

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Различные способы доказательства неравенств»

Студент

Дев 04.05.23
(подпись, дата)

Девликамова Юлия Кямилъевна
(ФИО полностью)

Руководитель

Мон, 04.05.23
(подпись, дата)

Монахова О. А
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

15.06.23
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 24.05.2023 № 12)

Заведующий кафедрой

Пан 24.05.23
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 23.06.23 № 11)

Секретарь ГЭК

Жу 23.06.23
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2023

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Теоретические основы подготовки обучающихся к доказательству неравенств в курсе алгебры основной школы.....	5
1.1. Методы доказательства неравенств	5
1.2. Анализ учебников алгебры 8-9 классов.....	16
1.3 Анализ перечня олимпиад утвержденных Министерством просвещения и Министерством науки и высшего образования Российской Федерации.....	18
Глава 2. Методические основы подготовки обучающихся к доказательству неравенств в курсе алгебры основной школы.....	24
2.1 Программа факультативного курса для 8-9 классов «Доказательство неравенств».....	24
Заключение	66

Введение

В современной системе образования происходят существенные изменения, влияющие не только на организацию процесса обучения, но на педагогическую теорию и учебно-воспитательный процесс. Новые процессуальные умения, способности оперировать новой информацией, творческое решение педагогических проблем обогащает содержание образования.

ФГОС нового поколения направлено на стимуляцию учащихся к познавательной деятельности, на воспитание математической культуры, математической грамотности, интереса к предмету, самостоятельности и самодисциплины. Многочисленные научно-практические конференции, олимпиады, проектная деятельность способствуют разностороннему развитию личности.

Изучение математики как учебного предмета благоприятствует развитию общей культуры человека. Многие разделы школьного курса математики часто встречаются на олимпиадах различных уровней. «Доказательство неравенств» является одним из таких разделов. Это одна из сложных, но интересных тем школьного курса математики, хотя ей отводится минимум часов, что не соответствует объему необходимого для усвоения материала.

«Доказательство неравенств» изучается только в ознакомительном порядке, обучающиеся не успевают разбираться в материале, соответственно допускают множество ошибок, не говоря уже о решении олимпиадных заданий. Поэтому целесообразно организовывать дополнительные занятия для усвоения данной темы, направленные на подготовку к олимпиадам. [16]

Цель работы: разработка программы факультатива «Доказательство неравенств» для обучающихся 8-9 классов.

Задачи:

1. Обобщить информацию о доказательстве неравенств.

2. Проанализировать школьные учебники, примерные рабочие программы.

3. Подобрать и проанализировать учебную и методическую литературу о разработке школьных факультативов, об организации и проведении математических олимпиад.

4. Разработать программу факультатива «Доказательство неравенств» и технологический карты, подобрать задачный материал.

Практическая значимость состоит в том, что в рамках данной темы рассмотрены основные методы доказательства неравенств, необходимые для решения олимпиадных заданий, а также даны методические рекомендации по организации факультатива по теме «Доказательство неравенств».

При написании работы была проанализирована учебно-методическая литература, систематизированы методы доказательства неравенств, проведено обобщение информации.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Во введении формулируется актуальность, цель, структура работы. В первой главе приведены методы доказательства неравенств, анализ школьных учебников, примерных рабочих программ. Во второй главе разработана программа факультатива для обучающихся 8-9 классов. В заключении подводятся итоги проделанной работы.

Глава 1. Теоретические основы подготовки обучающихся к доказательству неравенств в курсе алгебры основной школы

1.1. Методы доказательства неравенств

Доказательство неравенств очень сложная и интересная тема. Одно неравенство может быть доказано разными способами, поэтому школьникам необходимо использовать творческое и критическое мышление, для нахождения способа доказательства неравенства. Обучающимся данная тема дается непросто. Понимание связей между условием и заключением, осмысление самого процесса доказательства, нехватка времени в учебном процессе являются основными причинами затруднений.

Можно выделить следующие методы доказательства неравенств:

1. Метод оценки знака разности (по определению).
2. Классические неравенства (неравенство о средних для двух переменных, неравенство Йенсена, неравенство Коши-Буняковского-Шварца)
3. Метод Штурма
4. Метод математической индукции.
5. Метод выделения квадратов.
6. Синтетический метод.
7. Метод от противного.
8. Метод оценивания.

Рассмотрим каждый метод по отдельности.

1. Метод оценки знака разности (по определению)

«Число a больше числа b , если разность $a - b$ – положительное число; число a меньше числа b , если разность $a - b$ – отрицательное число» [1].

Суть этого метода заключается в том, чтобы установить справедливость неравенства $f(a, b, c) > g(a, b, c)$ составляют разность $f(a, b, c) - g(a, b, c)$ и доказывают, что она положительна. Например:

1. (Алгебра 8 класс Ю. Н. Макарычев и др). Докажите неравенство

$$2b^2 - 6b + 1 > 2b(b - 3)$$

Решение. Пользуясь определением, найдем разность правой и левой частей

$$2b^2 - 6b + 1 - 2b(b - 3) = 2b^2 - 6b + 1 - 2b^2 + 6b = 1 > 0$$

При любом b данная разность положительна, значит равенство верно.

2. (Алгебра 8 класс Ю. Н. Макарычев). Доказать, что при $a > 0$ верно неравенство

$$\frac{c^2 + 1}{2} \geq c.$$

Решение. Найдем разность левой и правой частей

$$\frac{c^2 + 1}{2} - c = \frac{c^2 - 2c + 1}{2} = \frac{(c - 1)^2}{2}$$

Так как $(c - 1)^2 \geq 0$, то

$$\frac{(c-1)^2}{2} \geq 0 ;$$

$$\frac{c^2+1}{2} - c \geq 0;$$

$$\frac{c^2+1}{2} \geq c .$$

Что и требовалось доказать.

3. (Частный случай неравенства Коши). Доказать, что при неотрицательных a и b неравенство верно

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Решение. Составим разность левой и правой части

$$\frac{a + b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{(a + b) - 2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2}$$

Так как $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, то $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$, то есть неравенство верно.

Неравенство из 3 примера называется неравенством Коши для чисел a и b .

2. Классические неравенства

Неравенство о средних для двух переменных.

Для любых положительных чисел a и b справедливы неравенства:

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}.$$
 Каждое из этих неравенств превращается в

равенство, только когда числа a и b равны. Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим называется неравенством Коши. [23]

Неравенство Коши.

Неравенство Коши-это соотношение двух средних величин- среднего арифметического и среднего геометрического. Среднее арифметическое изучается в 5 классе и выглядит таким образом $\frac{a+b}{2}, \frac{a+b+c}{3}, \dots$ Среднее геометрическое появляется в 8 классе $-\sqrt{ab}$. Данное соотношение исследовал О. Коши и пришел к выводу: среднее арифметическое 2 неотрицательных чисел всегда не меньше среднего геометрического этих же чисел $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. [29]

Доказательство для двух неотрицательных чисел приведено в пункте 1 пример 3.

Следствия из Неравенства Коши:

1. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$
2. $a^2 + b^2 \geq 2ab$
3. $ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$
4. $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

Применение неравенства Коши для доказательства неравенств.

1. (Практикум по элементарной математике. Алгебра.

Тригонометрия. В. И. Литвиненко, А. Г. Мордкович). Докажите, что для любых неотрицательных a, b, c справедливо неравенство

$$(a + b)^2(a + c)^2(b + c)^2 \geq 64a^2b^2c^2.$$

Решение. Воспользуемся неравенством Коши

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}; a + b \geq 2\sqrt{ab};$$

$$\frac{a+c}{2} \geq \sqrt{ac}; a + c \geq 2\sqrt{ac};$$

$$\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}; b + c \geq 2\sqrt{bc}.$$

Так как $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$

$$(a + b)^2 \geq 4ab;$$

$$(a + c)^2 \geq 4ac;$$

$$(b + c)^2 \geq 4bc.$$

Перемножим почленно полученные неравенства, так как их левая и правая часть неотрицательны

$$(a + b)^2(a + c)^2(b + c)^2 \geq 4ab \cdot 4ac \cdot 4bc;$$

$$(a + b)^2(a + c)^2(b + c)^2 \geq 64abc.$$

2. (Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. В. И. Литвиненко, А. Г. Мордкович). Докажите неравенство при $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{d}\right) \geq \frac{9a}{d}.$$

Применим неравенство Коши к доказательству этого неравенства

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d}\right) \geq 3\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d}}; \left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d}\right) \geq 3\sqrt{\frac{a}{d}};$$

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{d}\right) \geq 3\sqrt{\frac{a}{c} \cdot \frac{c}{b} \cdot \frac{b}{d}}; \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{d}\right) \geq 3\sqrt{\frac{a}{d}}$$

Перемножим почленно

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d}\right)\left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{d}\right) \geq 3\sqrt{\frac{a}{d}} 3\sqrt{\frac{a}{d}};$$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d}\right) \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{b} + \frac{b}{d}\right) \geq 9 \frac{a}{d}.$$

Далее обобщив это неравенство, О. Коши доказал, что среднее геометрическое n неотрицательных чисел не больше среднего арифметического этих чисел

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

Доказательство приведено при рассмотрении Метода математической индукции.

Неравенство Йенсена

Особое место среди классических неравенств занимает неравенство Йенсена. неравенство Коши, Коши-Буняковского, Гельдера, Минковского являются его следствиями.

Для рассмотрения неравенства и его доказательства нам необходимо понятие «центра масс», с которым обучающиеся в школьном курсе математики не знакомятся в полной мере.

Центром масс двух точек A и B называется такая точка C на отрезке AB , что $\frac{AC}{BC} = \frac{m_B}{m_A}$, где m_B, m_A -массы точек A и B соответственно.

Координаты точки C можем выразить через A и B .

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ -неотрицательные вещественные числа, причем $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$. Тогда для любой выпуклой вниз функции $f: (a, b) \rightarrow R$ и для любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b)$ имеет место неравенство:

$$a_1 f(x_1) + a_2 f(x_2) + \dots + a_n f(x_n) \geq f(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) \quad (1)$$

Докажем. Рассмотрим на графике функции $y = f(x)$ точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ с абсциссами $x_1, x_2, \dots, x_n$. Расположим в этих точках грузы массами $m_1, m_2, \dots, m_n$. Центр массы этих точек имеет координаты

$$\left(\frac{m_1 x_1 + \dots + m_n x_n}{m_1 + \dots + m_n}, \frac{m_1 f(x_1) + \dots + m_n f(x_n)}{m_1 + \dots + m_n} \right).$$

Центр масс точек принадлежит надграфику выпуклой функции, значит ордината центра масс не меньше ординаты точки на графике с той же абсциссой, то есть $f\left(\frac{m_1x_1+\dots+m_nx_n}{m_1+\dots+m_n}\right) \leq \frac{m_1f(x_1)+\dots+m_nf(x_n)}{m_1+\dots+m_n}$. (2)

Положим $m_1 = a_1, \dots, m_n = a_n$. и получим нужное нам неравенство (1)

Неравенства (1), (2) равносильны и называются неравенствами Йенсена. Удобнее пользоваться более неравенством (2), хотя (1) выглядит более компактно.

И если функция вогнутая, то все знаки неравенств (1) и (2) меняются на противоположные [29].

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

Для любых вещественных $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$ выполнено неравенство

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$$

Для доказательства достаточно рассмотреть квадратный трехчлен относительно x $(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2$. Он всегда неотрицателен, а значит его дискриминант неположителен, что и будет являться неравенством Коши-Буняковского-Шварца. Также можно доказать с помощью неравенства Йенсена. Как мы знаем функция $y = x^2$ -выпуклая. Напишем неравенство Йенсена (2) для этой функции

$$\left(\frac{m_1x_1+\dots+m_nx_n}{m_1+\dots+m_n}\right)^2 \leq \frac{m_1x_1^2+\dots+m_nx_n^2}{m_1+\dots+m_n} \quad (m_i > 0).$$

Отсюда следует, что

$$(m_1x_1^2 + \dots + m_nx_n^2)(m_1 + \dots + m_n) \geq (m_1x_1 + \dots + m_nx_n)^2.$$

Заменив, $m_i = b_i^2, x_i = \frac{a_i}{b_i}$, получим нужное нам неравенство.

3. Метод Штурма

Метод Штурма чаще всего применяется для доказательства неравенств с несколькими переменными.

Суть метода в следующем: меняем одновременно две переменные, при этом сохраняем их сумму (или произведение) так, чтобы одна часть

неравенства всегда изменялась в одну сторону. Переменные либо нужно сделать равными, либо раздвинуть как можно дальше друг от друга [27].

1. (Неравенства: методы доказательства. Н. М. Седракан, А. М. Авоян).

Доказать, что если произведение положительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ равно 1, то $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$.

Доказательство. Допустим, среди данных чисел, есть два числа не равные друг другу.

Если $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$, то $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$. Тогда среди чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ найдутся два числа, одно из которых больше 1, а второе меньше. Пусть что числа a_1 и a_2 , где $a_1 < 1, a_2 > 1$.

Заметим, что $a_1 + a_2 > 1 + a_1 a_2$.

Таким образом, если заданные числа заменим числами $1, a_1 a_2, a_3, \dots, a_n$, то их произведение все равно будет равняться единице, а сумма $1 + a_1 a_2 + a_3 + \dots + a_n < a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Аналогично поступаем с числами $1, a_1 a_2, a_3, \dots, a_n$, получаем новую последовательность, в которой два члена будут равны 1. Действуя также $n-1$ раз, получим последовательность, в которой $n-1$ членов будут равны 1.

Таким образом, получили, что $n < a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Рассматриваемое неравенство превращается в равенство только тогда, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_n = 1$.

4. Метод математической индукции

В основе метода математической индукции лежит принцип математической индукции: пусть имеется какое-то утверждение, зависящее от натурального n . Если это утверждение верно при $n=1$ и из истинности его при каком-то произвольном натуральном $n=k$ следует его справедливость и при $n=k+1$, то данное утверждение верно для всех натуральных n .

Способ доказательства неравенств с помощью принципа математической индукции называется методом математической индукции. Этапы доказательства:

1. Проверяется истинность утверждения при $n=1$.
2. Допускают, что утверждение справедливо при $n=k$, где k -произвольное натуральное число ($k \in N$), и доказывают, что тогда утверждение верно и при $n=k+1$.

Если оба шага выполнены, то на основе принципа математической индукции утверждение истинно для всех натуральных n [20].

Докажем неравенство Коши с помощью метода математической индукции. А для этого докажем, что если $a_1, a_2, \dots, a_n$ -положительные числа такие, что $a_1 a_2 a_3 = 1$, то $a_1 + a_2 + a_3 \geq n$.

