

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Особенности изучения квадратичной функции в школьном курсе математики»

Студент

ММ 21.05.25
(подпись, дата)

Мельникова Анастасия Юрьевна
(ФИО полностью)

Руководитель

НН 28.05.25
(подпись, дата)

Никитина О.Г.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

ММ - 28.06.25
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 2.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой

НН 2.06.25
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой 3(удов) (протокол заседания ГЭК от 8.07.25 № 3)

Секретарь ГЭК

ММ - 8.07.25
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ	5
1.1 Анализ темы «Квадратичная функция», её особенности	5
1.2 Анализ содержания теоретического материала учебников 8-9 классов по теме «Квадратичная функция» в школьном курсе	12
ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ШКОЛЕ	21
2.1 Методика изучения квадратичной функции	21
2.2 Конспект урока	37
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	57
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	59

ВВЕДЕНИЕ

Изучение квадратичной функции в школьном курсе математики является неотъемлемой частью формирования математической компетенции учащихся в современном образовательном контексте. В современном мире, где математическая грамотность становится ключевым компонентом в научной и профессиональной сферах, изучение квадратного трехчлена, а также исследование функции начинается с квадратичной функции.

Квадратичная функция является одной из основных функций в математике, и её изучение закладывает основы для понимания более сложных тем, таких как аналитическая геометрия, математический анализ и теория функций. Умение работать с квадратичными уравнениями и функциями необходимо для дальнейшего обучения в старших классах и в вузе.

Кроме того, квадратичные функции находят широкое применение в различных областях науки и техники, таких как физика (например, при описании движения тел), экономика (при анализе прибыли и убытков) и инженерия. Понимание их свойств помогает учащимся осознать связь между математикой и реальным миром.

Изучение квадратичных функций способствует развитию логического и критического мышления у учащихся. Решение задач, связанных с графиками, корнями и свойствами функций, требует анализа, синтеза и оценки информации, что является важным навыком в современном мире.

Вместе с тем, существующие методические подходы к обучению квадратичной функции требуют обновления и адаптации к современным условиям. Исследование особенностей изучения этой темы может способствовать разработке новых эффективных методов преподавания, которые учитывают индивидуальные особенности учащихся и современные образовательные технологии.

Целью данной выпускной квалификационной работы является выявление

и анализ особенностей изучения квадратичной функции в школьном курсе математики, а также разработка рекомендаций по улучшению методики преподавания этой темы.

Для достижения поставленной цели необходимо решить ряд **задач**:

- проанализировать тему «Квадратичная функция» и её особенности;
- представить анализ содержания теоретического материала учебников 8-9 классов по теме «Квадратичная функция»;
- выявить ключевые особенности методики изучения квадратичной функции;
- представить конспект урока по исследуемой теме;
- разработать методические указания по решению заданий, содержащих квадратичные функции, в ОГЭ по математике.

Объектом исследования являются методы и подходы к обучению квадратичной функции в рамках школьного курса математики.

Предмет исследования – методики преподавания квадратичной функции, их применение и влияние на эффективность обучения.

Гипотеза данного исследования заключается в том, что внедрение методических подходов, основанных на анализе графиков и сочетании аналитической и графической информации, способствует более успешному усвоению изучения квадратичной функции.

Для достижения цели исследования были использованы методы: анализ литературы по изучаемой проблеме; анализ открытых источников по проблеме исследования и образовательных стандартов; изучение и анализ учебной литературы и школьных программ, методических пособий по теме работы; решение задачного материала по теме работы, изучения опыта работы учителей математики, работающих в общеобразовательных школах.

Структура работы представлена введением, двумя главами, состоящими из четырёх параграфов, заключением, списком использованной литературы.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ КВАДРАТИЧНОЙ ФУНКЦИИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1 Анализ темы «Квадратичная функция», её особенности

Квадратичная функция – это полиномиальная функция с одной или несколькими переменными, в которой старший показатель переменной равен двум. Поскольку старший член квадратичной функции второй степени, то ее также называют многочленом степени 2. Квадратичная функция имеет как минимум один член второй степени.

Квадратичные функции используются в различных областях техники и науки для получения значений различных параметров. Графиком квадратичной функции является парабола.

Парабола – это кривая, которая была известна и изучалась еще в древности. Она возникает в результате рассечения вертикального конуса.

С появлением координатной геометрии парабола естественным образом возникла как график квадратичной функции. График функции $y = mx + b$ представляет собой прямую линию, а график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ – параболу. Поскольку $y = mx + b$ является уравнением первой степени, квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$ представляет собой следующий уровень алгебраической сложности [5].

Парабола также фигурирует в физике как траектория, описываемая мячом, брошенным под углом к горизонту (без учета сопротивления воздуха). Вершина параболы дает информацию о максимальной высоте и в сочетании с симметрией кривой также указывает нам, как найти расстояние по горизонтали.

Квадратичные функции часто используются при решении различных задач. Теория этих функций и их графики позволяют нам решать простые

задачи максимизации и минимизации, не прибегая к математическому анализу. В зависимости от знака коэффициента при x в наибольшей степени определяется направление кривой. Слово «квадратичный» происходит от слова «Quad», которое означает квадрат. Другими словами, квадратичная функция – это «полиномиальная функция степени 2».

Простейшая квадратичная функция имеет вид $f(x) = x^2$ и соединяет точки, координаты которых имеют вид $(x; x^2)$. К этой функции могут быть применены преобразования, в соответствии с которыми она обычно выглядит в виде $f(x) = a(x - h)^2 + k$, и далее она может быть преобразована в форму $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Графиком квадратичной функции является парабола.

Парабола возникла в греческой геометрии в результате рассечения прямоугольного конуса. Другие кривые, такие как эллипс, окружность и гипербола, получаются путем пересечения конуса с другими плоскостями. Они показаны на Рисунке 1.



Рисунок 1 – Кривые второго порядка в результате пересечения конуса плоскостью: парабола (сверху), окружность (в центре), эллипс (посередине)

Геометрические свойства параболы были довольно подробно изучены Аполлонием Пергским (262-190 гг. до н.э.) в его работе о конических линиях [6]. Параболу также можно рассматривать как траекторию, очерченную точкой,

движущейся таким образом, что ее расстояние от неподвижной точки, фокуса, равно расстоянию от неподвижной линии, называемой директрисой. Это было сделано последним из греческих математиков Паппом (290-350 гг. н.э.).

Парабола, рассматриваемая таким образом, обладает замечательным свойством отражения, заключающимся в том, что луч света (или радиоволна), попадающий в параболу вдоль линии, параллельной оси симметрии, отражается от параболы и проходит через фокус. Это позволяет собирать радиоволны, свет и т.д. в одной точке. И наоборот, источник света или радиоволна, исходящие из фокуса и отражающиеся от параболы, будут двигаться в направлении, параллельном оси симметрии параболы. Благодаря этому свойству парабола стала стандартной формой, используемой для спутниковых антенн, зеркальных телескопов, а также прожекторов и автомобильных фар.

Анализ параболы проводился геометрически до тех пор, пока Декарт (1596-1650) не ввел удивительно простую, но очень действенную идею координат. Затем парабола изучалась не только геометрически, но и алгебраически. Вооружившись этими новыми инструментами, великие умы, такие как Ньютон и Лейбниц, смогли разработать математический анализ, а параболы и кривые более высокой степени были изучены по-новому.

Карлайл нашел интересный способ графического решения квадратного уравнения с использованием окружностей и линий [7].

Когда мы перемещаем параболу вертикально вверх или вниз, значение y каждой точки на базовой параболе увеличивается или уменьшается. Так, например, перемещение параболы вверх на 9 единиц сдвигает общую точку (a, a^2) на $(a, a^2 + 9)$. Таким образом, уравнение этой новой параболы имеет вид $y = x^2 + 9$. Вершина этой параболы теперь имеет координаты $(0, 9)$, но у неё та же ось симметрии. Аналогично, базовая парабола становится графиком функции $y = x^2 - 9$ при переносе на 9 единиц вниз, с вершиной $(0, 9)$.

Что происходит, когда мы переводим основную параболу влево или вправо? Это более сложная задача.

Начнем с рассмотрения уравнения $y = (x - 3)^2$. Поскольку правая сторона представляет собой квадрат, все значения y неотрицательны и принимают значение 0, когда $x = 3$.

Значение $x = 5$, которое находится на 2 единицы правее 3, даёт то же значение y , что и $x = 1$, что на 2 единицы левее 3. Поскольку при перемещении на такое же количество единиц вправо или влево от 3 произойдет то же самое, мы видим, что график этой функции симметричен относительно прямой $x = 3$.

Таким образом, $x = 3$ – это уравнение осевой симметрии для этой параболы, вершина которой находится в точке $(3, 0)$.

Если мы поместим $x = 0$, то получим $y = 9$, и это называется y -пересечением.

График $y = (x - 3)^2$ соответствует основной параболе, но смещен на 3 единицы вправо.

Мы можем подтвердить это с помощью таблицы значений.

Стандартная форма квадратичной функции имеет вид $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a , b и c – действительные числа с $a \neq 0$.

Рассмотрим несколько примеров квадратичных функций:

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 5; \text{Здесь } a = 2, b = 4, c = -5$$

$$f(x) = 3x^2 - 9; \text{Здесь } a = 3, b = 0, c = -9$$

$$f(x) = x^2 - x; \text{Здесь } a = 1, b = -1, c = 0$$

Теперь рассмотрим $f(x) = 4x - 11$; Здесь $a = 0$, следовательно, $f(x)$ не является квадратичной функцией.

Вершина квадратичной функции – это точка, в которой функция принимает максимальное или минимальное значение. Ось симметрии квадратичной функции пересекает график функции (параболу) в вершине.

Корни квадратичной функции $f(x)$ можно вычислить, используя формулу $x = [-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}] / 2a$.

Квадратичная функция может иметь разные формы: стандартную форму, форму вершины и форму пересечения:

- стандартная форма: $f(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.
- «форма вершины»: $f(x) = a(x - h)^2 + k$, где $a \neq 0$ и (h, k) – вершина параболы, представляющей квадратичную функцию;
- «форма пересечения»: $f(x) = a(x - p)(x - q)$, где $a \neq 0$ и $(p, 0)$ и $(q, 0)$ – это x -точки пересечения параболы с осью X .

«Ветви» параболы направлены вверх или вниз в зависимости от величины «а»:

- если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх;
- если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз.

Мы можем легко преобразовать форму вершины или форму пересечения в стандартную форму, просто упростив алгебраические выражения. Квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$ можно легко преобразовать в вершинную форму $f(x) = a(x - h)^2 + k$, используя значения $h = -b/2a$ и $k = f(-b/2a)$.

Пример 1. Преобразуем квадратичную функцию $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$ в вершинную форму.

Шаг 1. Сравнивая данную функцию с $f(x) = ax^2 + bx + c$, мы получаем $a = 2$, $b = -8$ и $c = 3$.

Шаг 2. Найдем h , используя формулу: $h = -b/2a = -(-8)/2(2) = 2$.

Шаг 3. Найдем k , используя формулу:

$$k = f(-b/2a) = f(2) = 2(2)^2 - 8(2) + 3 = 8 - 16 + 3 = -5.$$

Шаг 4. Подставим значения в вершинную форму: $f(x) = 2(x - 2)^2 - 5$.

Квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ может быть легко преобразована в вершинную форму $f(x) = a(x - p)(x - q)$ с использованием значений p и q (x -пересечения) путем решения квадратичного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

Пример 2. Преобразуем квадратичную функцию $f(x) = x^2 - 5x + 6$ в форму пересечения.

Шаг 1. Сравнивая данную функцию с $f(x) = ax^2 + bx + c$, мы получаем $a = 1$.

Шаг 2. Решим квадратное уравнение: $x^2 - 5x + 6 = 0$, разложив на

множители левую часть, мы получим

$$(x - 3)(x - 2) = 0$$

$$x = 3, x = 2$$

Шаг 3. Подставим значения в форму пересечения: $f(x) = 1(x - 3)(x - 2)$.

Область квадратичной функции – это набор всех значений x , которые определяют функцию, а диапазон значений квадратичной функции – это набор всех значений y , которые функция получает в результате подстановки различных значений x .

Квадратичная функция – это полиномиальная функция, которая определена для всех действительных значений x . Таким образом, область определения квадратичной функции – это все действительные числа, то есть $\mathbb{R}$. В интервальной записи область определения любой квадратичной функции равна $(-\infty, \infty)$.

Диапазон значений квадратичной функции зависит от направления «ветвей» и координат вершины параболы. Диапазон значений любой квадратичной функции с вершиной (h, k) и уравнением $f(x) = a(x - h)^2 + k$ равен:

1) $y \geq k$ (или) $[k; +\infty)$ при $a > 0$ (поскольку ветви параболы направлены вверх при $a > 0$).

2) $y \leq k$ (или) $(-\infty; k]$ при $a < 0$ (поскольку ветви параболы направлены вниз при $a < 0$).

График квадратичной функции представляет собой параболу. Для построения графика квадратичной функции необходимо выполнить следующие шаги.

Шаг 1. Найти вершину.

Шаг 2. Построить таблицу значений квадратичной функции из двух столбцов x и y с 5 строками (мы также можем взять больше строк), в качестве одной из точек которой будет вершина, и взять по два или более случайных значения по обе стороны от нее.

Шаг 3. Найти соответствующие значения y , подставив каждое значение x

в заданную квадратичную функцию.

Шаг 4: Теперь у нас есть две точки по обе стороны от вершины кривой, так что, изобразив их на координатной плоскости и соединив, мы можем получить требуемую форму. Кроме того, расширяем график с обеих сторон. Вот график квадратичной функции.

Пример 3. Построить график квадратичной функции $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$.

Решение:

Имеем: $a = 2$, $b = -8$ и $c = 3$.

Шаг 1. Найдём вершину.

x -координата вершины $= -b/2a = 8/4 = 2$.

y -координата вершины $= f(-b/2a) = 2(2)^2 - 8(2) + 3 = 8 - 16 + 3 = -5$.

Следовательно, вершина $= (2, -5)$.

Шаг 2. Построим таблицу с вершиной, записанной в средней строке.

x	0	1	2	3	4
y	3	-3	-5	-3	3

Шаг 3. Соединим указанные выше точки плавной кривой.

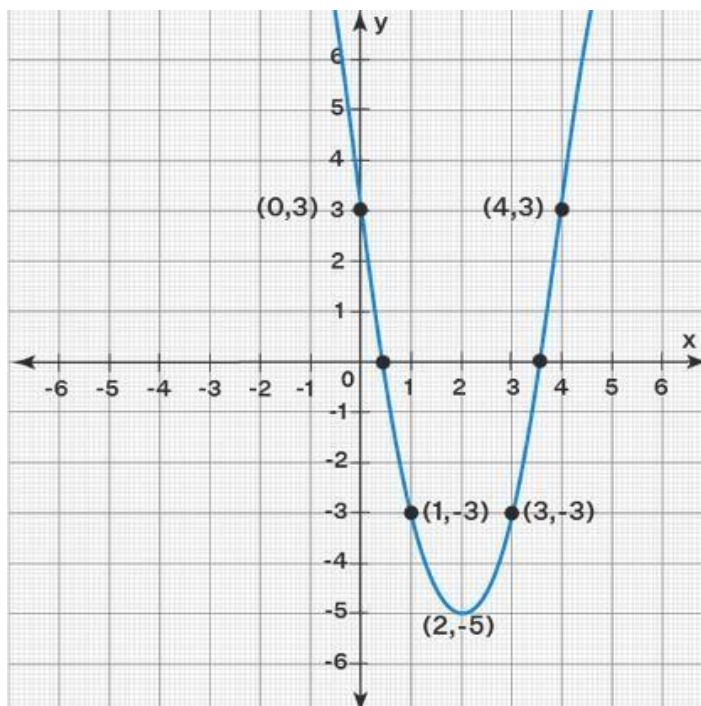


Рисунок 2 – График функции

Примечание: Мы также можем построить точки пересечения графика функции с осями координат, чтобы получить более аккуратную форму графика.

