

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук
Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

**«Методические особенности изучения тригонометрических уравнений и
неравенств в школе»**

Студент

Ирина Сергеевна Назаренко
(подпись, дата)

Назаренко Ирина Сергеевна
(ФИО полностью)

Руководитель

О. Г. Никитина
(подпись, дата)

Никитина О. Г.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Е. Г. Журавлева
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 07.06.24 № 12)

Заведующий кафедрой

В. И. Паньженский
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 28.06.24 № 14)

Секретарь ГЭК

Е. Г. Журавлева
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2024

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ	6
1.1 Роль и место тригонометрических уравнений и неравенств в школьном курсе математики	6
1.2 Особенности изучения раздела тригонометрии	7
1.3 Содержание и анализ материала о тригонометрических уравнениях и неравенствах в различных школьных программах и учебниках	9
1.4 Тригонометрические уравнения и методы их решения	30
1.5 Тригонометрические неравенства и методы их решения	39
ГЛАВА 2. ФОРМИРОВАНИЕ УМЕНИЙ И НАВЫКОВ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В УСЛОВИЯХ РЕАЛИЗАЦИИ ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСА НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ПОДХОДА	47
2.1 Теоретические основы организации дифференцированного подхода к обучению. Формы и виды дифференцированного обучения	47
2.2 Методические рекомендации по организации дифференцированного подхода на занятиях по обучению решению тригонометрических уравнений и неравенств	56
2.3 Факультативный курс по теме «Тригонометрические уравнения и неравенства»	62
2.4 Апробация факультативного курса	66
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	70
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	72
ПРИЛОЖЕНИЕ	

ВВЕДЕНИЕ

Одним из ведущих критериев оценки знаний обучающегося в школе является успешность усвоения программного материала. Когда ученик ввиду различных обстоятельств попадает в ситуацию "неуспешности", он начинает терять интерес к обучению.

Одной из сложных дисциплин старшей школы является тригонометрия. Тригонометрические уравнения и неравенства занимают одно из центральных мест в курсе математики средней школы как по содержанию учебного материала, так и по способам учебно-познавательной деятельности, которые могут и должны быть сформированы при их изучении и применены к решению большого числа задач теоретического и прикладного характера, а так же при решении заданий единого государственного экзамена. Однако, ввиду постоянных модернизаций образовательного процесса, дополнительных обязательных уроков, занятий драгоценное время на изучение тригонометрических уравнений и неравенств сокращается, что создает ощутимые трудности в усвоении материала у слабоуспевающих учеников. Обучающийся, не усвоивший курс тригонометрии рискует не только потерять интерес к математике в целом, но и испытать трудности на ЕГЭ, потерять важные связующие элементы в смежных с математических дисциплинах.

Актуальность темы - недостаток времени для изучения тригонометрических уравнений и неравенств в классах с базовым профилем подготовки способствует слабому усвоению этих тем обучающимися, что побуждает на поиски дополнительного времени, форм и методов преподавания.

Объект исследования - процесс обучения математике.

Предмет исследования - методика формирования умений решать тригонометрические уравнения и неравенства.

Цель исследования - разработка и апробация факультативного курса "Тригонометрические уравнения и неравенства".

В процессе достижения цели работы необходимо решить следующие задачи:

1. Выявить роль, место, методические особенности преподавания тригонометрии;
2. Изучить учебную литературу о тригонометрических уравнениях и неравенствах в школьном курсе математики;
3. Изучить психолого-педагогическую литературу об использовании дифференцированного обучения;
4. Определить методические особенности дифференцированного обучения на уроках тригонометрии;
5. Разработать факультативный курс по теме «Решение тригонометрических уравнений и неравенств на основе дифференцированного подхода»;
6. Апробировать факультативный курс в общеобразовательной школе.

Практическая значимость работы заключается в том, что ее материалы могут использовать учителя старших классов при обучении решению тригонометрических уравнений и неравенств.

Структура работы: Работа состоит из двух разделов, введения и выводов. Во введении обоснована актуальность проблемы исследования. В первой главе отражены теоретические аспекты изучения тригонометрических уравнений и неравенств в школьном курсе математики, обозначены роль и место изучения тригонометрических уравнений и неравенств. Здесь же описаны виды и основные методы решения тригонометрических уравнений и неравенств. Вторая глава посвящена формированию умений и навыков решения тригонометрических уравнений и неравенств в условиях реализации факультативного курса на основе дифференцированного подхода. В этой главе рассмотрена сущность дифференцированного подхода, особенности его применения при рассмотрении тем "Тригонометрические уравнения" и "Тригонометрические неравенства". Во второй главе описана программа

факультативного курса, приведены технологические карты уроков, дифференцированные самостоятельные работы. Апробация курса представлена здесь же.

ГЛАВА I. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1 Роль и место тригонометрических уравнений и неравенств в школьном курсе математики

Программу школьного курса математики невозможно представить без блока «Тригонометрия». Тригонометрия изучается в старших классах неспроста, ведь чтобы освоить этот курс потребуются прочные знания основного школьного курса математики. При детальном анализе учебников математики за 10 класс можно четко определить место тригонометрических уравнений и неравенств в школьном курсе математики. Как правило, изучение тригонометрических уравнений происходит после изучения таких тем, как «Преобразование тригонометрических выражений», «Графики тригонометрических функций и их свойства».

В блоке, посвященном решению тригонометрических уравнений и неравенств, изучаются понятия: арксинус, арккосинус, арктангенс, арккотангенс. Далее идет обучение решению простейших тригонометрических уравнений, после чего обучающиеся знакомятся с различными методами решения тригонометрических уравнений. Тригонометрические неравенства изучаются в последнюю очередь и сводятся к решению тригонометрических уравнений. Исходя из учительского опыта мы знаем, что умения закрепляются лучше и прочнее, когда знания применяются на практике – при решении задач практического характера или когда знания становятся ключом к решению других заданий[13].

Например, каждое сложное тригонометрическое уравнение сводится к решению простейшего тригонометрического уравнения, а возможно даже и к частному виду такого уравнения. То же относится и к решению

тригонометрических неравенств. Тем самым, следуя принципу «от простого к сложному», мы показываем ученикам, как им помогут знания, приобретенные на уроках тригонометрии.

В случае если тригонометрические уравнения и неравенства изучаются после «Преобразования тригонометрических выражений» и «Графики тригонометрических функций и их свойства», то место тем «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» определяется через обобщение и систематизацию знаний по предыдущим темам [17].

В некоторых учебниках тригонометрические уравнения и неравенства изучаются до темы «Преобразование тригонометрических выражений». В таком случае на изучение тригонометрических уравнений отводится больше времени: при изучении новой формулы, она сразу же применяется при решении уравнений и неравенств. При таком подходе само тригонометрическое уравнение служит средством для закрепления тригонометрических формул.

Подводя итог можно сказать одно, что независимо от места изучения тригонометрических уравнений и неравенств их роль и значение очень велико. Здесь стоит отметить только одно, что чрезвычайно мало времени отводится на изучения таких важных тем.

1.2 Особенности изучения раздела тригонометрии

В настоящее время мало кто из учеников старшей школы сможет ответить на вопрос о роли тригонометрии в культуре человека. До второй половины двадцатого века тригонометрию воспринимали как одну из отраслей развития математической науки, на изучение которой отводилось по 2 часа в неделю [19]. Но затем отношение к тригонометрии изменилось. В середине шестидесятых годов прошла «реформа А. Н. Колмогорова», что изменило преподавание этой науки. Общеобразовательная школа отказалась от изучения

темы тригонометрия, как способа развития математического мышления. Тем самым время на изучение этой темы стали ограничивать.

Тригонометрия имеет большое значение в школьном курсе математики. В изучение этого раздела входят базовые понятия и преобразования выражений, решение уравнений и неравенств и построение графиков, исследование функций. Курс тригонометрии очень хорошо реализует межпредметную связь. Конечно, изучение этого раздела связано с большим количеством сложностей: высокий уровень абстракции, сложная структура определений, недостаток учебного времени [16].

Тригонометрия играет очень важную роль в образовании школьников. При изучении данного раздела рекомендуют использовать индуктивный подход, предполагающий сбор и анализ данных, на основании которых обучающиеся строят гипотезы и теории. Можно выделить вектор изучения тригонометрии: тригонометрия острых углов→тригонометрия всех углов→тригонометрические функции. Конечно, изучение такого пласта науки предполагает большого объема времени, чем не может похвастаться современный образовательный процесс. В методических разработках по тригонометрии большое внимание уделяется раннему знакомству учеников с единичной окружностью[21].

В старшей школе, когда обучение тригонометрии только начинается, преподаватель не может уделить достаточно времени на обработку решения простейших тригонометрических уравнений и неравенств. В некоторых учебниках авторы уделяют внимание заданиям на нахождение координат точек пересечения окружности и осей координат, что служит пропедевтическим этапом к дальнейшему изучению тригонометрии[8].

1.3 Содержание и анализ материала о тригонометрических уравнениях и неравенствах в различных школьных программах и учебниках

Перед тем, как перейти к содержанию тригонометрического материала в школьных учебниках мы обратимся к примерным рабочим программам. Содержание и анализ материала по тригонометрии в федеральной рабочей программе 10-11 классов 2023-2024 уч. года. Программа по математике на уровне среднего общего образования разработана на основе ФГОС СОО с учётом современных мировых требований, предъявляемых к математическому образованию, и традиций российского образования.

Рассмотрим программу базового уровня обучения математике [23]. Изучаемая нами тема находится в учебном курсе «Алгебра и начала математического анализа». В 10 классе, главе «Числа и вычисления» изучается синус, косинус и тангенс числового аргумента, арксинус, арккосинус и арктангенс числового аргумента, тригонометрическая окружность, определение тригонометрических функций числового аргумента, основные тригонометрические формулы, преобразование тригонометрических выражений, решение тригонометрических уравнений. На усвоение материала отводится 22 часа. Обучающийся должен оперировать понятиями: синус, косинус и тангенс произвольного угла, использовать запись произвольного угла через обратные тригонометрические функции, выполнять преобразования тригонометрических выражений, решать основные типы тригонометрических уравнений. К концу обучения в 10 классе обучающийся сможет выполнять преобразования тригонометрических выражений и решать тригонометрические уравнения.

В 11 классе в разделе «Уравнения и неравенства» изучаются тригонометрические функции и их графики, тригонометрические неравенства. На это отводится 9 часов. Обучающийся должен строить, анализировать,

сравнивать графики тригонометрических функций, формулировать и иллюстрировать графически свойства тригонометрических функций, решать простейшие тригонометрические неравенства. Использовать графики для решения тригонометрических неравенств. К концу обучения в 11 классе обучающийся научится находить решение простейших тригонометрических неравенств.

Рассмотрим федеральную программу углубленного уровня изучения математики [24]. Углубленный учебный курс «Алгебра и начала математического анализа» является одним из наиболее значимых в программе среднего общего образования, поскольку, с одной стороны, он обеспечивает инструментальную базу для изучения всех естественнонаучных курсов, а с другой стороны, формирует логическое и абстрактное мышление обучающихся на уровне, необходимом для освоения других дисциплин. В рамках данного учебного курса обучающиеся овладевают универсальным языком современной науки, которая формулирует свои достижения в математической форме.

В 10 классе после изучения показательных и логарифмических уравнений идёт изучение тригонометрических выражений и уравнений. На это отводится 22 часа. Изучается: синус, косинус, тангенс и котангенс числового аргумента, арксинус, арккосинус и арктангенс числового аргумента, тригонометрическая окружность, определение тригонометрических функций числового аргумента, основные тригонометрические формулы, преобразование тригонометрических выражений, решение тригонометрических уравнений. Ученик должен знать определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса числового аргумента; а также арксинуса, арккосинуса и арктангенса числа, применять основные тригонометрические формулы для преобразования тригонометрических выражений, применять формулы тригонометрии для решения основных типов тригонометрических уравнений.

В 11 классе после изучения первообразной и интеграла обучающиеся проходят тригонометрические функции, их свойства и графики, а так же

решение тригонометрических неравенств. На это отводится 14 часов. После изучения темы школьники должны применять формулы тригонометрии для решения основных типов тригонометрических неравенств.

Подводя итог, можно сделать вывод, что на данный момент нет единого подхода к обучению тригонометрии в школьном курсе математики. Федеральные образовательные программы носят рекомендательный характер, и пока не все современные учебники соответствуют её требованиям и структуре, поэтому методы, подходы, время, выделяющееся для изучения тем, отличаются. Но можно выделить основную методическую линию: изучение основных тригонометрических понятий и формул → решение тригонометрических уравнений → решение тригонометрических неравенств. Так же в рабочих программах предусмотрена профильная дифференциация учебного материала, но вот про уровненную дифференциацию не сказано ни слова, следовательно, организация такой работы полностью ложиться на плечи педагога.

Теперь подробнее остановимся на рабочих программах Мордковича А.Г., Колягина Ю.М., Алимова Ш.А. и сравним, сколько времени уделяют авторы на изучение тригонометрических уравнений и неравенств и какие темы рассматривают. Следует отметить, что рабочие программы делятся на два уровня: базовый и профильный.

На изучение алгебры и начал анализа в программе базового уровня отводится 3 часа в неделю, а на изучение профильного уровня отводится 4-5 часов в неделю.

В таблице 1 представим примерное поурочное планирование программы базового уровня изучения алгебры и начал анализа Мордковича А. Г. [4].

Таблица 1 - Поурочное планирование программы базового уровня изучения алгебры и начал анализа Мордковича А. Г.

№п/п	Тема	Количество часов
1	Решение уравнения $\cos x = a$	2
2	Решение уравнения $\sin x = a$	2
3	Решение уравнений $tg x = a$	2
4	Решение уравнений $ctg x = a$	2
5	Уравнения, решаемые методом замены переменной	2
6	Однородные тригонометрические уравнения	3
7	Метод разложения на множители	2
8	Урок обобщения и систематизации знаний	-
9	Контрольная работа	1
10	Анализ контрольной работы	1
Итого		17

В таблице 2 представим примерное поурочное планирование программы базового уровня изучения алгебры и начал анализа Колягина Ю. М. [6].

Таблица 2 - Поурочное планирование программы базового уровня изучения алгебры и начал анализа Колягина Ю. М.

№ п/п	Тема	Количество часов
1	Решение уравнения $\cos x = a$	3
2	Решение уравнения $\sin x = a$	3
3	Решение уравнений $tg x = a$	2
4	Решение уравнений $ctg x = a$	-
5	Уравнения, решаемые методом замены переменной	2
6	Однородные тригонометрические уравнения	3

7	Метод разложения на множители	1
8	Урок обобщения и систематизации знаний	1
9	Контрольная работа	1
10	Анализ контрольной работы	-
Итого		16

В таблице 3 представим примерное поурочное планирование программы базового уровня изучения алгебры и начал анализа Алимова Ш. А. [25].

Таблица 3 - Поурочное планирование программы базового уровня изучения алгебры и начал анализа Алимова Ш. А.

№ п/п	Тема	Количество часов
1	Решение уравнения $\cos x = a$	3
2	Решение уравнения $\sin x = a$	3
3	Решение уравнений $\operatorname{tg} x = a$	2
4	Решение уравнений $\operatorname{ctg} x = a$	-
5	Уравнения, решаемые методом замены переменной	2
6	Однородные тригонометрические уравнения	2
7	Метод разложения на множители	2
8	Урок обобщения и систематизации знаний	1
9	Контрольная работа	1
10	Анализ контрольной работы	-
Итого		16

Исходя из данных таблиц 1, 2, 3 можно сделать вывод, что во всех программах базового уровня на изучение простейших тригонометрических уравнений вида $\cos x = a$, $\sin x = a$, $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ отводится много уроков, что можно связать с тем, что решение тригонометрических уравнений

сводится к решению простейших уравнений. Тем более простейшие тригонометрические уравнения встречаются в ЕГЭ базового уровня.

Далее программа обращается к различным методам решения тригонометрических уравнений. Первый из них – метод замены переменной. На его изучение во всех программах отводится 2 часа.

После внимание авторов падает на однородные тригонометрические уравнения. В таблице 1 и 2 на эту тему отводится 3 часа, а в таблице 3 - всего 2 часа. Два и три часа достаточно солидное время для изучения одной темы, но в данном случае это обусловлено тем, что к однородным уравнениям относятся уравнения разных видов: первой степени, второй степени, неполные уравнения второй степени.

Вернемся к методам решения уравнений и следующий – метод разложения на множители. В таблице 1 и 3 на изучение этой темы отводят 2 часа, так как авторы отводят время на алгебраические преобразования и применение тригонометрических формул (формулы двойного угла, формулы приведения, основные тригонометрические тождества) при решении уравнений. Во 2 таблице на изучение этого метода отводится 1 час.

Урок обобщения и систематизации знаний по теме «Тригонометрические уравнения» есть не во всех программах. А. Г. Мордкович не закладывает время на обобщение темы, что нельзя сказать про Ю. М. Колягина и Ш. А. Алимова, которые отводят на это 1 час.

Что касается времени на контрольную работу, то все рабочие программы включают в себя 1 час на написание проверочной работы по изученному материалу. Но только в программе у А. Г. Мордковича заложен 1 час на проведение анализа контрольной работы, для того чтобы оценить уровень знаний, выявить типичные ошибки.

Теперь перейдем к анализу рабочих программ профильного уровня по темам «Тригонометрические уравнения и неравенства» тех же авторов.