Доказательство. Метод математической индукции.

1. Проверим выполнение утверждения для $n=2$. Пусть $a_1 a_2 = 1$, тогда $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ и получаем, что $a_1 + a_2 \geq 2$ - верно.
 2. Предположим, что утверждение верно для $n=k$, то есть если $a_1 a_2 a_3 = 1$, где все множители положительные числа, то $a_1 + a_2 + \dots + a_k \geq k$.
 3. Докажем, что из $a_1 a_2 \dots a_{k+1} = 1$ следует неравенство $a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} \geq k + 1$.
- 1) Если $a_1 = a_2 = \dots = a_k = a_{k+1}$, то $a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} = k + 1$. Данное равенство можем записать так

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + a_{k+1} \geq k + 1$$

- 2) Если в $a_1 a_2 \dots a_{k+1}$ не все множители равны 1, то найдется хотя бы одна пара чисел a_k и a_{k+1} таких, что $a_k > 1$, а $a_{k+1} < 1$. Обозначим их произведение A_K : $A_K = a_k a_{k+1}$.

Имеем $a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k a_{k+1} = 1$, то есть $a_1 a_2 \dots a_{k-1} A_K = 1$. Так как произведение k положительных чисел равна 1, то и по индукционному предположению: $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1} + A_K \geq k$.

Докажем, что $A_K < a_k + a_{k+1} - 1$.

По определению

$$A_K - (a_k + a_{k+1} - 1) = a_k a_{k+1} - a_k - a_{k+1} + 1 = (a_k - 1)(a_{k+1} - 1).$$

Так как $a_k > 1$, $a_{k+1} < 1$, то $(a_k - 1)(a_{k+1} - 1) < 0$, отсюда следует $A_K < a_k + a_{k+1} - 1$.

Рассмотрим интересующую нас сумму $a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}$.

Получаем:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}) + (a_k a_{k+1}) > (a_1 + a_2 + \dots + a_{k-1}) + A_K + 1.$$

4. По принципу математической индукции утверждение доказано для любого натурального числа $n \geq 2$.

Перейдем к доказательству неравенства Коши. Обозначим

$A = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$. Справедливо равенство $\frac{a_1}{A} \frac{a_2}{A} \dots \frac{a_n}{A} = 1$. Тогда согласно первому доказанному утверждению, равенство $\frac{a_1}{A} \frac{a_2}{A} \dots \frac{a_n}{A} \geq n$ выполняется, то есть $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq A$. Что и требовалось доказать.

4. Метод выделения квадратов

Суть метода в представлении неравенства в виде квадрата суммы или разности, или в виде суммы или разности квадратов. Выражение в квадрате всегда положительно или равно 0.

Примеры:

1. (Алгебра 8 класс Ю. Н. Макарычев и др.). Доказать неравенство

$$a^2 - 6a + 14 > 0$$

Напишем свободный член в виде суммы и выделим квадрат разности:

$$a^2 + 6a + 14 = a^2 + 6a + 9 + 5 = (a - 3)^2 + 5 > 0 - \text{доказано.}$$

5. Синтетический метод.

Данный метод предполагает ряд преобразований, с помощью которых неравенство выводят из некоторых опорных неравенств. Некоторые известные опорные неравенства:

А) $a^2 \geq 0$;

Б) Неравенство Коши;

В) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, где $ab > 0$;

Г) $ax^2 + bx + c > 0$, где $a > 0, b^2 - 4ac < 0$;

Д) $x + \frac{1}{x} \geq 2$, где $x > 0$

Е) $-1 \leq \sin x \leq 1$

Ё) $-1 \leq \cos x \leq 1$

Например:

1. (Практикум задач по элементарной математике Алгебра. Тригонометрия. В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович). Доказать неравенство

$$\frac{a^2 + a + 2}{\sqrt{a^2 + a + 1}} > 2$$

Решение. Пусть $\sqrt{a^2 + a + 1} = t, t > 0$. Тогда данное неравенство можем записать так $\frac{t^2+1}{t} > 2$. Оно равносильно $t + \frac{1}{t} > 2$, перепишем наше неравенство $\sqrt{a^2 + a + 1} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + a + 1}} > 2$. В левой части стоит сумма двух взаимно-обратных положительных чисел, а эта сумма больше или равна 2. Равенство справедливо, если $a = 0$ или $a = -1$.

2. (Практикум решения задач по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович). Докажем, что если $n \in N, n > 1$, то

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} &= \frac{1}{2 \cdot 2} < \frac{1}{1 \cdot 2}; \\ \frac{1}{9} &= \frac{1}{3 \cdot 3} < \frac{1}{2 \cdot 3}; \\ \frac{1}{16} &= \frac{1}{4 \cdot 4} < \frac{1}{3 \cdot 4}; \dots \\ \dots; \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{n \cdot n} < \frac{1}{(n-1)n} \end{aligned}$$

и сложив эти неравенства, получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} &< \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} = \\
&= \frac{2-1}{1 \cdot 2} + \frac{3-2}{2 \cdot 3} + \frac{4-3}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{n-(n-1)}{(n-1)n} = \\
&= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} < 1.
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$.

6. Метод доказательства от противного

Пусть нам нужно доказать, что $f(x, y, z) > g(x, y, z)$. Предполагаем противное: хотя бы для одного набора переменных справедливо неравенство $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$. С помощью свойств неравенств, преобразуем доказываемое неравенство до последнего. Если мы получаем ложное неравенство, то предположение о справедливости неравенства неверно, значит исходное неравенство верно [29].

Примеры.

1. (Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович). Доказать, что если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$, то

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

Решение. Для доказательства предположим противное, то есть для a, b, c, d справедливо неравенство $\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

Возведем обе части в квадрат:

$$ab + bc + ad + cd < ab + 2\sqrt{abcd} + cd.$$

Из этого следует, что $bc + ad < 2\sqrt{abcd}$. Разделим обе части на 2:

$\frac{bc+ad}{2} < \sqrt{abcd}$ и получаем неравенство, противоречащее неравенству Коши для неотрицательных bc и ad . Значит, предположение неверно, то есть для любых a, b, c, d справедливо неравенства $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$.

7. Метод оценивания

Сущность данного метода заключается в оценке значений выражений сверху или снизу, таким образом, указывается верхняя или нижняя граница неравенства. Такая деятельность носит эвристический характер. Метод используется в доказательстве заданных неравенств, в сравнении числовых выражений для установления их истинности [23].

Примеры.

1. (Олимпиада школьников СПбГУ по математике. 2015). Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c, d таких, что $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$, выполняется неравенство $|ac - bd| \leq 1$.

Доказательство

Учитывая данные условия $a^2 + b^2 = 1, c^2 + d^2 = 1$ можем сделать вывод $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = 1$.

Раскрываем скобки $a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 = (ac)^2 - 2abcd + (bd)^2 + (ad)^2 + 2abcd + (bc)^2 = (ac - bd)^2 + (ad - bc)^2 \geq (ac - bd)^2$.

$(ac - bd)^2$ при любых значениях действительных a, b, c, d принимает только значение из полученных соотношений следует, что $|ac - bd| \leq 1$.

1.2. Анализ учебников алгебры 8-9 классов

Тема «Доказательство неравенств» в школьном курсе математики рассматривается и в базовом, и в углубленном уровнях, однако отличается содержательным аспектом и планируемыми результатами.

Учитель должен методически грамотно спланировать уроки по данной теме для реализации образовательных, развивающих и воспитательных целей. В Примерной образовательной рабочей программе базового уровня от 27.01.2021 года изучение числовых неравенств начинается в 8 классе.

На числовые неравенства в 8 классе отводится 12 часов. Изучение этой темы начинается после «Квадратных неравенств» и «Систем уравнений» в разделе «Уравнения и неравенства». Сам раздел идет вторым после «Алгебраических выражений» [14].

В углубленном уровне содержание данной темы расширяется.

В углубленном уровне отводится 20 часов. Изучение алгебры в 8 классе начинается с раздела «Уравнения и неравенства» и первая тема «Неравенства».

В 9 классе изучение темы на базовом и углубленном уровнях сильно отличается. В планируемых результатах в 9 классе нет цели доказательства неравенств.

Доказательство неравенств рассматривается и в базовом и углубленном уровнях в 8 классе. По примерной рабочей программе в базовом уровне 8 класса не предусмотрено отдельное изучение темы доказательства неравенств, нет конкретно сформулированных планируемых результатов и целей. В углубленном уровне в разделе «Неравенства» есть тема «Доказательство неравенств», изучив данный материал, обучающиеся должны уметь «...доказывать свойства числовых неравенств алгебраически.», «...доказывать неравенства.». В 9 классе доказательство неравенств не рассматривается.

Сравнив три учебника по алгебре, можно сделать следующие выводы. В учебнике 8 класса Макарычева Ю. Н. базового уровня доказательство неравенств идет последней темой раздела «Числовые неравенства и их свойства». Доказываются неравенства с помощью определения и метода выделения квадратов, также рассматривается неравенство Коши. Также в учебнике есть дополнительная глава «Доказательство неравенств». Задачный материал представлен заданиями на доказательство с помощью двух первых методов, применения неравенства Коши в заданиях нет, они представлены в углубленном уровне [1].

В учебнике 8 класса Макарычева Ю. Н. углубленного уровня определяется понятие «число a больше числа b ». Тема изучается после оценки значений выражений. При доказательстве неравенств используется определение, метод оценки и неравенство Коши [2].

В учебнике 8 класса Мордковича А. Г. тема начинается с рассмотрения понятия «линейное неравенство», вводятся три понятия для решения

неравенств. Доказательство неравенств рассматривается в теме свойства числовых неравенств, задания направлены на усвоение свойств числовых неравенств и при доказательстве неравенств используются методы оценивания, выделения квадратов, а также неравенство Коши и определение числовых неравенств. Сначала обучающиеся учатся использовать свойства неравенств при решении задач, далее учатся оценивать неравенства с помощью свойств неравенств, и далее организуется работа по доказательству неравенств самими учениками [5].

Таким образом, можно сделать вывод, что обучающиеся начинают изучать неравенства в 8-9 классах, но доказательств неравенств они касаются только в 8 классе, курс 9 класса направлен на усвоение решения неравенств. Также последовательность изучения материала в разных учебниках сильно отличается. Но доказательство неравенств во всех учебниках рассматривается в 8 классе, как и прописано в современной примерной рабочей программе.

В примерной образовательной программе изучение неравенств в 10 классе на базовом уровне происходит в начале учебного года.

В 10-11 классах доказательство неравенств не включено в Примерную рабочую программу.

1.3 Анализ перечня олимпиад утвержденных Министерством просвещения и Министерством науки и высшего образования Российской Федерации

Олимпиады по математике способствуют выявлению интересов и возможностей обучающихся, прививают любовь к математике, развивают нестандартное мышление, увлекают своим творческим аспектом и недоступностью.

При решении олимпиадных заданий обучающимися могут быть использованы различные математические методы, даже те, которые в школе не рассматриваются.

Задания на доказательство неравенств часто встречаются в олимпиадах разных уровней. И для их решения необходимо знать способы, которые в школьном курсе не изучаются.

Я проанализировала олимпиады из перечней утвержденных Министерством науки и высшего образования и Министерством просвещения и выделила основные методы доказательства неравенств, используемые в них.

Задания с неравенствами есть во Всероссийской олимпиаде школьников на региональном и заключительном этапах.

Например:

1. (Всероссийская олимпиада школьников. Региональный этап. 2022).

Даны неотрицательные числа a, b, c, d , такие что $x + y + z + w = 8$.

Докажите, что $\frac{x^3}{x^2+y+z} + \frac{y^3}{y^2+z+w} + \frac{z^3}{z^2+w+x} + \frac{w^3}{w^2+x+y} \geq 4$.

Приведем первое решение, основанное на неравенстве о средних.

Оцениваем знаменатель по неравенству о средних:

$$\frac{x^3}{x^2+y+z} = x - \frac{x(y+z)}{x^2+y+z} \geq x - \frac{x(y+z)}{2x\sqrt{y+z}} = x - \frac{\sqrt{y+z}}{2};$$

$$x^2 + y + z \geq 2x\sqrt{y+z}.$$

Аналогично представляем и оставшиеся слагаемые и складываем их.

$$x + y + z + w - \frac{\sqrt{x+y}}{2} - \frac{\sqrt{y+z}}{2} - \frac{\sqrt{z+w}}{2} - \frac{\sqrt{w+x}}{2} \geq 4.$$

Так как, $x + y + z + w = 8$, мы получаем следующее неравенство:

$$\frac{\sqrt{x+y}}{2} + \frac{\sqrt{y+z}}{2} + \frac{\sqrt{z+w}}{2} + \frac{\sqrt{w+x}}{2} \leq 4.$$

Из неравенства между средним арифметическим и средним квадратичным получаем:

$$\frac{\sqrt{x+y}}{2} + \frac{\sqrt{z+w}}{2} \leq \sqrt{\frac{(\sqrt{x+y})^2 + (\sqrt{z+w})^2}{2}} = 2$$

$$\text{и, аналогично } \frac{\sqrt{z+w}}{2} + \frac{\sqrt{w+x}}{2} \leq 2.$$

Осталось сложить два неравенства и получить нужное нам:

$$\frac{\sqrt{x+y}}{2} + \frac{\sqrt{z+w}}{2} + \frac{\sqrt{z+w}}{2} + \frac{\sqrt{w+x}}{2} \leq 4. \text{ Что и требовалось доказать.}$$

Попробуем доказать это же неравенство с помощью неравенства Коши-Буняковского-Шварца

$$\begin{aligned} \frac{x^3}{x^2 + y + z} + \frac{y^3}{y^2 + z + w} + \frac{z^3}{z^2 + w + x} + \frac{w^3}{w^2 + x + y} &\geq \\ &\geq \frac{(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2}{x(x^2 + y + z) + y(y^2 + z + w) + z(z^2 + w + x) + w(w^2 + x + y)}. \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$$(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2 \geq 4(x^3 + y^3 + z^3 + w^3 + xy + yz + zw + wx + 2xz + 2yw).$$

Можно заметить, что $32 = \frac{(x+y+z+w)^2}{2} = xy + yz + zw + wx + xz + yw + \frac{x^2+z^2}{2} + \frac{y^2+w^2}{2} \geq xy + yz + zw + wx + 2xz + 2yw$, поэтому достаточно проверить, что $(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2 \geq 4(x^3 + y^3 + z^3 + w^3 + 32).$ (*)

Замена: $x = 2 + a, y = 2 + b, z = 2 + c, w = 2 + d$.

