 0; i < n; i++){
        for (int j = 0; j < n; j++){
            cout << a[i][j] << "x" << j;
            if (j < n - 1)
                cout << " + ";
        }
        cout << " = " << y[i] << endl;
    }
    return;
}

double* gauss(double** a, double* y, int n){
    double* x, max;
    int k, index;
    const double eps = 0.00001;

    x = new double[n];
    k = 0;

    while (k < n){

        // Поиск строки с максимальным a[i][k]

        max = abs(a[k][k]);
        index = k;
        for (int i = k + 1; i < n; i++){
            if (abs(a[i][k]) > max){
                max = abs(a[i][k]);
                index = i;
            }
        }
    }
}

```

```

// Перестановка строк

if (max < eps){
    // нет ненулевых диагональных элементов
    cout << "Решение получить невозможно из-за нуле-
вого столбца ";
    cout << index << " матрицы A" << endl;
    return 0;
}

for (int j = 0; j < n; j++){
    double temp = a[k][j];
    a[k][j] = a[index][j];
    a[index][j] = temp;
}

double temp = y[k];
y[k] = y[index];
y[index] = temp;

// Нормализация уравнений

for (int i = k; i < n; i++){
    double temp = a[i][k];
    if (abs(temp) < eps) continue; // для нулевого
коэффициента пропустить
    for (int j = 0; j < n; j++)
        a[i][j] = a[i][j] / temp;
    y[i] = y[i] / temp;
    if (i == k) continue; // уравнение не вычитать
само из себя
    for (int j = 0; j < n; j++)
        a[i][j] = a[i][j] - a[k][j];
    y[i] = y[i] - y[k];
}

k++;
}

```

```

// обратная подстановка
for (k = n - 1; k >= 0; k--){
    x[k] = y[k];
    for (int i = 0; i < k; i++)
        y[i] = y[i] - a[i][k] * x[k];
}
return x;
}

int main(){
    setlocale(LC_ALL, "rus");
    double** a, * y, * x;
    int n;
    cout << "Введите количество уравнений: ";
    cin >> n;
    a = new double* [n];
    y = new double[n];

    for (int i = 0; i < n; i++){
        a[i] = new double[n];
        for (int j = 0; j < n; j++){
            cout << "a[" << i << "][" << j << "]= ";
            cin >> a[i][j];
        }
    }
    for (int i = 0; i < n; i++){
        cout << "y[" << i << "]= ";
        cin >> y[i];
    }
    sysout(a, y, n);
    x = gauss(a, y, n);
    for (int i = 0; i < n; i++)
        cout << "x[" << i << "]= " << x[i] << endl;
    system("pause");

    return 0;
}

```

```
Введите количество уравнений: 3
a[0][0]= 2
a[0][1]= 4
a[0][2]= 1
a[1][0]= 5
a[1][1]= 2
a[1][2]= 1
a[2][0]= 2
a[2][1]= 3
a[2][2]= 4
y[0]= 36
y[1]= 47
y[2]= 37
2*x0 + 4*x1 + 1*x2 = 36
5*x0 + 2*x1 + 1*x2 = 47
2*x0 + 3*x1 + 4*x2 = 37
x[0]=7
x[1]=5
x[2]=2
Для продолжения нажмите любую клавишу . . .
```