График квадратичных функций также можно получить с помощью калькулятора квадратичных функций.

Максимумы или минимумы квадратичных функций находятся в вершине.

Рассмотрим пример квадратичной функции $f(x) = 3x^2 + 4x + 7$.

Находим координаты вершины.

$$x_v = -b/2a = -2/3.$$

$$y_v = f(x_v) = 3 \cdot (4/9) + 4 \cdot (-2/3) + 7 = 17/3.$$

Так как $a = 3 > 0$, то «ветви» параболы направлены вверх, а точка $(-2/3; 17/3)$ является точкой минимума.

1.2 Анализ содержания теоретического материала учебников 8-9 классов по теме «Квадратичная функция» в школьном курсе

Утвержденный федеральный перечень учебников математики [25] позволяет выделить ряд авторов и учебников, соотносимых с тематикой изучения квадратичной функции, предлагаемые разными авторами, в разных классах [17]. Рассмотрим некоторые из них.

1) Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И. и другие; под редакцией Теляковского С.А. Математика. Алгебра: 9-й класс: базовый уровень [3]:

Таблица 1 – Тематическое планирование по теме квадратичная функция в представлении Макарычева Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешкова К.И. и др. [3]

Тема	Номер урока	Номера заданий
9класс		
§ 5. Функция $y=ax^2$, её график и свойства	5	90-105
§ 6. Графики функций $y = ax^2 + n$, $y = a(x - m)^2$	6	106-1197
§ 7. Построение графика квадратичной функции	7	120-135

Логика изучения квадратичной функции в учебнике следующая (Рисунок 3):

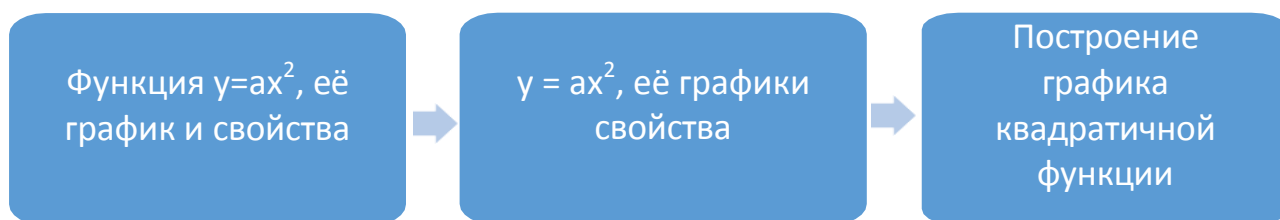


Рисунок 3 – Логика изучения квадратичной функции в учебнике

Макарычева Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешкова К.И. и др. [3]

Всего на изучение квадратичной функции отводится 4 часа.

Изучение квадратичной функции начинается с простейшего случая $y = ax^2$ и примеров, связанных с зависимостью пути от времени.

На конкретных точечных примерах описываются понятия растяжения и сжатия графика функции. Приводятся его свойства.

Случаи $y = ax^2 + n$, $y = a(x - m)^2$ рассматриваются как частные свойства квадратичной функции.

Рассматриваются различные случаи параллельного переноса графиков $y = ax^2 + n$, $y = a(x - m)^2$ из графика $y = ax^2$.

Приводится общий алгоритм построения параболы, начиная с вершины по точкам.

В учебнике представлены следующие типы заданий:

- построение графика функции (табличным методом, параллельным переносом, с помощью формул для нахождения вершины параболы);
- нахождение значений функции по аргументу и наоборот;
- определение области значений функции;
- указание промежутков возрастания и убывания функции;
- нахождение наибольшего и наименьшего значения функции;
- определение знаков коэффициентов функции при заданных условиях;
- нахождение координат вершины параболы;
- схематическое изображение графика функции;
- нахождение точек пересечения графиков функций;

- определение принадлежности точки графику функции;
- определение принадлежности координатным четвертям графиков функции;
- соотнесение функций и их графиков;
- нахождение промежутков знакопостоянства;
- перечисление свойств функции.

2) Дорофеев Г.В., Суворова С.Б., Бунимович Е.А. и другие. Алгебра, 9 класс [2].

Таблица 2 – Тематическое планирование по теме квадратичная функция в представлении Дорофеева Г.В., Суворовой С.Б., Бунимович Е.А. и др. [2]

Тема	Номер урока	Номера заданий
9 класс		
§ 2.1. Какую функцию называют квадратичной	10	195-213
§ 2.2. График и свойства функции $y = ax^2$	11	214-232
§ 2.3. Сдвиг графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат	12	233-262
§ 2.4. График функции $y = ax^2 + bx + c$	13	263-288
§ 2.5. Квадратные неравенства	14	289-316
§ 2.6. Применение свойств квадратичной функции при решении задач	15	317-322
§ 2.7. Графики функций, содержащие модули	16	323-326

Логика изучения квадратичной функции в учебнике следующая (Рисунок 4):

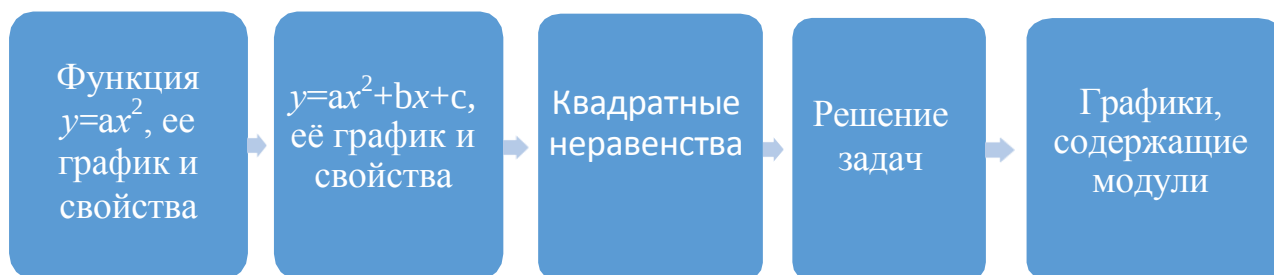


Рисунок 4 – Логика изучения квадратичной функции в учебнике Дорофеева Г.В., Суворовой С.Б., Бунимович Е.А. и др. [2]

Всего на изучение квадратичной функции отводится 8 часов.

Изучение квадратичной функции начинается с общих вводных – На конкретных примерах конических сечений, траекторий движения тел рассматривается парабола и связанные с ней понятия – ось симметрии,

вершина, «крутизна», направление. Приводятся примеры построений по точкам.

Далее рассматривается график и свойства функции $y = ax^2$. Свойства функции рассматриваются в привязке к особенностям графика.

Применительно к сдвигу графика функции $y = ax^2$ вдоль осей координат рассматривается сдвиг вдоль оси Y и оси X , алгоритм построения графика функции при соответствующих сдвигах.

Далее рассматривается собственно график функции $y = ax^2 + bx + c$ как суперпозиция $y = ax^2$ и параллельных переносов вдоль координатных осей.

Очередной шаг – рассмотрение квадратных неравенств вида:

$$ax^2 + bx + c < 0, ax^2 + bx + c > 0.$$

Применение свойств квадратичной функции при решении задач производится на примерах типа определения количества корней уравнения, задачах на доказательство.

Графики функций, содержащие модули, рассматривают более сложные случаи и алгоритмы построения квадратичных функций, содержащих модули.

Примечательно, что последние две темы помечены как рубрики «Для тех, кому интересно». Таким образом, эти параграфы могут рассматриваться как расширение для сильных учащихся, так и как базовый уровень.

В целом содержание учебника по теме «Квадратичная функция» представляется более логичным и последовательным, органично сочетающим принцип «от простого к сложному» в развитии, в отличие от упрощенной концепции изложения в учебнике Макарычева Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешкова К.И. и др., что также доказывает как увеличенное количество часов на изучение теоретического материала, так и большее число задачного материала.

В учебнике представлены такие типы заданий, как:

- определение квадратичных функций;
- нахождение значений функции по аргументу и наоборот;
- поиск наибольшего и наименьшего значений функции по графику или

на отрезке;

– определение, является ли функция возрастающей или убывающей;
указание промежутков возрастания и убывания функции;

- соотнесение функций и их графиков;
- схематическое изображение графика функции;
- формулировка функции по заданным условиям;
- определение координат вершины параболы;
- анализ знаков коэффициентов функции;
- нахождение коэффициентов при заданных условиях;
- построение графика функции через параллельный перенос или с помощью формул для нахождения вершины;
- указание области значений функции.

3) Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С.; под редакцией Подольского В.Е. Алгебра, 9 класс [12].

Таблица 3 – Тематическое планирование по теме квадратичная функция в представлении Мерзляк А.Г., Полонского В.Б., Якир М.С. [12]

Тема	Номер урока	Номера заданий
9 класс		
§ 9. Как построить график функции $y = k f(x)$, если известен график функции $y = f(x)$	9	9.1-9.23
§ 10. Как построить графики функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$, если известен график функции $y = f(x)$	10	10.1-10.33
§ 11. Квадратичная функция, её график и свойства	11	11.1-11.60
О некоторых преобразованиях графиков функций: Как построить график функции $y = f(-x)$, если известен график функции $y = f(x)$ Как построить график функции $y = f(x)$, если известен график функции $y = f(x)$ Как построить график функции $y = f(x) $, если известен график функции $y = f(x)$	11	1-3, 1-5, задания в тестовой форме
§ 12. Решения квадратных неравенств	12	12.1-12.50
§ 13. Системы уравнений с двумя переменными	13	13.1-13.35
§ 14. Система двух уравнений с двумя переменными как математическая модель прикладной задачи	14	14.1-14.39
Итог. Главное в параграфе		

Логика изучения квадратичной функции в учебнике следующая (Рисунок 5):

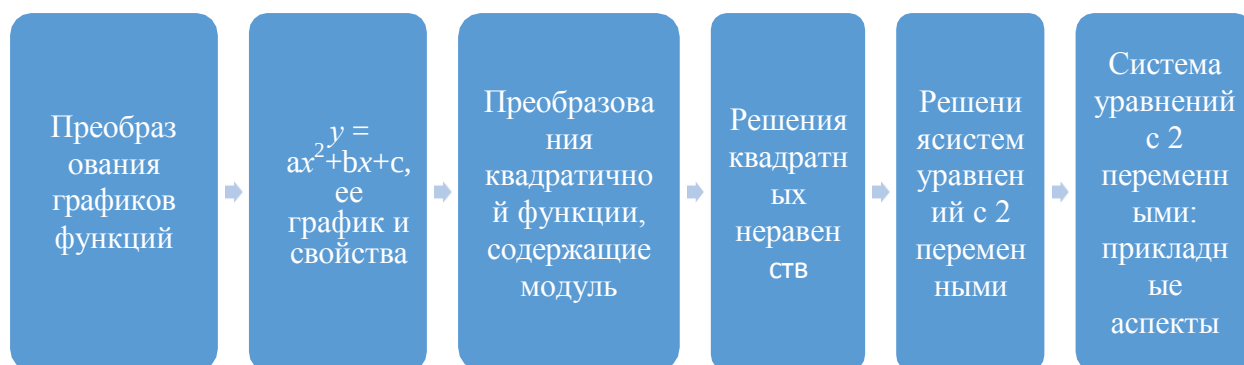


Рисунок 5 – Логика изучения квадратичной функции в учебнике Мерзляк А.Г., Полонского В.Б., Якир М.С. [12]

Всего на изучение квадратичной функции отводится 10 часов.

Обобщение понятия квадратичной функции начинается с примеров преобразований графиков функций.

Далее рассматривается собственно график функции $y = ax^2 + bx + c$.

Очередной шаг – рассмотрение сложных вопросов преобразований квадратичной функции, содержащие модуль. Далее рассматриваются решения квадратных неравенств вида $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c > 0$.

Дальнейшая ступень – решения систем уравнений с 2 неизвестными и их прикладные аспекты (задачи с практикоориентированным содержанием).

В целом содержание учебника по теме «Квадратичная функция» представляется более систематичным и последовательным, особенно с точки зрения графиков функций и их преобразований. Приведены алгоритмы построения квадратичной функции, содержащей модуль. Задачный материал носит практикоориентированный характер.

Задачный материал по теме представлен заданиями следующего типа:

- определение уравнения функции по словесному описанию;
- определение области значений, области определения и построение графиков;
- определение нулей, положительных и отрицательных значений функции;

- определение промежутков знакопостоянства;
- задачи с параметром;
- доказательство принадлежности точки графику при определенных значениях параметра;
- определение параметра по готовому графику;
- задачи на преобразование графиков функций;
- построение графиков функции, используя параллельный перенос, растяжение/сжатие;
- решение уравнений графическим способом;
- преобразование алгебраических выражений;
- поиск наименьшего и наибольшего значений, промежутков возрастания и убывания, промежутков знакопостоянства.

4) Петерсон Л.Г., Агаханов Н.Х., Петрович А.Ю. и другие. Алгебра, 8 класс.

Таблица 4 – Тематическое планирование по теме квадратичная функция в представлении Петерсона Л.Г., Агаханова Н.Х., Петрович А.Ю. [1]

Тема	Номер урока	Номера заданий
8 класс		
§ 4.2.1. Функции $y = ax^2$, $y = ax^2 + h$, $y = a(x - d)^2$ и их графики	31	444-461
§ 4.2.2. Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$	32	462-481
* Наименьшее и наибольшее значение квадратного трехчлена	33	482-494
§ 4.2.3. Квадратные неравенства	34	495-514
* Решение квадратных неравенств с параметром	35	515-531 Экспресс-тест
Задачи для самоконтроля	36	532-562

Логика изучения квадратичной функции в учебнике следующая (Рисунок 6):

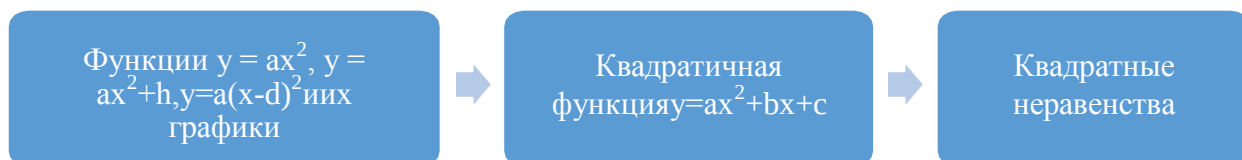


Рисунок 6 – Логика изучения квадратичной функции в учебнике

Петерсона Л.Г., Агаханова Н.Х., Петрович А.Ю. [1]

Всего на изучение квадратичной функции отводится 8 часов.