В таблице 4 представим примерное поурочное планирование программы профильного уровня изучения алгебры и начал анализа Мордковича А. Г. [4].

Таблица 4 - поурочное планирование программы профильного уровня изучения алгебры и начал анализа Мордковича А. Г.

№ п/п	Тема	Количество часов
1	Простейшие уравнения и неравенства	4
2	Уравнения, решаемые методом замены переменной	1
3	Однородные тригонометрические уравнения	2
4	Метод разложения на множители	1
5	Метод оценки левой и правой части	-
6	Метод вспомогательного угла (аргумента)	1
7	Урок обобщения и систематизации знаний	-
8	Контрольная работа	1
9	Решение тригонометрических уравнений с применением формул (синус, косинус, тангенс, котангенс суммы и разности двух аргументов, формул приведения, формул двойного аргумента, преобразование сумм в произведение, преобразование в сумму)	5
10	Метод универсальной подстановки	1
Итого		16

В таблице 5 представим примерное поурочное планирование программы профильного уровня изучения алгебры и начал анализа Колягина Ю. М. [12].

Таблица 5 - Поурочное планирование программы профильного уровня изучения алгебры и начал анализа Колягина Ю. М.

№ п/п	Тема	Количество часов
1	Решение уравнения $\cos x = a$	3
2	Решение уравнения $\sin x = a$	3
3	Решение уравнений $tg x = a$	3
4	Решение уравнений $ctg x = a$	-
5	Уравнения, решаемые методом замены переменной	2
6	Однородные тригонометрические уравнения	2
7	Метод разложения на множители	1
8	Метод оценки левой и правой части	1
9	Метод вспомогательного угла (аргумента)	2
10	Урок обобщения и систематизации знаний	1
11	Тригонометрические неравенства	2
12	Контрольная работа	1
13	Решение тригонометрических уравнений с применением формул (синус, косинус, тангенс, котангенс суммы и разности двух аргументов, формул приведения, формул двойного аргумента, преобразование сумм в произведение, преобразование в сумму)	+
14	Метод универсальной подстановки	-
Итого		21

В таблице 6 представим примерное поурочное планирование программы профильного уровня изучения алгебры и начал анализа Алимова Ш. А. [25].

Таблица 6 - поурочное планирование программы профильного уровня изучения алгебры и начал анализа Алимова Ш. А.

№ п/п	Тема	Количество часов
1	Решение уравнения $\cos x = a$	3
2	Решение уравнения $\sin x = a$	3
3	Решение уравнений $tg x = a$	2
4	Решение уравнений $ctg x = a$	-
5	Уравнения, решаемые методом замены переменной	1
6	Однородные тригонометрические уравнения	1
7	Метод разложения на множители	1
8	Метод оценки левой и правой части	1
9	Метод вспомогательного угла (аргумента)	2
10	Решение простейших тригонометрических неравенств	2
11	Урок обобщения и систематизации знаний	2
12	Контрольная работа	1
13	Решение тригонометрических уравнений с применением формул (синус, косинус, тангенс, котангенс суммы и разности двух аргументов, формул приведения, формул двойного аргумента, преобразование сумм в произведение, преобразование в сумму)	+
14	Метод универсальной подстановки	-
Итого		19

Анализируя профильный уровень подготовки несложно заметить, что время на изучение тем увеличилось.

Как и базовый уровень обучения, профильный начинается с изучения простейших тригонометрических уравнений. У Мордковича А. Г. совместно с простейшими тригонометрическими уравнениями изучаются и простейшие тригонометрические неравенства. На изучение этих тем отводится от 4 до 9

часов. А у коллег, чьи рабочие программы представлены в таблицах 2 и 3, на изучение тригонометрических неравенств отводится по 2 часа, и изучаются они отдельно от простейших тригонометрических уравнений после прохождения основных методов решения уравнений.

Далее авторами уделяется по 1-2 часа на решение уравнений методом замены переменных. Но однородным тригонометрическим уравнениям все авторы выделяют по 2 учебных часа, так как рассматривают несколько методов решения.

Следом изучается решение тригонометрических уравнений методом введения вспомогательного угла (аргумента). У Мордковича А. Г. после темы «Преобразование тригонометрических выражений» идет изучение метода вспомогательного угла, и отводится на это 1 час. А вот в таблице 2 и на изучение этих тем отводится по 2 часа.

В таблицах 1, 2, 3 присутствует урок обобщения и систематизации знаний, который служит подспорьем в дальнейшей контрольной работе.

После каждый автор отводит 1 час на контрольную работу, для проверки знаний, сформированности навыков. Это позволит учителям оценить прохождение учебной программы.

Есть существенное отличие среди рабочих программ Мордковича А. Г. и других. Автор отводит время на изучение еще одного метода решения тригонометрических уравнений – метод универсальной подстановки. А ведь чем больше методов решения уравнений знает ученик, тем выше его шанс на решение заданий ЕГЭ.

На этом этапе мы обратимся к учебникам алгебры и началам математического анализа. Анализировать и сравнивать будем учебники тех же авторов, чьи рабочие программы рассматривали в предыдущем параграфе.

В таблице 7 представим содержание учебника Мордковича А. Г. [4] по темам «Тригонометрические уравнения и неравенства» базовый и углубленный уровень.

Таблица 7 - Содержание учебника Мордковича А. Г. по темам
«Тригонометрические уравнения и неравенства» базовый и углубленный
уровень»

Название темы	Содержание темы
Уравнения вида $\cos x = a$	Приведена информация об общих формулах, приведены примеры решения уравнений, показаны иллюстрации.
Уравнения вида $\sin x = a$	Приведена информация об общих формулах, приведены примеры решения уравнений, показаны иллюстрации.
Уравнения вида $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$	Приведена информация об общих формулах, приведены примеры решения уравнений, показаны иллюстрации.
Метод замены переменной	Приведено описание метода, показаны примеры решения уравнения данным методом.
Метод разложения на множители	Приведено описание метода, показаны примеры решения уравнения данным методом.
Однородные тригонометрические уравнения	Приведено описание метода, алгоритм действий, показаны примеры решения уравнения данным методом.
Уравнения вида $A \sin x + B \cos x = C$	Приведено описание методов: введение вспомогательного угла, универсальной подстановки, приведение к однородному. Показаны примеры решения уравнения.
Тригонометрические уравнения с применением формул	Приведены все формулы преобразования тригонометрических уравнений. Показаны примеры решения уравнений.
Тригонометрические	Приведены решения простейших

неравенства	тригонометрических неравенств.
-------------	--------------------------------

В таблице 8 представим содержание учебника Колягин Ю. М. [6] по темам «Тригонометрические уравнения и неравенства» базовый и углубленный уровень.

Таблица 8 - Содержание учебника Колягин Ю. М. по темам «Тригонометрические уравнения и неравенства» базовый и углубленный уровень»

Название темы	Содержание темы
Уравнения вида $\cos x = a$	Приведена информация об общих формулах, приведены примеры решения уравнений, показаны иллюстрации.
Уравнения вида $\sin x = a$	Приведена информация об общих формулах, приведены примеры решения уравнений, показаны иллюстрации.
Уравнения вида $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$	Приведена информация об общих формулах, приведены примеры решения уравнений, показаны иллюстрации.
Метод замены переменной	Приведено описание метода, показаны примеры решения уравнения данным методом.
Метод разложения на множители	Приведено описание метода, показаны примеры решения уравнения данным методом.
Однородные тригонометрические уравнения	Приведено описание метода, алгоритм действий, показаны примеры решения уравнения данным методом.
Уравнения вида $A \sin x + B \cos x = C$	Приведено описание методов: введение вспомогательного угла, приведение к однородному. Показаны примеры решения

	уравнения.
Тригонометрические уравнения с применением формул	Приведены все формулы преобразования тригонометрических уравнений. Показаны примеры решения уравнений.
Тригонометрические неравенства	Приведены примеры решения простейших и осложненных тригонометрических неравенств. При их решении используется свойство тригонометрических функций и их графики.

В таблице 9 представим содержание учебника Алимов Ш. А. [7] по темам «Тригонометрические уравнения и неравенства» базовый и углубленный уровень.

Таблица 9 - содержание учебника Алимов Ш. А. по темам «Тригонометрические уравнения и неравенства» базовый и углубленный уровень»

Название темы	Содержание темы
Уравнения вида $\cos x = a$	Приведена информация об общих формулах, приведены примеры решения уравнений, показаны иллюстрации.
Уравнения вида $\sin x = a$	Приведена информация об общих формулах, приведены примеры решения уравнений, показаны иллюстрации.
Уравнения вида $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$	Приведена информация об общих формулах, приведены примеры решения уравнений, показаны иллюстрации.
Метод замены переменной	Приведено описание метода, показаны примеры решения уравнения данным методом.
Метод разложения на	Приведено описание метода, показаны примеры

множители	решения уравнения данным методом.
Однородные тригонометрические уравнения	Приведено описание метода, алгоритм действий, показаны примеры решения уравнения данным методом.
Уравнения вида $A \sin x + B \cos x = C$	Приведено описание методов: введение вспомогательного угла, универсальной подстановки, приведение к однородному. Показаны примеры решения уравнения.
Тригонометрические уравнения с применением формул	Приведены все формулы преобразования тригонометрических уравнений. Показаны примеры решения уравнений.
Тригонометрические неравенства	Приведены порядок действий и примеры решения простейших тригонометрических неравенств.

Исходя из данных таблиц, можно сделать вывод, что изучение разных типов уравнений идет по одинаковому порядку. Методы решения уравнений приведены одинаковые, но содержание в учебниках отличается.

Во всех учебниках в начале раздела «Тригонометрические уравнения» изучаются уравнения вида $\cos x = a$. Изучение начинают именно с этого вида уравнений, потому что его формула корней проста и ее легко объяснить с помощью наглядных пособий. В каждом учебнике достаточно подробно описывают процесс появления формулы корней уравнения. Так же все авторы приводят примеры решения уравнений такого вида с помощью единичной окружности.

После во всех учебниках изучаются уравнения вида $\sin x = a$. Авторы подробно описали появление формулы корней данного уравнения:

$$x = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \rightarrow$$

$$x = \arcsin(-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Так же все авторы приводят примеры решения уравнений такого вида с помощью единичной окружности.

Если теоретический материал по двум вышеперечисленным видам тригонометрических уравнений совпадал, то о следующих видах тригонометрических уравнений материал отличается в разных учебниках.

Тригонометрические уравнения вида: $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ у Мордковича А. Г. начинаются с пояснения образования общих формул для уравнений данных видов. У Колягина Ю. М. и Алимова Ш. А. представлена формула корней только для уравнения вида $\operatorname{tg} x = a$. Выведение формулы для уравнения вида $\operatorname{ctg} x = a$ подразумевается авторами как самостоятельная работа учеников в процессе урока, следуя примеру получения формулы для тангенса. После этого во всех учебниках представлены примеры решения таких уравнений.

После изучения простейших тригонометрических уравнений авторы учебников переходят к различным методам решения осложненных тригонометрических уравнений. В книгах приведены и описаны следующие методы: метод замены переменной, метод разложения на множители.

Однородные тригонометрические уравнения и их решение рассматриваются всеми авторами. Более полную картину решения нам могут предоставить учебники Мордковича А. Г. и Колягина Ю. М. Стоит отметить, что только у Мордковича А. Г. описан алгоритм действия решения такого вида уравнений.

При решении уравнений вида $A \sin x + B \cos x = C$ все авторы учебников пользуются методами введения вспомогательного угла и методом приведения уравнения к однородному. Но стоит отметить, что в учебнике Мордковича А. Г. представлен и третий метод решения данного вида уравнений – метод универсальной подстановки. Он рассматривается как частный случай метода введения новой переменной. Примеры решения описанных выше методов приведены и рассмотрены в учебниках.

Во всех учебниках приводятся примеры решения тригонометрических уравнений, которые решаются с помощью формул синуса, косинуса, тангенса, котангенса суммы и разности двух аргументов. Так же все авторы описывают формулу приведения, формулу двойного аргумента, преобразование суммы в произведение и преобразование в сумму.

Стоит сделать вывод, что при изучении тригонометрических уравнений во всех учебниках присутствуют простейшие тригонометрические уравнения, решение уравнений методом введения новой переменной, решение уравнений методом разложения на множители, решение однородных тригонометрических уравнений, решение уравнений методом вспомогательного угла. Мордкович А. Г. рассматривает метод универсальной подстановки. Колягин Ю. М. рассматривает метод оценки правой и левой части уравнения. Но примеры, которые приводят авторы в качестве объяснения того или иного метода решения тригонометрических уравнений в учебниках разные. Приведем их в следующих таблицах.

Описание решения тригонометрических уравнений разными методами у Мордковича А. Г. [4] представлены в таблице 10.

Таблица 10 - Методы решения тригонометрических уравнений Мордковича А. Г.

Название метода	Пример применения метода
Метод замены переменной	<p>Дано уравнение: $tg^2x + 5tgx + 6 = 0$.</p> <p>Решение: за новую переменную возьмем $t = tgx$, то $t^2 + 5t + 6 = 0$.</p> <p>$D=1; t_1 = -2, t_2 = -3$</p> <p>$\begin{cases} t_1 = -2 \\ t_2 = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tgx = -2 \\ tgx = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -arctg2 + \pi k, k \in Z \\ x = -arctg3 + \pi k, k \in Z \end{cases}$</p> <p>Ответ: $x = -arctg2 + \pi k, k \in Z; x = -arctg3 + \pi k, k \in Z;$</p>

Метод разложения на множители	<p>Дано уравнение: $\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)\left(\cos x + \frac{2}{5}\right) = 0$.</p> <p>Решение: совокупность уравнений:</p> $\begin{cases} \sin x = \frac{1}{3} \\ \cos x = -\frac{2}{5} \end{cases} \begin{cases} x = (-1)^k - \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pi \pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ <p>Ответ: $x = (-1)^k - \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \pi \pm \arccos \frac{2}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.</p>
Однородные тригонометрические уравнения первой степени	<p>Дано уравнение: $2 \sin x - 3 \cos x = 0$.</p> <p>Решение: почленно разделить правую и левую часть уравнения на $\cos x \neq 0$, откуда получим $2 \operatorname{tg} x - 3 = 0; \operatorname{tg} x = \frac{3}{2}; x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.</p> <p>Ответ: $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.</p>
Однородные тригонометрические уравнения второй степени	<p>Дано уравнение: $2 \sin^2 x - 3 \sin x \cos x + \cos 2x = 0$.</p> <p>Решение: почленно разделить правую и левую часть уравнения на $\cos^2 x$,</p> $\frac{2 \sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{3 \sin x \cos x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0;$ <p>ввести новую переменную $t = \operatorname{tg} x$ $2 \operatorname{tg}^2 x - 3 \operatorname{tg} x + 1 = 0; D=1, t_1 = 1, t_2 = \frac{1}{2}$</p> $\begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$ <p>Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.</p>
Метод универсальной подстановки	<p>Дано уравнение: $3 \sin x + 4 \cos x = 5$.</p> <p>Решение: ввести новую переменную $u = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$,</p>

	<p>перейти к рациональному уравнению $3 \frac{2u}{1+u^2} + 4 \frac{1-u^2}{1+u^2} = 5$, получим $u = \frac{1}{3}$. Рассмотрим уравнение $tg \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, найдем $\frac{x}{2} = \arctg \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}; x = 2\arctg \frac{1}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.</p> <p>Ответ: $x = 2\arctg \frac{1}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.</p>
--	--

Приведем последовательность действий при решении тригонометрического уравнения из учебника Мордковича А. Г. [4] в таблице 11.

Таблица 11 - Алгоритм решения тригонометрического уравнения $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$

Посмотреть, есть ли в уравнении член $a \sin^2 x$	
Если член $a \sin^2 x$ в уравнении содержится (то есть $a \neq 0$), то уравнение решается делением почленно обеих его частей на $\cos^2 x$ и последующим введением новой переменной $z = tg x$	Если член $a \sin^2 x$ в уравнении содержится (то есть $a = 0$), то уравнение решается методом разложения на множители (то есть выносим за скобки $\cos x$)
Решить квадратное уравнение (находим z)	Получаем совокупность уравнений: $\cos x = 0, b \sin x + \cos x = 0$
Найти значение уравнения $z = tg x$	Решить уравнение $\cos x = 0, b \sin x + \cos x = 0$
Записать ответ	Так как $b \sin x + \cos x = 0$, то следует решить уравнение с помощью почленного деления обеих

	частей уравнения на $\cos x$
	Записать ответ

Описание решения тригонометрических уравнений разными методами у Колягина Ю. М. [6] представлены в таблице 12.

Таблица 12 - Методы решения тригонометрических уравнений Колягина Ю. М.

Название метода	Пример применения метода
Метод замены переменной	<p>Дано уравнение: $4 \sin x + 3 - 3 \cos x = 5$.</p> <p>Решение: используем формулы $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$; $\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}$;</p> <p>Записать правую часть уравнения, как $5 = 5 \cdot 1 = 5 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right)$, отсюда</p> $4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + 3 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right) = 5 \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} \right)$ $\rightarrow 4 \sin^2 \frac{x}{2} - 8 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0$ <p>Далее разделить все части уравнения на $2 \cos^2 \frac{x}{2} \neq 0$, получим $4 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0$.</p> <p>Заменить $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$, получим $4t^2 - 4t + 1 = 0$, $t = \frac{1}{2}$. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$; $\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.</p> <p>Ответ: $x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.</p>
Метод оценки правой и	Дано уравнение: $\sin x \sin 9x \sin 13x = 1$.