Тогда $a + b + c + d = x + y + z + w - 8 = 0$,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 + w^2 &= 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2(a + b + c + d) + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \\ &= 16 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 + w^3 &= \\ &= 4 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2(a + b + c + d) + 3 \cdot 2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + a^3 \\ &\quad + b^3 + c^3 + d^3. \end{aligned}$$

Выражение (*) будет выглядеть так:

$$((a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 16)^2 \geq 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + 6(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 64).$$

Далее раскрываем скобки и сокращаем и остается доказать, что

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 8(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3).$$

Замечаем, что

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 + 8(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq a^4 + b^4 + c^4 + d^4 + 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 \geq 4(a^3 + b^3 + c^3 + d^3).$$

Неравенство доказывается с помощью вспомогательных неравенств: неравенство о средних, неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Также часто на олимпиадах присутствуют неравенства, доказательство которых основывается на определении.

2. (Формула Единства 9 класс). Даны три различных положительных числа x, y, z , причем $(x + y - z)(x + z - y)(y + z - x) > 0$. Докажите, что

$$\frac{(x^2 + y^2 - z^2)^2}{4y^2} > \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2}.$$

Для доказательства данного неравенства достаточно избавиться от знаменателей и перенести в левую часть. Мы получим $x^2 - 2x^2z^2 + z^2 > 0$, что очевидно верно для любых различных положительных x и z .

Часто в олимпиадных заданиях для 9-10 классов есть неравенства для доказательства которых, используются метод Штурма и неравенство Йенсена.

3. (Всероссийская олимпиада по математике 0 класс). Пусть a, b, c, d -положительные числа, причём $a + b + c + d = 1$. Докажите, что

$$\frac{1}{1 - \sqrt{a}} + \frac{1}{1 - \sqrt{b}} + \frac{1}{1 - \sqrt{c}} + \frac{1}{1 - \sqrt{d}} \geq 8$$

Доказательство. Вычтем из обеих частей 4 и получим:

$$\frac{a}{\sqrt{a} - a} + \frac{b}{\sqrt{b} - b} + \frac{c}{\sqrt{c} - c} + \frac{d}{\sqrt{d} - d} \geq 4$$

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - x}$ на области $(0, 1)$. Далее считаем вторую производную и видим, что функция выпукла вниз, а значит можно воспользоваться неравенством Йенсена для точек a, b, c, d , и весов a, b, c, d :

$$\frac{a}{\sqrt{a} - a} + \frac{b}{\sqrt{b} - b} + \frac{c}{\sqrt{c} - c} + \frac{d}{\sqrt{d} - d} = af(a) + bf(b) + cf(c) + df(d) \geq$$

$$f(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) \geq f\left(\frac{1}{4}\right) = 4.$$

Так как $0 < (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) < (a + b + c + d)^2 = 1$ а, $f(x)$ достигает своего минимума на $(0,1)$ при $x = \frac{1}{4}$.

Замечание. Можно попытаться работать с неравенством с равными весами, но придется рассматривать несколько случаев и в каждом из которых придется решать неприятное неравенство с одной переменной. В решении выше часть выражения удобно считать весами, а часть засунуть в функцию $f(x)$ и обойти точки перегиба.

Неравенство было доказано методом Йенсена. Рассмотрим пример неравенства, решенного методом Штурма.

4. (Всесибирская олимпиада по математике. 10 класс). Докажите, что $0 \leq xy + yz + xz - 2xyz \leq \frac{7}{27}$, где $x, y, z \geq 0$ и $x + y + z = 1$.

Доказательство.

Пусть $x \geq y \geq z$. Тогда $y \leq \frac{1}{2}$. Отсюда следует

$$xy + yz + xz - 2xyz = y(x + z) + xz(1 - 2y) \geq 0. \text{ Заметим, что } y(x + z) + xz(1 - 2y) \leq y\left(\frac{1}{3} + \left(x + z - \frac{1}{3}\right)\right) + \frac{1}{3}\left(x + z - \frac{1}{3}\right)(1 - 2y) \Leftrightarrow$$

$$0 \leq \left(x - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3} - z\right), \text{ что верно, так как } x \geq y \geq z.$$

Делаем замену $x = \frac{1}{3}, z = x + z - \frac{1}{3}$, мы не изменяем сумму, а увеличиваем выражение. Замечаем, что $y + \left(x + z - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$. Получается, что одно из чисел y и $x + z - \frac{1}{3}$ больше $\frac{1}{3}$, а другое меньше. Далее проводим эту операцию с числами $y, \frac{1}{3}, x + z - \frac{1}{3}$ и получаем числа $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, x + z - \frac{1}{3} + y - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$. Что и требовалось доказать.

Во Всесибирской олимпиаде школьников часто встречаются неравенства, доказательство которых требует применения метода оценки. Чаще всего такие задания есть в вариантах 11 классов 2021-2023 годов.

5. Доказать, что для любых действительных чисел x, y, z из интервала $[0;1]$ выполнимо неравенство

$$\frac{x+y}{2+z} + \frac{x+z}{2+y} + \frac{y+z}{2+x} \leq 2$$

Это неравенство можно привести к общему знаменателю, упростить, получить эквивалентное неравенство и решить. Но можно воспользоваться методом оценки, что во многом упростит доказательство неравенства.

По условию, все числа неотрицательны и не превосходят 1, значит, что все их попарные суммы $x+z, x+y, y+z$ не больше 2. Заменим в знаменателе каждой дроби 2 на соответствующую сумму, от чего каждый знаменатель не увеличится и неравенство усилится. Получим:

$$\frac{x+y}{2+z} + \frac{x+z}{2+y} + \frac{y+z}{2+x} \leq \frac{x+y}{x+y+z} + \frac{x+z}{x+y+z} + \frac{y+z}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

Что и требовалось доказать.

Доказательство неравенств достаточно интересная и многогранная тема. Ее изучение требует сил и упорства, но во многом способствует развитию критического и логического мышления.

Глава 2. Методические основы подготовки обучающихся к доказательству неравенств в курсе алгебры основной школы

2.1 Программа факультативного курса для 8-9 классов

«Доказательство неравенств»

1. Пояснительная записка

Программа основана на ФГОС третьего поколения, основными преимуществами которого являются конкретизация и вариативность, новый стандарт акцентирует внимание на тесном взаимодействии и единстве учебного и воспитательного процессов для достижения личностных результатов. Содержание курса построено на основе анализа примерных рабочих программ среднего общего образования, утвержденных Министерством образования и науки и Министерством просвещения перечней олимпиад, соответствует новому федеральному государственному образовательному стандарту.

Программа факультатива ориентирована на развитие творческого, критического и олимпиадного мышления. Рассматриваемые вопросы не изучаются в школьном курсе, тем самым факультатив способствует расширению изучения математики, а именно темы «Доказательство неравенств». Данная тема часто встречается в олимпиадах и конкурсах различных уровней, имея базу изучаемых в школе тем, обучающиеся познакомятся с новыми идеями доказательства олимпиадных неравенств и смогут их применять на практике. На этом и будет заключаться актуальность данной темы.

Цель: познакомить с методами доказательства неравенств, формировать навыки доказательства неравенств.

Задачи:

Обучающие:

- Обобщить понятия, связанные с неравенствами.

- Познакомить с некоторыми опорными неравенствами.
- Познакомить с новыми методами доказательства неравенств.

Развивающие:

- Заложить основы самостоятельного поиска доказательства.
- Развить умения логически рассуждать, аргументировать, доказывать.
- Уметь работать с различными источниками информации.
- Уметь работать в группе.

Воспитательные:

- Развить уровень коммуникативной компетентности.
- Воспитать целеустремленность и терпимость в достижении результатов.
- Воспитать уважительное отношение к окружающим.

Ожидаемые результаты:

- Уметь пользоваться математическими терминами и понятиями.
- Уметь рационально подбирать и применять методы доказательства неравенств.
- Уметь доказывать неравенства.
- Уметь логически правильно рассуждать.
- Уметь работать в группе.
- Уметь анализировать свои действия.

2.Формы организации занятий

Формы проведения занятий включают в себя лекции, практические работы, групповые работы, уроки на основе проблемного обучения.

Большинство занятий разработано на основе технологии проблемного обучения, также после каждого урока открытия знания проводятся практические работы для закрепления изученного материала. Также для закрепления материала обучающиеся готовят доклады и проводится мини-конференция.

На факультатив отводится 22 часа. На вводное занятие и на знакомство с основными методами доказательств отводится по 1 часу. На изучение остальных тем по 2 часа, Первый час предполагает открытие новых знаний и первичное закрепление изученного, второй час- практическое занятие на применение полученных знаний.

3. Содержание факультативного курса

1. *Вводное занятие. Метод оценки разности.*
2. *Основные методы доказательства алгебраических неравенств.*
3. *Доказательство методом «от противного».*
4. *Метод выделения квадратов.*
5. *Синтетический метод.*
6. *Классические неравенства.*
7. *Доказательство неравенств методом математической индукции.*

1. Задачный материал

Задачный материал составлен в соответствии с программой факультатива, разработан в виде листов с заданиями. Каждый лист содержит информацию по теме, одно решенное задание в качестве примера и задания для самостоятельного решения. При решении заданий обучающийся может опираться на приведенный пример и теоретический материал, данные на листе. Последнее задание является олимпиадным, решение к этому заданию приведено также на листе, для того, чтобы обучающийся смог проверить свое решение самостоятельно и оценить его правильность, найти допущенные ошибки и исправить их, провести рефлексию своей деятельности.

Листы можно использовать для открытия новых знаний, для систематизации и обобщения, для закрепления и контроля. Форма работы может быть индивидуальной, фронтальной или групповой. Особое внимание нужно уделять процессу доказательства неравенств обучающимися.

Лист 1. Метод оценки знака разности

Определение.

$a > b$, если a – положительное число.

$a < b$, если a – отрицательное число.

Комментарий. Для доказательства неравенства $f(a, b, \dots, k) > g(a, b, \dots, k)$ достаточно найти разность $f(a, b, \dots, k) - g(a, b, \dots, k)$ и убедиться, что она положительна при заданных значениях.

Задание 1. Доказать, что если $xy > 0$, то $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$.

Доказательство.

Найдем разность левой и правой частей $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} - 2 = \frac{x^2 + y^2 - 2xy}{xy} = \frac{(x-y)^2}{xy}$

Так как $xy > 0$, то $\frac{(x-y)^2}{xy} \geq 0$. Причем знак равенства имеет место при $x = y$.

Разность неотрицательна, неравенство доказано.

Задание 2. Доказать, что при любых положительных a и b справедливо следующее неравенство $4(a^3 + b^3) \geq (a + b)^3$.

Задание 3 Докажите, что для любых действительных a, b, c, d, e справедливо неравенство $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$.

Задание 4. Докажите, что если $n \geq 3, n \in \mathbb{N}$, то справедливо неравенство $\sqrt[3]{n} \geq \sqrt[4]{n+1}$.

Задание 5. (Неравенство Коши) Доказать, что если $x \geq 0, y \geq 0$, то $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.

Задание 6. Доказать, что верно неравенство, для любых действительных чисел x и y : $x^2 + xy + y^2 \geq 3(x + y - 1)$.

Задание 7 («Формула Единства» 2021 год). Даны три различных положительных числа x, y, z , причем $(x + y - z)(x + z - y)(y + z - x) > 0$. Докажите, что

$$\frac{(x^2+y^2-z^2)^2}{4y^2} > \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{2}.$$

Решение задания 7 представлено на странице 21 Выпускной квалификационной работы.

Лист 2. Доказательство методом «от противного»

Пусть нам нужно доказать, что $f(x, y, z) > g(x, y, z)$. Предполагаем противное: хотя бы для одного набора переменных справедливо неравенство $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$. Действуем по следующей схеме:

предполагаем противное $\rightarrow$ рассуждаем $\rightarrow$ получаем противоречие $\rightarrow$ вывод.

Задание 1. Докажем, что если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, то $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$.

Доказательство. Предположим противное, что существует набор неотрицательных значений a, b, c , для которого данное неравенство неверно, то есть выполняется неравенство $\frac{a+b+c}{3} > \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$. При возведении обеих его частей в квадрат получим: $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$,

$$\text{и далее } (a+b+c)^2 > 3(a^2+b^2+c^2),$$

$$3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c)^2 < 0,$$

$$3(a^2+b^2+c^2) - (a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) < 0,$$

$$(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc) < 0,$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 < 0.$$

Последнее неравенство не является верным, так как сумма квадратов не может быть отрицательным числом. Значит, пришли к противоречию, отсюда вывод: исходное неравенство верно.

Задание 2. Доказать, что $\frac{a+b+c+d}{4} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$.

Задание 3. Доказать, что если $abc \neq 0, ab + ac + bc \neq 0$, то $\frac{4}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}} \leq \sqrt[4]{abcd}$.

Задание 4. Доказать, что если $a \geq 0, b \geq 0$, то $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^8 \geq 16ab(a + b)^2$.

Задание 5. Доказать, что для любого числа a выполняется неравенство $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$

Задание 6 (Всесибирская олимпиада школьников, оборочный этап, 2019 год). Пусть для положительных чисел a, b, c, x, y, z выполнены соотношения: $ac - b^2 > 0$ и $az - 2by + cx = 0$. Доказать, что тогда $xz - y^2 \leq 0$.

Доказательство.

От противного, пусть $xz - y^2 > 0$. Запишем соотношения в виде $ab > b^2, xz > y^2, 2by = az + cx$. Все части неравенств положительны, перемножив первые два и домножив на 4, а также возведя третье в квадрат, получим $4b^2y^2 = (az + cx)^2 < 4ac \cdot xz = 4az \cdot cx$, откуда $(az - cx)^2 < 0$, что невозможно. Ввиду полученного противоречия предположение о том, что $xz - y^2 > 0$ неверно, следовательно, $xz - y^2 \leq 0$, что и требовалось доказать.

Лист 3. Метод выделения квадратов

Задание 1. Доказать неравенство $a^2 + b^2 + c^2 + 3 \geq 2(a + b + c)$

Доказательство.

Раскроем скобки в правой части неравенства и перенесем слагаемые в левую часть, и представим число 3 в виде трех слагаемых, каждое из которых равно 1: $a^2 + b^2 + c^2 + 1 + 1 + 1 - 2a - 2b - 2c = (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 - 2c + 1) = (a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0$. Значит, неравенство верно.