Обобщение понятия квадратичной функции начинается с классических определений. Сопутствующими понятиями являются «четность»-«нечетность», направленность ветвей параболы, «крутизна». Рассматриваются случаи параллельного переноса графика $y = ax^2$ для получения преобразований в виде $y = ax^2 + h$, $y = a(x - d)^2$.

Далее рассматривается собственно график функции $y = ax^2 + bx + c$.

Очередной шаг – рассмотрение квадратных неравенств, включая неравенства с параметрами, и наименьшего и наибольшего значений квадратного трехчлена.

Задачный материал по теме представлен заданиями следующего типа:

- построение графиков функций;
- выделение полного квадрата трехчлена;
- задания на сопоставление;
- проблемные задания на анализ определений и теоретической базы;
- определение наибольшего и наименьшего значений квадратного трехчлена;
- доказательство рациональности.

В целом содержание учебника по теме «Квадратичная функция» представляется систематичным, изобилует разнообразным задачным материалом.

Таким образом, изучение квадратичной функции берет начало в 8 и 9 классах и содержит разные подходы, разное количество часов у разных авторов.

Упрощенное представление темы представлено в учебнике Макарычева Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешкова К.И. в 9 классе. Здесь представлен базовый, самый основной материал.

Учебник алгебры в 9 классе Дорофеева Г.В., Суворовой С.Б., Бунимович Е.А. и др. отличается логичность, последовательность, органичный принцип «от простого к сложному» в развитии, увеличенное количество часов на изучение теоретического и задачного материала.

Учебник 9 класса Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М.С. отличается подход с точки зрения графиков функций и их преобразований.

Содержание учебника представляется более систематичным и последовательным с точки зрения преобразований графиков функций. Приведены алгоритмы построения квадратичной функции, содержащей модуль. Задачный материал носит практикоориентированный характер.

Изложение материала в учебнике 8 классе Петерсона Л.Г., Агаханова Н.Х., Петрович А.Ю. носит базовый, но системный характер. Рассматриваются сложные вопросы наименьшего и наибольшего значения квадратного трехчлена, решения квадратных неравенств с параметром.

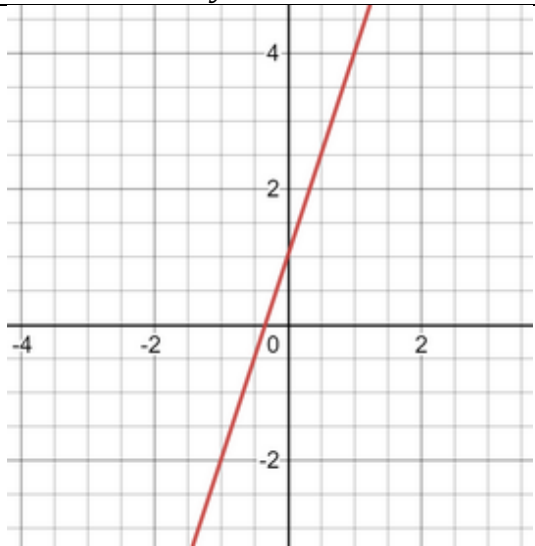
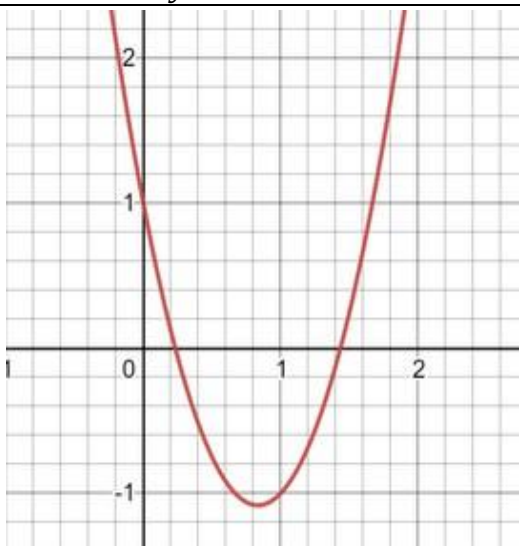
ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ШКОЛЕ

2.1 Методика изучения квадратичной функции

При изучении квадратичной функции в стандартной форме $y = ax^2 + bx + c$ следует начать с описания квадратичного графика. При этом отмечается, что график имеет форму параболы с меняющимся наклоном (скорость изменения), может иметь две точки пересечения (ноль, единицу или две), всегда симметричен относительно вертикальной оси, проходящей через вершину.

Так, например, в случае с линейной функцией, например, $y = 3x + 1$ и квадратичной $y = 3x^2 + 2x + 1$ можно провести сравнение в виде таблицы:

Таблица 5 – Табличное сопоставление линейного и квадратичного графиков

$y=3x+1$	$y=3x^2+2x+1$
	
<p>Описание линейного графика:</p> <p>В форме прямой линии</p> <p>Постоянный наклон (скорость изменения)</p> <p>Один перекресток по оси x (если он не горизонтальный)</p> <p>Обычно симметрия отсутствует</p>	<p>Описание квадратичного графика:</p> <p>По форме представляет параболу</p> <p>Наклон (скорость изменения) меняется</p> <p>Может иметь два Ox-пересечения (ноль, единицу или два)</p> <p>Всегда симметричен отражению</p>

В начале изучения квадратной функции важно включать визуальные изображения. Учащимся требуется время и повторение, чтобы связать изображение графика с уравнением параболы.

В зависимости от уровня подготовки обучающихся можно выбрать, насколько подробно следует сравнить линейные и квадратные уравнения. Важно использовать терминологию, которую обучающиеся будут использовать в дальнейшем обучении. Например, квадратичная функция имеет форму параболы. Конечно, студенты могут легко распознать, что эта форма похожа на букву «U». Однако ключевое слово, которое следует повторять, – «парабола», поскольку это то, что обучающиеся услышат и увидят на будущих уроках [13].

Опять же, использование правильной формулировки повысит вероятность того, что учащиеся вспомнят правильную информацию в нужное время.

Пример простейшей квадратичной функции – кривая $f(x) = x^2$

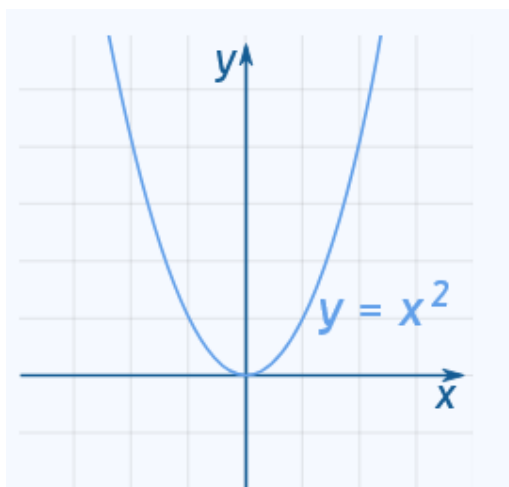


Рисунок 7 – Пример простейшей квадратичной функции

Примером является форма спутниковой антенны. Многие спутниковые антенны имеют параболическую форму, что помогает фокусировать сигналы на приемнике.



Рисунок 8 – Форма спутниковой тарелки как пример квадратичной функции

Непосредственное построение графика позволит учащимся оценить, что произойдет, если рассмотреть функцию $f(x) = ax^2$. Большие значения a сжимают кривую внутрь. Меньшие значения a расширяют ее наружу. А отрицательные значения a переворачивают ее «с ног на голову»:

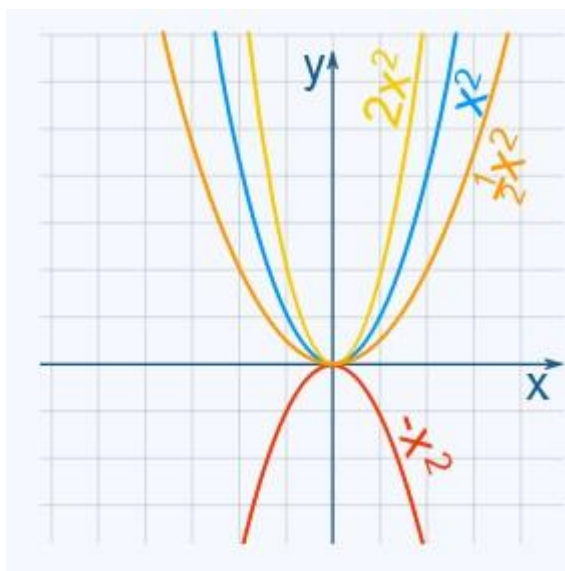


Рисунок 9 – Графическая иллюстрация $f(x) = ax^2$

Перед построением графика квадратичной функции в общем виде мы изменяем порядок уравнения, исходя из выражения $f(x) = ax^2 + bx + c$ к выражению $f(x) = a(x - h)^2 + k$, где $h = -b/2a$, $k = f(h)$. Другими словами, следует вычислить h ($-b/2a$), затем найти k , вычислив все уравнение для $x = h$. Самое замечательное в этой новой форме то, что h и k показывают нам самую низкую (или самую высокую) точку, называемую вершиной. Кроме того, кривая симметрична (зеркально отражает) ось, проходящую через $x = h$, что упрощает построение графика. Так, h показывает, насколько сильно кривая сдвинулась влево (или вправо) от $x = 0$. k показывает, насколько сильно кривая сдвинулась

вверх (или вниз) от $y = 0$.

Пример 1. Построим график $f(x) = 2x^2 - 12x + 16$. Сначала давайте запишем: $a = 2$, $b = -12$ и $c = 16$. Итак, что мы знаем? Так как a положительно, поэтому график направлен вверх (в форме буквы "U"), а равно 2, поэтому он немного «сжат» по сравнению с графиком x^2 . Далее вычислим h : $h = -b/2a = -(-12) / (2 \times 2) = 3$. И далее мы можем вычислить k (используя $h = 3$): $k = f(3) = 2(3)^2 - 12 \cdot 3 + 16 = 18 - 36 + 16 = -2$.

Итак, теперь мы можем построить график (с реальным пониманием!): $2x^2 - 12x + 16$:

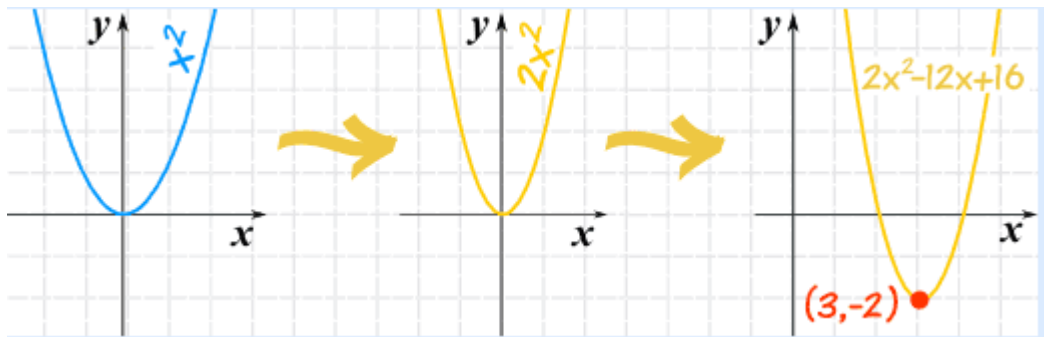


Рисунок 10 – Этапы схематического изображения эскиза графика

Предположим, что, наоборот, нам известна вершина $(3, -2)$, и ось $x = 3$. Что, если у нас есть график и мы хотим найти уравнение?

Пример 2. Вы только что нанесли на график некоторые интересные данные, и они выглядят квадратичными:

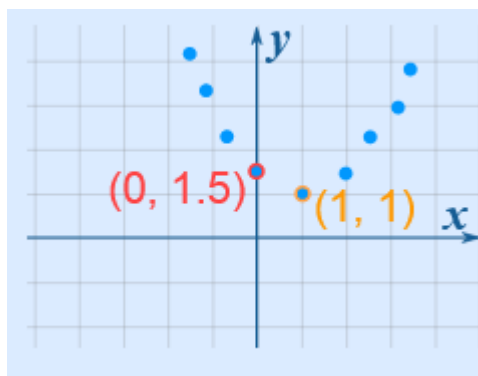


Рисунок 11 – Данные на плоскости

Зная эти две точки, мы можем составить уравнение. Во-первых, мы знаем h и k (в вершине): $(h, k) = (1, 1)$ Итак, давайте представим это в виде уравнения:
 $f(x) = a(x - h)^2 + k$;

$$f(x) = a(x - 1)^2 + 1.$$

Затем мы вычисляем a . Мы знаем точку $(0, 1, 5)$, поэтому: $f(0) = 1,5$ и $a(x-1)^2 + 1$ при $x=0$:

$f(0) = a(0 - 1)^2 + 1$. Они оба равны $f(0)$, поэтому можно их приравнять друг другу:

$a(0 - 1)^2 + 1 = 1,5$. Упрощая, получим $a + 1 = 1,5 \Rightarrow a = 0,5$. И вот результирующее квадратное уравнение: $f(x) = 0,5(x - 1)^2 + 1$.

Возможно, это неправильное уравнение для данных, но это хорошая модель и лучшее, что мы можем предложить.

Можно нарисовать ось симметрии (посередине), чтобы убедиться, что график симметричен.

Можно также предложить учащимся проверить направление параболы (вверх или вниз), используя знак a , а также нарисовать несколько дополнительных точек, чтобы убедиться, что кривая получилась правильной.

Сравнение и противопоставление – отличная возможность поддержать обучение квадратичной функции. Разговоры о математике помогают даже успешным обучающимся развить свои способности к изложению математических идей.

Можно проводить групповую работу с разделением учащихся на группы по три-четыре человека. Например, группе учащихся можно предоставить таблицы, в каждой из которых будет приведена пара графиков, – один линейный, другой квадратичный. Каждой группе учащихся будет дан определенный промежуток времени для определения характеристик графика, которые являются одинаковыми или разными.

Можно также предоставить учащимся задания так, чтобы каждый из них сформулировал определенное количество характеристик. В течение определенного времени группы должны представить свои выводы классу. Затем обсудить, какие различия являются универсальными для всех линейных и квадратных уравнений.

Преподавателю важно четко представлять информацию и знакомить учащихся с различными подсказками, которые они могут увидеть. У учащихся можно попросить решения, наборы решений, корни, нули и Ох-пересечения. Если учащиеся встретят все эти слова без какой-либо подготовки, это может показаться им довольно пугающим.

Учащиеся должны знать, что Ох-пересечения – это корни и нули квадратного уравнения. Также следует объяснить, в каком формате учащиеся должны давать ответы и/или наборы решений. Терминология, которая может показаться специалистам по математике рутинной, может показаться учащимся пугающей.

Учащимся нужна четкая связь между уравнением и графиком, которая будет усиливаться при повторении. Обучение учащихся тому, как использовать построение графиков квадратных уравнений, также может помочь им проверить свои домашние задания.

При представлении новой темы, такой как квадратичная функция, всегда полезно включить обзор ключевых базовых навыков. Это позволяет избежать целого дня, потраченного на повторение, и в то же время позволяет учащимся, имеющим пробелы в знаниях, ознакомиться с необходимыми понятиями.