<p>левой части уравнения (Метод присутствующий только в учебнике данного автора)</p>	<p>Решение: уравнение имеет решение при: $\sin x = 1$; $\sin x = -1$.</p> <p>Если $\sin x = 1$, то $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, откуда следует $\sin 9x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + (2 + 9n)2\pi\right) = 1$.</p> <p>Корни уравнения $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.</p> <p>Если $\sin x = -1$, то $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, откуда следует $\sin 9x = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + (2 - 9n)2\pi\right) = 1$, $\sin 13x = -1 \rightarrow \sin x \sin 9x \sin 13x = -1 \rightarrow$ корней нет.</p> <p>Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.</p>
--	---

Описание решения тригонометрических уравнений разными методами у Алимова Ш.А. [7] представлены в таблице 13.

Таблица 13 – Методы решения тригонометрических уравнений Алимова Ш. А.

Название метода	Пример применения метода
Метод замены переменной	<p>Дано уравнение: $2\sin 2x - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$.</p> <p>Решение: введем переменную $t = \sin x \cos x \rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = t^2 \rightarrow 2\sin x \cos x = t^2 - 1$, то есть $\sin 2x = t^2 - 1 \rightarrow 2(t^2 - 1) - 3t + 2 = 0$; $2t^2 - 3t = 0$; $t(2t - 3) = 0$; $t_1 = 0, t_2 = \frac{3}{2}$.</p>

	$\left[\begin{array}{l} \sin x + \cos x = 0 \mid / \cos x \neq 0 \\ \sin x + \cos x = \frac{3}{2} \text{ (не имеет решения)} \end{array} \right] \begin{array}{l} tg x \\ \\ = -1; x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z. \end{array}$ <p>Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$</p>
--	---

Исходя из данных таблиц и анализа учебников можно сделать следующие выводы: в учебнике Мордкович А. Г. приводятся примеры и описаны методы их решения не затрагивая тригонометрические формулы (формулы приведения, двойного угла и т. д.). Что касается двух других авторов, то в их учебниках изучение методов решения тригонометрических уравнений происходит с использованием преобразований, т. е. тригонометрических формул, так как преобразование тригонометрических выражений изучается перед решением тригонометрических уравнений.

Если мы будем рассматривать учебники других авторов, то кардинальным отличием можно выделить то, что в учебнике Никольского С. Н. [3] и в учебнике Муравина Г. К. вместо метода разложения на множители изучается метод замены переменной. Рассмотрим его: решите уравнение $(\sin x - 0,5)(\sin x + 1) = 0$;

Далее переходим к методу замены переменной $t = \sin x$, откуда получим $(t - 0,5)(t + 1) = 0$. Автор говорит, что множество всех решений исходного уравнения это объединение множеств всех решений двух уравнений: $\sin x = 0,5$ и $\sin x = -1$. Если решить эти простейшие тригонометрические уравнения, то мы получим три решения: $x_m = \frac{\pi}{6} + 2\pi t, t \in Z$; $x_n = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$; $x_k = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$.

Рассмотрим, как предлагает воспользоваться методом разложения на множители Муравин Г. К. [5]. Решите уравнение $\sin x - \cos 3x = 0$. Решение: заменяем $\sin x$ на $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos 3x = 0 \rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4} +$

$x) \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0$ с помощью формулы приведения. Произведение в левой части равно нулю, если один из множителей равен нулю.

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 0 \\ \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{\pi}{4} + x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{4} - 2x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} x = \pi n - \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \pi n - \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Изучение тригонометрических неравенств у Мордковича А. Г. возвращает ученика к параграфу «Числовая окружность на координатной плоскости», где приведен порядок действий решений уравнений с помощью единичной окружности.

У Алимова Ш. А. изучение решению простейших тригонометрических уравнений выделена отдельная тема, которую изучают после основного блока тригонометрических уравнений.

А учебнике Колягина Ю. М. изучение тригонометрических неравенств вынесено в главу «Тригонометрические функции» после изучения тригонометрических уравнений. Автор показывает решение не только простых тригонометрических неравенств, но и более сложных, например, квадратных.

1.4 Тригонометрические уравнения и методы их решения

Простейшие тригонометрические уравнения

При изучении этих уравнений стоит уделить им достаточно внимания и времени, так как к решению простейших тригонометрических уравнений будут сводиться все остальные виды тригонометрических уравнений.

Простейшие тригонометрические уравнения имеют вид:

$$\sin x = a, \text{ где } |a| \leq 1, x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq$$

Графическое обоснование данного вида уравнения представлено на рисунке 1.

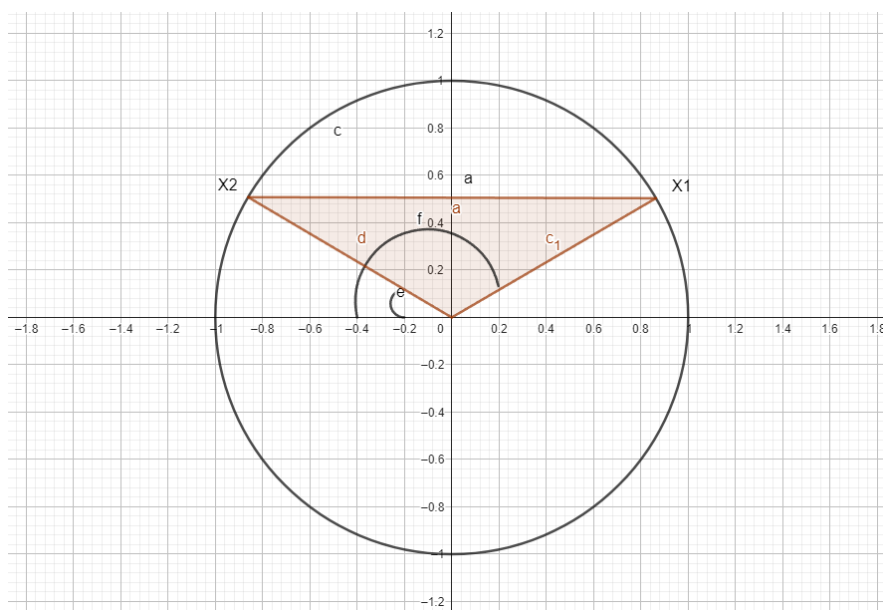


Рисунок 1 – Графическое изображение уравнения синуса

Ниже, в таблице 14 приведены частные случаи решения уравнения $\sin x = a$.

Таблица 14 - Частные случаи решения уравнения $\sin x = a$

Уравнение	Решение
$\sin x = 0$	$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = -1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\arcsin(-a) = -\arcsin a$	

Следующее простейшее тригонометрическое уравнение имеет вид:

$\cos x = a$, где $|a| \leq 1$, $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $0 \leq \arccos a \leq \pi$.

Графическое обоснование данного вида уравнений представлено на рисунке 2.

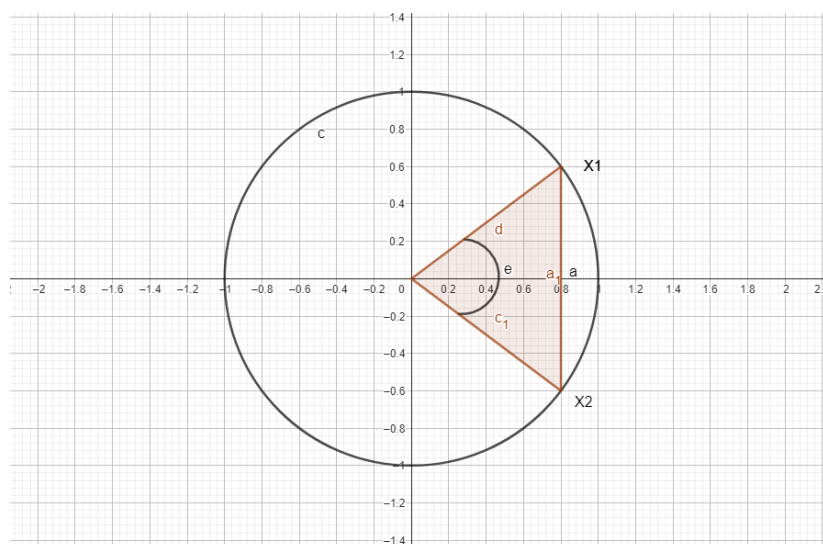


Рисунок 2 - Графическое изображение уравнения косинуса

Ниже, в таблице 15 приведены частные случаи решения уравнения $\cos x = a$.

Таблица 15 - Частные случаи решения уравнения $\cos x = a$

Уравнение	Решение
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = 1$	$x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = -1$	$x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\arccos(-a) = \pi - \arccos a$	

Следующее простейшее тригонометрическое уравнение имеет вид: $\operatorname{tg} x = a$, где a принимает любые значения, $x = \arctg a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
Графическое обоснование данного вида уравнения представлено на рисунке 3.

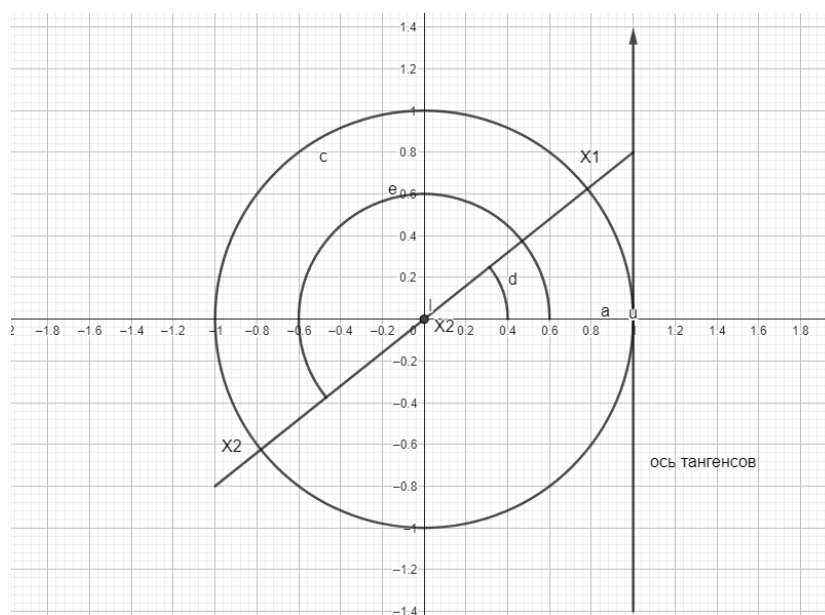


Рисунок 3 - Графическое изображение уравнения тангенса

Ниже, в таблице 16 приведены частные случаи решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$.

Таблица 16 - частные случаи решения уравнения $\operatorname{tg} x = a$.

Уравнение	Решение
$\operatorname{tg} x = 0$	$x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{tg} x = -1$	$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{arc} \operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} a$	

Следующее простейшее тригонометрическое уравнение имеет вид: $\operatorname{ctg} x = a$, где a принимает любые значения, $x = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Графическое обоснование данного вида уравнения представлено на рисунке 4.

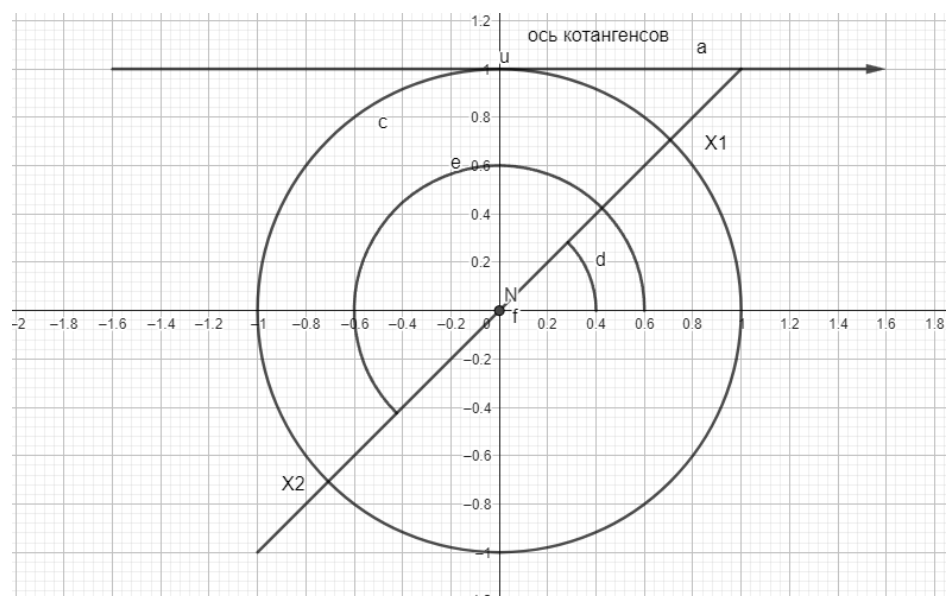


Рисунок 4 - Графическое изображение уравнения котангенса

Ниже, в таблице 17 приведены частные случаи решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$.

Таблица 17 - частные случаи решения уравнения $\operatorname{ctg} x = a$

Уравнение	Решение
$\operatorname{ctg} x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = 1$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{ctg} x = -1$	$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\operatorname{arc} \operatorname{ctg}(-a) = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{ctg} a$	

Приведем примеры простейших тригонометрических уравнений:

Пример 1 Найти $\operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$\operatorname{arc} \sin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}, \text{ так как } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ и } \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Пример 2 Найти $\operatorname{arc} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\operatorname{arc} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, так как $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in [0; \pi]$.

Пример 3 Найти $\arctg(-\sqrt{3})$. $\arctg(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, так как $\tg(-\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ и $-\frac{\pi}{3} \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Пример 4 Найти $\operatorname{arccotg} \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\operatorname{arccotg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$, так как $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{\pi}{3} \in (0; \pi)$ [2].

Теперь мы можем перейти к методам решения произвольных тригонометрических уравнений. Как мы отметили ранее, решение тригонометрических уравнений сводится к решению простейшего тригонометрического уравнения. При изучении методов решения тригонометрических уравнений отмечают два метода: метод введения переменной и метод разложения на множители. Рассмотрим каждый из них.

Метод введения новой переменной

Сущность данного метода заключается в том, что в исходном уравнении следует заменить тригонометрическую функцию или тригонометрическое выражение на «t». Далее решают алгебраическое уравнение [22].

Пример 5 Решить уравнение: $2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0$.

Проведем замену: $\sin x = t, |t| \leq 1$.

Получим: $2t^2 - 5t + 2 = 0$. $t_1 = 2$ – не удовлетворяет условию, $|t| \leq 1$.

Подставляем значение в замену t: $\sin x = \frac{1}{2}, x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Метод разложения на множители

При использовании метода разложения на множители следует вспомнить различные способы разложения на множители: вынесение за скобки общего множителя, группировка, применения формул сокращенного умножения. При использовании данным методом следует помнить, что произведение нескольких множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю, а остальные при этом имеют смысл.

Пример 6 Решить уравнение: $\sin 7x + \sin 3x = 3 \cos 2x$.

Выполняем преобразования: $2 \sin 5x \cos 2x = 3 \cos 2x \rightarrow 2 \sin 5x \cos 2x - 3 \cos 2x = 0$.

Выносим за скобки: $\cos 2x \left(\sin 5x - \frac{3}{2} \right) = 0$.

$$\begin{cases} \cos 2x = 0 \\ \sin 5x = \frac{3}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ \text{нет корней} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.

Теперь обратим внимание на тригонометрические уравнения различных видов.

К однородным тригонометрическим уравнениям относят уравнения видов:

$a \sin x + b \cos x = 0$ – однородное уравнение первой степени

$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ – однородное уравнение второй степени

Последовательность действий при решении однородных тригонометрических уравнений первой степени выглядит так:

- 1) разделить обе части уравнения на $\cos x$;
- 2) найти значение получившегося выражения.

Пример 7 Решить уравнение: $2 \sin x - 3 \cos x = 0$.

Делим обе части уравнения на $\cos x$: $2 \operatorname{tg} x - 3 = 0, \operatorname{tg} x = \frac{3}{2}, x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n$.

Ответ: $x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n$.

Последовательность действий при решении однородных тригонометрических уравнений второй степени выглядит так:

- 1) если в уравнении присутствует $a \sin^2 x$ ($a \neq 0$), то делим обе части уравнения на $\cos^2 x$;
- 2) вводим новую переменную $\operatorname{tg} x = z$;
- 3) если в уравнении нет $a \sin^2 x$ ($a = 0$), то уравнение решается методом разложения на множители (выносим за скобки $\cos x$).

Пример 8 Решить уравнение: $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$.

Так как в уравнении присутствует $a \sin^2 x$, делим обе части уравнения на $\cos^2 x$: $tg^2 x - 3tgx + 2 = 0$.

Введем переменную $tg x = z$: $z^2 - 3z + 2 = 0$; $z_1 = 1$; $z_2 = 2 \rightarrow tgx = 1$ или $tgx = 2$.

Выполним подстановку: $tgx = 1$; $x = \arctg 1 + \pi n \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi n$; $tgx = 2$; $x = \arctg 2 + \pi n$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$; $x = \arctg 2 + \pi n$.

Универсальная подстановка

Такой способ решения тригонометрических уравнений помогает преобразовать алгебраическое уравнение любого вида в рациональное $R(\sin t; \cos t) = 0$, где $R(z; w)$ – рациональная функция от z и w .