Задание 2. Доказать неравенство $a^4 + 16 \geq 8a + 2a^3$.

Задание 3. Докажите, что при любых значениях переменной выполняется неравенство $a^2 + 2b^2 + 2ab + b + 10 > 0$

Задание 4. Доказать, что для всех действительных значений x и y выполняется неравенство $x^8 + y^8 + 18 \geq 16xy$.

Задание 5. Доказать, что для всех действительных значений x и y выполняется неравенство $x^3 + y^3 - 1 \leq \frac{x^6}{2} + \frac{y^6}{2}$.

Задание 6. Докажите, что если $a > 0, b > 0$, то

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(a^2b^2 + 1) \geq 8a^2b^2.$$

Задание 7 (Турнир городов, 2019, 8 класс). Докажите, что для любого $x \neq 0$ выполнено неравенство: $x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} > 0$.

Доказательство. Преобразуем исходное неравенство $x^8 - x^5 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^4} = \frac{x^{12} - x^9 - x^3 + 1}{x^4} = \frac{(x^3 - 1)(x^9 - 1)}{x^4} = \frac{(x^3 - 1)^2(x^6 + x^3 + 1)}{x^4}$. В полученном выражении $(x^3 - 1)^2 \geq 0, x^2 > 0$ при всех $x \neq 0$ и $x^6 + x^3 + 1 = \left(x^3 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ при всех x , поэтому оно неотрицательно при всех $x \neq 0$.

Лист 4. Синтетический метод

Некоторые опорные неравенства:

- 1) $a^2 \geq 0$;
- 2) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, где $a \geq 0, b \geq 0$;
- 3) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$, где $ab > 0$;
- 4) $ax^2 + bx + c > 0$, где $a > 0$ и $b^2 - 4ac < 0$;
- 5) $x + \frac{1}{x} \geq 2$, где $x > 0$
- 8) Неравенство Коши

Задание 1. Доказать, что $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 > n!$, где $n \in N, n > 1$.

Доказательство. Возьмем в качестве опорных следующие неравенства Коши: $\frac{n+1}{2} \geq \sqrt{n \cdot 1}$; $\frac{(n-1)+2}{2} \geq \sqrt{(n-1) \cdot 2}$; $\frac{(n-2)+3}{2} \geq \sqrt{(n-2) \cdot 3}$; ...; $\frac{2+(n-1)}{2} \geq \sqrt{2 \cdot (n-1)}$; $\frac{1+n}{2} \geq \sqrt{1 \cdot n}$.

Перемножив эти n неравенств, получим:

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq \sqrt{(n(n-1)(n-2) \dots 2 \cdot 1)(1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)n)} = \sqrt{n!n!} = \sqrt{(n!)^2} = n!$$

$$\text{Итак, } \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \geq n!$$

Так как по условию $n \neq 1$, то первое из опорных неравенств Коши может быть только строгим. Но тогда и после перемножения опорных неравенств полученное неравенство должно быть строгим. Таким образом, $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$, что и требовалось доказать.

Задание 2. Доказать, что если $a > 0, b > 0, c > 0$, то

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Задание 3. Если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$, то $(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc$.

Задание 4. Если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0, a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \geq 4abcd$.

Задание 5. Если $a > 0, b > 0, c > 0$, то $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c$.

Задание 6 (Всесибирская олимпиада школьников, 11 класс, заключительный этап, 2022 год). Доказать, что для любых действительных чисел x, y, z из интервала $[0;1]$ выполнено неравенство $\frac{x+y}{2+z} + \frac{x+z}{2+y} + \frac{y+z}{2+x} \leq 2$.

Доказательство. Приведем неравенство к общему знаменателю.

$$\begin{aligned} &\text{В левой части получим: } (x+y)(2+y)(2+x) + (x+z)(2+z)(2+x) + \\ &(y+z)(2+z)(2+y) = x^2y + y^2x + 2x^2 + 2y^2 + 4xy + 4x + 4y + x^2z + \\ &z^2x + 2x^2 + 2z^2 + 4xz + 4x + 4z + y^2z + z^2y + 2y^2 + 2 + z^2 + 4yz + 4y + \\ &4z = (x^2y + xy^2 + \dots) + 4(x^2 + y^2 + z^2) + 4(xy + xz + yz) + 8(x + y + z). \end{aligned}$$

$$\text{В правой части получим: } 2(2+x)(2+y)(2+z) = 16 + 4(xy + xz + yz) + 8(x + y + z) + 2xyz.$$

Слагаемые $4(xy + xz + yz)$ и $8(x + y + z)$ сокращаются, получаем неравенство $(x^2y + xy^2 + \dots) + 4(x^2 + y^2 + z^2) \leq 16 + 2xyz$ эквивалентно неравенству из условия задачи. В силу симметрии можно считать, что $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$, поэтому слагаемые x^2y и xy^2 в левой части не превосходят xyz , а

остальные 16 слагаемых не больше 1. Следовательно, сумма всех 18 слагаемых левой части не больше $16 + 2xyz$, то есть правой части. Неравенство доказано.

Лист 5. Неравенство Коши

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \text{ неравенство Коши.}$$

Задание 1. Доказать, что если $a > 0, b > 0, c > 0$, то

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9.$$

Доказательство.

Используем неравенство Коши: $a + b + c \geq 3\sqrt{abc}, \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$. Перемножим левые и правые части: $(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9\sqrt{abc} \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$.

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9\sqrt{abc} \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$$

$$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9\sqrt{1}$$

$(a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9$. Что и требовалось доказать.

Задание 2. Для любых $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$, удовлетворяющих условию $a_1 a_2 \dots a_n = 1$, докажите, что $(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n$.

Задание 3. Докажите, что если x, y по модулю меньше 1, то $\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{1-y^2} \geq \frac{2}{1-xy}$.

Задание 4. Докажите, что для любых положительных x, y справедливо неравенство $\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{xy}$.

Задание 5. Положительные числа x, y, z удовлетворяют условию $xyz \geq xy + yz + xz$. Докажите неравенство $\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}$.

Задание 6. Докажите неравенство Коши для $n = 4$, используя уже доказанное неравенство Коши для $n = 2$.

Задание 7 (Всероссийская олимпиада школьников. Региональный этап. 2022). Даны неотрицательные числа a, b, c, d , такие что $x + y + z + w = 8$.

Докажите, что $\frac{x^3}{x^2+y+z} + \frac{y^3}{y^2+z+w} + \frac{z^3}{z^2+w+x} + \frac{w^3}{w^2+x+y} \geq 4$.

Решение представлено на странице 19 Выпускной квалификационной работы.

Лист 6. Неравенство Коши-Буняковского

$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot (b_1^2 + b_2^2 \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$ -
неравенство Коши-Буняковского.

Задание 1. Пусть $a + b + c = 1$. Доказать, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

Доказательство. Из равенства Коши-Буняковского имеем
 $1 = 1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c \leq \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} =$
 $\sqrt{3} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. А отсюда имеем, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

Задание 2. Доказать, что $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{10} < 24$.

Задание 3. Для любых $a, b, c \in R$ докажите, что

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2.$$

Задание 4. Для любых $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ докажите, что

$$\frac{a_1^2}{a_2} + \frac{a_2^2}{a_3} + \dots + \frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Задание 5. Докажите, что для любых положительных действительных чисел a, b, c таких, что $abc = 1$, выполнено неравенство

$$\frac{1}{(a+b)b} + \frac{1}{(b+c)c} + \frac{1}{(c+a)a} \geq \frac{3}{2}.$$

Задание 6. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\frac{a^2 - bc}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{b^2 - ca}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{c^2 - ab}{2c^2 + a^2 + b^2} \geq 0.$$

Задание 7 (Олимпиада университета Иннополис, 8-9 класс, заключительный этап, 2023). Для вещественных $x, y, z \geq 1$ докажите неравенство: $\frac{x+y+z}{3} + xyz \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2$.

Доказательство. По неравенству Коши-Буняковского-Шварца имеем $x + xyz = x(1 + yz) = x(1 + (y - 1 + 1)(z - 1 + 1)) \geq (x - 1 + 1)(1 + (\sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2) \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2$.

$$\text{Таким образом, } \begin{cases} x + xyz \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2, \\ y + xyz \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2, \\ z + xyz \geq (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1})^2. \end{cases}$$

Сложив эти неравенства и поделив обе части полученного неравенства на 3, получим требуемое.

Лист 7. Доказательство неравенств методом математической индукции

Задание 1. Доказать формулу Бернулли: $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, для любого $n \in \mathbb{N}$, для любого действительного $x > -1$.

Доказательство.

1. *База индукции.* Проверим справедливость неравенства для натурального номера $n = 1$:

$$(1 + x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x;$$

$$1 + x \geq 1 + x;$$

Неравенство верно.

2. *Предположение индукции.* Пусть исходное неравенство выполняется для некоторого натурального номера $n = k$, то есть справедливо неравенство $:(1 + x)^k \geq 1 + kx$.

3. *Шаг индукции.* Докажем, что неравенство будет верным для натурального номера $n = k + 1$ при условии, что из пункта 2 справедливо. Таким образом, нужно показать, что

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x.$$

Рассмотрим левую часть неравенства:

$$\begin{aligned} (1+x)^{k+1} &= (1+x)^k \cdot (1+x) \geq | \text{по формуле } (1+x)^k \geq 1+kx | \\ &\geq (1+kx)(1+x) = 1+kx+x+kx^2 \\ &\geq |kx^2 \geq 0 \text{ для любого } x > -1| \geq 1+(k+1)x. \end{aligned}$$

А это значит, что методом математической индукции мы доказали исходное утверждение. Оно справедливо для любого натурального номера n и любого действительного $x > -1$.

Задание 2. Если $n \geq 5$, то $2^n > n^2$.

Задание 3. Если $n \geq 2$, то $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Задание 4. Если $n \geq 2$, то $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}$.

Задание 5. Если $n \geq 2$, то $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < n$.

Задание 6 (Всесибирская олимпиада школьников, 9 класс, заключительный этап, 2021). Определим последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{100}$ следующим образом: пусть x_1 - произвольное число, меньшее 1, и $x_{n+1} = x_n - x_n^2$ для всех $n = 1, 2, 3, \dots, 99$. Докажите, что $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{99}^3 < 1$.

Доказательство. Докажем для начала, что $1 > x_1 > x_2 > x_3 > \dots > x_{100} > 0$. Для этого воспользуемся индукцией по $n = 1, 2, 3, \dots, 99$. База индукции: $x_1 \in (0; 1)$ по условию. Шаг индукции: при $x_n \in (0; 1)$ выполнены неравенства $0 < x_n^2 < x_n$, поэтому $x_{n+1} = x_n - x_n^2 < x_n < 1$ и $x_{n+1} = x_n - x_n^2 > 0$, то есть $x_{n+1} \in (0; 1)$. Ввиду доказанного, $x_n^3 < x_n^2 = x_n - x_{n+1}$ для всех $n = 1, 2, 3, \dots, 99$, поэтому $x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_{100}^3 < x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{100}^2 = x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + \dots + x_{99} + x_{100} + x_{100}^3 = x_1 - x_{100} + x_{100}^3 < x_1 < 1$, что и требовалось доказать.

2. Технологические карты

Технологические карты разработаны на основе проблемного обучения и соответствуют требованиям ФГОС.

**Технологическая карта занятия «Доказательство неравенств.
Метод оценки знака разности»**

Тема: Доказательство неравенств. Метод оценки знака разности.

Цель: научиться доказывать неравенства методом оценки знака разности.

Задачи:

Обучающие:

1. Повысить уровень математического развития обучающихся и расширить их кругозор.
2. Уметь отличать понятия «решить неравенство» и «доказать неравенство».
3. Уметь доказывать неравенства.

Развивающие:

1. Развивать у обучающихся интерес к занятиям математикой.
2. Выявлять учащихся, которые обладают творческими способностями, стремятся к углублению своих знаний по математике.
3. Развивать речь, память, логическое мышление, воображение и интерес через применение творческих задач и заданий творческого характера.

Воспитательные:

1. Воспитывать командный дух, волю, упорство в достижении цели, чувство ответственности за свою работу перед коллективом.
2. Воспитание умений применять имеющиеся знания на практике.
3. Воспитание умений защищать свои убеждения, аргументировано вести дискуссию.

Универсальные учебные действия:

Личностные:

- внутренняя позиция школьника на уровне положительного отношения к школе, ориентации на содержательные моменты школьной действительности и принятия образца «хорошего ученика»;
- познавательный интерес к способам решения новой задачи;
- способность к самооценке на основе критериев успешности учебной деятельности;
- ориентация в нравственном содержании и смысле, как собственных поступков, так и поступков окружающих людей;

Метапредметные:

познавательные:

- строить сообщения в устной и письменной форме;
- устанавливать причинно-следственные связи;

регулятивные:

- принимать и сохранять учебную задачу;
- учитывать установленные правила в планировании и контроле способа решения;
- оценивать правильность выполнения действия на уровне адекватной ретроспективной оценки соответствия результатов требованиям данной задачи и задачной области;
- адекватно воспринимать предложения и оценку учителей, товарищей, родителей и других людей; различать способ и результат действия;

коммуникативные:

- допускать возможность существования у людей различных точек зрения, в том числе не совпадающих с его собственной, и ориентироваться на позицию партнера в общении и взаимодействии;
- учитывать разные мнения и стремиться к координации различных позиций в сотрудничестве; формулировать собственное мнение и позицию;
- договариваться и приходить к общему решению в совместной деятельности, в том числе в ситуации столкновения интересов;

- строить понятные для партнера высказывания, учитывающие, что партнер знает и видит, а что нет; задавать вопросы;
- контролировать действия партнера;
- адекватно использовать речевые средства для решения различных коммуникативных задач, строить монологическое высказывание, владеть диалогической формой речи.

Оборудование: проектор, презентация.

Технология: технология проблемного обучения.