Учащиеся должны понимать основные понятия построения графиков, такие как пары координат. Это означает, что учащиеся должны понимать, что пары записываются как (x, y) , и должны уметь строить пары координат. Учащиеся должны понимать, что все пары координат на графике соответствуют квадратному уравнению. Связь между точками на графике и уравнением может показаться учащимся немного абстрактной, но несколько демонстраций могут укрепить эту связь.

Кроме того, учащиеся должны понимать отдельные части графиков. При наличии графика учащиеся должны уметь идентифицировать точки пересечения Ох и Оу. Учащиеся должны понимать, когда график увеличивается, уменьшается или остается постоянным. Чем лучше учащиеся

овладеют навыками интерпретации графиков, тем легче им будет моделировать реальные ситуации с помощью графиков. Учащимся необходимо связать графики с решениями уравнения Ох-пересечения.

Учащиеся должны понимать, что такое радикалы. Учащиеся должны уметь извлекать квадратный корень из совершенных квадратов и упрощать квадратные корни. При заполнении квадрата учащиеся будут извлекать квадратный корень из выражения типа $(x + 2)^2$. Учащиеся должны понимать, что квадратный корень имеет как положительное, так и отрицательное решение.

Чем лучше учащиеся понимают принцип разложения на множители, тем легче им будет определять точки пересечения параболы с осью Ох, фактически, решая квадратные уравнения, и тем быстрее они смогут решать более сложные квадратные уравнения. Некоторые учащиеся могут попытаться вообще отказаться от разложения на множители, если им будет предоставлена возможность использовать квадратное уравнение каждый раз.

Учебные цели помогают вашим студентам видеть цель во всем, что они делают. Сначала следует формулировать учебные цели, чтобы убедиться, что задачи соответствуют целям.

Прикладные задачи помогают учащимся увидеть связь между математическими концепциями и реальным опытом. Альтернативное оценивание укрепляет уверенность учащихся, которые обычно испытывают трудности с письменными тестами.

К альтернативным способам оценивания в дополнение к письменным тестам или вместо них можно прибегать, чтобы убедиться, достигли ли ученики всех целей обучения. Если цели обучения сформулированы на основе стандартов, то оценки также будут соответствовать всем стандартам [18].

1) Можно попросить учащихся создать видеозапись, на которой они сами строят квадратичную функцию. Для определения точек пересечения с осью Ох можно предоставить учащимся выбор или предложить им

использовать квадратное уравнение, разложение на множители или завершение квадрата. Учащиеся должны задавать вопросы, как будто они преподаватель, и объяснять каждый шаг (из видеороликов получаются отличные альтернативные оценки, но вам нужно установить временные ограничения).

2) Можно попросить учащихся составить буклет, в котором они будут строить и исследовать квадратичную функцию, используя все три метода определения точек пересечения с осью Ox . При этом можно позволить учащимся объяснить, какой метод они предпочитают и почему. Это может быть индивидуально или в группах по три человека, чтобы каждый ученик представил свой метод.

3) Один из вариантов задания – разрешить учащимся самим выбрать видео, плакат, буклет или презентацию о построении квадратичной функции.

4) Можно сделать три снимка объектов или событий, которые можно смоделировать с помощью квадратных уравнений. Учащиеся могут сфотографировать школьную арку, логотип McDonald's или даже банан. Учащиеся должны объяснить, почему на рисунке изображен пример квадратичной функции.

5) Учащиеся могут использовать изображение параболы и смоделировать его с помощью квадратного уравнения. При этом они могут использовать свои собственные рисунки или найти их в Интернете. При этом можно попросить учащихся показать, как шаг за шагом решать x -образные отрезки уравнения, используя квадратное уравнение и/или используя завершение квадрата.

Некоторые идеи для применения лучше реализовать в классе. Вы можете создать квадратное уравнение, чтобы смоделировать ситуацию, которую вы создаете на уроке [22].

Можно попросить учащихся создать прямоугольник, длина которого в три раза больше ширины (или в три раза больше ширины плюс два). Учащиеся могут создавать различные фигуры, соответствующие этим условиям.

Посмотрите, смогут ли учащиеся самостоятельно составить правильное уравнение. Это дает возможность для обсуждения ограничений математических моделей. Графическая модель полезна только для рассмотрения положительных и ненулевых значений размеров и площади прямоугольника.

При изучении применения свойств квадратичной функции при решении задач, следует помнить, что решение словесных задач и осмысление реальных ситуаций кардинально помогает учащимся увидеть связь между квадратичной функцией и окружающим миром.

Пример 1. Квадратура и движение снаряда.

Квадратное уравнение $h(t) = -16t^2 + vt + h$ моделирует движение объекта, подброшенного вертикально вверх, где t – время, измеряемое в секундах, v – скорость, измеряемая в метрах в секунду, h – начальная высота, измеряется в метрах, когда объект брошен или запущен в полет, а $h(t)$ – это высота объекта, измеряемая в футах.

Используя это уравнение, можно создать несколько сценариев для учащихся. Например, указать, что какой-то предмет был подброшен в воздух на краю крыши вашей школы. Предположим, что высота здания в вашей школе составляет 20 метров. Объект был брошен со скоростью 30 метров. В какой момент объект упадет на землю?

Пример 2. Моделирование движения мяча с помощью прибора.

Если у преподавателя физической культуры в школе есть прибор для измерения скорости подбрасываемого в воздух мяча, почему бы не смоделировать ситуацию для учеников? Можно подбросить настоящий мяч в воздух, и ученики смогут смоделировать реальный бросок, который они наблюдали. Затем можно сравнить результаты математической модели с реальным таймером.

Учащиеся должны составить уравнение для моделирования ситуации и решить его для x -пересечений (в данном случае, t -пересечений). Сначала учащиеся подставляют 20 вместо начальной высоты и 30 вместо скорости.

В результате получаем уравнение: $h(t) = -16t^2 + 30t + 20$.

Теперь учащиеся должны найти нули, или t -пересечения. Они могут сделать это, используя формулу определения корней квадратного уравнения.

Когда мы задаем $y = 0$, мы получаем уравнение: $-16t^2 + 30t + 20 = 0$ или $-8t^2 + 15t + 10 = 0$.

Мы можем определить, что $a = -8$, $b = 15$ и $c = 10$. Теперь мы можем произвести подстановки в квадратичную формулу.

$$(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a,$$

$$t_{1,2} = (-15 \pm \sqrt{545}) / (-16).$$

У нас есть два решения, когда $t = (15 + \sqrt{545}) / 16$ и $t = (15 - \sqrt{545}) / 16$.

Мы хотим знать, когда предмет упадет на землю, поэтому нам нужно использовать положительное решение.

Мяч упадет на землю через $(15 + \sqrt{545}) / 16$ секунды или 2,4 секунды при округлении до десятых.

Пример 3. Определение максимальной площади земли.

Предположим, что фермер хочет огородить прямоугольный участок земли для выращивания определенного вида сельскохозяйственных культур. У него есть только 48 на 48 метров ограждения. Какова максимальная площадь земли, которую фермер может огородить? Каких размеров будет его участок?

Важно позволить учащимся предположить, какой будет максимальная площадь. Учащиеся, безусловно, смогут создавать прямоугольники с периметром 48 на 48 метров. Учащимся также понадобится формула периметра, которая поможет им вывести формулу для определения площади прямоугольника. Учащиеся уже должны знать эти два уравнения для прямоугольников.

$$P = 2l + 2w$$

$$A = lw$$

Поскольку периметр может составлять не более 48 метров, учащиеся могут заменить P на 48, чтобы определить соотношение между длиной и

шириной.

$$P = 2l + 2w,$$

$$48 = 2l + 2w,$$

$$24 = l + w,$$

$$l = 24 - w.$$

Решение для определения длины позволяет учащимся заменить « $24 - w$ » на l в уравнении площади, получив квадратное уравнение.

$$A = lw = w(24 - w) = 24w - w^2$$

$$A = -w^2 + 24w$$

Возникает соблазн решить эту задачу так, как мы привыкли решать квадратные уравнения. В данном случае нас не спрашивают о точках пересечения с осью X . Мы хотим знать не то, когда площадь будет равна нулю, а когда площадь будет наибольшей! На самом деле мы должны переписать уравнение в виде:

$$-A = w^2 - 24w,$$

$$-24/2 = -12,$$

$$(-12)^2 = 144,$$

$$-A + 144 = w^2 - 24w + 144,$$

$$-A + 144 = (w - 12)^2,$$

$$-A = (w - 12)^2 - 144,$$

$$A = -(w - 12)^2 + 144.$$

Теперь, когда квадратичная форма находится в вершинной форме:

$A = -(w - 12)^2 + 144$, учащиеся смогут определить, что вершина равна $(12, 144)$. Когда парабола раскрывается книзу, вершина является максимальной точкой. Если учащимся трудно усвоить эту концепцию, важно еще раз показать наглядный график:

Как только учащиеся определяют $(12, 144)$ как наивысшую точку, им просто нужно интерпретировать значение пары координат, чтобы получить решение задачи (Рисунок 12).

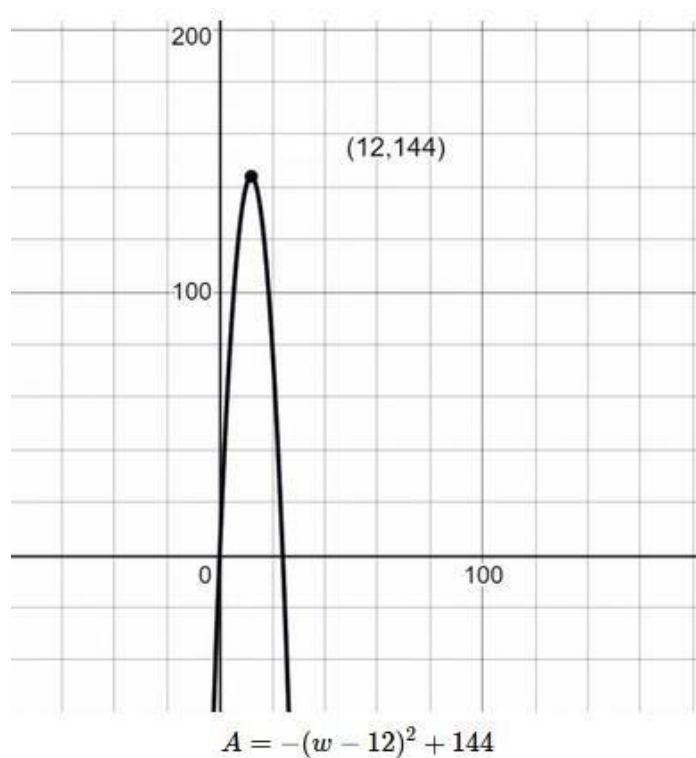


Рисунок 12 – Графическое изображение параболы

Значение 12 – это ширина. Учащиеся должны помнить, что $l = 24 - w$, то есть $l = 12$. Это означает, что размеры земельного участка составляют 12 на 12 метров. Значение 144 – это площадь участка. Площадь фермерского участка составит 144 кв. метра.

Пример 4. Бросок мяча.

Мяч подбрасывается вертикально вверх с высоты 3 м над землей со скоростью 14 м/с. Когда он ударяется о землю?

Игнорируя сопротивление воздуха, мы можем вычислить его высоту, сложив эти три показателя:

Так как высота начинается с 3 м, и мяч движется вверх со скоростью 14 м/с, $14t$, а гравитация тянет его вниз, изменяя его положение примерно на 5 м в секунду в квадрате, $-5t^2$ (значение $-5t^2$ упрощено из $-(\frac{1}{2})at^2$ при $a = 9,8 \text{ м/с}^2$), то высота h в любой момент времени t будет равна:

$$h = 3 + 14t - 5t^2$$

И мяч упадет на землю, когда высота будет равна нулю:

$3 + 14t - 5t^2 = 0$, что является квадратным уравнением.

Есть много способов решить эту задачу, здесь мы рассмотрим её, используя следствие из теоремы Виета. Решая уравнение, получим

$$t_1 t_2 = -15 \text{ и } t_1 + t_2 = -14.$$

Коэффициенты равны: $-15, -5, -3, -1, 1, 3, 5, 15$.

Попробовав несколько комбинаций, обнаружим, что -15 и 1 работают ($-15 \times 1 = -15$ и $-15 + 1 = -14$).

Перепишем уравнение в виде:

$$5t^2 - 15t + t - 3 = 0,$$

$$5t(t - 3) + 1(t - 3) = 0.$$

Общий множитель равен $(t - 3)$:

$$(5t + 1)(t - 3) = 0.$$

Таким образом, $5t + 1 = 0$ или $t - 3 = 0$

$$t_1 = -0,2 \text{ или } t_2 = 3.$$

$t_1 = -0,2$ – отрицательное время, что в нашем случае невозможно.

$t = 3$ – подходящее значение.

Мяч ударяется о землю через 3 секунды!

График параболы $h = -5t^2 + 14t + 3$

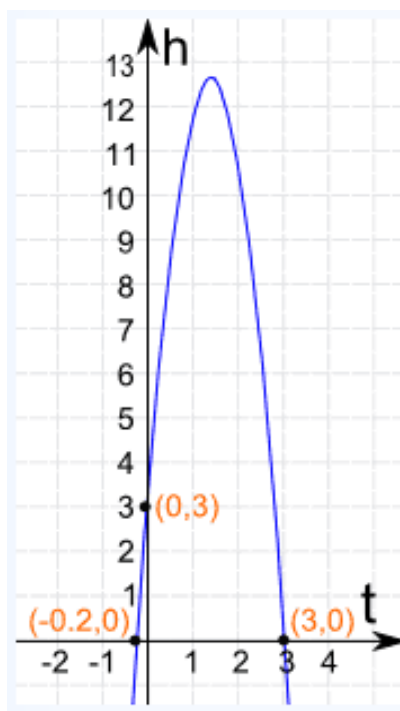


Рисунок 13 – Графическое изображение параболы

Парабола показывает зависимость высоты полета мяча от времени.

При $t = 0$ (в начале) мяч находится на высоте 3 м.

Точка $(-0, 2; 0)$ говорит о том, что за 0,2 секунды до того, как мы бросили мяч, он был на уровне земли. Этого никогда не происходило! Поэтому наш здравый смысл подсказывает не обращать на это внимания.

Точка $(3, 0)$ говорит о том, что через 3 секунды мяч был на уровне земли.

Также следует обратить внимание учащихся, что шар поднимается почти на 13 метров в высоту.

Можно также точно определить, где находится верхняя точка. Метод состоит из двух этапов:

1) найти, где (вдоль горизонтальной оси) находится верхняя точка, используя $-b/2a$:

$$t = -b/2a = -(-14) / (2 \times 5) = 14/10 = 1,4 \text{ секунды.}$$

2) Затем найти высоту, используя это значение 1,4:

$$h = -5t^2 + 14t + 3 = -5(1,4)^2 + 14 \times 1,4 + 3 = 12,8 \text{ метров.}$$

Таким образом, мяч достигает наивысшей точки в 12,8 метров за 1,4 секунды.

Пример 5. Речной круиз.

Трехчасовой речной круиз длится 15 км вверх по течению, а затем обратно. Скорость течения реки составляет 2 км в час. Какова скорость лодки и как долго продолжалось плавание вверх по течению?

Следует учитывать две скорости: скорость, которую лодка развивает в воде, и скорость относительно суши:

Пусть x = скорость лодки в воде (км/ч).

Пусть v = скорость относительно суши (км/ч).