При $t \neq (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{имеем: } \sin t = \frac{2tg \frac{t}{2}}{1 + tg^2 \frac{t}{2}} \text{ и } \cos t = \frac{1 - tg^2 \frac{t}{2}}{1 + tg^2 \frac{t}{2}}$$

при условии, что $t \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Проведем замену: $tg \frac{t}{2} = z \rightarrow R\left(\frac{2z}{1+z^2}; \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) = 0$ – рациональная функция от z .

Проверить: $t = \pi + 2\pi n$ – будет ли являться решением уравнения.

Пример 9 Решить уравнение: $3 \sin t - 4 \cos t = \frac{5}{2}$.

Заменяем $\sin t$ и $\cos t$ по формулам, представленным выше.

Проводим замену $tg \frac{t}{2} = z$,

$$\text{получим } \frac{6z}{1+z^2} - \frac{4(1-z^2)}{1+z^2} = \frac{5}{2} - \text{рациональное уравнение.}$$

Преобразуем в квадратное уравнение: $3z^2 + 12z - 13 = 0 \rightarrow z_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{75}}{3}$.

Решаем два уравнения: $tg \frac{t}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{75}}{3} \rightarrow t = 2\pi n + 2arctg \frac{-6 \pm \sqrt{75}}{3}, n \in Z$.

Проверка: значения вида $t = \pi + 2\pi n$ – условию не удовлетворяют.

Ответ: $t = 2\pi n + 2arctg \frac{-6 \pm \sqrt{75}}{3}, n \in Z$.

Введение вспомогательного угла

Для использования этого метода следует помнить следующие формулы:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta;$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta.$$

Последовательность действий при решении тригонометрических уравнений вида $a \sin x + b \cos x = c$ методом вспомогательного угла выглядит так:

1) делим обе части уравнения на $\sqrt{a^2 + b^2} \rightarrow \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

2) вводим вспомогательный аргумент $\varphi \rightarrow \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

3) запишем уравнение в виде $\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin(x + \varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, т.е. сводится к простейшему.

Пример 10 Решить уравнение: $4 \sin x + 3 \cos x = 5$.

Так как $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1 \rightarrow a = 4, b = 3, \sqrt{a^2 + b^2} = 5$,

то делим обе части уравнения на 5 $\rightarrow \frac{4}{5} \sin x + \frac{3}{5} \cos x = 1$

$$\cos \varphi = \frac{4}{5}, \sin \varphi = \frac{3}{5} \rightarrow \sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = 1 \rightarrow \sin(x + \varphi) = 1$$

$$x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \varphi = \arccos \frac{4}{5}; x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n, n \in Z$.

Применение формул двойного угла и формул понижения степени

Определим основные формулы, которые будем использовать при применении этого способа решения тригонометрических уравнений:

– формулы двойного аргумента: $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$; $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$

– формулы понижения степени: $2\sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x$, $2\cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x$, $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}$.

Пример 11 Решить уравнение: $2 \sin x + \cos x = 2$.

Применим формулы двойного аргумента: $2 = 2 \cdot 1 = 2 \left(\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right)$.

$$4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin^2 \frac{x}{2} + 2 \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\rightarrow 3 \sin^2 \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} = 0 \mid \cos^2 \frac{x}{2}$$

$$\rightarrow 3 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - 4 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 = 0; \text{заменяем } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = y \rightarrow 3y^2 - 4y + 1 = 0,$$

$$y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{3}; \text{подставляем 1) } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1, \quad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$\text{подставляем 2) } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{1}{3}, \quad \frac{x}{2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi n, x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

1.5 Тригонометрические неравенства и методы их решения

Простейшие тригонометрические неравенства

Как и при решении тригонометрических уравнений, авторы учебников предлагают начинать изучение тригонометрических неравенств с простейших. Простейшие тригонометрические неравенства имеют вид: $\sin x \leq a$, $\cos x > a$, $\operatorname{tg} x \geq a$. Такие неравенства решаются с помощью координатной окружности или графиков тригонометрических функций [20].

Рассмотрим последовательность рассуждений при решении неравенств вида $\sin x > a$.

а) При $-1 < a < 1$ множество всех решений неравенства $\sin x > a$ есть совокупность интервалов

$$x_k = (\arcsin a + 2\pi k; \pi - \arcsin a + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}.$$

б) При $a \leq -1$, неравенство $\sin x > a$ не имеет решений.

в) При $a < -1$, решением неравенства $\sin x > a$ будет любое действительное число от $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

г) При $a = -1$, решением неравенства $\sin x > a$ будет любое действительное число отличное от $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим последовательность рассуждений при решении неравенств вида $\sin x < a$.

а) При $-1 < a < 1$ множество всех решений неравенства $\sin x < a$ есть серия интервалов $x_k = (\pi - \arcsin a + 2\pi k; 2\pi + \arcsin a + 2\pi k;), k \in \mathbb{Z}$.

б) При $a > 1$, решением неравенства $\sin x < a$ будет любое действительное число.

в) При $a = 1$, решением неравенства $\sin x < a$ будет любое действительное число отличное от $\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

г) При $a \leq -1$, неравенство $\sin x < a$ не имеет решений.

Рассмотрим последовательность рассуждений при решении неравенств вида $\cos x > a$.

а) При $-1 < a < 1$ множество всех решений неравенства $\cos x > a$ есть совокупность интервалов $x_k = \left(\pi - \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k; 2\pi + \arcsin\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

б) При $a \geq 1$, неравенство $\cos x > a$ не имеет решений.

в) При $a < -1$, решением неравенства $\cos x > a$ будет любое действительное число.

г) При $a = -1$, решением неравенства $\cos x > a$ будет любое действительное число отличное от $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим последовательность рассуждений при решении неравенств вида $\cos x < a$.

а) При $-1 < a < 1$ множество всех решений неравенства $\cos x < a$ есть совокупность интервалов

$$x_k = (\arccos a + 2\pi k; 2\pi - \arccos a + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}.$$

б) При $a > 1$, решением неравенства $\cos x < a$ будет любое действительное число.

в) При $a \leq -1$, неравенство $\cos x < a$ не имеет решений.

г) При $a = 1$, решением неравенства $\cos x < a$ будет любое действительное число отличное от $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим последовательность рассуждений при решении неравенств вида $\operatorname{tg} x > a$.

а) При любом $a \in \mathbb{R}$ множество всех решений неравенства $\operatorname{tg} x > a$ есть совокупность интервалов $x_k = \left(\arctan a + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим последовательность рассуждений при решении неравенств вида $\operatorname{tg} x < a$.

б) При любом $a \in \mathbb{R}$ множество всех решений неравенства $\operatorname{tg} x < a$ есть совокупность интервалов $x_k = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \arctan a + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим последовательность рассуждений при решении неравенств вида $\operatorname{ctg} x > a$.

в) При любом $a \in \mathbb{R}$ множество всех решений неравенства $\operatorname{ctg} x > a$ есть совокупность интервалов $x_k = (\pi k; \operatorname{arccot} a + \pi k), k \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим последовательность рассуждений при решении неравенств вида $\operatorname{ctg} x < a$.

а) При любом $a \in \mathbb{R}$ множество всех решений неравенства $\operatorname{ctg} x < a$ есть совокупность интервалов $x_k = (\operatorname{arccot} a + \pi k; \pi + \pi k), k \in \mathbb{Z}$.

Пример 12 Решить неравенство: $\sin t > 0$.

Построить график функции $\sin t$ на рисунке 5

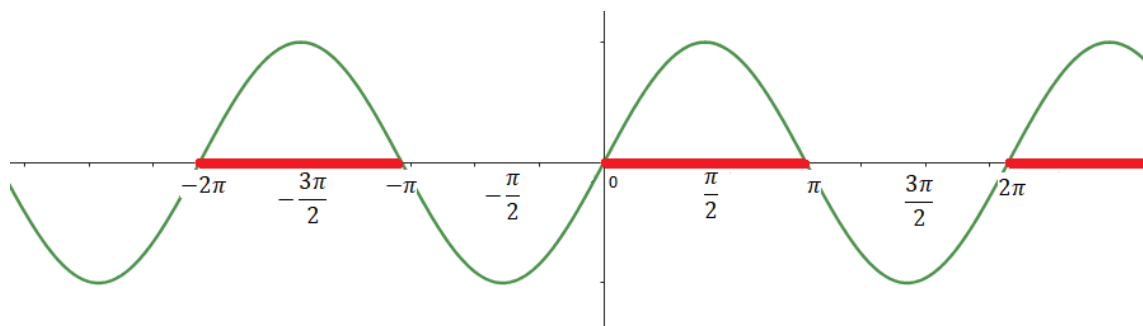


Рисунок 5 - График $\sin t > 0$

Выбрать на оси промежутки, которые лежат выше оси абсцисс. Они выделены на рисунке красным цветом.

Ответ: решением неравенства $\sin t > 0$ является бесконечное множество промежутков вида:

$$(2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z} \text{ т.е. } 2\pi k < t < (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Это же неравенство можно решить на координатной окружности. Так как $\sin t > 0$, то ордината точки $M(t)$ положительная. График представлен на рисунке 6.

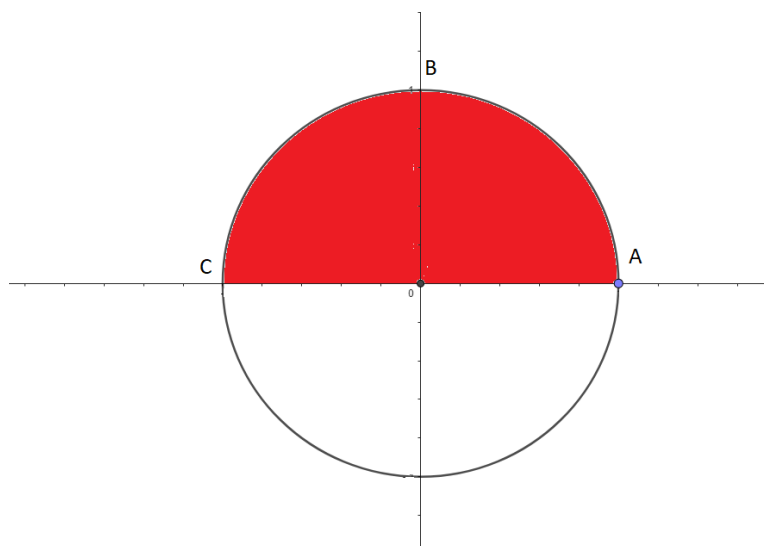


Рисунок 6 - График $\sin t > 0$

Из рисунка видно, что t удовлетворяет одному из двойных неравенств вида: $2\pi k < t < (2k + 1)\pi, k \in \mathbb{Z}$, что является решением.

Графический метод решения тригонометрических неравенств

Пример 13 Решите неравенство: $\cos x - 3x + 1 \geq 1$.

Для построения графика функции преобразуем неравенство

$$\cos x \geq 3x - 1.$$

Построим графики функций $y = \cos x$ и $y = 3x - 1$ на рисунке 7.

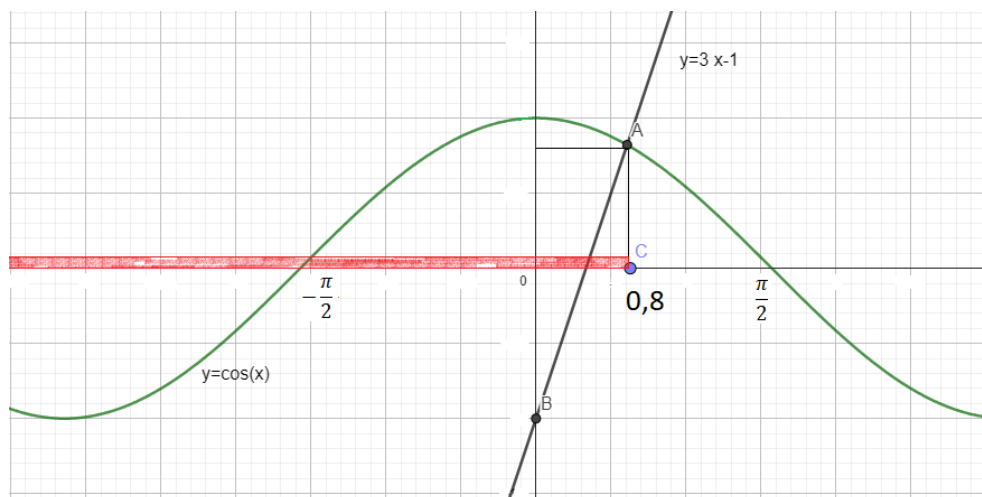


Рисунок 7 - Графики функций $y = \cos x$ и $y = 3x - 1$

Графики пересекаются в точке A (0,6; 0,8). На промежутке $(-\infty; 0,6]$ точки графика $y = 3x - 1$ ниже точек графика $y = \cos x$. При $x = 0,6$ значения функций совпадают. Получим, что $\cos x \geq 3x - 1$ при $x \leq 0,6$.

Ответ: $x \in (-\infty; 0,6]$

Метод интервалов

Приведем последовательность действий при решении тригонометрических неравенств методом интервалов.

1. Привести неравенство к виду, чтобы одна из его частей была равно нулю.
2. Определить нули функции, точки разрыва в другой части неравенства.
3. Расставить точки всех найденных чисел на единичной окружности.

4. Взять произвольное число (чаще всего этим числом будет являться значение аргумента функции).

5. Провести луч под углом к координатному лучу Ox .

6. Подставить произвольное число в левую часть неравенства, определить знак выражения. Тем самым мы выведем контрольную точку. Если выражение больше нуля, то – это любая точка луча, не принадлежащая единичной окружности. Если выражение отличное от этого условия, то точка принадлежит единичной окружности.

7. Из точки проводим кривую так, чтобы она пересекала единичную окружность во всех отмеченных точках против часовой стрелки и вернуться в начало.

8. Выделить нужные нам участки: если выражение в левой части больше нуля – выделяем участки, которые находятся вне единичной окружности; если выражение в левой части меньше нуля – наоборот.

9. Отметить дуги окружности, принадлежащие участкам. Это и будет множеством решений неравенства.

Пример 1 Решите неравенство: $\cos 3x > 0$.

Пусть $f(x) = \cos 3x$. Эта функция с чистотой гармонического колебания $w = 3$ и периодом 2π . Найдем нули функции в промежутке $[0, 2\pi) \rightarrow \cos 3x = 0, x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

При $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ получим $2w = 6$ нулей на $[0, 2\pi)$:

$n = 0, x = \frac{\pi}{6}; n = 1, x = \frac{\pi}{2}; n = 2, x = \frac{5\pi}{6}; n = 3, x = \frac{7\pi}{6}; n = 4, x = \frac{3\pi}{2}; n = 5, x = \frac{11\pi}{6}$. Изобразим эти нули на окружности $P_{\frac{\pi}{6}}, P_{\frac{\pi}{2}}, P_{\frac{5\pi}{6}}, P_{\frac{7\pi}{6}}, P_{\frac{3\pi}{2}}, P_{\frac{11\pi}{6}}$. Эти

точки делят окружность на 6 дуг, которые соответствуют интервалам функции (рис.8). Следует помнить, что знаки чередуются, поэтому достаточно определить знак только в одном из интервалов: для $x = 0 \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right) f(x) = \cos x > 0$.

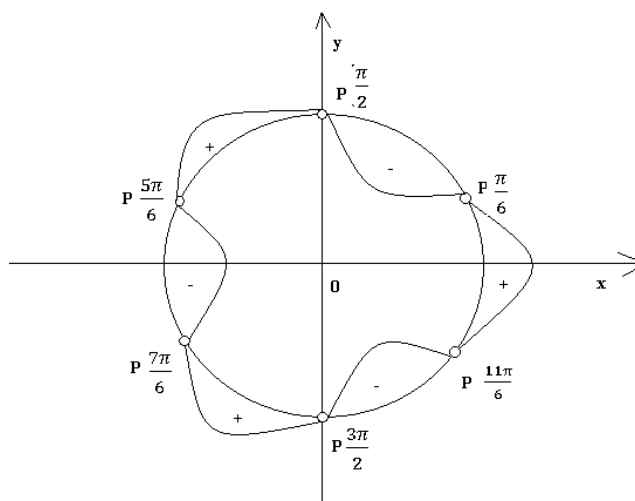


Рисунок 8 - График $\cos 3x > 0$

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$.

Метод подстановки

Суть данного метода заключается в том, что тригонометрическое неравенство с помощью подстановки сводят к алгебраическому неравенству.

Пример 15. Решить неравенство: $2 \sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$.

Преобразуем неравенство:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x \Leftrightarrow -4 \sin^3 x + 2 \sin^2 x + 2 \sin x - 1 < 0.$$

Проведем подстановку: $\sin x = t, |t| \leq 1$, получим $4t^3 - 2t^2 - 2t + 1 > 0 \Leftrightarrow 2t^2(2t - 1) - (2t - 1) > 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(2t^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(\sqrt{2}t - 1) > 0$. Решая это неравенство методом интервалов, посмотрим на рисунок 9.

Получим: $-\frac{\sqrt{2}}{2} < t < \frac{1}{2} < t \leq 1$.