Ход занятия

Деятельность учителя	Содержание	Деятельность ученика	Формируемые УУД
<p>Вступительная часть 1.Организационный этап Приветствует обучающихся, проверяет готовность обучающихся к занятию. Озвучивает цели и планируемые результаты факультатива. Обеспечивает мотивацию</p>	<p>-Здравствуйте, ребята! Все готовы к занятию? Предлагаю начать наше занятие с цитаты Альберта Эйнштейна: «Чистая математика по своей форме - поэзия логических идей». Как вы думаете, что хотел сказать этими словами великий физик? И согласны ли вы с ним? На факультативных занятиях мы с вами будем учиться доказывать олимпиадные неравенства. Данная тема достаточно интересна и актуальна для рассмотрения. Во многих математических олимпиадах можно встретить такие задания, иногда и несколько. Мы с вами понимаем, что решение любых олимпиадных заданий требует творческого подхода, активизации критического мышления и самое важное знания математики, умения применять знания на практике, а также желания достигать поставленных задач. «... математика...-поэзия логических идей» . Мы тоже с вами будем генерировать идеи, обосновывать их и реализовывать на практике.</p>	<p>Приветствуют учителя. Готовятся к активной познавательной деятельности, отвечают на вопросы учителя. Совместно с учителем рассуждают на тему цитаты.</p>	<p>планировать свою деятельность в соответствии с предъявленной информацией, настраивать себя на продуктивную работу, самостоятельно организовать свое рабочее место в соответствии с целью выполнения заданий, планировать учебное сотрудничество с учителем и сверстниками</p>
<p>Основная часть 2.Актуализация знаний Обучающиеся совместно с учителем вспоминают основные положения и неравенства. Выполняют задание, актуализируют знания.</p>	<p>-Давайте вспомним понятие и свойства числовых неравенств. Обратите внимание на слайд. Вам необходимо вставить пропущенные слова:</p> <ul style="list-style-type: none"> Сравнить два числа означает выяснить, какое из них ... , или установить, что числа (больше, равны) Для любых неравных действительных чисел a и b можно сказать, какое число ..., а какое (больше, меньше) Число a больше числа b , если разность $a - b$... (положительна) Число a меньше числа b , если разность $a - b$ (отрицательна) 	<p>Обучающиеся выполняют задания учителя, разбирая возникающие трудности.</p>	<p>Познавательные УУД: ориентироваться в своей системе знаний, устанавливать закономерности, строить рассуждения, анализировать, сравнивать, группировать, выдвигать гипотезы и обосновывать их,</p>

<p>Учитель дает ответы на вопросы учеников.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Если прибавить к обеим частям неравенства одно и то же число или вычесть из обеих частей неравенства одно и то же число, неравенство (остается верным) • Если умножить или разделить обе части неравенства на одно и то же ... число, то неравенство останется верным. (положительное) • Если умножить (или разделить) обе части неравенства на одно и то же отрицательное число, то неравенство (изменит свой знак) <p>-Молодцы! Справились. Далее предлагаю вам выполнить следующие задания. Первое и второе задание два человека выполняют на доске, остальные у себя в тетрадях.</p> <p>1. $3x(2x - 1) - 2\left(x + (3x - 2)(x + 1) - \frac{4x-2}{7}\right) \geq 8 - 7x$ (ЕГЭ 15 задание)</p> <p>Решение</p> <p>Раскрываем скобки, переносим все в левую часть, находим общий знаменатель и получаем:</p> $\frac{-21x - 28x + 8x - 4 + 49x}{7} \geq 0$ $-49x + 8x - 4 + 49x \geq 0$ $8x \geq 32$ $x \geq 4$ <p>2. $\sqrt{2x + 3} - \sqrt{x - 2} > 2$ (ОГЭ 20 задание)</p> <p>Решение</p> <p>Перенесем второй радикал в правую часть, чтобы обе части неравенства стали неотрицательными и возведем обе части в квадрат. Таким образом нам не придется рассматривать два случая.</p> $2x + 3 > x - 2 + 4\sqrt{x - 2} + 4$ $x + 1 > 4\sqrt{x - 2}$ <p>Мы получили простейшее стандартное неравенство.</p> $\begin{cases} 0 \leq 16(x - 2) < x^2 + 2x + 1, \\ x + 1 > 0 \end{cases}$	<p>После выполнения заданий на доске, происходит взаимопроверка с остальными ребятами. Если совершена ошибка, она исправляется самими обучающимися. Ученики задают интересующие их вопросы.</p>	<p>формулировать проблему, структурировать, систематизировать материал, самостоятельно выделять и формулировать познавательную цель, определять цель учебной деятельности, осуществлять актуализации собственного опыта, соотносить информацию; уметь решать неравенства, уметь доказывать неравенства, различать понятия «решить» и «доказать», ориентироваться в содержании предмета, использовать информацию для решения учебной задачи, структурировать учебный материал, выделять в нем главное, использовать новую информацию для решения новых заданий, самостоятельно отбирать задание, обобщать изученное.</p> <p>Коммуникативные</p>
---	--	---	---

<p>3.Постановка учебной проблемы. Формулирование проблемы, планирование деятельности</p> <p>Далее учитель предлагает обратить внимание на третье неравенство и подумать как же можно его выполнить. Учитель разъясняет отличия между понятиями «решить» и «доказать».</p>	$\begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 14x + 33 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 2 \\ x < 3; x > 11 \end{cases}$ $\begin{cases} 2 \leq x < 3, \\ x > 11 \end{cases}$ <p>3. Докажите, что неравенство справедливо $x(x - 4) < (x - 2)^2$ (Алгебра 8 класс)</p> <p>-Обратите внимание на третье неравенство и постарайтесь выполнить это задание.</p> <p>-Вы правильно обратили внимание на формулировку задания, так как «решить» и «доказать»-это разные задания. Как вы понимаете словосочетание «решить неравенство?»</p> <p>-Чем оно отличается от словосочетания «доказать неравенство»?Давайте обсудим.</p> <p>- Решить неравенство, значит найти все значения переменной, при которой неравенство верное, а доказать неравенство, значит показать, что ему удовлетворяют любые допустимые (или специально указанные) значения этих букв.</p> <p>-Мы знаем, что существуют различные методы решения неравенств, для доказательства неравенств мы тоже будем использовать специальные методы. А сейчас предлагаю вам 5 минут на самостоятельный поиск решения третьего задания.</p>	<p>С решением первых двух неравенств, проблем не возникает. На данном этапе у них возникает проблема с решением задания, возникают сомнения из-за понятия «доказать», так же многие пытаются просто решить. Отвечают на вопросы учителя, пытаются разобраться в этих понятиях.</p> <p>Обучающиеся думают 5 минут, далее начинают накидывать идеи и обосновывать их.</p>	<p>УУД: слушать и понимать речь других, высказывать свое мнение, строить устное высказывание в соответствии с коммуникативной задачей, воспринимать информацию вслух, аргументировать свое мнение, формировать умение учебного сотрудничества, коллективного обсуждения проблем.</p> <p>Регулятивные УУД: определять и формулировать цель деятельности на уроке, определять последовательность действий на уроке, организовывать выполнение заданий учителя, прогнозировать свои действия, фиксировать свои затруднения, оценивать правильность выполнения действий, осуществлять самоконтроль, составлять план решения учебной проблемы совместно с</p>
--	---	---	--

<p>Учитель внимательно слушает обучающихся, слушает гипотезы учеников, опровергает или подтверждает их.</p> <p>4.Открытие нового знания Начинает работу по открытию метода оценки разности.</p> <p>Если обучающиеся идут по верному пути доказательства методом оценки разности, тогда учитель направляет их, корректирует идеи. Если же нет, тогда с помощью наводящих вопросов учитель их направляет.</p> <p>5.Первичная проверка понимания Вызывает трех учеников к доске.</p>	<p>-В начале урока мы с вами обсуждали числовые неравенства и их свойства. Подумайте, можно ли используя определение доказать неравенство.</p> <p>-В определении нам сказано, что если при нахождении левой и правой части, мы получаем выражение больше нуля, то правая часть больше левой, если же мы получаем отрицательное число, то правая часть меньше левой. Давайте, используя это, попробуем доказать неравенство.</p> <p>-С чего начнем выполнение задания?</p> $x(x - 4) < (x - 2)^2$ <p>-Правильно. Дальше?</p> $x(x - 4) - (x - 2)^2 < 0$ $x^2 - 4x - x^2 + 4x - 4 < 0$ $-4 < 0$ <p>-Мы получили отрицательное число, значит, неравенство верное.</p> <p>-Такой метод называется методом оценки разности. Мы научимся доказывать олимпиадные неравенства с помощью этого метода.</p> <p>-Для начала давайте попробуем доказать простые неравенства. Работать вы будете самостоятельно и у доски.</p> <p>1. $4xy \leq (x + y)^2$ (Алгебра 8 класс)</p> <p>Решение</p> $4xy - (x + y)^2 \leq 0$ $4xy - x^2 - 2xy - y^2 \leq 0$ $-x^2 + 2xy - y^2 \leq 0$ $-(x^2 - 2xy + y^2) \leq 0$	<p>Обучающиеся могут догадаться попробовать решить данное задание или же нет. Если нет, то обучающиеся совместно с учителем проходят путь открытия знания.</p> <p>-Для начала запишем неравенство в виде разности правой и левой части.</p> <p>-Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые.</p> <p>Выполняют задание самостоятельно и у доски.</p>	<p>учителем, ориентироваться в содержании предмета</p>
---	--	---	--

<p>Предлагает выполнить олимпиадные задания. При решении заданий могут возникать трудности на каждом этапе работы. Главная задача учителя – не игнорировать возникающие проблемы, направлять учеников по верному пути решения, но не</p>	$-(x - y)^2 \leq 0$ $(x - y)^2 \geq 0$ <p>2. $4a^2 + \frac{1}{a^2} \geq 4$ (Алгебра 8 класс)</p> <p>Решение</p> $4a^2 + \frac{1}{a^2} - 4 \geq 0$ $\frac{4a^4 - 4a^2 + 1}{a^2} \geq 0$ $(2a^2 - 1)^2 \geq 0$ <p>4. $2t(p - 2t) \leq p(p - 2t)$</p> $2tp - 4t^2 - p^2 + 2tp \leq 0$ $-p^2 - 4t^2 + 4tp \leq 0$ $-(p - 2t) \leq 0$ $(p - 2t) \geq 0$ <p>-А теперь давайте начнем решать олимпиадные задания.</p> <p>1. Что больше: $2011^{2011} + 2009^{2009}$ или $2011^{2009} + 2009^{2011}$? (олимпиада им. Эйлера 8 класс)</p> <p>Решение</p> <p>Начинаем решать, используя определение, то есть найдем разность левой и правой части $2011^{2011} + 2009^{2009} - (2011^{2009} + 2009^{2011})$. Преобразуем эту разность $2011^{2011} + 2009^{2009} - (2011^{2009} + 2009^{2011}) = 2011^{2011} + 2011^{2009} - (2009^{2011} - 2009^{2009}) = 2011^{2009}(2011^2 - 1) - 2009^{2009}(2009^2 - 1)$.</p> <p>$2011^{2009} > 2009^{2009} > 0$ и $2011^2 - 1 > 2009^2 - 1 > 0$. Отсюда следует, что $2011^{2011} + 2009^{2009} > 2011^{2009} + 2009^{2011}$.</p> <p>2. Доказать, что $99^{20} < 9999^{10}$. (Всероссийская олимпиада по математике 8 класс)</p> <p>Решение</p>	<p>Начинают решать</p>	
--	---	------------------------	--

доминировать, а руководить процессом.	$90^{20} - 9999^{10} = 99^{10} \cdot 99^{10} - (99 \cdot 101)^2$ $= 99^{10} \cdot 99^{10} - 99^{10} \cdot 101^{10}$ $= 99^{10}(99^{10} - 101^{10}) < 0$ <p>Следовательно, $99^{20} < 9999^{10}$</p> <p>3. Докажите, что для любых чисел a, b, c выполняется неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab - bc + ca$ (Открытая олимпиада вузов Томской области 8 класс)</p> <p>Решение</p> <p>Умножим обе части неравенства на 2</p> $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 2ab - 2bc + 2ca$ $a^2 - 2ab + b^2 + b^2 + 2bc + c^2 + a^2 - 2ac + c^2 \geq 0$ $(a - b)^2 + (b + c)^2 + (a - c)^2 \geq 0$		
<p>3 этап. Заключительная часть</p> <p>Подводит итоги занятия совместно с обучающимися, будет координировать обсуждение и делать акцент на важных моментах.</p> <p>Задает домашнее задание.</p>	<p>-Ребята, мы все сегодня молодцы. Если у вас появились какие-либо вопросы, задавайте.</p> <p>-Для подведения итогов нашей работы, предлагаю поделиться на две группы. Первая группа должна высказать свое мнение по поводу сегодняшнего занятия. Высказывания должны быть по теме, которую мы сегодня разбирали: поняли ли вы сущность данного метода, научились ли вы им пользоваться, легко или трудно вам было его усвоить, появлялись ли проблемы в процессе решения. Вторая группа готовит свои комментарии и вопросы к первой группе. Затем первая группа отвечает на вопросы второй группы. Результатом должен быть диалог между двумя группами, в конце которого обе группы совместно сформулируют четкие выводы.</p> <p>-Запишите домашнее задание: 1) доказать свойства числовых неравенств; 2) доказать следующие неравенства:</p> <ol style="list-style-type: none"> $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab - bc - ca$ (Открытая олимпиада вузов Томской области 8 класс) $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (Частный случай неравенства Коши) 	Проводят рефлексию своей деятельности.	<p>способность к самооценке на основе критериев успешности учебной деятельности; оценивать правильность выполнения действия на уровне адекватной ретроспективной оценки соответствия результатов требованиям данной задачи и задачной области.</p>

Технологическая карта занятия «Доказательство неравенств. Метод «от противного»»

Тема: Доказательство неравенств. Метод «от противного»

Цель: уметь доказывать неравенства методом «от противного»

Задачи:

Обучающие:

1. Повысить уровень математического развития обучающихся и расширить их кругозор.
2. Уметь доказывать неравенства методом «от противного».

Развивающие:

1. Развивать у обучающихся интерес к занятиям математикой.
2. Выявлять учащихся, которые обладают творческими способностями, стремятся к углублению своих знаний по математике.
3. Развивать речь, память, логическое мышление, воображение и интерес через применение творческих задач и заданий творческого характера.

Воспитательные:

1. Воспитывать командный дух, волю, упорство в достижении цели, чувство ответственности за свою работу перед коллективом.
2. Воспитание умений применять имеющиеся знания на практике.
3. Воспитание умений защищать свои убеждения, аргументированно вести дискуссию.