Потому что река течет вниз по течению со скоростью 2 км/ч:

– при движении вверх по течению $v = x - 2$ (скорость уменьшается на 2 км/ч),

– при движении вниз по течению $v = x + 2$ (скорость увеличивается на

2 км/ч).

Мы можем преобразовать эти скорости в время, используя «время = расстояние / скорость» (чтобы проехать 8 км со скоростью 4 км/ч, требуется $8/4 = 2$ часа, верно?)

И мы знаем, что общее время составляет 3 часа:

общее время = время вверх по течению + время вниз по течению = 3 часа

Складывая это вместе, получим:

$$\text{общее время} = 15 / (x - 2) + 15 / (x + 2) = 3 \text{ часа.}$$

Теперь мы используем наши навыки алгебры, чтобы решить для «х».

Сначала избавимся от дробей, умножив их на $(x - 2)(x + 2)$:

$$3(x - 2)(x + 2) = 15(x + 2) + 15(x - 2).$$

Разложим все по полочкам:

$$3(x^2 - 4) = 15x + 30 + 15x - 30.$$

Перенесем все влево и упростим:

$$3x^2 - 30x - 12 = 0.$$

Это квадратное уравнение!

Давайте решим это с помощью квадратичной формулы:

Квадратичная формула: $x_{1,2} = [-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}] / 2a$.

Где а, b и с взяты из квадратного уравнения в «стандартной форме»:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Решим $3x^2 - 30x - 12 = 0$.

Коэффициенты: $a = 3$, $b = -30$ и $c = -12$.

Подставляем а, b и с:

$$x = [-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \times 3 \times (-12)}] / (2 \times 3) \Rightarrow$$

$$x = [30 \pm \sqrt{900 + 144}] / 6$$

$$x = (30 \pm 32,31) / 6$$

$$x_1 = -0,39 \text{ или } x_2 = 10,39$$

Значение $x = -0,39$ не имеет смысла для этого реального примера. Таким образом, $x = 10,39$.

Ответ: Скорость лодки = 10,39 км/ч (с точностью до 2 знаков после запятой).

Итак: путь вверх по течению = $15 / (10,39 - 2) = 1,79$ часов = 1 час 47 минут.

Путь вниз по течению = $15 / (10,39 + 2) = 1,21$ часов = 1 час 13 минут.

Пример 6. Резисторы подключены параллельно

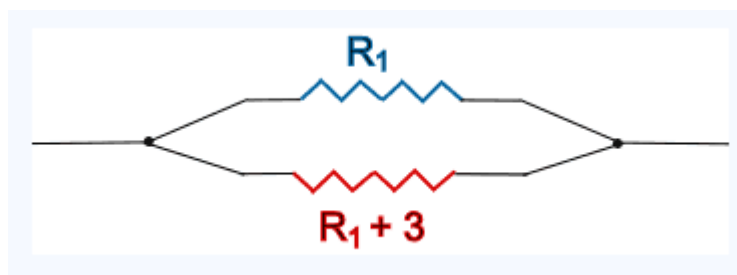


Рисунок 14 – Иллюстрация к примеру

Два резистора подключены параллельно, как показано на этой схеме.

Квадратичные резисторы R_1 и « $R_1 + 3$ ».

Общее сопротивление было измерено на уровне 2 Ом, и известно, что один из резисторов на 3 Ом больше, чем другой.

Каковы значения этих двух резисторов?

Формула для вычисления общего сопротивления « R_T » такова:

$$1/R_T = 1/R_1 + 1/R_2$$

В этом случае мы имеем $R_T = 2$ и $R_2 = R_1 + 3$

$$1/2 = 1/R_1 + 1/(R_1 + 3)$$

Чтобы избавиться от дробей, мы можем умножить все члены на $2R_1 \cdot (R_1 + 3)$, а затем упростить.

Умножим все слагаемые на $2R_1 \cdot (R_1 + 3)$:

$$2R_1 \cdot (R_1 + 3) / 2 = 2R_1 \cdot (R_1 + 3) / R_1 + 2R_1 \cdot (R_1 + 3) / (R_1 + 3)$$

$$\begin{aligned} \text{Затем упростим: } R_1 \cdot (R_1 + 3) &= 2(R_1 + 3) + 2R_1 \Rightarrow R_1^2 + 3R_1 = 2R_1 + 6 + 2R_1 \\ \Rightarrow R_1^2 + 3R_1 - 2R_1 - 6 - 2R_1 &= 0. \end{aligned}$$

Упрощая, получим квадратное уравнение: $R_1^2 - R_1 - 6 = 0$.

Решая его, получим: $R_{11} = -2$, $R_{12} = 3$.

Значение R_1 не может быть отрицательным, поэтому $R_1 = 3$ Ом.

Таким образом, два резистора имеют сопротивление 3 Ом и 6 Ом.

2.2 Конспект урока

Рассмотрим конспект урока по теме «Применение свойств квадратичной функции к решению задач» по учебнику Дорофеевой Г.В., Суворовой С.Б., Бунимович Е.А. и др. в 9 классе.

Тип урока: урок закрепления и комплексного применения новых знаний.

Цели урока:

1) Образовательные: научить учащихся применять свойства квадратичной функции для решения различных задач с использованием графического и алгебраического подходов.

2) Развивающие: развивать способность делать выводы на основе свойств функций, строить логические цепочки и проводить обоснования.

3) Воспитательные: развивать коммуникативные навыки посредством обсуждения и совместного решения задач в группах, формировать чувство ответственности за свои результаты и умение анализировать ошибки.

Учебные задачи направлены на достижение личностных результатов обучения: развивать познавательные интересы, интеллектуальные и творческие способности учащихся; развивать умение слушать; ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи; развивать креативность мышления, инициативу, находчивость, активность при решении математических задач.

Метапредметные результаты: развивать умение ставить цели и выбирать алгоритмы для решения учебных задач, формировать навыки применения математических знаний в различных ситуациях, требующих разных подходов и интуиции.

Предметные: переводить словесную модель в знаково-символическую

форму, развивать умение составлять алгоритмы решения задач на оптимизацию через опыт и логику. Совершенствовать навыки использования свойств квадратичной функции для решения задач.

Оборудование: компьютер, интерактивная доска, мультимедийный проектор, документ камера, лист самоконтроля, раздаточный материал (геометрические фигуры).

Формы организации учебной деятельности: фронтальная, индивидуальная, парная, исследовательская работа.

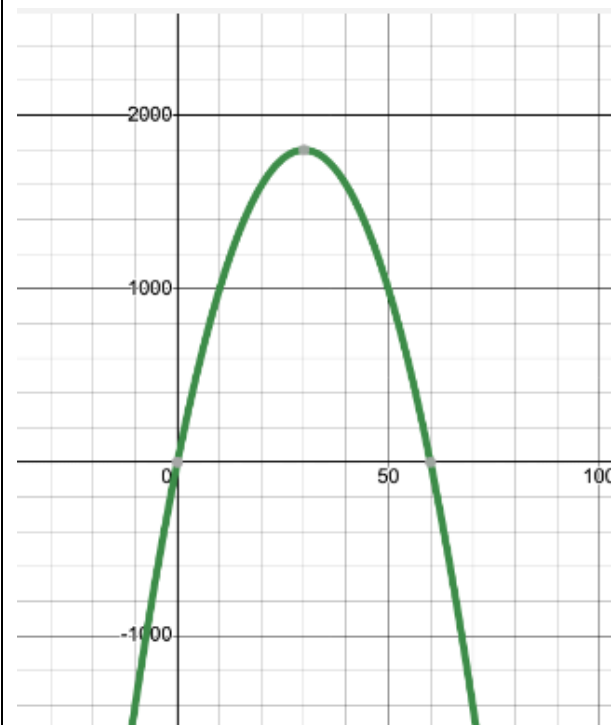
Таблица 6 – Технологическая карта урока

Этап	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Формируемые умения
1. Мотивационно-ориентировочный блок			
1.1. Мотивация к учебной деятельности.	<p>Учитель приветствует учащихся.</p> <p>Читает эпиграф к уроку: «Судьба, как ракета, летит по параболе Обычно – во мраке и реже – по радуге. Жил огненно-рыжий художник Гоген, Богема, а в прошлом – торговый агент. Чтоб в Лувр королевский попасть из Монмартра, Он дал кругалю через Яву с Суматрой! Унесся, забыв сумасшествие денег, Кудахтанье жён, духоту академий. Он преодолел тяготенье земное. Жрецы гоготали за кружкой пивною: «Пряма – короче, парабола – круче, Не лучше ль скопировать райские кущи?». А он уклонился ракетой ревущей Сквозь ветер, срывающий фалды и уши. И в Лувр он попал не сквозь главный порог – Параболой гневно пробив потолок!»</p> <p>(«Параболическая баллада» Андрея Вознесенского).</p> <p>Как вы думаете что имел в виду А. Вознесенский?</p> <p>Учитель обобщает рассуждения обучающихся и подводит итог беседы</p>	<p>Записывают в тетради число, вид работы.</p> <p>Высказывают предположения. Беседуют с учителем, между собой.</p>	<p>Л: осознание необходимости получения новых знаний, мотивация познавательной деятельности.</p> <p>К: умения слушать, вступать в диалог, вырабатывать совместную точку зрения, участвовать в коллективном обсуждении.</p> <p>П: развитие мыслительных операций.</p>

<p>1.2. Этап выделения проблемного поля и целеполагания</p>	<p>Читает отрывок из рассказа Л.Н. Толстого «Много ли человеку земли нужно» (приложение 1) (слайд 2).</p> <p>Крестьянин Пахом, который мечтал о собственной земле и собрал наконец требуемую сумму, предстал перед требованием старшины: «Сколько за день земли обойдешь, вся твоя будет за 1000 р. Но, если к заходу солнца не возвратишься на место, с которого вышел, пропали твои деньги». Выбежал утром Пахом, пробежал на место и упал без чувств, обежав четырёхугольник периметром 40 км. Какой четырёхугольник должен был обежать Пахом, чтобы его площадь была наибольшей?</p> <p>Как вы думаете: что должен был знать Пахом, чтобы получить в дар как можно больше земли?</p> <p>Предлагает обсудить в парах: какие знания необходимы, чему мы должны научиться на уроке, чтобы помочь Пахому.</p> <p>С помощью технологии «Проведи исследование» учитель обобщает вывод учащихся, просит сформулировать тему и цель урока.</p> <p><i>Учащимся предлагается задание:</i> Фермер хочет построить прямоугольный</p>	<p>Вступают в диалог с учителем. Предлагают варианты ответов на его вопросы.</p> <p>Обучающиеся работают парами. Вычисляют площадь: Пусть w - ширина, тогда длина равна $L = (120 - 2w)$ Площадь равна: $A = w(120 - 2w)$ Квадратное уравнение в стандартной</p>	<p>К: умение высказывать собственные мысли, умение слушать и воспринимать другого, понимать собеседника.</p> <p>П: умение перерабатывать информацию, выделять существенные признаки</p> <p>Р: самостоятельное выделение и формулирование целей.</p> <p>Л: личностное самоопределение, осознание необходимости получения новых знаний.</p>
---	---	---	---

загон со 120-метровым ограждением. Одна сторона находится напротив сарая, поэтому ограждение требуется только с трех сторон. Какие размеры максимально увеличивают площадь?

форме:
 $A = -2w^2 + 120w$



Требуется найти максимум, вычислив координату x вершины:

$$x = -b / (2a)$$

$$x = -120 / (2 \cdot (-2))$$

$$x = 30 \text{ метров}$$

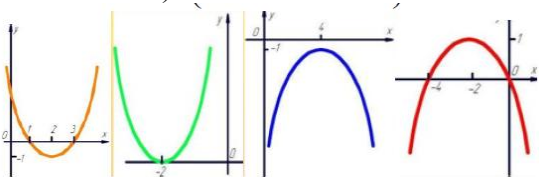
Это ширина для максимальной площади.

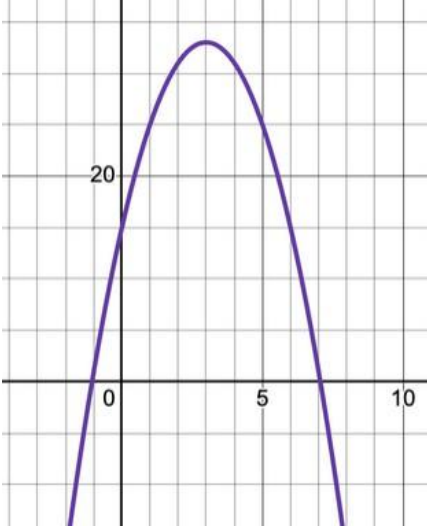
Рассчитаем длину:

$$L = 120 - 2(30) = 60$$

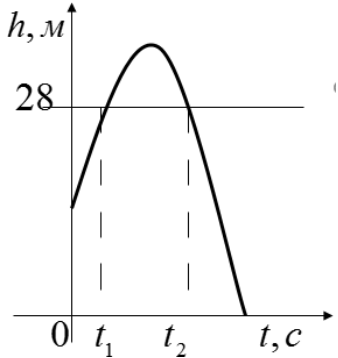
Максимальная площадь равна

$$30 \cdot 60 = 1800 \text{ м}^2.$$

		<p>В ходе коллективного обсуждения приходят к выводу, что необходимо найти прямоугольник, у которого площадь будет наибольшая.</p> <p>Формулируют тему «Применение свойств квадратичной функции при решении задач» и цель «Учиться применять знания по изучаемой теме при решении практических задач».</p> <p>Записывают тему урока.</p>	
2. Организационно-деятельностный блок			
2.1 Этап актуализации опорных знаний	<p>Даны четыре графика квадратичной функции. Для каждого графика определить промежутки возрастания (убывания) функции, наибольшее (наименьшее) значение.</p> 	<p>Самостоятельно выполняют задание № 1 в листе самоконтроля.</p> <p>К доске вызывается ученик, который демонстрирует решение. Остальные проверяют решение и оценивают свою работу.</p>	<p>Л: оценивание усвоенного раннее материала.</p> <p>Р: формирование умений планировать своё действие в соответствии с поставленной задачей.</p> <p>П: активизация опорных знаний и умений</p>
2.2 Этап применения знаний в нестандартной ситуации.	<p>Компания считает, что выручка $R(x)$ в тысячах долларов определяется как $R(x) = -x^2 + 12x + 15$, где x - цена за единицу продукции. Найдите цену, которая максимизирует доход.</p> <p>Как найти периметр прямоугольника?</p> <p>С помощью чего будет решаться задача?</p> <p>Что обозначим за x?</p> <p>Какие значения может принимать x?</p> <p>Как выразить площадь прямоугольника?</p>	<p>Предлагают вычислить координату x вершины: $x = -b/(2a) = -12/(2(-2)) = 3$.</p> <p>$R(3) = -2(3)^2 + 12(3) + 15 = 39$.</p> <p>Максимальный доход составляет 39 000 долларов при цене 3 доллара за единицу. Таким образом, компания получает максимальную прибыль в размере 39 000 долларов при цене в 3 доллара за единицу.</p>	<p>П: умения логически рассуждать, делать умозаключение, формирование интереса к теме.</p> <p>Л: готовность к самообразованию, осознание личной ответственности за результат; умение переносить предметные знания на другие сферы деятельности человека.</p>