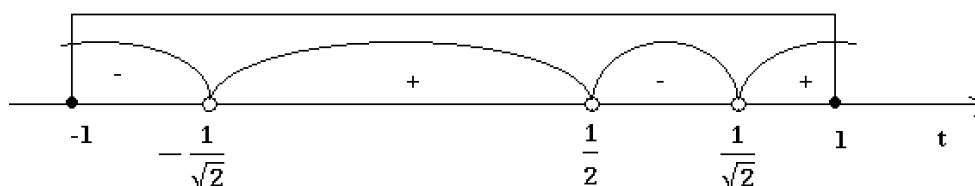


Рисунок 9 – График $2 \sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$

Сейчас нужно перейти к решению совокупности неравенств (рисунок 10):

$$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{1}{2} \text{ и } \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

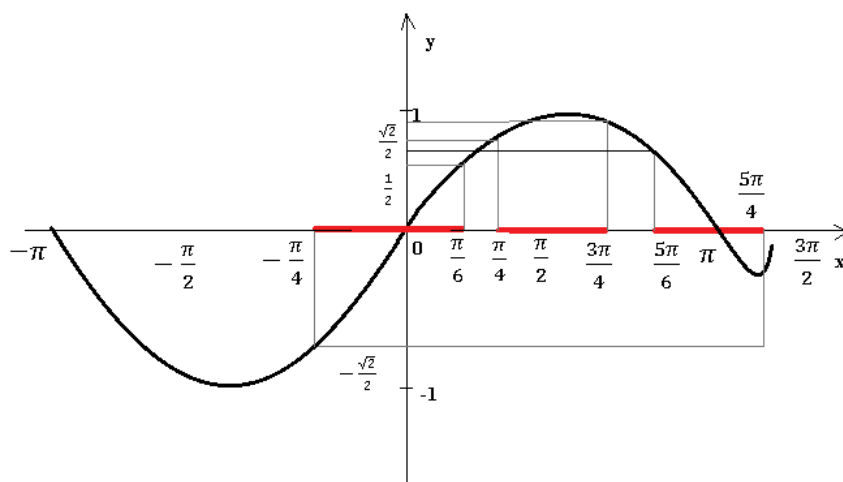


Рисунок 10 – Совокупность неравенств $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \sin x < \frac{1}{2}$ и $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ответ: $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{4} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

Подводя итог первой главы, следует отметить, что в ней мы рассуждали о роли и месте тригонометрических уравнений и неравенств в школьном курсе математики, провели большую работу по анализу учебной и справочной литературы для выявления особенностей изучения раздела тригонометрии в школе. Так же мы представили содержание материала о тригонометрических уравнениях и неравенствах в различных школьных программах и учебниках, рассмотрели тригонометрические уравнения и неравенства, а так же методы их решения.

ГЛАВА 2. ФОРМИРОВАНИЕ УМЕНИЙ И НАВЫКОВ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ В УСЛОВИЯХ РЕАЛИЗАЦИИ ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСА НА ОСНОВЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОГО ПОДХОДА

2.1 Теоретические основы организации дифференцированного подхода к обучению. Формы и виды дифференцированного обучения

Одним из основных направлений современного обучения является индивидуализация, где основой является дифференцированный подход в обучении. Дифференциация в переводе с латинского «difference» означает разделение, расслоение целого на части. Дифференцированное обучение – это форма организации учебного процесса, при которой учитель, работая с группой обучающихся, учитывает их особенности. Дифференцированное обучение – это:

1. форма организации учебного процесса, при котором учитель работает с группой учащихся, составленной с учетом наличия у них каких-либо значимых для учебного процесса общих качеств;

2. часть общей дидактической системы, которая обеспечивает специализацию учебного процесса для различных групп обучаемых[26].

В основу дифференциации положена теория Л.С. Выготского о зоне ближайшего развития.

Можно выявить общее в индивидуальном развитии детей в процессе обучения. Общее может характеризовать уровень развития детей, сходство в мотивах деятельности и поведении. Основными способами изучения индивидуальных особенностей школьников являются планомерные систематические наблюдения за учеником, индивидуальные и групповые беседы на намеченную тему. Главное заключается в том, чтобы всесторонне изучить ребенка и опираться на его индивидуальные качества. В дидактике и

предметных методиках предлагается более 20 критериев деления учащихся на группы.

Выделяют два вида дифференциации обучения: внешнюю и внутреннюю. Внешняя дифференциация подразумевает разделение учеников по способностям или интересам и т.д. в стабильные группы, в которых методов обучения, содержание образования и формы организации будут различаться. Внутренняя дифференциация подразумевает учет индивидуально-типологических особенностей учеников в процессе обучения в стабильной группе (классе). Разделение на группы при такой дифференциации может быть явным и неявным, а их состав может меняться (мобильные группы) в зависимости от поставленной учебной задачи. Во внутренней дифференциации выделяются другие подвиды: дифференциация по способностям, дифференциация по интересам, уровневая дифференциация, по практикуемой профессии [1].

Уровневая дифференциация обучения предусматривает:

- наличие основного «базового» уровня общеобразовательной подготовки, который обязан достичь обучающийся;
- базовый уровень является основным для дифференциации и индивидуализации требований к обучающимся;
- основной уровень должен быть реально выполним для всех обучающихся;
- система результатов, которые должен достичь обучающийся по базовому, уровню должна быть открыта для него (обучающийся знает, что с него требуют);
- наряду с основным уровнем обучающемуся предоставляется возможность повышенной подготовки, определяющаяся глубиной овладения содержанием учебного предмета.

Методическими особенностями преподавания являются:

- подача материала блоками;

- работа на нескольких уровнях усвоения с малыми группами;
- наличие учебно-методического комплекса: банк заданий, система дидактических материалов, выделение обязательного материала в учебниках, заданий обязательного уровня в задачниках [9].

Если педагог решает ввести дифференцированную систему обучения на уроках, ему необходимо выполнить следующие задачи:

- глубоко изучить индивидуальные и типологические особенности обучающихся и групп обучающихся;
- уметь анализировать учебный материал, выделять возможные трудности, с которыми могут встретиться разные группы обучающихся;
- составлять технологические карты, включая задания для разных групп обучающихся;
- уметь «построить» обучение разных групп учащихся;
- организовать учебный процесс, который сможет предложить обучающемуся возможность выбрать содержание, вид, форму при решении задач, выполнении заданий;
- осуществить обратную связь, создать атмосферу на уроке, способствующую раскованности обучающихся;
- создать мотивацию к успешному обучению; - активно стимулировать обучающегося к познавательной деятельности [28].

Организация учителем внутриклассной дифференциации включает несколько этапов.

1. Определение критериев, в соответствии с которыми создаются группы учащихся для работы. Учитель сам выбирает критерии дифференциации в зависимости от особенностей класса, целей, задач, содержания конкретного урока и других факторов.

2. Проведение диагностики на основе выбранных критериев. Учитель может использовать результаты диагностики, проводимой школьным психологом, а также анализировать результаты самостоятельного выполнения

детьми различных заданий, устные ответы у доски, работу в тетрадях и т. д. Наиболее полную информацию дают разноуровневые проверочные работы.

3. Распределение учащихся по группам с учетом результатов диагностики. Некоторые способы дифференциации (дифференциация по степени самостоятельности, по уровню помощи и др.) предполагают, что дети сами определяют, нужна ли им помощь учителя, самостоятельно выбирают задания.

Определение способов дифференциации, разработка дифференцированных заданий для групп учащихся. В педагогической литературе представлены несколько способов дифференциации [15]:

- по уровню творчества;
- по уровню сложности заданий;
- по объёму учебного материала;
- по степени самостоятельности;
- по характеру помощи обучающимся;

Выбор способа дифференциации определяется характером заданий, уровнем сформированности у детей навыков и умений и т. д., в зависимости от этого и разрабатываются дифференцированные задания для разных групп.

Учитель предлагает школьникам дифференцированные задания на тех этапах урока, где это необходимо (дифференциация не должна быть самоцелью). На уроках закрепления и повторения ранее изученного материала дифференциация используется гораздо чаще, чем на уроках ознакомления с новым материалом. Дифференцированный подход предпочтительней осуществлять на этапе закрепления ранее изученного материала, так как имеется возможность организовать самостоятельную работу учащихся. При использовании дифференциации важна оперативная обратная связь. На основе диагностического контроля учитель проводит тщательный учет выполнения работы учащимися (фиксацию ошибок, затруднений и др.), определяет

динамику их развития. В соответствии с этим изменяются состав групп и характер заданий.

Остановимся подробнее на некоторых этапах организации дифференцированной работы.

Этап первый. На этом этапе учителю необходимо проанализировать учебную литературу, нормативные документы и определить критерии по которым будет проводиться деление учеников на мобильные группы. По нашему мнению оптимальными критериями будут служить:

- фактические предметные знания и умения;
- уровень усвоения предметных знаний и умений.

Фактический уровень знаний и умений отражен в федеральной рабочей программе по алгебре и началам математического анализа. Для примера возьмем программу базового уровня обучения 10 класс:

- оперировать понятием «тригонометрическое уравнение»;
- выполнять преобразования тригонометрических выражений и решать тригонометрические уравнения;
- применять уравнения и неравенства для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни;
- моделировать реальные ситуации на языке алгебры, составлять выражения, уравнения, неравенства по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры.

Элементы знаний: синус, косинус и тангенс числового аргумента, арксинус, арккосинус и арктангенс числового аргумента, тригонометрическая окружность, определение тригонометрических функций числового аргумента, основные тригонометрические формулы, преобразование тригонометрических выражений, решение тригонометрических уравнений.

Элементы умений: оперировать понятиями: синус, косинус и тангенс произвольного угла; использовать запись произвольного угла через обратные

тригонометрические функции; выполнять преобразования тригонометрических выражений; решать основные типы тригонометрических уравнений.

Второй этап. На этом этапе проводится диагностика на основании выбранных критериев. Такую диагностику можно провести разными способами: наблюдением, проведением письменных работ, проведением устного опроса. Проведение письменных работ будет являться самым наглядным способом получения информации об уровне сформированности знаний и умений ученика. Исходя из результатов такой работы, преподаватель сможет разделить обучающихся на группы.

Третий этап. Р.А. Утеева [27] в своей диссертации «Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе» выделяет 4 типологические группы обучающихся.

– I группа – это ученики, выполнившие все предложенные задания проверочной работы без ошибок. Такие ученики имеют высокий уровень сформированности знаний и умений по теме изучения. Они умею пользоваться на практике основными методами решения уравнений и задач, способны к творческому решению заданий, логическим рассуждениям и приведению доказательств.

– II группа – это ученики, которые выполнили большинство заданий правильно, а остальные задания выполнили частично правильно. Такие учащиеся имеют хорошие знания по изучаемой теме, но, как правило, испытывают трудности в приведении доказательств, логических размышлений и творческому подходу к решению задач.

– III группа – это ученики, которые обязательный минимум заданий выполнили частично, но задания, требующие более сложного подхода не выполнили. Таки ученики имеют минимальные знания по теме изучения. Они могут решить простейшие задания.

– IV группа – это ученики, которые не справились с большинством заданий проверочной работы. Такие ученики не умеют решать задачи и уравнения.

В данной работе мы решили объединить третью и четвертую группу в одну, тем самым организовав работу только по трем типологическим группам.

Четвертый этап. В нашей работе мы возьмем за основной способ организации обучения – дифференциацию по уровню сложности задания. Уровень сложности заданий отправляет нас к типологическим группам, которые мы определили в предыдущем абзаце:

1 уровень – базовые уравнения и неравенства (удовлетворительные знания);

2 уровень – базовые уравнения и неравенства с дополнительными сведениями (хорошие знания);

3 уровень – уравнения и неравенства с различными дополнениями, усложняющими решение (отличные знания).

Теперь мы можем перейти к типам тригонометрических уравнений, которые будут соответствовать определенному уровню знаний учеников.

Уравнения 1 уровня – простейшие тригонометрические уравнения. Они являются обязательной основой изучения темы. На основе этих уравнений строится изучение более сложных уравнений, решение которых будет сводиться к простейшим уравнениям. Такие задания будут содержать уравнения с односложными аргументами, исключая дополнительные задания.

Пример 16. $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 17. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Уравнения второго уровня так же будут являться простейшими тригонометрическими уравнениями, но с модифицированным аргументом и не будут содержать дополнительных заданий. Такой тип тригонометрических уравнений создаст условия для формирования у обучающихся умений решать более сложные уравнения.

Пример 18. $\cos\left(-\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Пример 19. $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 1$.

Уравнения третьего уровня будут являться простейшими тригонометрическими уравнениями с модифицированным аргументом и будут осложнены дополнительным заданием – поиском корней на заданном промежутке. Такие тригонометрические уравнения, встречаются ученикам в ЕГЭ базового уровня.

Пример 20. $\sin \frac{\pi x}{3} = 0,5$. В ответе напишите наименьший положительный корень уравнения.

Пример 21. $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = -1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень уравнения.

Тригонометрические неравенства, изучаемые на базовом уровне, будут сводиться к решению изучаемых уравнений. На данном уровне на изучение неравенств отводится мало времени, поэтому, скорее всего, на уроках будут рассмотрены простейшие неравенства. Принцип решения простейших тригонометрических неравенств основан на умении определять на тригонометрической окружности значения не только основных тригонометрических углов, но и других значений. Решение неравенств, содержащих тригонометрические функции, сводится к решению простейших неравенств вида $\sin t \leq a, \cos t = a, \operatorname{tg} t = a$, которые, в свою очередь, можно решить с помощью координатной окружности или с помощью графиков тригонометрических функций.

Пример 22. $\cos x - 3x + x \geq 0$.

Таких начальных сведений будет достаточно для изучения тригонометрических неравенств в школьном курсе базовой алгебры.

Для реализации дифференцированного обучения необходим дифференцированный подход, который можно осуществить путем набора

заданий, которые будут отличаться степенью трудности при общей цели обучения.

Сложность задания – логическая категория, которая определяется структурой и содержанием задания. Трудность задания – психологическая категория, которая определяется методикой предъявления задания, которая зависит от индивидуально-психологических особенностей обучающегося и сложностью задания [12].

Если педагог разрабатывает систему таких заданий, то ему следует учитывать факторы, формирующие трудность задания. Индивидуальные особенности обучающихся непременно влияют на уровень усвоения материала. То есть учителю следует досконально изучить трудности, с которыми могут столкнуться обучающиеся в процессе усвоения материала. Если ученик или группа учеников допускают повторяющиеся «типичные» ошибки, то на них стоит обратить пристальное внимание, так как такие ошибки отражают и показывают закономерность изучения материала. Их определение и обнаружение поможет педагогу выстроить наиболее успешную методику обучения.

На собственном опыте каждый человек знает, что с помощью педагога ученику подвластны задания любой сложности. Помощь педагога «понижает» трудность задания и делает его доступным для понимания. Становится понятно, что для разных групп в классе, объединенных, допустим, характером типовых ошибок, допускаемых при изучении темы, требуется и различная помощь со стороны учителя. Но для всех обучающихся и для групп обучающихся подходит следующая стратегия: работа над учебным материалом совместно с преподавателем → работа над учебным материалом под контролем преподавателя → самостоятельная работа над учебным материалом. Следуя этой стратегии, обучающиеся учатся постепенно справляться с заданиями разной трудности.

Некоторые виды дифференцированных заданий.

1. Задания с образцом выполнения:
 - а) задания с развернутым образцом;
 - б) задание с образцом более короткой записи операций;
 - в) задание с развернутым образцом рассуждения.
2. Задания с выполнением некоторой их части:
 - а) задания, с незаконченным решением;
 - б) задания, с незаписанным ответом.
3. Задание с дополнительной конкретизацией.
4. Задания с вспомогательными вопросами.
5. Задания с сопутствующими указаниями, инструкциями.
6. Задания с вспомогательными упражнениями.
7. Задания с теоретическими справками.
8. Задания с алгоритмическими предписаниями.
9. Задания с выбором решения.
10. Задания с применением классификации.

Учитель должен помнить, что планируя урок, он должен предлагать те задания, которые соответствуют уровню обученности детей на данный момент времени.

Пятый и шестой этап мы детально рассмотрим в следующем параграфе «Методические рекомендации по организации дифференцированного подхода на занятиях по обучению решению тригонометрических уравнений и неравенств».

2.2 Методические рекомендации по организации дифференцированного подхода на занятиях по обучению решению тригонометрических уравнений и неравенств

В условиях реализации факультативного курса, на прохождение которого отводится 8 занятий, мы будем использовать уровневую дифференциацию.

Осуществление уровневого обучения будет проводиться в форме «мобильных групп». Изучая тему «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» на факультативном курсе мы выделим 4 этапа работы:

Первый этап. Деление обучающихся на мобильные группы.

Мобильные группы – так мы назовем форму организации обучающихся на уроке с целью достижения индивидуального подхода к обучению и с целью формирования максимально возможного уровня обученности. Мобильность групп подразумевает «движение» учеников из одной группы в другую в процессе повышения уровня обученности по теме изучения. Деление на группы осуществляется на основе критерия достижения уровня подготовки в рамках школьных уроков. Для выявления уровня подготовки мы предлагаем провести самостоятельную работу. На основе полученных результатов учеников можно объединить в группы с «одинаковым» уровнем знаний и умений по изучаемой теме.