Универсальные учебные действия:

Личностные:

- внутренняя позиция школьника на уровне положительного отношения к школе, ориентации на содержательные моменты школьной действительности и принятия образца «хорошего ученика»;
- познавательный интерес к способам решения новой задачи;
- способность к самооценке на основе критериев успешности учебной деятельности;

- ориентация в нравственном содержании и смысле, как собственных поступков, так и поступков окружающих людей;

Метапредметные:

познавательные:

- строить сообщения в устной и письменной форме;
- устанавливать причинно-следственные связи;

регулятивные:

- принимать и сохранять учебную задачу;
- учитывать установленные правила в планировании и контроле способа решения;
- оценивать правильность выполнения действия на уровне адекватной ретроспективной оценки соответствия результатов требованиям данной задачи и задачной области;
- адекватно воспринимать предложения и оценку учителей, товарищей, родителей и других людей; различать способ и результат действия;

коммуникативные:

- допускать возможность существования у людей различных точек зрения, в том числе не совпадающих с его собственной, и ориентироваться на позицию партнера в общении и взаимодействии;
- учитывать разные мнения и стремиться к координации различных позиций в сотрудничестве; формулировать собственное мнение и позицию;
- договариваться и приходить к общему решению в совместной деятельности, в том числе в ситуации столкновения интересов;
- строить понятные для партнера высказывания, учитывающие, что партнер знает и видит, а что нет; задавать вопросы;
- контролировать действия партнера;
- адекватно использовать речевые средства для решения различных коммуникативных задач, строить монологическое высказывание, владеть диалогической формой речи.

Оборудование: проектор, презентация, карточки с заданиями.

Технология: технология проблемного обучения.

Ход занятия

Деятельность учителя	Содержание	Деятельность ученика	Формируемые УУД
<p>Вступительная часть 1.Организационный этап Приветствует обучающихся, проверяет готовность обучающихся к занятию. Обеспечивает мотивацию.</p>	<p>-Здравствуйте, ребята! Все готовы к занятию?</p> <p>О чем мы говорили с вами на прошлых занятиях?</p> <p>-Правильно. Тема доказательства неравенств очень интересна и многогранна, существует множество неравенств, для доказательства существуют различные методы. А для нахождения пути решения нужно подключать творческое и критическое мышление. Каждое занятие мы будем наполнять нашу копилку знаний новыми методами, научимся находить пути решения и доказывать даже самые сложные неравенства.</p>	<p>Приветствуют учителя. Готовятся к уроке. -О доказательстве неравенств методом оценки знака разности.</p>	<p>планировать свою деятельность в соответствии с предъявленной информацией, настраивать себя на продуктивную работу, самостоятельно организовать свое рабочее место в соответствии с целью выполнения заданий, планировать учебное сотрудничество с учителем и сверстниками</p>
<p>Основная часть 2.Актуализация знаний Предлагает найти ошибки и исправить их, задает направляющие вопросы, корректирует ответы обучающихся.</p>	<p>-Я уверена, что все вы справились с домашним заданием и прекрасно усвоили материал.</p> <p>-Как называется второе неравенство, которое вам нужно было доказать дома?</p> <p>-Правильно, это частный случай неравенства Коши для двух переменных, в дальнейшем мФ будем изучать неравенство Коши для n переменных и научимся применять его для доказательства неравенств.</p> <p>-Поэтому предлагаю вам найти и исправить допущенные ошибки в следующих неравенствах.</p> <p>1. Доказать неравенство $x^2 + y^2 > z^2 + (x + y - z)^2$, где $x > z, y < z$. (Турнир городов 8-9 класс, 2019) Доказательство $x^2 + y^2 - z^2 - (x + y - z)^2 > 0$</p>	<p>Выполняют задание учителя, находят ошибки, исправляют их, отвечают на вопросы. -Неравенство Коши.</p>	<p>Познавательные УУД: ориентироваться в своей системе знаний, устанавливать закономерности, строить рассуждения, анализировать, сравнивать, группировать, выдвигать гипотезы и обосновывать их, формулировать проблему, структурировать, систематизировать</p>

<p>Учитель слушает и корректирует ответы.</p> <p>3. Постановка учебной проблемы. Формулирование проблемы, планирование деятельности</p> <p>Далее учитель предлагает обратить внимание на схему,</p>	$ \begin{aligned} & x^2 + y^2 - z^2 - (x + y - z)^2 \\ &= (x^2 - z^2) + ((x + y - z)^2 + y^2) \\ &= (x - z)(x + z) \\ &+ (x + y - z - y)(x + y - z + y) \\ &= (x - z)(x + z) + (x - z)(x + 2y - z) \\ &= (x - z)(x + z + x + 2y - z) \\ &= (x - z)(2x + 2y) = 2(x - z)(x + y) > 0 \end{aligned} $ <p>-Обратите внимание на конечный результат, обоснованный ли он?</p> <p>-Правильно, подумайте пару минут, найдите ошибки и исправьте их. Можете работать в парах.</p> <p>-Молодцы, ребята! Давайте разберемся со следующим неравенством. 2. Докажите неравенство $(x - 2)(x - 6) < (x - 3)(x - 5)$ (Алгебра 9 класс, контрольная работа, А. Г. Мерзляк и др.) Доказательство $(x - 2)(x - 6) - (x - 3)(x - 5) = x^2 - 2x - 6x + 12 - x^2 - 3x - 5x + 15 = -16x + 27 = -(16x - 27)$, «так как перед скобкой минус, значит разность отрицательна, неравенство верно» -Вы отлично справились!</p>	<p>-Нет, по конечному выражению нам неизвестно положительно ли оно и мы не знаем положительно ли переменные.</p> <p>Обучающиеся в течение 22 минут стараются исправить ошибки, работают в парах и самостоятельно. Затем один человек выступает с ответом и правильным доказательством неравенства.</p>	<p>материал, самостоятельно выделять и формулировать познавательную цель, определять цель учебной деятельности, осуществлять актуализации собственного опыта, соотносить информацию; уметь доказывать неравенства, различать понятия «решить» и «доказать», уметь доказывать неравенства методом «от противного», ориентироваться в содержании предмета, использовать информацию для решения учебной задачи, структурировать учебный материал, выделять в нем главное, использовать новую информацию для решения новых заданий, самостоятельно отбирать задание, обобщать изученное.</p> <p>Коммуникативные УУД: слушать и понимать</p>
--	--	--	---

<p>показанную на слайде и предположить, какой метод будем изучать сегодня.</p> <p>4.Открытие нового знания Начинает работу по открытию метода «от противного».</p>	<p>-А теперь обратите внимание на слайд. Перед вами схема доказательства методом, который мы будем изучать сегодня. Этот метод мы с вами часто используем в геометрии и в жизни.</p> <div><div>Предположение</div><div>→</div><div>Рассуждение</div><div>→</div><div>Противоречие</div><div>↓</div><div>Вывод</div><div>←</div><div>Доказательство</div></div> <p>-Правильно. Метод «от противного» или «от противоположного». Назовите мне тему урока. (Схема превращается в таблицу)</p> <table><tr><td>Предположение</td><td></td></tr><tr><td>Рассуждение</td><td></td></tr><tr><td>Противоречие</td><td></td></tr><tr><td>Вывод</td><td></td></tr></table> <p>-На слайде появилась таблица этапов доказательства неравенства и пример доказательства, а столах у вас карточки с таблицей, определите этапы доказательства и заполните таблицу.</p> <p>Пример. Доказать, что если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$, то $\sqrt{(a + c)(b + d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$-верно. (Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. 1995. Стр. 31)</p> <p>Решение</p> $\sqrt{(a + c)(b + d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ $ab + bc + ad + cd < ab + 2\sqrt{abcd} + cd$ $bc + ad < 2\sqrt{abcd}$	Предположение		Рассуждение		Противоречие		Вывод		<p>Видя слово «противоречие» ребята сразу же догадываются.</p> <p>-Метод доказательства «от противного».</p> <p>Обучающиеся с легкостью справляются с этим заданием, так как и неравенство Коши, и сущность МОП им известны.</p>	<p>речь других, высказывать свое мнение, строить устное высказывание в соответствии с коммуникативной задачей, воспринимать информацию вслух, аргументировать свое мнение, формировать умение учебного сотрудничества, коллективного обсуждения проблем.</p> <p>Регулятивные УУД: определять и формулировать цель деятельности на уроке, определять последовательность действий на уроке, организовывать выполнение заданий учителя, прогнозировать свои действия, фиксировать свои затруднения, оценивать правильность выполнения действий, осуществлять самоконтроль, составлять план решения учебной проблемы совместно с учителем, ориентироваться в</p>
Предположение											
Рассуждение											
Противоречие											
Вывод											

<p>Вызывает обучающихся к доске.</p> <p>5.Первичная проверка понимания</p> <p>Вызывает трех учеников к доске.</p>	$\frac{bc + ad}{2} < \sqrt{abcd}$	<p>К доске выходят два человека и выполняют задания.</p>	<p>содержании предмета</p>								
	<table><tr><td>Предположение</td><td>$\sqrt{(a + c)(b + d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$</td></tr><tr><td>Рассуждение</td><td>$ab + bc + ad + cd$$< ab + 2\sqrt{abcd} + cd$$bc + ad < 2\sqrt{abcd}$</td></tr><tr><td>Противоречие</td><td>$\frac{bc + ad}{2} < \sqrt{abcd}$<p>(с неравенством Коши)</p></td></tr><tr><td>Вывод</td><td>Исходное неравенство верно</td></tr></table>			Предположение	$\sqrt{(a + c)(b + d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$	Рассуждение	$ab + bc + ad + cd$ $< ab + 2\sqrt{abcd} + cd$ $bc + ad < 2\sqrt{abcd}$	Противоречие	$\frac{bc + ad}{2} < \sqrt{abcd}$ <p>(с неравенством Коши)</p>	Вывод	Исходное неравенство верно
	Предположение			$\sqrt{(a + c)(b + d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$							
	Рассуждение			$ab + bc + ad + cd$ $< ab + 2\sqrt{abcd} + cd$ $bc + ad < 2\sqrt{abcd}$							
	Противоречие			$\frac{bc + ad}{2} < \sqrt{abcd}$ <p>(с неравенством Коши)</p>							
Вывод	Исходное неравенство верно										
<p>-У вас на карточках задания, которые нужно выполнить.</p> <p>1. Доказать неравенство $(xy + zt)^2 \leq (x^2 + z^2)(y + t)^2$ (Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. 1995)</p>											
<p>Доказательство</p> $(xy + zt)^2 > (x^2 + z^2)(y + t)^2$ $(xy + zt)^2 - (x^2 + z^2)(y + t)^2 > 0$ $x^2y^2 + 2xyzt + z^2t^2 - x^2y^2 - x^2t^2 - z^2y^2 - x^2y^2 > 0$ $2xyzt - x^2t^2 - x^2y^2 > 0$ $-(x^2t^2 - 2xyzt + x^2y^2) > 0$ <p>$-(xt - xy)^2 > 0$- противоречие, значит предположение неверно, следовательно исходное неравенство верно.</p> <p>Если мы запишем исходное неравенство в виде $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$, то это неравенство является частным случаем неравенства Коши-Буняковского, о котором мы будем говорить на следующих занятиях.</p> <p>2.Докажите, что для любого числа а выполняется неравенство $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$ (Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. 1995.)</p>											
<p>Доказательство</p>											

Предлагает выполнить олимпиадные задания. При решении заданий могут возникать трудности на каждом этапе работы. Главная задача учителя – не игнорировать возникающие проблемы, направлять учеников по верному пути решения, но не доминировать, а руководить процессом.

$$\frac{a^2 + 2}{\sqrt{a^2 + 1}} < 2$$

$$a^2 + 2 < 2\sqrt{a^2 + 1}$$

$$a^2 + 2 - 2\sqrt{a^2 + 1} = (\sqrt{a^2 + 1} + 1)^2$$

$$(\sqrt{a^2 + 1} + 1)^2 < 0 \text{ – такого быть не может, поэтому}$$

исходное неравенство верное.

-Молодцы, ребята. Остальные 3 задания предлагаю выполнить следующим образом: мы с вами поделимся на три группы, каждая группа будет решать соответствующее неравенство, а затем по часовой стрелке мы поменяемся решенными заданиями и проведем проверку.

3. Доказать, что при $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \quad (\text{Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. 1995.})$$

Доказательство

$$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

$$\frac{a+b+c}{3} - \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} = \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{3} =$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{9} - \frac{a^2+b^2+c^2}{3} =$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc-3a^2-3b^2-3c^2}{9} =$$

$$\frac{-2a^2-2b^2-2c^2+2ab+2ac+2bc}{9} = -(a-b)^2 + (a-c)^2 +$$

$$(b-c)^2 > 0 \text{ – такого быть не может, поэтому исходное}$$

неравенство верно.

4. Докажите, что ни для каких чисел x, y, z не могут одновременно выполняться три неравенства: $|x| < |y - t|, |y| < |t - x|, |t| < |x - y|$.

	<p>Доказательство</p> <p>Предположим обратное, что указанные неравенства имеют место. Тогда</p> $x^2 - (y - t)^2 < 0, y^2 - (t - x)^2 < 0, t^2 - (x - y)^2 < 0$ $(x - y + t)(x + y - t) < 0, (y - t + x)(y + t - x) < 0, (t - x + y)(t + x + y) < 0$ <p>Мы получили три отрицательных числа, при возведении трех отрицательных чисел, получить должны отрицательное число. Противоречие.</p> <p>5. Доказать неравенство $\frac{a+b+c+d}{4} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$</p> <p>(Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. 1995.)</p> <p>Доказательство</p> $\frac{a+b+c+d}{4} > \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$ $\frac{a+b+c+d}{4} - \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} = \frac{(a+b+c+d)^2}{16} - \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} =$ $\frac{(a+b+c+d)^2 - a^2 - 4b^2 - 4c^2 - 4d^2}{16} =$ $\frac{a^2 + 2ab + b^2 + c^2 + d^2 + 2ac + 2bc + 2ad + 2bd}{16} + \frac{+2cd - 4a^2 - 4b^2 - 4c^2 - 4d^2}{16} =$ $\frac{-3a^2 - 3b^2 - 3c^2 - 3d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bd + 2cd}{16} =$ $- \frac{(a-b)^2 + (a-c)^2 + (a-d)^2 + (b-d)^2 + (c-d)^2}{16} + \frac{c^2 + d^2}{16} > 0$ <p>такого быть не может, поэтому исходное неравенство верное.</p>	Совместно с учителем проверяют работу.	
<p>3 этап. Заключительная часть</p> <p>Подводит итоги занятия совместно с обучающимися, будет координировать обсуждение и делать акцент на важных моментах.</p>	<p>Ребята, на столах у вас кружочки красного, зеленого и желтого цветов. Они означают баллы: 1, 2, 3 соответственно, 3 самый высокий балл. Предлагаю ответить на мои вопросы с помощью них.</p> <p>-Насколько вы оцениваете свою работу на уроке?</p> <p>-Насколько продуктивной была ваша деятельность на занятии?</p> <p>-Интересно ли прошел урок?</p>	Проводят рефлексию своей деятельности.	<p>способность к самооценке на основе критериев успешности учебной деятельности;</p> <p>оценивать правильность выполнения действия на уровне адекватной ретроспективной оценки</p>

<p>Задаёт домашнее задание.</p>	<p>-Спасибо. Какие известные неравенства нам сегодня встретились?</p> <p>-Правильно. В дальнейшем мы научимся использовать их для доказательства неравенств.</p> <p>-Запишите домашнее задание:</p> <p>1. Доказать методом «от противного» для $a \geq 0, b \geq 0$</p> $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ <p>(Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. 1995.)</p> <p>2. Для положительных a, b, c, d верно и неравенство</p> $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \leq \sqrt[4]{abcd}$ <p>(Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. 1995.)</p> <p>-Спасибо за урок.</p>	<p>-Частный случай неравенства Коши и Коши-Буняковского.</p>	<p>соответствия результатов требованиям данной задачи и учебной области.</p>
---------------------------------	---	--	--

Карточка №1. Доказательство неравенств методом «от противного»

Доказать, что если $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0, d \geq 0$, то $\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$ -верно

Предположение	
Рассуждение	
Противоречие	
Вывод	

1. Доказать неравенство $(xy + zt)^2 \leq (x^2 + z^2)(y + t)^2$
2. Докажите, что для любого числа a выполняется неравенство $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$
3. Доказать, что при $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

4. Докажите, что ни для каких чисел x, y, z не могут одновременно выполняться три неравенства: $|x| < |y - t|, |y| < |t - x|, |t| < |x - y|$.
5. Доказать неравенство $\frac{a+b+c+d}{4} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}}$

Технологическая карта занятия «Доказательство неравенств. Метод математической индукции.»