	<p>Получилась квадратичная функция. Нам надо найти её наибольшее значение. Вспомните свойства квадратичной функции.</p> <p>Вычислите координаты вершины параболы.</p> <p>Вычислите стороны прямоугольника.</p> <p>Сделайте вывод: какой прямоугольник должен обойти Пахом, чтобы получить больше земли, и чему равна его сторона?</p> <p>Предлагает составить алгоритм решения подобных задач.</p>	 <p>Учащиеся вспоминают, что если ветви параболы направлены вниз, то в вершине параболы функция принимает наибольшее значение. Отвечают на вопрос учителя и делают вывод: Вступают в диалог с учителем. Предлагают варианты последовательности действий. Составляют алгоритм решения подобных задач.</p>	<p>К: умение слушать и вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении, давать полный ответ, доказывать свою точку зрения.</p> <p>Р: планирование своей деятельности для решения поставленной задачи.</p>
2.3 Этап первичного усвоения новых знаний	<p>Учитель предлагает обучающимся по составленному алгоритму действий решить следующую задачу: Мяч подбрасывается вверх с начальной скоростью 20 м/с с высоты 5 м. Высота $h(t)$ мяча через t секунд определяется с помощью уравнения: $h(t) = -4,9t^2 + 20t + 5$.</p>	<p>Устанавливаем высоту, равную нулю: $h(t) = 0$, в результате чего получится: $-4,9t^2 + 20t + 5 = 0$. Используем формулу: $t_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) / 2a$ при $a = -4,9$, $b = 20$, $c = 5$. Вычисляем дискриминант:</p>	<p>Р: осознание того, что усвоено, а что подлежит усвоению; структурирование собственных знаний.</p> <p>П: умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом;</p> <p>К.: умение сотрудничать в</p>

	<p>Найти время, когда мяч коснется земли. Управляет познавательной деятельностью обучающихся, оказывает дозированную помощь.</p> <p>Организует обсуждение итогов работы, уточняет и дополняет ответы обучающихся.</p>	<p>$D = 20^2 - 4(-4,9) \cdot 5 = 498$.</p> <p>Подставляем в квадратичную формулу: $t = (-20 \pm \sqrt{498}) / (-9,8)$ $\sqrt{498} \approx 22,32$</p> <p>Находим корни: $t_1 = (-20 + 22,32) / (-9,8) \approx -0,24$ (не подходит). $t_2 = (-20 - 22,32) / (-9,8) \approx 4,32$.</p> <p>Вывод: Мяч ударяется о землю примерно через 4,32 секунды.</p> <p>Обучающиеся работают парами. Выполняют решение в листе самоконтроля.</p> <p>Учащиеся, первыми решившие задачу правильно, выходят к доске и записывают правильный ответ.</p> <p>Остальные учащиеся проверяют решение и оценивают свою работу.</p>	<p>парах, принимать на себя роль консультантов и экспертов, выслушивать мнение напарника.</p> <p>Л: умение работать в паре, аргументация своего мнения.</p>
Физкультминутка (для глаз)			
2.4 Этап самостоятельной работы с самопроверкой по эталону.	<p>Учитель предлагает обучающимся решить следующую задачу:</p> <p>Брандспойт, закреплённый под определённым углом на пожарной машине, выстреливает струю воды с постоянной начальной скоростью. Высота струи воды описывается формулой $y = ax^2 + bx + c$, где $a = 1/270$, $b = 2/3$, $c = 7/3$. На каком максимальном расстоянии в метрах от забора нужно поставить машину, чтобы вода перелетала через верх? Высота забора равна 19 м.</p> <p>Управляет познавательной деятельностью</p>	<p>Решают задачу самостоятельно в листах самоконтроля.</p> <p>Выполняют взаимопроверку по слайду презентации, оценивают свою работу.</p> <p>$-1 / 270x^2 + 2/3x + 7/3 = 0$, $-x^2 + 180x + 630 \geq 5130$, $x^2 - 180x + 4500 \leq 0$, $(x - 30)(x - 150) \leq 0$,</p> <div style="text-align: center;"> $\begin{array}{ccccccc} & + & & - & & + & \\ & & & & & & \\ \hline & 30 & & & & 150 & x \end{array}$ </div> <p>$30 \leq x \leq 150$.</p>	<p>Р: сличать способ и результат своих действий с заданным эталоном, обнаруживать отклонения и отличия от эталона.</p> <p>Л: находчивость, активность при решении задач; умение оценивать свои достижения</p> <p>П: умение применять полученные знания для решения задач</p>

	обучающихся, оказывает дозированную помощь.	Наибольшее расстояние равно 150 метров.	
3. Рефлексивно-оценочный блок			
3.1 Рефлексия учебной деятельности	Предлагает учащимся вспомнить, какую цель ставили в начале урока. Спрашивает, достигли ли ее. Согласны ли с эпиграфом. Организует рефлессию. Предлагает из облака слов выбрать наиболее значимые слова для каждого ученика и записать с их помощью свое отношение к работе на уроке.	Сравнивают полученную информацию с той, что была у них в начале урока, выясняют на какие вопросы найдены ответы, а на какие еще нет. Составляют свое маленькое резюме о своей работе на уроке. Оценивают свою работу на уроке в листах самоконтроля и сдают его учителю.	Л: умение оценивать свои достижения, выявлять причины неудачи. К: умение адекватно оценивать результат, сотрудничать со сверстниками и учителем. П: умение сопоставлять цель и результат
4. Объяснение домашнего материала			
4.1 Домашнее задание	Предлагает записать домашнее задание: Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 39t$, где h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска. Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 28 м. Благодарит за работу.	 <p>Формулируют уточняющие вопросы учителю, записывают в дневники домашнее задание.</p>	Саморегулирование

2.3 Методические указания по решению заданий, содержащих функции, в ОГЭ по математике

Задания ОГЭ по математике, связанные с квадратичной функцией, чаще включают задания следующих типов.

Пример 1. Найдите значение a по графику функции $y = ax^2 + bx + c$, изображенному на рисунке.

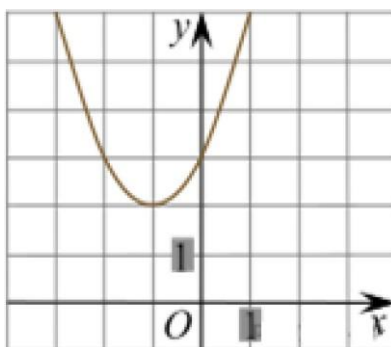


Рисунок 15 – Иллюстрация к примеру 1

Решение:

Очевидно, что абсцисса вершины $-b/2a = -1$, ордината $a - b + c = 2$. При этом $c = y(0) = 3$.

Решая уравнения как систему, получим:

$$\begin{cases} b = 2a \\ a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow a - 2a = -1 \Rightarrow a = 1.$$

Ответ: $a = 1$.

Пример 2. Найдите значение b по графику функции $y = ax^2 + bx + c$, изображенному на рисунке 15.

Решение:

Зная a из примера 1, получим $b = 2a = 2$.

Ответ: $b = 2$.

Пример 3. Найдите значение c по графику функции $y = ax^2 + bx + c$, изображенному на рисунке 15.

Решение:

Очевидно, что $c = y(0) = 3$.

Ответ: $c = 3$.

Пример 4. На рисунке изображен график квадратичной функции $y = f(x)$.

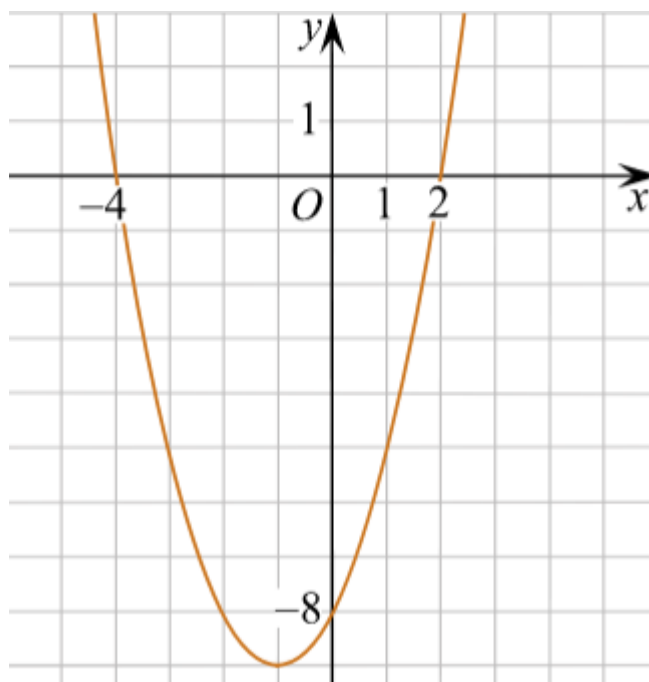


Рисунок 16 – Иллюстрация к примеру 4

Какие из следующих утверждений о данной функции неверны? Запишите их номера.

- 1) $f(-2) = f(2)$
- 2) $f(x) > 0$ при $x < -4$ и при $x > 2$
- 3) Наименьшее значение функции равно -9 .

Решение:

Проверим каждое утверждение.

- 1) Значение функции в точке -2 меньше значения функции в точке 2 .

Первое утверждение неверно.

- 2) $f(x) > 0$ при $x < -4$ и при $x > 2$. Второе утверждение верно.

- 3) Наименьшее значение функции равно -9 . Третье утверждение верно.

Ответ: 2, 3.

Для подготовки к ОГЭ нами разработаны задания следующего типа.

Задание 1. Какое из следующих значений является правильным для

вершины параболы $f(x) = 2x^2 + 8x - 12$?

- A Существует локальный минимум на уровне $(-2, -20)$.
- B Существует локальный максимум в $(-2, -20)$.
- C Существует локальный минимум в $(2, 12)$.
- D Существует локальный максимум в точке $(2, 12)$.

Решение:

$f(x) = 2x^2 + 8x - 12$, где $a = 2$, $b = 8$ и $c = -12$.

Следовательно, $h = -b/2a = -8/4 = -2$ и $k = f(-2) = 2 \times (-2)^2 + 8 \times (-2) - 12 = 8 - 16 - 12 = -20$. Следовательно, вершина находится в точке $(h, k) = (-2, -20)$. Кроме того, поскольку $a > 0$, мы знаем, что парабола имеет U-образную форму, поэтому локальный минимум находится в точке $(-2, -20)$.

Ответ: B.

Задание 2. Ниже приведена часть графика функции $f(x) = x^2 - 2x - 8$. Каково уравнение ее оси симметрии?

- A $y = -9$
- B $x = 1$
- C $y = 1$
- D $x = 2$

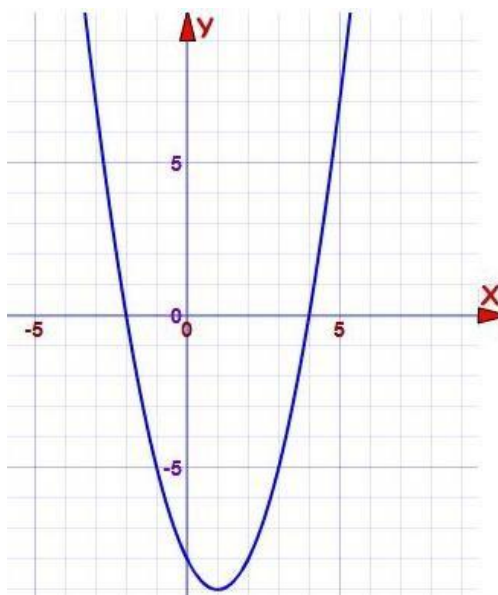


Рисунок 17 – Иллюстрация к заданию 2

Решение:

Кривая пересекает ось X в точках $(-2, 0)$ и $(4, 0)$. Поскольку кривая симметрична, ось симметрии находится посередине между -2 и 4 $\frac{1}{2}(-2 + 4) = 1$
 $\Rightarrow$ Осью симметрии является прямая $x = 1$.

Ответ: В.

Задание 3. Ниже приведена часть графика функции $f(x) = x^2 + 2x - 15$. Каково уравнение ее оси симметрии?

A $y = -16$

B $x = -2$

C $x = -1$

D $y = -1$

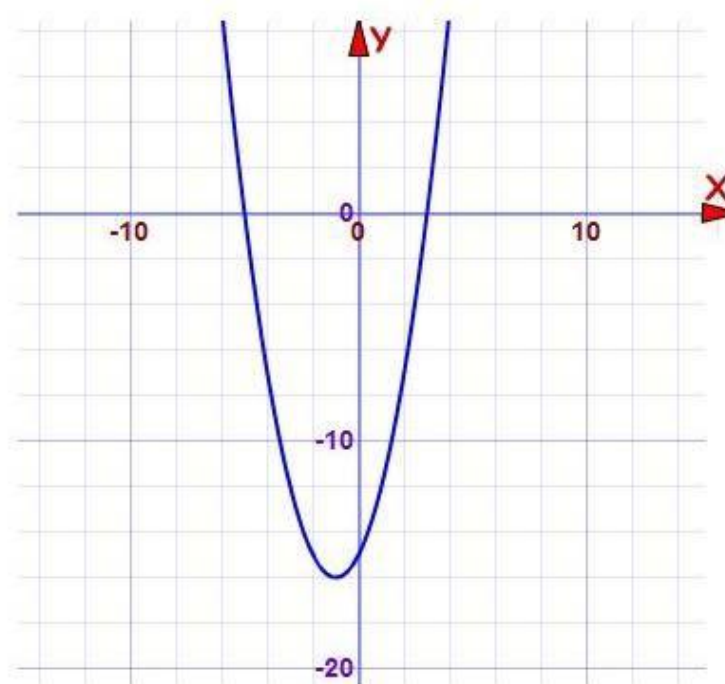


Рисунок 18 – Иллюстрация к заданию 3

Решение:

Кривая пересекает ось X в точках $(-5, 0)$ и $(3, 0)$. Поскольку кривая симметрична, ось симметрии находится посередине между -5 и 3 $\frac{1}{2}(-5 + 3) = -1$.

$\Rightarrow$ Осью симметрии является прямая $x = -1$.

Ответ: С.

Задание 4. Ниже приведена часть графика функции $f(x) = x^2 - 8x + 12$.
Каково уравнение её оси симметрии?

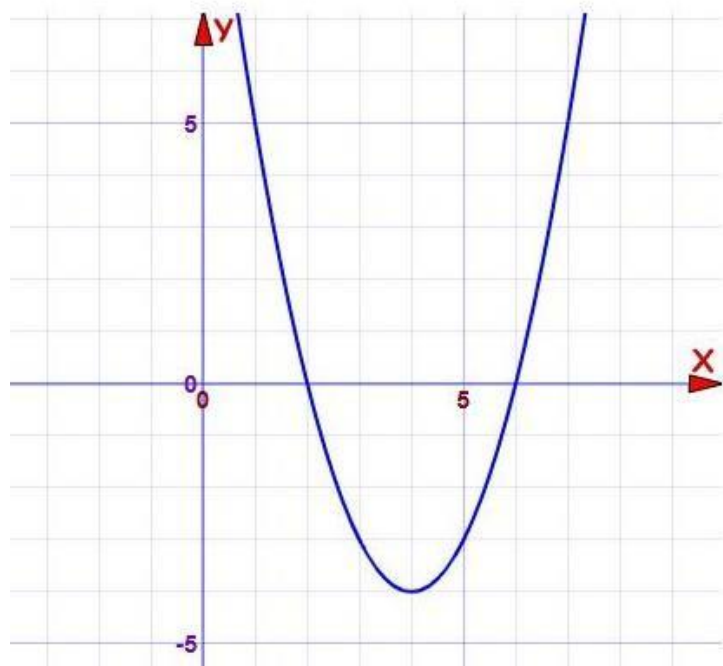


Рисунок 19 – Иллюстрация к заданию 4

- A $y = -4$
- B $y = 4$
- C $x = 3$
- D $x = 4$

Решение:

Кривая пересекает ось X в точках $(2, 0)$ и $(6, 0)$. Поскольку кривая симметрична, ось симметрии находится посередине между 2 и 6 $\frac{1}{2}(2 + 6) = 4$.
 $\Rightarrow$ Осью симметрии является прямая $x = 4$.