Обучающиеся первой группы («слабые») могут иметь пробелы в знаниях основного программного материала, самостоятельно смогут решить задания в один или два шага, не сумеют вести целенаправленный поиск решения, не смогут найти связи между данными и искомыми величинами. Обучающиеся второй группы («средние») уже имеют достаточные знания программного материала, могут применить их при решении типовых задач. Могут испытывать затруднения при переходе к решению задач нового типа, но, овладев методами их решения, справятся с решением аналогичных задач. Третью группу («сильные») составляют ученики, которые могут сводить сложную задачу к цепочке простых подзадач, выдвигать и обосновывать гипотезы в процессе поиска решения задач, переносить прежние знания в новые условия, а так же решать творческие задачи.

Второй этап. Проведение факультативных занятий.

Сценарий факультативных занятий можно поделить на несколько блоков.

1. В первом блоке рассматривается теоретический материал, который должен сопровождаться наглядно-иллюстративными средствами и применением знаний в простых ситуациях для достижения максимального уровня формирования знаний и умений.

2. Во втором блоке рассматриваются задания на выработку умений на уровне обязательных результатов, предусмотренных школьной программой.

3. В третьем блоке проходит закрепление знаний в форме дифференцированных самостоятельных работ.

4. В четвертом блоке по результатам самостоятельных работ происходит оценка уровня усвоения материала. В этом блоке мы прибегаем к помощи учеников-помощников, тех, кто освоил обязательных уровень результатов, и теперь может помочь проконсультировать отстающих. Таким способом мы повышаем коммуникацию в классе и сможем делегировать обязанности в течение факультативного занятия. Так же, на этом этапе мы можем рассмотреть задания повышенной сложности, комментируя решение задач, для формирования интереса у более сильных учеников и мотивации к обучению у более слабых.

Третий этап. Проведение комплексной самостоятельной работы.

Комплексная работа должна содержать задания разных уровней, объединенных в одну работу, для создания больших предпосылок к решению учениками заданий разного уровня сложности. Задания более высокого уровня в самостоятельной работы отмечены знаком «*» и «**» по уровням дифференциации соответственно.

Четвертый этап. Подведение итогов комплексной работы.

На этом этапе происходит проверка достижений всеми учащимися обязательных результатов обучения, а также проверка усвоения материала на более высоких уровнях. Достижения уровня обязательных требований можно оценивать на «3», для более высоких уровней можно использовать оценки «4» и

«5». На данном этапе так же следует пересмотреть состав мобильных групп и скорректировать их состав в зависимости от результатов.

Такая система работы способствует созданию условий для повышения успеваемости учеников в соответствии с их возможностями. Дифференциация заданий будет способствовать созданию ситуаций успеха у обучающихся разных уровней. Ученики слабого уровня будут охотно выполнять не только задания, содержащие инструктивный материал, но и пробовать себя в решении заданий более высокого уровня. Всё это будет способствовать благоприятному психологическому климату в классе и активирует мыслительную деятельность учеников, создаст положительную мотивацию к учению.

В отдельный блок мы бы хотели вынести организацию самостоятельных работ на факультативных занятиях. Для начала стоит отметить, что составленные нами самостоятельные работы служат средством оперативной обратной связи от ученика - учителю. Результаты самостоятельных работ отражают уровень сформированных навыков и умений, на основании которых учитель сможет оценить прогресс ученика, подкорректировать состав мобильных групп и распланировать дальнейшую работу по предмету изучения. Самостоятельные работы будут содержать дифференцированные задания каждого из трех уровней. Слабые учащиеся получают задания более простые с наличием дополнительных пояснений, сильные ученики получают более сложные задания. Учитель, знающий групповые особенности обучающихся, может предложить оптимальный для ученика вариант выполнения задания. Учитель так же может определить для себя удобную форму представления заданий: запись на карточках, на доске, по учебнику, пособию. Так же эти формы можно комбинировать. Для распределения заданий по этим 3 уровням можно использовать конверты разных цветов: чем светлее цвет конверта, тем задание в нём легче, т. е. 1 уровня; чем темнее цвет, тем, соответственно, сложнее 2 или 3 уровня. Дети

самостоятельно выбирают, какой конверт им взять.

При выборе конверта даётся инструкция:

1. Кто хочет закрепить свои знания, тверже знать материал - выбирает задание в более светлом конверте.

2. Кто чувствует, что освоил материал по теме прочно - выбирает задание в более темном конверте.

3. Кто чувствует себя уверенно и хочет проверить свои силы и возможности – выбирает задание в самом темном конверте.

Так же самостоятельные могут быть комплексными, т.е. содержать задания разных уровней. В таком случае каждый ученик будет выполнять только те задания. Которые он «осилит», но так же такой вид работы создать предпосылки, мотивацию для решения заданий других уровней сложности. Такие комплексны самостоятельные работы есть смысл использовать на более поздних этапах усвоения материала.

Основные требования к заданиям самостоятельных работ:

– Задания 1 уровня. Задания направлены на припоминание и актуализацию уже имеющихся усвоенных знаний без их видоизменения, когда обучающийся демонстрирует базовые знания, умения, навыки, выполняет задания: "Выбери из списка", "Отметь верное", "Сопоставь".

– Задания 2 уровня. Задания в измененной ситуации, на сравнение, описание и упорядочение ранее изученного материала, т.е. решение аналогичных задач, требующих преобразования полученных знаний, проверочные задания, выполняющие функцию обратной связи. На этом уровне обучающиеся способны самостоятельно воспроизводить информацию и применять ее в различных ситуациях: "Реши", "Выбери верно", "Запиши формулу".

– Задания 3 уровня. Задания познавательно - поискового характера, в процессе выполнения которых обучающиеся приобретают новые знания. Такая работа требует выполнения следующих видов мыслительной деятельности:

анализа и синтеза, сравнения, выделения главного, обобщения и систематизации: «К заданию "реши" прибавляются дополнительные условия».

Проверку индивидуальной деятельности обучающихся можно осуществить на перемене или сразу на уроке, обсуждая сложные моменты.

Самостоятельные работы по простейшим тригонометрическим уравнениям и различным методам решения тригонометрических уравнений представлены в приложении 1.

Исходя из структуры задачи №13 Единого Государственного Экзамена по математике [10] можно сделать вывод, что основные методы решения тригонометрических уравнений, на которые нужно обратить пристальное внимание учеников, это:

- метод разложения на множители;
- метод замены переменной;
- метод введения вспомогательного угла.

На базовом уровне изучения математики в 10 классе неравенствам отводится немного времени, поэтому их изучение сводится к изучению простейших неравенств. Обучающиеся решают неравенства с помощью единичной окружности.

Следует отметить, что, так как не существует единой программы обучения решению тригонометрических неравенств, учитель сам в праве корректировать тот уровень материала, который он предоставит ученикам. Чем больше методов решения тригонометрического неравенства знает обучающийся - тем больше у него шансов решить неравенство.

Самостоятельные работы по простейшим тригонометрическим неравенствам представлены в приложении 1.

Нормы оценивания самостоятельных дифференцированных работ.

Учитель должен помнить, что в силу своих способностей ребенок сам решает какое задание выбрать для выполнения. Очень важно предоставить учащемуся выбор. Ни в коем случае нельзя давить на ученика, настаивать и

насиленно заставляя выбрать и выполнить то или иное задание. Научить ребенка грамотно оценивать свои способности и знания – это еще один плюс дифференциации обучения.

Ученикам следует объяснить, что задания без звездочек оцениваются на «3», задания с одной * - на «4», с ** - «5». Иногда некоторые учащиеся, выполнив вариант на «3», успевают выполнить несколько заданий из более сложного варианта. К проверке такой работы нужно подходить индивидуально.

Примерные нормы оценки дифференцированных самостоятельных работ будут выглядеть следующим образом: Задания без звезд оцениваются в 1 балл, если верно, и 0 баллов – неверно. За задания с * - можно поставить 2 балла, если выполнено верно, 1 балл - есть одна ошибка, ** можно поставить 3 балла, если выполнено верно, 2 балла – есть 1 ошибка, если более – 0 б.

2.3 Факультативный курс по теме «Тригонометрические уравнения и неравенства»

Проанализировав школьную литературу, можно сделать вывод, что, во-первых, нет единой системы преподавания тригонометрических уравнений и неравенств, во-вторых, в некоторых учебниках не хватает разъяснений, а также конкретных заданий, в-третьих на изучение данных тем отводится мало времени. Следовательно, обучающиеся могут испытывать затруднения при изучении данного раздела.

Программа факультативного курса предназначена для обучающихся 10 и 11 классов. В курсе алгебры и начал анализа рассматриваются простейшие тригонометрические уравнения, некоторые основные методы решения тригонометрических уравнений, тригонометрические неравенства. В данном курсе представлен материал для обучающихся с разным уровнем усвоения школьной программы. Методические разработки способствуют восполнению

пробелов в обучении решению тригонометрических уравнений и неравенств на основе дифференцированного подхода.

Пояснительная записка

Программа факультативного курса по математике «Тригонометрические уравнения и неравенства 10 класс» составлена на основании примерной рабочей программы 10 класса по алгебре и началам математического анализа в соответствии с требованиями ФГОС. Курс разработан для обучающихся 10-х классов с целью обобщения и систематизации знаний по темам: «Решение тригонометрических уравнений» и «Решение тригонометрических неравенств». Факультативный курс рассчитан на 1 занятие в неделю. Для прохождения полного факультативного курса требуется 8 часов.

Факультативный курс рассчитан на обучающихся со "средним" и "слабым" уровнем образовательной подготовки и позволит восполнить недостающие знания по рассматриваемым в курсе темам. Курс способствует развитию логического мышления, углубления знаний по тригонометрии.

Занятия факультативного курса рассчитаны на рассмотрение основных вопросов тригонометрии, некоторых методов решения тригонометрических уравнений и неравенств. В дуэте с уроками алгебры и начал анализа за 10 класс, курс будет способствовать прочному усвоению учебного материала.

Результатом освоения факультативного курса будет являться оценивание итогов в форме самостоятельных работ. Результаты могут фиксироваться и сравниваться с учебными результатами. На основании сравнения можно будет сделать выводы об эффективности курса и качестве работы учеников.

Образовательная область и предмет изучения

В современном мире плотно укоренилась тенденция на приоритет математических наук и специальностей. Повсеместная компьютеризация, введение искусственного интеллекта, развитие IT сферы требует от современного человека понимания, как устроены и функционируют данные системы. В основе основ лежит математика.

При изучении различных физических процессов в производстве, космонавтике широко внедрены и применяются тригонометрические функции. Факультативный курс «Тригонометрические уравнения и неравенства в 10 классе» может создать условия для хорошей математической подготовки обучающихся.

Актуальность курса

На изучение столь богатого раздела тригонометрии в школьном курсе математики отводится немного времени. Раздел, посвященный тригонометрии сжат, что способствует поверхностным знаниям о тригонометрии у обучающихся. Слабоуспевающие ученики чаще откладывают изучение тригонометрии в долгий ящик из-за проблем при усвоении учебного материала. В заданиях ЕГЭ ученики могут и вовсе не браться за выполнение таких заданий и, как следствие, теряют баллы, что препятствует их поступлению в ВУЗ.

Цели и задачи факультативного курса

Цель курса – расширение, углубление и систематизация знаний при решении тригонометрических уравнений и неравенств на основе дифференцированного подхода.

Задачи:

Образовательные:

- выявить уровень усвоения школьного материала по решению тригонометрических уравнений и неравенств;
- систематизировать знания по типам и методам решения тригонометрических уравнений и неравенств;
- расширить и углубить знания по изучаемым темам;
- обеспечить обобщение материала по изучаемым темам;
- способствовать формированию самоконтроля и самооценивания у обучающихся;

Развивающие:

- расширить математический кругозор

- развить мышление, память, математическую речь;
- сформировать умения сравнивать, обобщать, выделять главное;

Воспитательные:

- воспитать интерес к изучению математики;
- привить навыки групповой и парной деятельности, взаимопомощи и коммуникации в коллективе.

Основной деятельностью курса является обучение школьника решению тригонометрических уравнений и неравенств; развитие логического и творческого потенциала; воспитание творческой личности; систематизация знаний; развитие познавательных интересов и творческих способностей. Курс ориентирован на изучение и расширение базового уровня знаний обучающихся по тригонометрии, дает возможность познакомиться с интересными вопросами тригонометрии, с распространенными методами решения тригонометрических задач, проверить свои знания и умения в математике.

Требования к математической подготовке обучающихся:

1. знать тригонометрические формулы и уметь их применять для преобразования тригонометрических выражений;
2. решать простейшие тригонометрические уравнения и уравнения с использованием различных методов;
3. логично и полно излагать решение, записывать ответ.

Программа рассчитана на 8 часов. Курс может быть рассмотрен в 10 классе, после изучения соответствующих тем, или в 11 классе, при подготовке к единому государственному экзамену. Занятия проводятся 1 час в неделю. Итоги реализации данной программы проводятся в форме практических и самостоятельных работ. Результатом предложенного курса должно быть повышение успеваемости ученика по теме «Тригонометрические уравнения и неравенства». Учебно-тематический план факультативного курса представлен в таблице 17.

Таблица 17 - Учебно-тематический план факультативного курса

№ п/п	Название темы	Кол-во часов
1	Простейшие тригонометрические уравнения	2 часа
2	Метод разложения на множители	1 час
3	Метод замены переменных	1 час
4	Метод введения вспомогательного угла	1 час
5	Применение универсальной подстановки	1 час
6	Простейшие тригонометрические неравенств	1 час
7	Контрольная работа. Анализ контрольной работы	1 час
Итого:	8 часов	

2.4 Апробация факультативного курса

Апробация факультатива была проведена в МБОУ СОШ №43 города Пензы в 10 классе.

При понимании целесообразности внедрения факультативного курса необходимо провести исследование, чтобы понять, как обучающиеся ориентируются в теме занятий.

1. Констатирующая часть

Цель: выявить уровень освоения учебного материала по изученным темам раздела «Тригонометрические уравнения».

Для реализации первого этапа дифференцированной работы, на факультативных занятиях ученикам была предложена диагностическая самостоятельная работа №1 (Приложение №3) для оценки результатов усвоения материала по пройденным темам: «Простейшие тригонометрические уравнения», «Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители» и «Решение тригонометрических уравнений методом замены переменных». Результаты самостоятельной работы представлены на рисунке

11. Количество учеников: 22 человека. Оценки обучающихся: «отлично» – 4 человека; «хорошо» – 7 человек; «удовлетворительно» – 11 человек; «неудовлетворительно» – 0 человек.

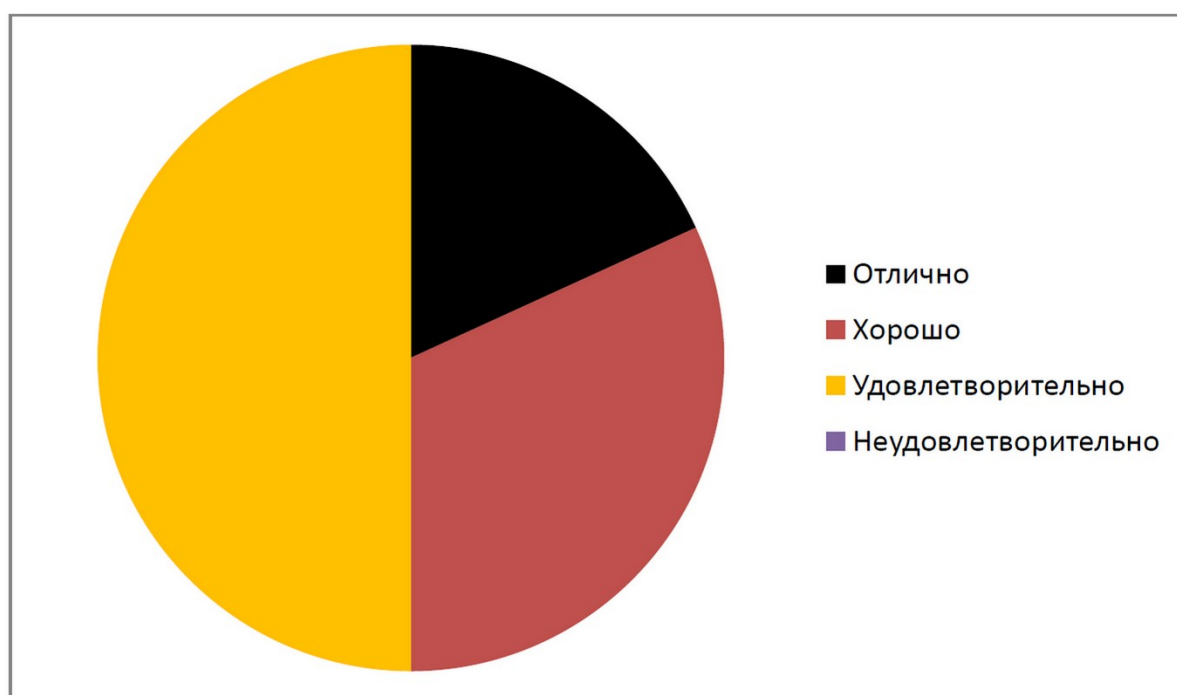


Рисунок 11 - Результат выполнения самостоятельной работы №1

Далее на основании диагностической работы обучающиеся были объединены в мобильные группы по уровню усвоения программного материала, что соответствует второму этапу дифференцированной работы. Состав типологических групп представлен в таблице 18.

Таблица 18 - Состав типологических групп

Образовательные уровни	Количество обучающихся (чел.)
1 уровень (сильный)	11
2 уровень (средние)	7
3 уровень (слабые)	4

Для повышения уровня успеваемости обучающимся был предложен факультативный курс "Тригонометрические уравнения и неравенства".