Тема: Доказательство неравенств. Метод математической индукции.

Цель: уметь доказывать неравенства методом математической индукции.

Задачи:

Обучающие:

1. Повысить уровень математического развития обучающихся и расширить их кругозор.
2. Уметь отличать понятия «решить неравенство» и «доказать неравенство».
3. Уметь доказывать неравенства.

Развивающие:

1. Развивать у обучающихся интерес к занятиям математикой.
2. Выявлять учащихся, которые обладают творческими способностями, стремятся к углублению своих знаний по математике.
3. Развивать речь, память, логическое мышление, воображение и интерес через применение творческих задач и заданий творческого характера.

Воспитательные:

1. Воспитывать командный дух, волю, упорство в достижении цели, чувство ответственности за свою работу перед коллективом.
2. Воспитание умений применять имеющиеся знания на практике.
3. Воспитание умений защищать свои убеждения, аргументированно вести дискуссию.

Универсальные учебные действия:

Личностные:

- внутренняя позиция школьника на уровне положительного отношения к школе, ориентации на содержательные моменты школьной действительности и принятия образца «хорошего ученика»;
- познавательный интерес к способам решения новой задачи;

- способность к самооценке на основе критериев успешности учебной деятельности;

- ориентация в нравственном содержании и смысле, как собственных поступков, так и поступков окружающих людей;

Метапредметные:

познавательные:

- строить сообщения в устной и письменной форме;

- устанавливать причинно-следственные связи;

регулятивные:

- принимать и сохранять учебную задачу;

- учитывать установленные правила в планировании и контроле способа решения;

- оценивать правильность выполнения действия на уровне адекватной ретроспективной оценки соответствия результатов требованиям данной задачи и задачной области;

- адекватно воспринимать предложения и оценку учителей, товарищей, родителей и других людей; различать способ и результат действия;

коммуникативные:

- допускать возможность существования у людей различных точек зрения, в том числе не совпадающих с его собственной, и ориентироваться на позицию партнера в общении и взаимодействии;

- учитывать разные мнения и стремиться к координации различных позиций в сотрудничестве; формулировать собственное мнение и позицию;

- договариваться и приходить к общему решению в совместной деятельности, в том числе в ситуации столкновения интересов;

- строить понятные для партнера высказывания, учитывающие, что партнер знает и видит, а что нет; задавать вопросы;

- контролировать действия партнера;

- адекватно использовать речевые средства для решения различных коммуникативных задач, строить монологическое высказывание, владеть диалогической формой речи.

Оборудование: проектор, презентация.

Технология: технология проблемного обучения.

Ход занятия

Деятельность учителя	Содержание	Деятельность ученика	Формируемые УУД
<p>Вступительная часть 1.Организационный этап Приветствует обучающихся, проверяет готовность обучающихся к занятию. Обеспечивает мотивацию.</p>	<p>-Здравствуйте, ребята! Математика-это точная наука, практически все факты, исключая некоторые, требуют обоснования, доказательства. На прошлых занятиях, мы говорили о частном случае неравенства Коши, о частном случае неравенства Коши-Буняковского. Значит есть и общие случаи этих неравенств, как и любого другого утверждения. И на основе частных утверждений доказывают общие утверждения. Ну и в процессе устанавливается достоверность или ошибочность утверждений. Может кто-то из вас знает как называется переход от частных утверждений к общим? -Правильно.</p>	<p>Приветствуют учителя, готовятся к активной познавательной деятельности.</p> <p>-Индукция.</p>	<p>планировать свою деятельность в соответствии с предъявленной информацией,</p> <p>настраивать себя на продуктивную работу, самостоятельно организовать свое рабочее место в соответствии с целью выполнения заданий, планировать учебное сотрудничество с учителем и сверстниками</p>
<p>Основная часть 2.Актуализация знаний Обучающиеся совместно с учителем вспоминают основные положения и неравенства. Выполняют задание, актуализируют знания.</p>	<p>-На слайде незаконченные предложения, предлагаю вам их закончить.</p> <p>1. ...— это набор элементов множества, который удовлетворяет следующим условиям: А)для каждого ... числа существует элемент данного множества; Б)это число является ... элемента и обозначает место данного элемента в последовательности; В)для любого элемента последовательности можно указать ... элемент.</p> <p>-Давайте попробуем найти сумму n первых членов последовательности. Пусть нам дана последовательность</p>	<p>.</p> <p>-Последовательность</p> <p>-Натурального.</p> <p>-Номером.</p> <p>-Следующий за ним.</p>	<p>Познавательные УУД:</p> <p>ориентироваться в своей системе знаний, устанавливать закономерности, строить рассуждения, анализировать, сравнивать, группировать, выдвигать гипотезы и обосновывать их, формулировать</p>

<p>Учитель дает ответы на вопросы учеников.</p>	<p>нечетных натуральных чисел :1,3,5,7,9,11,13,...</p> <p>-С чего нам начать?</p> <p>-Правильно. Выходите к доске.</p> $S_1 = 1$ $S_2 = 1 + 3 = 4$ $S_3 = 1 + 3 + 5 = 8$ $S_4 = 1 + 3 + 5 + 7 = 16$ $S_5 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$ <p>-Что мы можем заметить?</p> <p>-Молодцы! Как мы можем записать это в общем виде?</p> <p>-Молодцы! Верно ли это предположение при любом положительном целом n?</p> <p>-Правильно. Давайте предположим, что $S_n = n^2$ верно для любого натурального числа k и перепишем в соответствующем виде:</p> $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2k - 1) = k^2 \quad (1)$ <p>-Докажем ее справедливость и для следующего k, для числа $n = k + 1$:</p> $S_{k+1} = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2k - 1)(2k + 1) = (k + 1)^2 \quad (2)$ <p>-Посмотрите внимательнее на (1) и (2) неравенства, что мы можем с ними сделать?</p> <p>-Правильно. Давайте запишем:</p> $S_{k+1} = S_k + (2k + 1) = k^2 + (2k + 1) = (k + 1)^2$ <p>-Что и требовалось доказать, здесь обязательно нужно сказать,</p>	<p>-Найдем суммы первых, вторых, третьих членов последовательности. Ученик выходит к доске, начинает выполнять задание учителя.</p> <p>-Сумма первого члена последовательности равна его номеру. Сумма двух членов последовательности равна квадрату номера. Сумма трех членов последовательности равняется квадрату номера и т.д.</p> $-S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2n - 1) = n^2$ <p>-Нет, так как мы еще этого не доказали.</p> <p>-Заменить $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + (2k - 1)$ на S_k, а затем на k^2.</p>	<p>проблему, структурировать, систематизировать материал, самостоятельно выделять и формулировать познавательную цель, определять цель учебной деятельности, осуществлять актуализации собственного опыта, соотносить информацию;</p> <p>уметь решать неравенства, уметь доказывать неравенства методом математической индукции, ориентироваться в содержании предмета, использовать информацию для решения учебной задачи, структурировать учебный материал, выделять в нем главное, использовать новую информацию для решения новых заданий, самостоятельно</p>
---	---	--	---

<p>3.Постановка учебной проблемы. Формулирование проблемы, планирование деятельности. Открытие нового знания</p> <p>Начинает работу по открытию метода математической индукции.</p> <p>После самостоятельной работы учащихся, начинается проверка.</p> <p>Представитель каждой группы читает карточку, в остальные либо соглашаются, либо предлагают свои варианты.</p>	<p>если наше предположение верно для натурального k, то оно будет верно и для $k+1$.</p> <p>-Можем ли мы сказать, что если предположение верно для $n=1,2,3,4,5$, то оно будет верным и для $n=6$?</p> <p>-Для доказательства нам не обязательно проверять для $n=1,2,3,4,\dots,n$, достаточно быть уверенным, что оно справедливо для $n=1$, тогда оно будет справедливым и для $n=2$, если оно верно для $n=2$, то будет верным и для $n=3$.</p> <p>-Для доказательства мы пользовались индукцией, переходили от частных суждений к общим. Таким образом, мы познакомились с очень важным методом доказательства. Как думаете, как он называется?</p> <p>-Правильно. Данный метод удобно использовать для доказательства неравенств.</p> <p>-На основе этого метода лежит принцип математической индукции. В сути которого, мы вместе с вами сейчас будем разбираться. У вас на столах карточки, вам необходимо, где-то вставить пропущенное слово, где-то продолжить предложение. Работать вы будете в группах.</p> <p><i>Карточка</i> ПРИНЦИП математической индукции Утверждение $P(n)$ справедливо для всякого ... n, если:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Оно справедливо для ... или наименьшего из ... чисел при котором закономерность имеет смысл. 2. Из справедливости утверждения, для какого-либо произвольного ... $n=...$, следует его справедливость для ... <p>МЕТОД математической индукции</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Проверить справедливость для ... 2. Сделав предположение, что гипотеза верна для некоторого значения k, ... 3. Если такое доказательство удалось довести до конца, то, на основе ... можно утверждать, что высказанная гипотеза справедлива для любого натурального числа n. <p>-Молодцы, ребята! А теперь давайте попробуем применить наши знания на практике.</p>	<p>-Да, оно будет верным для любого натурального n.</p> <p>-Метод математической индукции.</p> <p>Обучающиеся работают в группах, самостоятельно заполняют карточки.</p>	<p>отбирать задание, обобщать изученное.</p> <p>Коммуникативные УУД:</p> <p>слушать и понимать речь других, высказывать свое мнение, строить устное высказывание в соответствии с коммуникативной задачей, воспринимать информацию вслух, аргументировать свое мнение, формировать умение учебного сотрудничества, коллективного обсуждения проблем.</p> <p>Регулятивные УУД:</p> <p>определять и формулировать цель деятельности на уроке, определять последовательность действий на уроке, организовывать выполнение заданий учителя, прогнозировать свои действия, фиксировать свои затруднения,</p>
--	--	---	---

<p>5.Первичная проверка понимания Вызывает трех учеников к доске.</p> <p>Предлагает выполнить олимпиадные задания. При решении заданий могут возникать трудности на</p>	<p>1. Доказать $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ для любого натурального n, для любого действительного $x > -1$. (<i>Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. 1995.</i>)</p> <p>Доказательство</p> <p>1) Проверим справедливость неравенства для натурального номера $n=1$:</p> $(1 + x)^1 \geq 1 + x$ $1 + x \geq 1 + x$ <p><i>Неравенство верно.</i></p> <p>2) Пусть исходное неравенство выполняется для некоторого натурального номера $n = k$, то есть справедливо: $(1 + x)^k \geq 1 + kx$. (1)</p> <p>3) Докажем, что неравенство будет верным для натурального номера $n = k + 1$ при условии что (1) справедливо. Таким образом, нужно показать, что</p> $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$ $(1 + x)^{k+1} = (1 + x)^k(1 + x) \geq (1 + kx)(1 + x)$ $= 1 + kx + x + kx^2 = 1 + (k + 1)x + kx^2$ $\geq 1 + (k + 1)x$ <p>Так как $kx^2 \geq 0$ для любого $x > -1$.</p> <p>Таким образом, методом математической индукции мы доказали исходное утверждение, оно справедливо для любого натурального номера n и любого действительного числа $x > -1$.</p> <p>-Доказанное нами неравенство называется неравенством Бернулли.</p> <p>2. Доказать, что $3^{n-1} > 2n^2 - n$, для любого натурального номера $n \geq 5$ (Малый мехмат МГУ. Кружок 8 класса. 2010)</p> <p>Доказательство</p> <p>1) Проверим справедливость неравенства для натурального номера $n = 5$:</p> $3^4 > 2 \cdot 25 - 5$ $81 > 45$ <p>Неравенство верно.</p> <p>2) Пусть исходное неравенство выполняется для</p>		<p>оценивать правильность выполнения действий, осуществлять самоконтроль, составлять план решения учебной проблемы совместно с учителем, ориентироваться в содержании предмета</p>
--	--	--	--