Ответ: D.

Задание 5. Ниже приведена часть графика функции $f(x) = -x^2 - 8x - 7$.
Каково уравнение её оси симметрии?

- A $y = -4$
- B $x = -4$
- C $x = -3$
- D $y = 9$

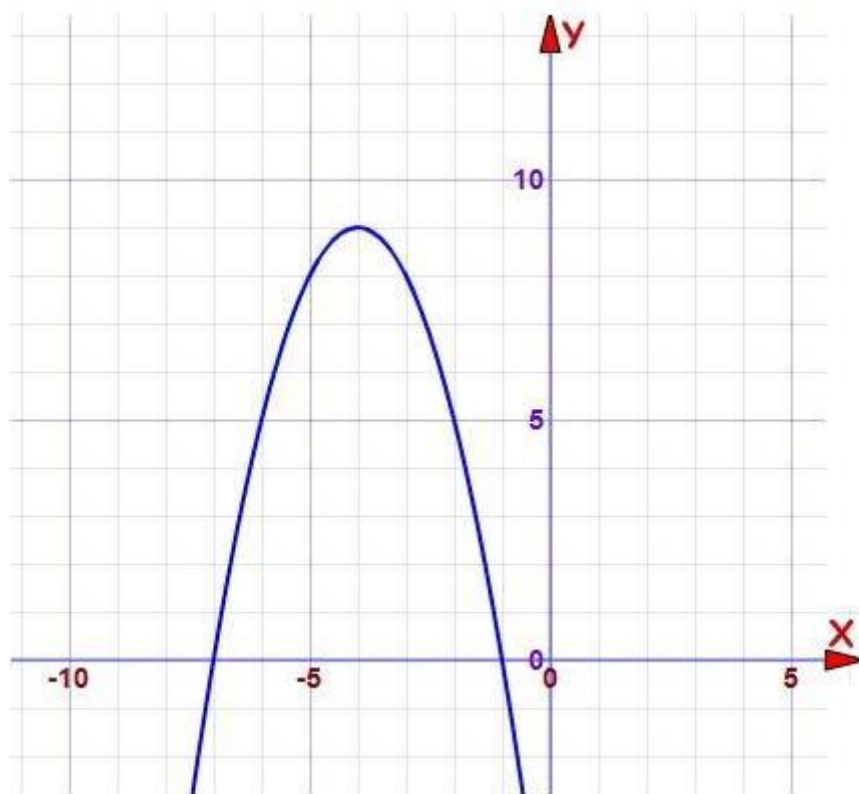


Рисунок 20 – Иллюстрация к заданию 5

Решение:

Кривая пересекает ось X в точка x $(-7, 0)$ и $(-1, 0)$. Поскольку кривая симметрична, ось симметрии находится посередине между -7 и -1
 $\frac{1}{2}(-7 + -1) = -4. \Rightarrow$ Осью симметрии является прямая $x = -4$.

Ответ: В.

Задание 6. Минимальная точка параболы находится в точке $(3, -5)$, а координата точки пересечения y равна -2 . Каково уравнение параболы?

- A $f(x) = 2/3x^2 - 4x - 2$
- B $f(x) = 1/3x^2 - 2x - 2$
- C $f(x) = 1/6x^2 - x - 2$
- D $f(x) = 7/9x^2 - 14/3x + 2$

Решение:

Пусть парабола равна $f(x) = ax^2 + bx + c$, $h = 3$ и $k = -5$.

$$k = f(h) \Rightarrow -5 = f(3) = a \times 3^2 + b \times 3 + c \Rightarrow -5 = 9a + 3b + c.$$

Подставим $b = -6a$

(1)

Таким образом, $-5 = 9a - 18a + c \Rightarrow -9a + c = -5$ (2)

Мы также знаем координату Y точки пересечения $y = -2$.

$$f(0) = -2 \Rightarrow c = -2.$$

Подставляем $c = -2$ в (2). Таким образом, $9a - 2 = -5 \Rightarrow 9a = 3$.

Заменяем обратно на (1) $\Rightarrow b = -2$.

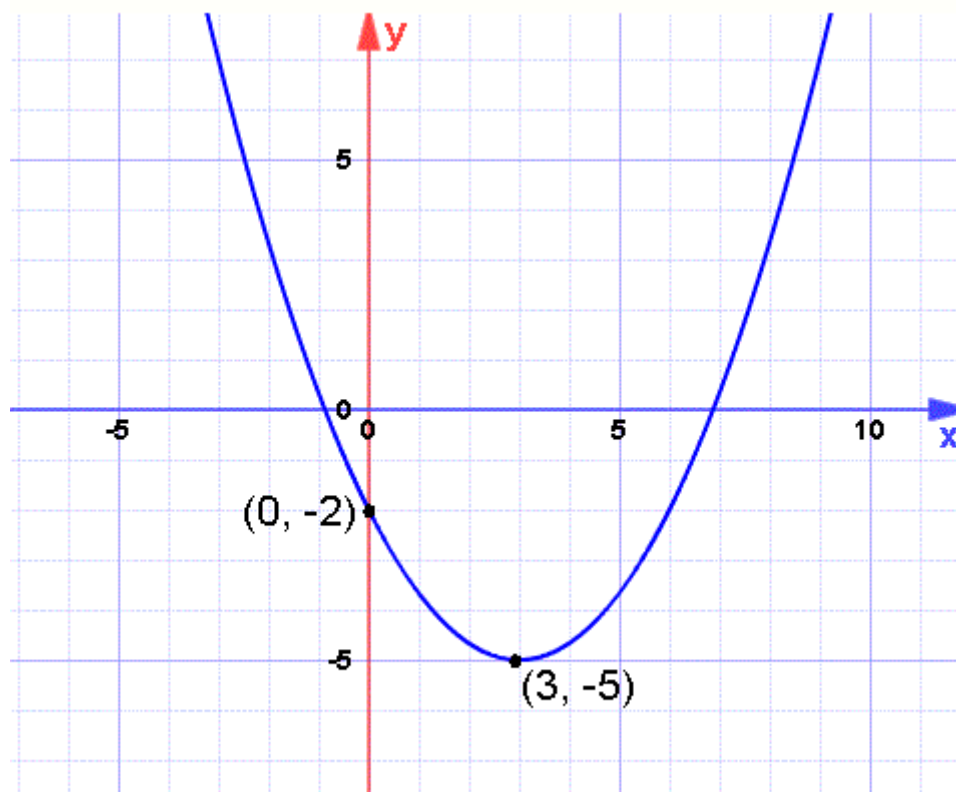


Рисунок 21 – Иллюстрация к заданию 6

Ответ: В.

Задание 7. Парабола, показанная ниже, имеет минимальную точку в точке $(0,5; -16)$. Каково ее уравнение?

- A $f(x) = -4x^2 - 4x - 15$
- B $f(x) = -4x^2 + 4x - 15$
- C $f(x) = 4x^2 - 4x - 15$
- D $f(x) = 4x^2 + 4x - 15$

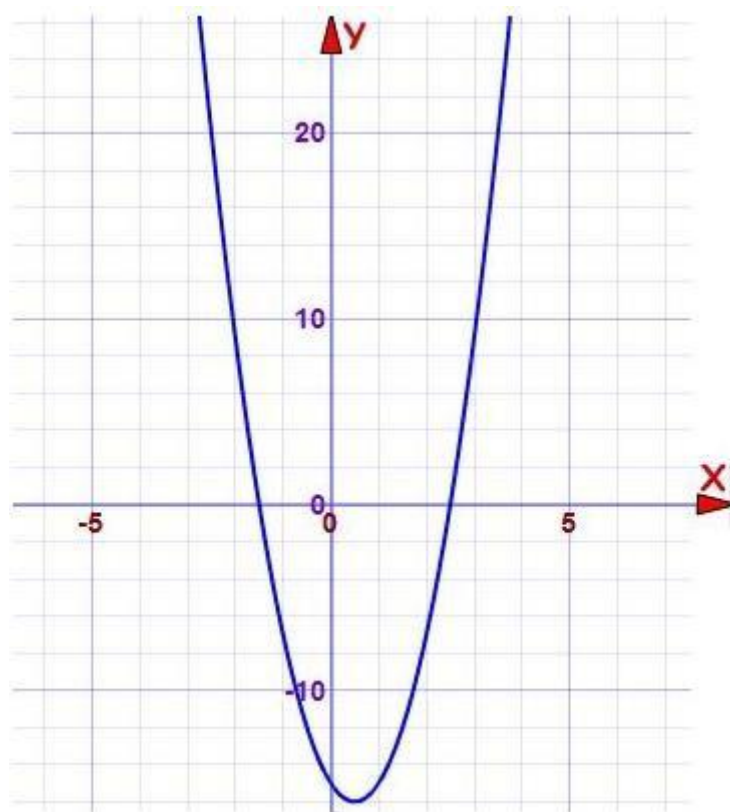


Рисунок 22 – Иллюстрация к заданию 7

Решение:

Пусть парабола равна $f(x) = ax^2 + bx + c$

$h = 0,5$ и $k = -16$

$k = f(h) \Rightarrow -16 = f(0,5) = a \times (0,5)^2 + b \times (0,5) + c \Rightarrow -16 = 0,25a + 0,5b + c$

Следовательно, $-16 = 0,25a - 0,5a + c \Rightarrow -0,25a + c = -16$.

Координата y точки пересечения равна $-15 \Rightarrow f(0) = -15 \Rightarrow c = -15$.

Следовательно, $-0,25a - 15 = -16 \Rightarrow 0,25a = 1 \Rightarrow a = 4$.

Таким образом, $b = -4$.

Следовательно, уравнение параболы имеет вид $f(x) = 4x^2 - 4x - 15$.

Ответ: С.

Задание 8. Парабола, показанная ниже, имеет свою максимальную точку в точке $(-1, 49)$. Точка пересечения y равна $(0, 40)$. Каково ее уравнение?

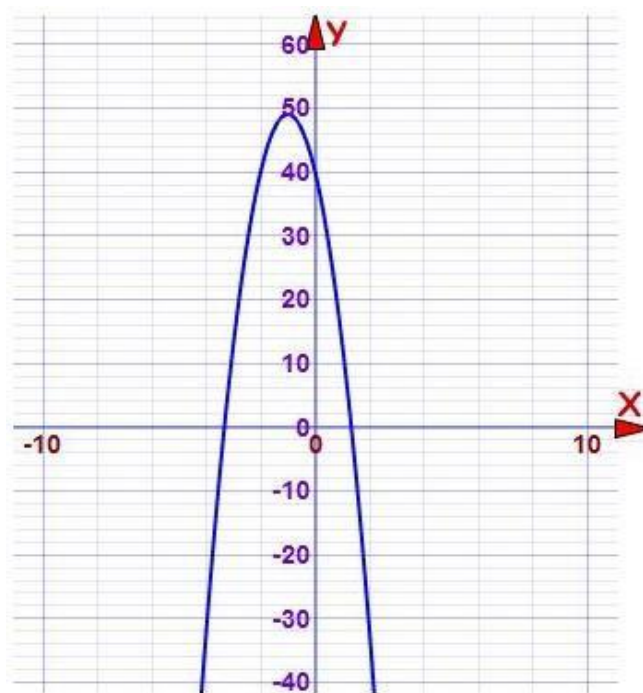


Рисунок 23 – Иллюстрация к заданию 8

A $f(x) = -9x^2 + 18x + 40$

B $f(x) = -9x^2 - 18x + 40$

C $f(x) = 9x^2 + 18x - 40$

D $f(x) = 9x^2 - 18x + 40$

Решение: Пусть парабола имеет вид $f(x) = ax^2 + bx + c$.

$h = -1$ и $k = 49$

$$k = f(h) \Rightarrow 49 = f(-1) = a \times (-1)^2 + b \times (-1) + c \Rightarrow 49 = a - b + c$$

$$49 = a - 2a + c \Rightarrow -a + c = 49.$$

Координата y точки пересечения равна $40 \Rightarrow f(0) = 40 \Rightarrow c = 40$.

Итак, $a + 40 = 49 \Rightarrow -a = 9 \Rightarrow a = -9$. Отсюда получаем $b = -18$

Итак, уравнение параболы имеет вид $f(x) = -9x^2 - 18x + 40$

Ответ: B.

Задание 9. Какова минимальная точка параболы, показанной выше?

A $(-0,7; -48,75)$

B $(-0,8; -49)$

C $(-0,9; -48,75)$

D $(-1; -48)$

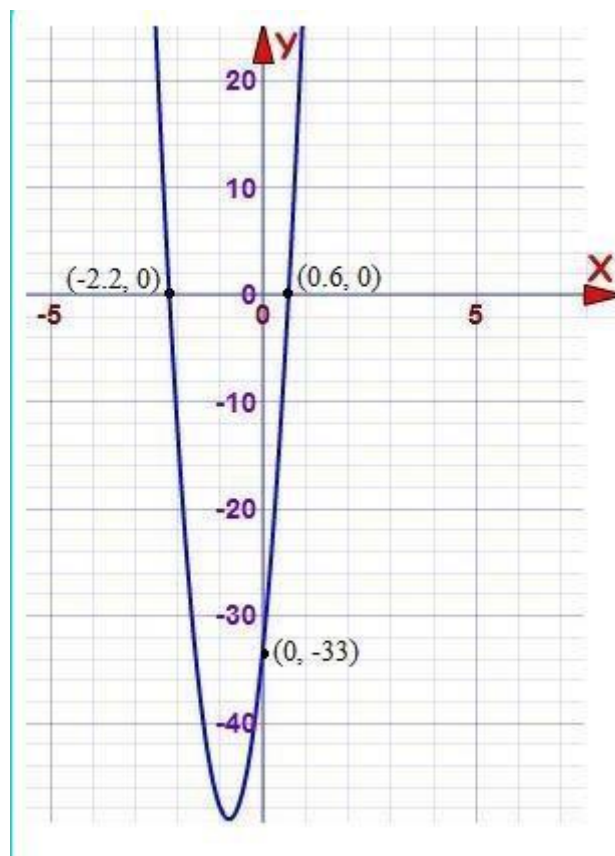


Рисунок 24 – Иллюстрация к заданию 9

Решение:

Парабола имеет нули при $x = -2,2$ и $x = 0,6$.

$$f(x) = a(x + 2,2)(x - 0,6) = a(x^2 + 1,6x - 1,32).$$

Мы также знаем, что координата точки пересечения у равна -33

$$\Rightarrow f(0) = -33 \Rightarrow -1,32a = -33 \Rightarrow a = -33 / -1,32 = 25.$$

$$f(x) = 25(x^2 + 1,6x - 1,32) = 25x^2 + 40x - 33.$$

$$a = 25, b = 40, c = -33 \text{ и } k = f(-0,8) = 25 \times (-0,8)^2 + 40 \times (-0,8) - 33 = 16 - 32 - 33 = -49. \text{ Минимальная точка равна } (-0,8; -49).$$

Ответ: В.