2. Формирующая часть

Цель: провести занятия факультативного курса.

Для реализации этой части в 10 классе на протяжении четырех недель проводились занятия факультативного курса. Программа курса представлена в Параграфе 2.3 Факультативный курс по теме «Тригонометрические уравнения и неравенства».

По согласованию с преподавателями и классным руководителем обучающихся факультативные занятия проводились с учениками, вошедшими в 3 и 2 типологическую группу. Для реализации второго этапа работы были проведены четыре занятия по темам: «Простейшие тригонометрические уравнения» - 2 занятия, «Метод разложения на множители» (Технологическая карта №1) и «Метод замены переменных» (Технологическая карта №2).

3. Контрольная часть

Цель: оценить эффективность проведения занятий факультативного курса.

Для реализации третьего этапа, после проведения факультативных занятий была проведена самостоятельная работа №2. (Приложение №4) для оценки результатов факультативной работы. Результат самостоятельной работы представлены на рисунке 2. Количество учеников: 22 человек. Оценки обучающихся: «отлично» – 5 человек; «хорошо» – 10 человек; «удовлетворительно» – 7 человек; «неудовлетворительно» – 0 человек.

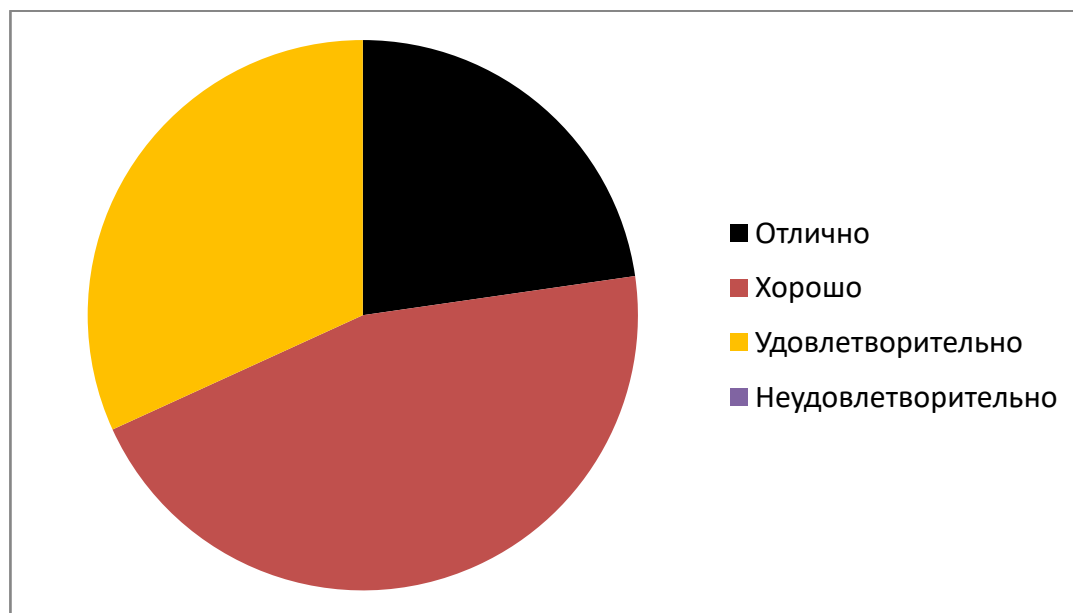


Рисунок 11 - Результат выполнения самостоятельной работы №2

Четвертый этап. Можно сделать вывод об успеваемости класса. Он приведен в таблице 19.

Таблица 19 - Динамика успеваемости обучающихся

Успеваемость	Самостоятельная работа	Самостоятельная работа
	№ 1	№ 2
Абсолютная успеваемость	100%	100%
Качественная успеваемость	50%	68%

Вывод: по итогам проведения двух факультативных занятия отстающие ученики смогли повысить уровень обученности по изучаемым темам. В таблице 19 можно наблюдать улучшения усвоения материала, значительное увеличение качественной успеваемости. Основная часть учащихся справилась с заданиями успешно. Таким образом, задачи и цель факультатива достигнуты.

Выводы по второй главе:

Во второй главе мы описывали методические особенности обучения решению тригонометрических уравнений и неравенств в школьном курсе математики на основе дифференцированного подхода. Этот подход был выбран не случайно, так как индивидуализация обучения дает лучшие результаты усвоения материала и позволяет слабоуспевающим ученикам восполнить пробелы в обучении при изучении темы тригонометрических уравнений и неравенств. В данной главе рассмотрены основы, принципы, виды, методы и способы дифференцированного обучения. Так же приведены методические рекомендации, разработана дифференцированная система тригонометрических уравнений и неравенств. Во второй главе приведена разработка факультативного курса и отражено описание апробации курса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Раздел тригонометрии является одним из главных в курсе школьной математики. Несмотря на то, что ему несправедливо уделяют мало времени, знания, которые несет в себе этот раздел являются основополагающими при изучении смежных дисциплин, таких как физика, геометрия.

Исходя из поставленных цели и задач работы, были изучены теоретические аспекты изучения тригонометрических уравнений и неравенств, определены роль и место тригонометрических уравнений и неравенств в школьном курсе математики. В процессе работы были выявлены особенности изучения раздела тригонометрии, проанализированы содержание и анализ материала о тригонометрических уравнениях и неравенствах в различных школьных учебниках и программах. Большое внимание было уделено тригонометрическим уравнениям и неравенствам, методам их решения. Умение решать тригонометрические уравнения и неравенства различными методами и способами создает больше условий для решений таких заданий на ЕГЭ. Они являются "базовыми" для дальнейшего изучения математики.

Ввиду того, что на изучение данного раздела алгебры и начал математического анализа выделено не так много времени (особенно при рассмотрении базового профиля обучения), а в структуре ЕГЭ присутствуют задания связанные с тригонометрическими уравнениями и неравенствами, учителям и обучающимся стоит обратить внимание на дополнительные способы получения знаний: справочная литература, пособия, разработки - всё, что способствует повышению эффективности изучения курса.

По результатам работы был разработан и апробирован факультативный курс «Тригонометрические уравнения и неравенства», рассчитанный на обобщение и систематизацию знаний по данным темам, повышение уровня образованности и эффективности овладения знаниями, умениями и навыками у слабоуспевающих учеников.

Апробация факультативного курса дала положительные результаты и способствовала эффективному усвоению программного материала, повышению успеваемости, что в последствии может привести к успешной сдаче ЕГЭ.

Таким образом, задачи выпускной квалификационной работы решены, а цель - разработать и апробировать факультативный курс «Тригонометрические уравнения и неравенства» достигнута.

Материалы, представленные в работе, могут быть использованы на факультативах, внеурочных заданиях по математике, уроках алгебры и начал анализа, в проверочных работах 10 и 11 класса.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Абарина С. В. Дифференциация обучения URL: <https://infourok.ru/statya-differenciaciya-obucheniya-5038484.html>.
Дифференциация обучения (дата обращения: 01.05.2024).
2. Алгебра и начала анализа учеб. для 10-11 кл. общеобразоват. учреждений / А. Н. Колмогоров [и др.]. М. : Просвещение, 2001. 384 с.
3. Алгебра и начала математического анализа 10 класс : учебник для общеобразовательных учреждений : базовый и профильный уровни / С. М. Никольский [и др.]. М. : Просвещение, 2009. 430 с.
4. Алгебра и начала математического анализа 10 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций : базовый и углубленный уровни / А. Г. Мордкович [и др.]. М. : Мнемозина, 2014. 463 с..
5. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс /Г. К. Муравин [и др.]. М. : Дрофа, 2013. 318 с.
6. Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10 кл. средней школы (базовый и профильный уровни) / Ю. М. Колягин [и др.]. М. : Просвещение, 2011. 368 с.
7. Алимов Ш. А. Математика : алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учеб. для общеобразовательных организаций: базовый и углубл. уровни. М. : Просвещение, 2016. 463 с.
8. Горский Е. А. Использование электронных средств обучения при изучении тригонометрических функций // Вестник Псковского государственного университета. Серия : Естественные и физико-математические науки. 2015. С. 68.
9. Дифференцированное обучение на уроках математики URL: <https://infourok.ru/obobshenie-opyta-differencirovannoe-obuchenie-na-urokah->

matematiki-5213114.html. Дифференцированное обучение на уроках математики (дата обращения: 21.05.2024).

10. ЕГЭ Тригонометрические уравнения и неравенства URL: <https://mathb-ege.sdangia.ru/test?theme=75>. Тригонометрические уравнения и неравенства (дата обращения: 03.05.2024).

11. Жафяров А. Ж. Методология и технология повышения компетентности учителей, студентов и учащихся по тригонометрии. Н. : Новосибирский государственный педагогический университет, 2011. 235 с.

12. Зайцева М. А. Виды дифференцированных заданий и некоторые вопросы методики их предъявления URL: <https://nsportal.ru/shkola/korreksionnaya-pedagogika/library/2014/01/11/vidy-differentsirovannykh-zadaniy-i-nekotorye-0>. Виды дифференцированных заданий (дата обращения: 02.05.2024).

13. Зандер В. К. О блочном изучении математики (на примере изучения темы «Решение тригонометрических уравнений и неравенств») // Математика в школе. 1991. № 4. С. 38-42.

14. Звавич В. И. Тригонометрические уравнения (решение уравнений + варианты самостоятельных работ) // Математика в школе. 2000. № 3. С. 18-27.

15. Зеленина О. А. Дифференцированное обучение в начальной школе URL: <https://www.1urok.ru/categories/10/articles/37873>. Дифференцированное обучение в начальной школе (дата обращения: 20.04.2024).

16. Капин А. В. Технологическая карта урока математики для 11 класса на тему "Решение тригонометрических уравнений методом введения новой переменной" URL: <https://infourok.ru/tehnologicheskaya-karta-uroka-matematiki-dlya-11-klasse-na-temu-reshenie-trigonometricheskikh-uravnenij-metodom-vvedeniya-novoj-p-6800215.html>. Технологическая карта урока математики (дата обращения: 10.05.2024).

17. Колягин Ю. М. Профильная дифференциация обучения математике // Математика в школе. 1990. № 4. С. 21-26.

18. Мамонтова Т. С. Приемы запоминания значений тригонометрических функций // Научно-методический журнал "Концепт". 2018. № 8. С. 51.
19. Матвиевская Г. П. Очерки истории тригонометрии / Г. П. Матвиевская. М.: URSS, 2020. 160 с.
20. Методы решения тригонометрических неравенств. URL: <https://infourok.ru/metodi-resheniya-trigonometricheskih-neravenstv-2313145.html>. Методы решения тригонометрических неравенств (дата обращения: 21.05.2024).
21. Мурадова С. Р. К вопросу обучения тригонометрии в основной общеобразовательной школе // Лучшая студенческая статья 2018 : сборник статей XIII Международного научно-практического конкурса. В 2-х частях. Пенза : МЦНС "Наука и Просвещение", 2018. С. 166.
22. Практика. Тригонометрические уравнения и неравенства. Базовый уровень. URL: <https://interneturok.ru/lesson/algebra/10-klass/trigonometricheskie-uravneniyab/praktika-trigonometricheskie-uravneniya-i-neravenstva-bazovyy-uroven>. Тригонометрические уравнения и неравенства (дата обращения: 12.05.2024).
23. Примерная рабочая программа ФГОС ФРП-Математика-10-11 классы база // Единое содержание общего образования общего образования. URL: <https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/20.pdf>. Тригонометрические уравнения и неравенства (дата обращения: 14.05.2024).
24. Примерная рабочая программа ФГОС ФРП-Математика-10-11 классы углубленный уровень. // Единое содержание общего образования общего образования. URL: <https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/20.pdf>. Примерная рабочая программа (дата обращения: 14.05.2024).
25. Рабочая программа и КТП по математике Алимов 10-11 класс. URL: <https://infourok.ru/rabochaya-programma-i-ktp-po-matematike-klassi-bazoviy-uroven-umk-alimov-sha-atanasyan-ls-3280590.html>. Рабочая программа и КТП по математике (дата обращения: 11.05.2024).

26. Современные образовательные технологии обучения. // Аксаринская СОШ, МАОУ. URL: <http://aksarinskayaschool.ru/wp-content/uploads/files/Технология%20дифференцированного%20обучения.PDF>.

Современные образовательные технологии обучения (дата обращения: 05.05.2024).

27. Утеева Р. А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе : специальность 13.00.02 «Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования)» : диссертация на соискание ученой степени доктора педагогических наук / Утеева Роза Азербаетовна ; МГУ. Москва, 1998. 37 с.

28. Шарапова Д. Е. Учитель-ученик как основа дифференциации образовательного процесса развивающейся школы. URL: <https://infourok.ru/sistema-uchitel-uchenik-kak-osnova-differenciatsii-obrazovatel'nogo-processa-razvivayuscheysya-shkoli-910502.html>. Учитель-ученик как основа дифференциации образовательного процесса развивающейся школы (дата обращения: 26.04.2024).

Самостоятельная работа по теме "Уравнение $\sin x = a$ "

Самостоятельная работа 1 уровень («слабые»)		
	Найдите значение арксинуса	
	<p>— $\arcsin(-1)$</p> <p>— $-\frac{\pi}{2}$</p> <p>— $-\frac{\pi}{4}$</p> <p>— $\frac{\pi}{3}$</p> <p>— $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$</p> <p>— $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$</p>	
	Выберите из списка решение данного уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	
	<p>— $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$</p> <p>— $x = (-1)^n * \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$</p> <p>— $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$</p> <p>— $x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$</p> <p>— $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$</p> <p>— $x = (-1)^n * \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$</p>	
	Поставьте каждому уравнению в соответствие его решение	
	<p>— $\sin x = -3$</p> <p>— $\sin x = \frac{1}{2}$</p> <p>— $\sin x = -1$</p> <p>— $\sin x = 0$</p> <p>— $\sin x = -0.6$</p>	<p>— $\emptyset$</p> <p>— $x = (-1)^n * \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$</p> <p>— $x = (-1)^{n+1} \arcsin(0,6) + \pi k, k \in Z$</p> <p>— $x = \pi k, k \in Z$</p> <p>— $x = -\frac{\pi}{2} 2\pi k, k \in Z$</p>

	Найдите для каждого уравнения его наименьшее решение на отрезке $[0; 2\pi]$	
	<p>— $\arcsin \frac{1}{4}$</p> <p>— 0</p> <p>— $\frac{3\pi}{2}$</p> <p>— $\frac{7\pi}{6}$</p> <p>— $\pi + \arcsin \frac{1}{6}$</p>	<p>— $2 \sin x = -1$</p> <p>— $\sin x = -1$</p> <p>— $3 \sin x = -\frac{1}{2}$</p> <p>— $\sin x = 0$</p> <p>— $\sin x = -\frac{1}{4}$</p>
	Выберите общую формулу нахождения корней уравнения $\sin x = a, a \leq 1$	
	<p>— $x = \pm \arcsin a + 2\pi k, k \in Z$</p> <p>— $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z$</p> <p>— $x = \arcsin a + \pi k, k \in Z$</p> <p>— $x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in Z$</p>	
	Решите уравнение $\sin x = 1$	
	<p>— $\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$</p> <p>— $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$</p> <p>— $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$</p>	
	Отметьте корни уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	
	<p>— $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k$</p> <p>— $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$</p> <p>— $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$</p>	

Самостоятельная работа 2 уровень («средние»)	
	Сколько точек на отрезке $[-\pi; \pi]$ имеет уравнение $2 \sin(2x) = \sqrt{3}$
	Ответ _____

	Запишите формулу корней уравнения $\sin x = a$	
	Ответ _____	
	Решить	
	<div>— $2 \sin x = -\sqrt{3}$</div> <div>— $\sin x = -\frac{1}{2}$</div> <div>— $\sin x = -2$</div> <div>— $\sin x = -1$</div> <div>— $5 \sin x = 1$</div>	<div>— $x = (-1)^{n+1} * \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$</div> <div>— $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$</div> <div>— $x = (-1)^{n+1} * \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$</div> <div>— $x = -1^n \arcsin\left(\frac{1}{5}\right) + 2\pi n, n \in Z$</div> <div>— пустое множество</div>
	Выберите верное равенство	
	<div>— $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3}$</div> <div>— $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$</div> <div>— $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$</div> <div>— $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$</div> <div>— $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5\pi}{3}$</div>	
	Решите уравнение $\sin a = -\frac{1}{2}$ Найдите a, b, c	
	$a = \begin{cases} -\frac{a\pi}{b} + 2\pi k \\ -\frac{c\pi}{b} + 2\pi k \end{cases} \quad k \in Z$	
	Решите уравнения:	
	<div>— $\sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2}$</div> <div>— $\sin x = -\frac{1}{2}$</div>	

	— $\sin 4\pi x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
	Решите уравнение $(3 \sin x - 1)(2 \sin x - 5) = 0$ Выберите верные ответы
—	$\left[\begin{array}{l} x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z \\ x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{5}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z \end{array} \right.$
—	$\left[\begin{array}{l} x = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z \\ x = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z \end{array} \right.$
—	$\left[\begin{array}{l} (-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z \\ (-1)^{n-1} \arcsin\left(\frac{5}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z \end{array} \right.$
—	$x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{5}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$
—	$x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + \pi n, n \in Z$
—	$x = (-1)^n \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z$