<p>каждом этапе работы. Главная задача учителя – не игнорировать возникающие проблемы, направлять учеников по верному пути решения, но не доминировать, а руководить процессом.</p>	<p>некоторого натурального $n = k, k > 5$, то есть справедливо $3^{k-1} > 2k^2 - k$</p> <p>3) Докажем неравенство для $n = k + 1$ при условии, что доказанное в пункте 2 верно.</p> $3^k > 2(k + 1)^2 - (k + 1)$ <p>Рассмотрим левую часть неравенства $3^k = 3^{k-1} > (2k^2 - k) \cdot 3 = 6k^2 - 3k = 2(k + 1)^2 - (k + 1) + 4k^2 - 6k - 1$</p> <p>Методом интервалов показываем, что для любого $k > 2$, будет выполняться $4k^2 - 6k - 1 > 0$. Следовательно оно будет выполняться и при $k > 5$, а это значит что $2(k + 1)^2 - (k + 1) + 4k^2 - 6k - 1 > 2(k + 1)^2 - (k + 1)$</p> <p>4) Методом математической индукции мы доказали исходное неравенство. Оно справедливо для любого натурального $n \geq 0$.</p> <p>3. Доказать, что для всех натуральных n верно неравенство $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n+2)} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ (Малый мехмат МГУ. Кружок 8 класса. 2010)</p> <p>Доказательство</p> <p>1) Проверим выполняется ли равенство при $n=1$:</p> $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ - верно}$ <p>2) Предположим, что неравенство верно при $n = k$:</p> $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n} < \frac{1}{\sqrt{2k + 1}}$ <p>3) Докажем, что неравенство верно при $n = k + 1$</p> $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k + 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k + 2)} < \frac{1}{\sqrt{2k + 3}}$ <p>Рассмотрим левую часть</p> $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k + 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k + 2)} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k - 1)(2k + 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k \cdot (2k + 2)}$ <p>Умножим левую и правую части неравенства из 2 пункта на $\frac{2k+1}{2k+2} > 0$:</p>		
---	--	--	--

	$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)(2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k \cdot (2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}} \cdot \frac{2k+1}{2k+2} = \frac{\sqrt{2k+1}}{(2k+2)}$ <p>Рассмотрим разность</p> $\frac{\sqrt{2k+1}}{(2k+2)} - \frac{1}{\sqrt{2k+3}} = \frac{\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3} - (2k+2)}{(2k+2)\sqrt{2k+3}}$ $= \frac{(\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3} - (2k+2))(\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3} + (2k+2))}{((2k+2)\sqrt{2k+3})(\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3} + (2k+2))}$ <p>Знаменатель дроби больше нуля, поэтому рассмотрим знак числителя</p> $\begin{aligned} & (\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3} - (2k+2))(\sqrt{2k+1}\sqrt{2k+3} + (2k+2)) \\ &= (2k+1)(2k+3) - (2k+2)^2 \\ &= 4k^2 + 6k + 2k + 3 - 4k^2 - 8k - 4 = -1 \\ &< 0 \end{aligned}$ <p>Разность двух дробей отрицательная, следовательно,</p> $\frac{\sqrt{2k+1}}{(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$ <p>С одной стороны доказали, что</p> $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)(2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k \cdot (2k+2)} < \frac{\sqrt{2k+1}}{(2k+2)}, \quad \text{с} \quad \text{другой} \quad \text{стороны}$ $\frac{\sqrt{2k+1}}{(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$ <p>Можем записать двойное неравенство</p> $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k-1)(2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2k \cdot (2k+2)} < \frac{\sqrt{2k+1}}{(2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$ <p>Из которого по свойству транзитивности получаем</p> $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2k+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2k+2)} < \frac{1}{\sqrt{2k+3}}$ <p>Оба условия принципа математической индукции выполнены, следовательно исходное неравенство справедливо для всех натуральных n.</p>		
3 этап. Заключительная часть	-Ребята, сегодня все молодцы! Предлагаю вам провести анализ нашей деятельности. Каждый человек из первого ряда	Проводят рефлексию своей деятельности.	способность к самооценке на основе

<p>Подводит итоги занятия совместно с обучающимися, будет координировать обсуждение и делать акцент на важных моментах. Задает домашнее задание.</p>	<p>скажет по одному предложению на вопрос : что интересного узнали сегодня. Второй ряд скажет чего им не хватило или было недостаточно на уроке, а третий ряд прокомментирует ответы первого и второго ряда. Потом совместно подведем итоги.</p> <p>-Давайте запишем домашнее задание. Вам необходимо будет доказать неравенство Коши для n переменных с помощью метода математической индукции. Можете работать в парах, в группах, а на следующем уроке представить свое доказательство, также можете использовать вспомогательные средства: презентацию, другие цифровые технологии, карточки и все что вам потребуется для ответа. Неравенство Коши показано на слайде.</p> $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \dots a_n}.$		<p>критериев успешности учебной деятельности;</p> <p>оценивать правильность выполнения действия на уровне адекватной ретроспективной оценки соответствия результатов требованиям данной задачи и задачной области.</p>
--	---	--	--

Заключение

В представленной работе рассмотрены основные способы доказательства неравенств, проведен анализ школьных учебников, ФГОС, примерных рабочих программ, перечней олимпиад утвержденных Министерством просвещения и Министерством науки и высшего образования. Подобраны примеры для демонстрации излагаемого теоретического материала. Разработан факультатив по теме «Доказательство неравенств» и подобран задачный материал.

В школе не уделяется должного внимания методам доказательства неравенств. Обучающиеся не успевают осваивать весь необходимый объем знаний, так как тема рассматривается только в ознакомительном порядке. Хотя часто встречается на олимпиадах различных уровней, на научных конференциях и в целом тема интересна для изучения, во многом способствует развитию творческого и критического мышления, потому что для доказательства неравенств нет одного конкретного алгоритма, мы должны подключать логику, интуицию и правильно оперировать имеющимися знаниями.

Таким образом, необходимо изучать эту тему дополнительно, например, на факультативных занятиях, с целью освоения различных способов доказательства неравенств и развития умения применять знания на практических занятиях.

Список использованной литературы

1. Азаров А. И., Барвенков С. А. Математика для старшеклассников: методы решения алгебраических уравнений, неравенств и систем: пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общего среднего образования. М. : Аверсэв, 2004. 448 с.
2. Алгебра 8 класс : учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. М. : Просвещение, 2013. 287 с.
3. Алгебра 8 класс : учебник для общеобразовательных учреждений. Углубленный уровень / Ю. Н. Макарычев [и др.]. М. : Просвещение, 2018. 353 с.
4. Алгебра 9 класс : учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. М. : Просвещение, 2018. 384 с.
5. Алгебра 9 класс. Углубленный уровень : учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев [и др.]. М. : Просвещение, 2014. 271 с.
6. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Базовый уровень : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мерзляк [и др.]. М. : Вентана-граф, 2019. 415 с.
7. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Базовый уровень : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мерзляк [и др.]. М. : Вентана-граф, 201. 286 с.
8. Всероссийские олимпиады школьников по математике / Н. Х. Агаханов [и др.]. М. : МЦНМО, 2007. 472 с.
9. Горбачев Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. М. : МЦНМО, 2005.
10. Доказательство неравенств в школьном курсе математики. URL: https://fhd.multiurok.ru/2018/10/15/s_5bc43296127e9/phpvAcCy4_Doka

[zatelstvo-neravenstv-v-shkolnom-kurse-matematiki-uchitel-Haritonova-L.V.pdf?metodicheskie-rekomendatsii-dokazatelstvo-neravens.pdf](#). Заглавие с экрана (дата обращения: 15.03.2023).

11. Доказательство неравенств в школьном курсе математики. Методические рекомендации.URL:
https://fhd.multiurok.ru/2018/10/15/s_5bc43296127e9/phpvAcCy4_Dokazatelstvo-neravenstv-v-shkolnom-kurse-matematiki-uchitel-Haritonova-L.V.pdf?metodicheskie-rekomendatsii-dokazatelstvo-neravens.pdf. Заглавие с экрана (дата обращения: 9.01.2023).

12. Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия. 2-е изд., М. : Просвещение, 1991. 353 с.

13. Метод математической индукции. URL:
https://www.dvfu.ru/upload/medialibrary/5ab/Zinovev_P.V._Metod_matematicheskoi_indukcii.pdf. Заглавие с экрана (дата обращения: 24.11.2022).

14. Мишин В. И. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика: учебное пособие для студентов педагогических институтов по физико-математической специальности. М. : Просвещение, 1987. 416 с.

15. Мордкович А. Г., Николаев Н. П. Алгебра 9 класс. Базовый уровень : учебник для общеобразовательных учреждений. М. : Мнемозина, 2015. 258 с.

16. Мордкович А. Г., Николаев Н. П. Алгебра 9 класс. Базовый уровень : учебник для общеобразовательных учреждений. М. : Мнемозина, 2015. 256 с.

17. Примерная образовательная программа основного общего образования. Базовый уровень. URL: <https://fgosreestr.ru/ooop/primernaia-rabochoia-programma-osnovnogo-obshchego-obrazovaniia-matematika>. Заглавие с экрана (дата обращения: 11.10.2023).

18. Примерная образовательная программа основного общего образования. Углубленный уровень. URL: <https://fgosreestr.ru/ooop/primernaia-rabochaia-programma-po-uchebnomu-predmetu-matematika-uglublionnyi-uroven>. Заглавие с экрана (дата обращения: 16.11.2022).

19. Примерная образовательная программа среднего общего образования. Углубленный уровень. URL: <https://fgosreestr.ru/ooop/primernaia-rabochaia-programma-srednego-obshchego-obrazovaniia-uchebnogo-predmeta-matematika-uglublennnyi-uroven-dlia-10-11-klassov-obrazovatelnykh-organizatsii>. Заглавие с экрана (дата обращения: 09.12.2022).

20. Примерная образовательная программа среднего общего образования. Базовый уровень. URL: <https://fgosreestr.ru/ooop/primernaia-rabochaia-programma-srednego-obshchego-obrazovaniia-uchebnogo-predmeta-matematika-bazovyi-uroven-dlia-10-11-klassov-obrazovatelnykh-organizatsii>. Заглавие с экрана (дата обращения: 21.09.2022).

21. Сборник задач. Метод математической индукции. URL: http://www.unn.ru/books/met_files/mmi.pdf. Заглавие с экрана (дата обращения: 26.03.2023).

22. Седракан Н. М., Авоян. Н. М. Неравенства. Методы доказательства / М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. 256 с.

23. Творческая работа "Методы доказательства числовых неравенств и их использование при решении прикладных задач". URL: <https://infourok.ru/tvorcheskaya-rabota-po-teme-metodi-dokazatelstva-chislovih-neravenstv-i-ih-primenenie-pri-reshenii-prikladnih-zadach-634758>. Заглавие с экрана (дата обращения: 27.01.2023).

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
« 20 » 09 20 22 г.
Пенз Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Девликамовой Юлии Кямильевны
(ФИО полностью)

Тема работы Различные способы доказательства неравенств

Утверждена приказом по Университету от « 28.09 » 20 22 г. № 805/0

Срок сдачи студентом законченной работы « 04 » *мая* 20 23 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Проведение сравнительного анализа школьных учебников и Примерных рабочих программ в соответствии с рассматриваемой темой.	Октябрь-ноябрь 2022	выполнено
2.	Анализ научной и учебно-методической литературы.	Декабрь 2022	выполнено
3.	Анализ олимпиад по математике, утвержденных Министерством просвещения и Министерством науки и высшего образования в РФ.	Январь 2023	выполнено
4.	Обобщение и формулирование основных методов доказательства неравенств.	Январь-февраль 2023	выполнено
5.	Разработка рабочей программы факультатива на тему «Доказательство неравенств».	Март-апрель 2023	выполнено
6.	Составление карточек с задачным материалом, разработка технологических карт по темам «Метод оценки знака разности», «Метод доказательства неравенств «от противного»», «Метод математической индукции».	Апрель-май 2023	выполнено
7.	Оформление текста работы.	Май 2023	выполнено
8.	Подготовка презентации и выступления.	Июнь 2023	выполнено

Дата выдачи задания «20» 09 2022г.

Руководитель Моф Можакова О.А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

Ри Ревинашова Ю. К.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Девликамовой Юлии Кямильевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Девликамова Юлия Кямильевна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика», прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Различные способы доказательства неравенств», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


ПОДПИСЬ
24.04.2023
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 24.04.2023
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР 
ПОДПИСЬ О. А. Монахова

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Различные способы доказательства неравенств»

студентки 4 курса Девликамовой Юлии Кямильевны
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
профиля «Математика»

Руководитель ВКР Монахова Оксана Александровна

Отчет о проверке на заимствования №1



Автор: Девликамова Юлия Кямильевна
Проверяющий: Монахова Оксана Александровна
Организация: Пензенский государственный университет
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - <http://apcsu.antiplagiat.ru>

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 64
Начало загрузки: 27.04.2023 10:24:47
Длительность загрузки: 00:00:17
Имя исходного файла: vkr_Devlikamova.pdf
Название документа: vkr_Devlikamova.pdf
Размер текста: 81 КБ
Символов в тексте: 82715
Слов в тексте: 10642
Число предложений: 712

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 27.04.2023 07:26:26
Длительность проверки: 00:02:32
Комментарий: не указан
Поиск с учетом редактирования: да
Проверенные разделы: титульный лист с. 0, содержание с. 0, основная часть с. 0, библиография с. 0
Модули поиска: ИПС Адвлет, Библиография, Сводная коллекция РЭС, Интернет Плюс, Сводная коллекция РГБ, Цитирование, Переводные заимствования (RuEn), Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu), Переводные заимствования по Интернету (EnRu), Переводные заимствования издательства Wiley, eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ: аналитика, СПС ГАРАНТ: нормативно-правовая документация, Медицина, Диссертации НБС, Коллекция НБУ, Перефразирование по eLIBRARY.RU, Перефразирование по СПС ГАРАНТ: аналитика, Перефразирование по Интернету, Перефразирование по Интернету (En), Патенты СССР, РФ, СНГ, Модуль поиска "ПГУ", СМИ России и СНГ, Шаблоны фразы, Кольцо вузов, Издательство Wiley, Переводные заимствования



СОВПАДАНИЯ
18,62%

САМОЦИТИРОВАНИЯ
0%

ЦИТИРОВАНИЯ
12,79%

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
88,63%

27.04.23

ДД.ММ.ГГГГ

Мф
ПОДПИСЬ

О. А. Монахова

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Различные способы доказательства неравенств»
студентки Девликамовой Юлии Кямильевны
факультета физико-математических и естественных наук направления
подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 19ФПМ1

Знакомство школьников с доказательствами, с различными методами доказательств и обучение доказательству математических утверждений – одна из составляющих математического образования. Обучение доказательству неравенств - одна из ступеней при формировании математического мировоззрения школьника.

Целью представленной работы была разработка программы факультатива «Доказательство неравенств» в 8-9 классах.

В ходе работы Девликамовой Ю.К. была составлена система задач по некоторым методам доказательства неравенств. Разработаны рекомендации для учителя по работе с представленными заданиями.

Работа заслуживает оценки «отлично» и может быть использована в учебном процессе учителем при олимпиадной подготовке учащихся.

Руководитель ВКР:
Монахова Оксана Александровна,
кафедра «Математическое образование»
Педагогического института
им. В.Г. Белинского, ПГУ, доцент,
доцент, кандидат физико-математических наук