Задание 10. Какова максимальная точка показанной ниже параболы?

A (1,9; 48,84)

B (2; 48,84)

C (1,9; 49)

D (2; 49)

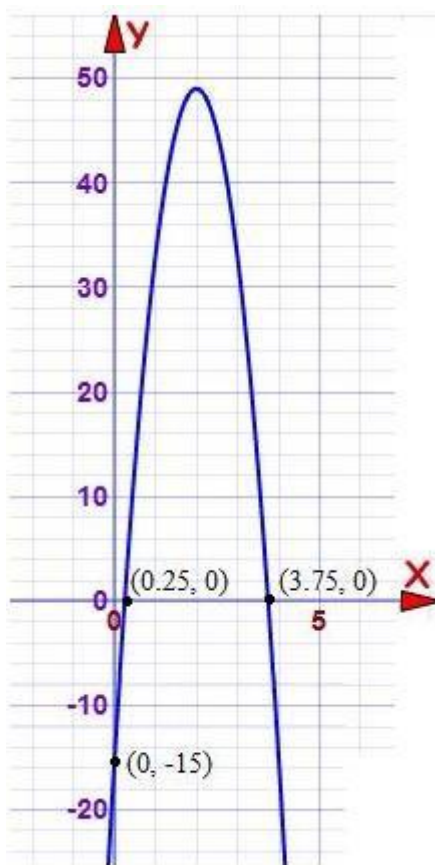


Рисунок 25 – Иллюстрация к заданию 10

Решение:

Парабола имеет нули при $x = 0,25$ и $x = 3,75$

$$f(x) = a(x - 0,25)(x - 3,75) = a(x^2 - 4x + 0,9375)$$

Мы также знаем, что координата y точки пересечения равна -15

$$\Rightarrow f(0) = -15 \Rightarrow 0,9375a = -15 \Rightarrow a = -15/0,9375 = -16.$$

$$f(x) = -16(x^2 - 4x + 0,9375) = -16x^2 + 64x - 15$$

$$a = -16, b = 64 \text{ и } c = -15$$

$$k = f(2) = -16 \times 2^2 + 64 \times 2 - 15 = -64 + 128 - 15 = 49.$$

Максимальное значение равно $(2, 49)$.

Ответ: D.

Таким образом, решение указанных упражнений максимально ориентирует учащихся к правильному выполнению заданий ОГЭ, связанных с квадратичной функцией.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Квадратичная функция является одной из ключевых тем в школьной математике. Квадратичные функции моделируют множество реальных процессов, таких как движение тел, экономика (например, прибыль и убытки), физика (траектория движения) и многие другие. Изучение этих функций помогает учащимся видеть связь между математикой и повседневной жизнью.

Работа с квадратичными уравнениями и графиками развивает критическое мышление и аналитические способности. Знания о квадратичных функциях необходимы для успешного изучения высшей математики, физики и других естественнонаучных дисциплин. Это создает прочный фундамент для будущих студентов, которые планируют продолжать обучение в технических или естественнонаучных областях.

При работе над темой «Особенности изучения квадратичной функции в школьном курсе математики» нами были последовательно поставлены и решены следующие задачи.

- 1) проведен анализ темы «Квадратичная функция» и её особенности.
- 2) представлен анализ содержания теоретического материала учебников 7-9 классов по теме «Квадратичная функция».
- 3) выявлены ключевые особенности методики изучения квадратичной функции.
- 4) представлен конспект урока по теме «Применение свойств квадратичной функции к решению задач» по учебнику Дорофеевой Г.В., Суворовой С.Б., Бунимович Е.А. и др. в 9 классе.
- 5) разработаны методические указания по решению заданий, содержащих квадратичные функции, в ОГЭ по математике.

Методические указания содержат разработанный комплекс заданий, ориентированных на определение взаимосвязи коэффициентов, точек пересечения с осями, общего описания уравнения параболы.

Исследование особенностей изучения квадратичной функции может привести к улучшению методик преподавания, разработке новых подходов и материалов, что сделает процесс обучения более эффективным и увлекательным для учащихся. Понимание того, как учащиеся воспринимают и осваивают квадратичные функции, может помочь педагогам адаптировать свои методы к различным стилям обучения и уровням подготовки, что способствует более глубокому пониманию материала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра. 8 класс : учебное пособие : базовый уровень : в трёх частях. Ч. 2. / Л. Г. Петерсон [и др.] ; 3-е изд., стер. М. : Просвещение, 2023. 163 с.
2. Алгебра. 9 класс : учебник для общеобразовательных организаций / Г. В. Дорофеев [и др.] ; 7-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2019. 336 с.
3. Алгебра. 9 класс: учебное пособие для общеобразовательных организаций / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков; под ред. С. А. Теляковского. 4-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2023. 287 с.
4. Блох А. Я. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: учебное пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А. Я. Блох [и др.] ; сост. В. И. Мишин. М. : Просвещение, 2017. 416 с.
5. Виленкин Н. Я. Математический анализ. Учебное пособие для IX-X классов средних школ с математической специализацией : учебное пособие / Н. Я. Виленкин, С. И. Шварцбурд. М. : Просвещение, 1969. 341 с.
6. Жафяров А. Ж. Модели изучения темы «Квадратичная функция и ее приложения» на компетентностной основе // Сибирский педагогический журнал. 2014. № 3. С. 27-33.
7. Жохов В. И. Уроки алгебры в 8 классе : кн. для учителя / В. И. Жохов, Г. Д. Картошева. М. : Просвещение, 2021. 79 с.
8. Култаева Д. Ч. Использование дидактических материалов при обучении математике для развития математических способностей учащихся // Проблемы педагогики. 2016. № 2 (13). С. 36-40.
9. Лихачева М. В., Алексеенко А. С. О содержании математических дисциплин программ среднего и высшего образования // Сборник трудов международной конференции. МТИ, 2016. С. 171-172.
10. Лященко Е. И. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики : учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е. И. Лященко [и др.]; под ред. Е. И. Лященко. 7-е изд., перераб. М. :

Просвещение, 2018. 223 с.

11. Магомедов И. М. Решение квадратных уравнений с параметрами - пропедевтика научно-исследовательской работы учащихся // Образование в современной школе. 2010. № 3. С. 33-52.

12. Мерзляк А. Г. Алгебра : учеб. для 9 кл. общеобразоват. учеб. заведений / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, М. С. Якир. 3-е изд., стер. М. : Просвещение, 2023. 272 с.

13. Мирошин В. В. Формирование содержательно-методической линии задач с параметрами в ходе изучения свойств квадратичной функции школе/ В. В. Мирошин // Математика в школе. 2010. № 7. С. 31-37.

14. Мордкович А. Г. О некоторых проблемах школьного математического образования / Актуальные проблемы качества математической подготовки школьников и студентов: методологический, теоретический и технологический аспекты : материалы I Всероссийской научно-практической конференции. Красноярск, 14–15 ноября 2013 г. / отв. ред. Л. В. Шкерица ; Краснояр. гос. пед. университет им. В. П. Астафьева. Красноярск, 2013. 144 с.

15. Петров Н. Н. Важнейшая функция школьной математики - квадратичная - в задачах и решениях : монография. М. : Изд-во Ленанд, 2017. 252 с.

16. Покровский В. П. Методика обучения математике : функциональная содержательно-методическая линия. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2014. 143с.

17. Приложение к приказу Министерства просвещения Российской Федерации от 21 сентября 2022 года № 858 «Об утверждении федерального перечня учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ начального общего, основного общего, среднего общего образования организациями, осуществляющими образовательную деятельность и установления предельного срока использования исключенных учебников». URL:

<https://docs.cntd.ru/document/352000942> Заглавие с экрана (дата обращения 09.03.2025).

18. Сангаджиева Н. Р. Непрерывность в методике изучения функций в основной школе // Актуальные проблемы современного образования. 2014. № 1(16). С. 187-193.

19. Сивухина Е. А. Требования к результатам изучения функционально-графической линии в школьном курсе математики. // Современная математика и математическое образование в контексте развития края : проблемы и перспективы : материалы II Всероссийской научно-практической конференции студентов, аспирантов и школьников. Краснояр. гос. пед. ун-т. им. В. П. Астафьева. Красноярск, 2017. 114 с.

20. Скафа Е. И. Методика обучения математике : эвристический подход. Общая методика : учебное пособие / Е. И. Скафа. Донецк : ДонГУ, 2020. 440 с.

21. Стефанова Н. Л. Методика и технология обучения математике. Курс лекций : пособие для вузов / Н. Л. Стефанова [и др.]. – М. : Дрофа, 2019. 276 с.

22. Суворова С. Б. Алгебра. Методические рекомендации 8 класс : учебное пособие для общеобразовательных организаций / С. Б. Суворова [и др.] ; М. : Просвещение, 2021. 244 с.

23. Токарева Л. И. Формирование у учащихся теоретических знаний при изучении темы «Квадратичная функция» в средней школе / Л. И. Токарева // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. 2018. № 20. С. 263-275. URL: <https://elibrarv.ru/item.asp?id=32827339> Заглавие с экрана (дата обращения 24.03.2025).

24. Уринбоева Л. У. Гуманитарные особенности естественно-математических дисциплин // Проблемы педагогики. 2016. № 4 (15). С. 34-35.

25. Федеральный перечень учебников Министерства просвещения РФ. Режим доступа. URL: <https://fpu.edu.ru/?name=&fio=&schoolClass=8&subjectAll=144&publisher=&fpuGroup=&educationLevel=&subjectArea=&subject=&language=&submit=>. Заглавие с

экрана (дата обращения 09.03.2024).

26. Чепрасов Д. Н. Применение цифровых образовательных ресурсов в рамках изучения темы «Квадратичная функция и ее свойства» // Материалы конференции: Информационные технологии в образовательном процессе ВУЗа и школы, Воронеж, 29 марта 2016 г. С. 132-135.

27. Чикунова О. А., Шевелева Н. И. Организация исследовательской деятельности учащихся при изучении свойств квадратичной функции // Научный альманах. 2016. № 1-2 (15). С. 337-340.

28. Шашкина М. Б., Табинова О. А. Диагностика готовности выпускников школ к продолжению математического образования // Стандарты и мониторинг в образовании. 2016. Т. 4. № 3. С. 8-13.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: заочная

Утверждаю: зав. кафедрой
«30» 10 20 24 г.
 Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Мельниковой Анастасии Юрьевны

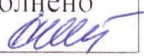
(ФИО полностью)

Тема работы «Особенности изучения квадратичной функции в школьном курсе математики»

Утверждена приказом по Университету от «25.12» 2024 г. № 1351/0

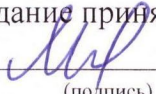
Срок сдачи студентом законченной работы «21» мая 2025 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Подбор и изучение литературы по теме ВКР.	Октябрь - ноябрь 2024г.	Выполнено 
2.	Изучение объекта исследования, постановка цели и задач работы. Написание введения.	Декабрь 2024г.	Выполнено 
3.	Анализ темы «Квадратичная функция» и ее особенностей. Анализ содержания теоретического материала учебников 8-9 классов по теме «Квадратичная функция» в школьном курсе. Написание первой главы ВКР.	Январь - февраль 2025г.	Выполнено 
4.	Исследование методических аспектов изучения функций в школе. Составление конспекта урока. Составление методических указаний для решения задач ОГЭ по математике по теме ВКР. Написание второй главы ВКР.	Март - апрель 2025г.	Выполнено 
5.	Оформление работы.	Май 2025г.	Выполнено 

Дата выдачи задания «28» 10 2024 г.

Руководитель  Никитина О.Г.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению
 Мельникова А.Ю.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студента (ки) 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения

Мелешиковой
Анастасии Юрьевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Мелешикова Анастасия Юрьевна,
Ф.И.О. студента

студент (ка) 5 курса заочной формы обучения направления подготовки
44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика»
прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ»
бакалаврской работы на тему « Особенности изучения
исчислительной функции в комплексной
теории математики. »,
выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а
также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ,
кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен (на) с действующим Стандартом университета
«Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным
программам высшего образования – программам бакалавриата, программам
специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение
плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из
университета.

Мф
ПОДПИСЬ
11.04.2025
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 11.04.2025
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР Мелет О.Г. Мелетина
ПОДПИСЬ И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Особенности изучения квадратичной функции в школьном курсе математики»

студентки 5 курса А.Ю. Мельниковой

И.О. Фамилия

направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

профиля «Математика»

Руководитель ВКР О.Г.Никитина

И.О. Фамилия



Отчет предоставлен сервисом
«Антиплагиат» - <http://pnsu.antiplagiat.ru>



Отчет о проверке

Автор: Никитина Ольга Геннадьевна

Название документа: ВКР Мельниковой Анастасии Юрьевны

Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
28,26%



Оригинальность:
71,74%



Цитирования:
0%



Самоцитирования:
0%



11.04.2025

ДД.ММ.ГГГГ.

[Signature]

подпись

О.Г. Никитина

И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Особенности изучения квадратичной функции в школьном курсе
математики»

студентки Мельниковой Анастасии Юрьевны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование,
профиль подготовки «Математика», гр. 203ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Мельниковой Анастасии Юрьевны посвящена особенностям изучения квадратичной функции в школьном курсе математики.

Квадратичная функция является одной из основных функций в математике. Её изучение закладывает основы для понимания более сложных тем. Умение работать с квадратичными уравнениями и функциями необходимо для дальнейшего обучения в старших классах.

Кроме того, квадратичные функции находят широкое применение в различных областях науки и техники, таких как физика (например, при описании движения тел), экономика (при анализе прибыли и убытков) и инженерия. Понимание их свойств помогает учащимся осознать связь между математикой и реальным миром.

Изучение квадратичных функций способствует развитию логического и критического мышления у учащихся. Решение задач, связанных с графиками, корнями и свойствами функций, требует анализа, синтеза и оценки информации, что является важным навыком в современном мире.

Целью работы является выявление и анализ особенностей изучения квадратичной функции в школьном курсе математики.

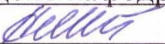
Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, заключения, списка литературы и приложения.

Основная часть состоит из двух глав. В первой главе работы рассматриваются теоретические основы изучения квадратичной функции в школьном курсе математики. Проводится анализ содержания теоретического материала учебников 8-9 классов по теме «Квадратичная функция».

Во второй главе рассматриваются методические аспекты изучения данной темы в школьном курсе, разработан конспект урока по теме «Применение свойств квадратичной функции к решению задач» с технологической картой урока, проведен анализ заданий ОГЭ, содержащих квадратичную функцию.

Работа Мельниковой А.Ю. является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован автором при работе в школе.

Выпускная квалификационная работа Мельниковой Анастасии Юрьевны заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель ВКР доцент кафедры «Математическое образование»,
к.ф.-м.н.  Никитина Ольга Геннадьевна