Самостоятельная работа 3 уровень («сильные»)	
	Решите уравнения
—	$\sin\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
—	$\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$
	Расположите значения арксинусов в порядке возрастания
—	$\arcsin(1)$
—	$\arcsin(-1)$
—	$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
—	$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
—	$\arcsin(0)$
—	$\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

	— $\arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$
	<p>Выберите из списка решение уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$</p> <p>— $x = \pm \frac{5}{\pi}6 + 2\pi n, n \in Z$</p> <p>— $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$</p> <p>— $x = (-1)^n * \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$</p> <p>— $x = \begin{cases} -\frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} n \in Z$</p> <p>— $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$</p> <p>— $x = \begin{cases} \frac{\pi}{6} + 2\pi n \\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n \end{cases} n \in Z$</p>
	<p>Решите уравнение $\sin(2 + 3x) = \sin(5x + 2)$</p> <p>В ответ запишите наибольший отрицательный корень</p> <p>Ответ _____</p>
	<p>Решите уравнение $\sin\left(x^2 - 2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$</p> <p>Определите, сколько решений имеет это уравнение при:</p> <p>— $k=-3$</p> <p>Ответ _____</p> <p>— $k=0$</p> <p>Ответ _____</p> <p>— $k=2$</p> <p>Ответ _____</p>
	<p>Выделите верные равенства</p> <p>— $\sin(\arcsin(-0,4)) = -0,4$</p> <p>— $\arcsin(\sin 1,2) = 1,2$</p> <p>— $\sin(\arcsin 2) = 2$</p> <p>— $\arcsin(\sin -2) = -2$</p>

	— $\sin(\arcsin 0,2) = 0,2$
--	-----------------------------

Самостоятельная работа по теме "Уравнение $\cos x = a$ "

Самостоятельная работа 1 уровень («слабые»)	
	Дополните. Косинусом угла α называется ... точки P_α , полученной поворотом точки $P(1;0)$ вокруг начала координат на угол α .
	— абсцисса — ордината
	Согласны ли вы, что:
	— Уравнение $\cos x = a$, где $ a \leq 1$, на отрезке $[0; \pi]$ имеет только один корень — Для любого a из промежутка $[-1; 1]$ справедлива формула: $\arccos a + \arccos(-a) = \pi$ — Уравнение $\cos x = a$ имеет корни только при $-1 \leq a \leq 1$ — Уравнение $\cos x = a$, где $ a \leq 1$, на отрезке $[0; \pi]$ имеет бесконечное множество корней — Для любого a из промежутка $[-1; 1]$ справедлива формула: $\arccos a = \arccos(-a)$ — Уравнение $\cos x = a$ имеет корни только при $a < -1$ и $a > 1$
	Найдите решение уравнения $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ на промежутке $[0; 2\pi]$
	— $\frac{\pi}{4}$ — $-\frac{\pi}{4}$ — $\frac{3\pi}{2}$ — $-\frac{3\pi}{2}$
	Найдите решение уравнения $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ на промежутке $[0; 2\pi]$
	— $\frac{3\pi}{4}$ — $-\frac{3\pi}{4}$

	<p>— $\frac{\pi}{2}$</p> <p>— $-\frac{\pi}{2}$</p>						
	Сопоставьте уравнение с их решением						
	<table> <tr> <td>— $\cos x = 1$</td><td>— $x = 2\pi k, k \in Z$</td></tr> <tr> <td>— $\cos x = 0$</td><td>— $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$</td></tr> <tr> <td>— $\cos x = -1$</td><td>— $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$</td></tr> </table>	— $\cos x = 1$	— $x = 2\pi k, k \in Z$	— $\cos x = 0$	— $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$	— $\cos x = -1$	— $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$
— $\cos x = 1$	— $x = 2\pi k, k \in Z$						
— $\cos x = 0$	— $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$						
— $\cos x = -1$	— $x = \pi + 2\pi k, k \in Z$						
	Найдите общую формулу нахождения корней уравнения $\cos x = a, a \leq 1$						
	<p>— $x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$</p> <p>— $x = (-1)^n \arccos a + 2\pi k, k \in Z$</p> <p>— $x = \arccos a + \pi k, k \in Z$</p> <p>— $x = \pi - \arccos a - 2\pi k, k \in Z$</p>						
	Выберите из списка решение уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$						
	<p>— $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$</p> <p>— $x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$</p> <p>— $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$</p> <p>— $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$</p> <p>— $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$</p>						

Самостоятельная работа 2 уровень («средние»)	
	Решите уравнение $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{3}$
	<p>— $x = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{3} + \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z$</p> <p>— $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$</p> <p>— $x = \pm \arccos \frac{1}{3} + 2\pi k, k \in Z$</p> <p>— $\pm \arccos \frac{1}{3} + \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$</p>

	Чему равен $\arccos(0,3)$? Значение округлите до тысячных	
	Ответ _____	
	Дополните: Арккосинусом числа a , модуль которого не больше единицы, называется	
	— такое число x из промежутка $[0, \pi]$, косинус которого равен a	
	— такое число x из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, косинус которого равен a	
	Решите уравнение $\cos 3x = 0$	
	Ответ _____	
	Решите уравнение $\cos \frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	
	Ответ _____	
	Решите уравнение $\cos 2x = \frac{1}{2}$	
	Ответ _____	
	Расположите значения арккосинусов в порядке возрастания	
	— $\arccos(1)$ — $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ — $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ — $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ — $\arccos(0)$ — $\arccos(-1)$ — $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	

Самостоятельная работа 3 уровень («сильные»)		
	Поставьте в соответствие каждому уравнению его решение	
	— $\cos x = -1$	— $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$
	— $5\cos x = 1$	— $x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$
	— $2\cos x = -\sqrt{3}$	— пустое множество

	<p>— $\cos x = -\frac{1}{2}$</p> <p>— $\cos x = -5$</p>	<p>— $x = \pm \arccos\left(\frac{1}{5}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$</p> <p>— $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$</p>
	Подчеркните верное равенство	
	<p>— $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3}$</p> <p>— $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$</p> <p>— $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$</p> <p>— $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$</p>	
	Решите уравнение	
	$\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$	
	Решите уравнение	
	$\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$	
	Сколько точек на отрезке $[-\pi; \pi]$ имеет уравнение $2 \cos(2x) = \sqrt{3}$	
	Ответ _____	
	Решите уравнение $\cos a = -\frac{1}{2}$. Заполните пропуски в ответе.	
	Ответ: $a = \pm \frac{a\pi}{b} + c\pi k, k \in \mathbb{Z}$	
	<p>Ответ: a=</p> <p>b=</p> <p>c=</p>	
	<p>Найдите значение арккосинуса, введите номер ответа.</p> <p>Возможные варианты ответа:</p> <p>— π</p> <p>— $\frac{\pi}{3}$</p> <p>— $\frac{\pi}{6}$</p>	

	<p>— $\frac{3\pi}{2}$</p> <p>— 0</p> <p>— $\frac{3\pi}{4}$</p> <p>— $-\frac{\pi}{4}$</p> <p>— π</p> <p>— $\frac{2\pi}{3}$</p>
	<p>Ответ: 1. $\arccos(-1)$ _____</p> <p>2. $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ _____</p> <p>3. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ _____</p>

Самостоятельная работа по теме "Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ "

Самостоятельная работа 1 уровень («слабые»)	
	Дополните: Тангенсом угла α называется ...
	<p>— отношение синуса угла к его косинусу</p> <p>— отношение косинуса угла к его синусу</p>
	Дополните: Арктангенсом действительного числа a называется ...
	<p>— такое число x из промежутка $(0; \pi)$, тангенс которого равен a</p> <p>— такое число x из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a</p>
	Найдите решение уравнения $\operatorname{tg} x = 1$ на промежутке $(0; 2\pi)$
	<p>— $\frac{\pi}{4}$</p> <p>— $\frac{5\pi}{4}$</p> <p>— $\frac{5\pi}{2}$</p> <p>— $-\frac{\pi}{4}$</p>
	Найдите решение уравнения $\operatorname{tg} x = -1$ на промежутке $(0; 2\pi)$
	— $\frac{\pi}{2}$

	<p>— $\frac{5\pi}{4}$</p> <p>— $\frac{5\pi}{4}$</p> <p>— $-\frac{\pi}{4}$</p>						
	Сопоставьте уравнения с их решениями						
	<table> <tr> <td>— $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$</td><td>— $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$</td></tr> <tr> <td>— $c \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$</td><td>— $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$</td></tr> <tr> <td>— $c \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$</td><td>— $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$</td></tr> </table>	— $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$	— $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	— $c \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$	— $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$	— $c \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$	— $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
— $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$	— $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$						
— $c \operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$	— $x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$						
— $c \operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$	— $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$						
	<p>Выберите общие формулы нахождения корней уравнения $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$</p> <p>— $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$</p> <p>— $x = \operatorname{arc} \operatorname{ctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$</p> <p>— $x = (-1)^n \operatorname{arc} \operatorname{tg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$</p> <p>— $x = \pi - \operatorname{arc} \operatorname{tg} a - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$</p>						
	Решите уравнение $\operatorname{tg} x = 0$						
	Ответ: _____						
	Решите уравнение $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$						
	Ответ: _____						

Самостоятельная работа 2 уровень («средние»)	
	Согласны ли вы, что:
	<p>— Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни при любом значении a</p> <p>— Для любого действительного a справедлива формула: $\operatorname{arc} \operatorname{tg}(-a) = -\operatorname{arc} \operatorname{tg} a$</p> <p>— Уравнение $\operatorname{tg} x = a$ имеет корни только при $-1 \leq a \leq 1$</p> <p>— Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ на интервале $(0; \pi)$ имеет бесконечное множество корней</p> <p>— Для любого a промежутка $[-1; 1]$ справедлива</p>

	формула: $\operatorname{arc\,tg}(-a) = \pi - \operatorname{arc\,tg} a$ — Уравнение $\operatorname{ctg} x = a$ имеет корни при любом значении a	
	Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{2x}{3} = -\sqrt{3}$	
	Ответ: _____	
	Поставьте в соответствие каждому уравнению его решение	
	— $\operatorname{tg} x = -2$ — $5 \operatorname{ctg} x = 1$ — $\operatorname{tg} x = \frac{-1}{2}$ — $\operatorname{ctg} x = -\sqrt{3}$ — $\operatorname{tg} x = -1$ — $\operatorname{ctg}(2x) = 3$	— $x = \frac{-\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ — $x = -\operatorname{arc\,tg}(0,5) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ — $x = \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ — $x = -\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{5} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ — $x = -\operatorname{arc\,tg}(2) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ — $x = 0,5 \operatorname{arc\,tg} 3 + 0,5\pi n, n \in \mathbb{Z}$
	Выберите верные равенства	
	— $\operatorname{arc\,tg}(-1) = \frac{-\pi}{4}$ — $\operatorname{arc\,tg} \frac{-1}{2} = \frac{-\pi}{6}$ — $\operatorname{arc\,tg} \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{5\pi}{6}$ — $\operatorname{arc\,tg} -\sqrt{3} = \frac{5\pi}{6}$ — $\operatorname{arc\,tg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$ — $\operatorname{arc\,tg}(-1) = \frac{\pi}{4}$	
	Поставьте каждому уравнению в соответствие его решение	
	— $\operatorname{tg} x = 0$ — $\operatorname{tg} x = -0,6$ — $\operatorname{tg} x = -3$ — $c \operatorname{tg} x = -1$	— $x = -\operatorname{arc\,tg}(3)\pi k, k \in \mathbb{Z}$ — $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ — $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ — $x = \operatorname{arc\,tg}(0,5) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

	$c \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$	$\pi k, k \in \mathbb{Z}$ $x = -\operatorname{arc} \operatorname{tg}(0,6) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
	Решите уравнение $c \operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$	
	Ответ: _____	
	Решите уравнение $c \operatorname{tg} x = -0,6$	
	Ответ: _____	

Самостоятельная работа 3 уровень («сильные»)	
	Чему равен $\operatorname{arc} \operatorname{tg}(0,3)$? Значение округлите до сотых
	Ответ: _____
	Заполните пропуски
	$\text{— Сколько решений на отрезке } [0; \pi] \text{ имеет уравнение } 3 \operatorname{ctg}(2x) = 3$ _____
	$\text{— Сколько решений на отрезке } [0; \pi] \text{ имеет уравнение } \operatorname{tg} \frac{x}{3} = 1$ _____
	Решите уравнение $\operatorname{tg}(2 - x) = \operatorname{tg}(3x + 4)$ В ответ запишите значение k , при котором корень x будет наименьшим положительным числом
	Ответ: _____
	Решите уравнение $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{3}$
	Ответ: _____
	Решите уравнение $\operatorname{ctg} \left(x + \frac{3\pi}{2} \right) = 0$
	Ответ: _____
	Даны числа
	— $\operatorname{arc} \operatorname{tg}(1)$
	— $\operatorname{arc} \operatorname{tg}(-1)$
	— $\operatorname{arc} \operatorname{tg}(0)$

	— $\arctg(-\sqrt{3})$
	— $\operatorname{arccotg}(-\sqrt{3})$
	— $\arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{3}\right)$
	— Выберите самое большое число. Запишите его номер. Ответ _____
	— Выберите второе по величине число. Запишите его номер. Ответ _____
	— Выберите самое маленькое число. Запишите его номер. Ответ _____

1. Метод разложения на множители.

Если уравнение $f(x) = 0$ можно преобразовать к виду $f_1(x) * f_2(x) = 0$, то или $f_1(x) = 0$, или $f_2(x) = 0$. Таким образом нужно найти решение двух уравнений: $f_1(x) = 0$; $f_2(x) = 0$. Данный метод позволяет разложить сложные выражения, сводящиеся к произведению, на простые компоненты – множители.

Самостоятельная работа 1 уровень («слабые»)	
	Решить уравнение: $2 \sin 5x \cos 2x = 2 \sin 5x$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $\frac{\cos^2 x - \cos x}{5} = 0$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $2 \cos 2x + \cos x = 0$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $\operatorname{tg} x (\sin x - 1) = 0$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $2 \sin x \cos x = 3 \sin x$
	Ответ: _____

Самостоятельная работа 2 уровень («средние»)	
	Решить уравнение: $2 \cos^2 2x = \sqrt{3} \cos 2x$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $\sin 2x + \sqrt{2} \sin x = 2 \cos x = \sqrt{2}$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $\sin 2x - \cos x + 2 \sin x = 1$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $\frac{\sin^2 x + \sin x}{\sqrt{\cos x}} = 0$
	Ответ: _____

Самостоятельная работа 3 уровень («сильные»)	
	Решить уравнение: $\cos x \operatorname{ctg} x + \sqrt{3} = \operatorname{ctg} x + \sqrt{3} \cos x$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $2 \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \sqrt{3} \cos(2\pi - x)$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $2 \sin x \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{3} + \sin 2x = 0$ Найдите все его корни, принадлежащие промежутку $[-7\pi; -5\pi]$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $\sin^2 2x + \sin^3 3x = 1$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $2 \sin^2 \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = \sqrt{3} \cos x$ Найдите все его корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi \right]$
	Ответ: _____

2. Метод замены переменной.

Метод замены переменной – это метод, позволяющий заметно упростить уравнение, путем замены сложных повторяющихся выражений новой переменной. Данный метод, как правило, позволяет свести тригонометрическое уравнение к алгебраическому.

Самостоятельная работа 1 уровень («слабые»)	
	Решить уравнение: $\sin^2 x + 3 \sin x - 4 = 0$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $4 \cos^2 x + 8 \cos x + 3 = 0$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $\operatorname{tg}^3 2x - \operatorname{tg} 2x = 0$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $2 \sin^2 2x - 4 \sin 2x + 3 = 0$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $2 \sin^2 x + 7 \sin x + 3 = 0$
	Ответ: _____

Самостоятельная работа 2 уровень («средние»)	
	Решить уравнение: $\operatorname{tg} 3x - 4 \operatorname{ctg} 3x - 3 = 0$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $\sin^2 x + 7 \cos x = 8$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $\cos 2x + 3 \sin x + 1 = 0$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $3 \cos^2 x = 7(\sin x + 1)$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $4 \cos x \sin x - 3 \sin^2 x = 1$
	Ответ: _____

Самостоятельная работа 3 уровень («сильные»)
--

	Решить уравнение: $\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 4 + 3 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 0$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $4 \sin^2 x - 12 \sin x + 5 = 0$ Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-\pi; 2\pi]$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $2 \sin^4 x + 3 \cos 2x + 1 = 0$ Укажите корни, принадлежащие отрезку $[\pi; 3\pi]$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $6 \sin^2 x + 7 \cos x - 7 = 0$ Укажите корни, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\pi]$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $\frac{4}{\sin^2 x \left(\frac{7\pi}{2} - x\right)} - \frac{11}{\cos x} + 6 = 0$ Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$
	Ответ: _____

3. Метод введения вспомогательного угла.

Метод вспомогательного угла - это метод, позволяющий упростить уравнение вида $a \sin x + b \cos x = c$ (линейное однородное уравнение первой степени, где a, b, c - действительные числа) путем применения одной из формул (косинус суммы, косинус разности, синус суммы, синус разности), и сведения его к простейшему. В школьных учебниках рассматриваются только частные случаи — когда числа a и b являются значениями синуса и косинуса углов в 30° , 45° или 60° .

Порядок действий.

1. Преобразовать конструкцию, если нужно.
2. Найти поправочный коэффициент, взять из него корень и разделить обе части примера на него.
3. Смотрим, какие значения синуса и косинуса получаются у чисел.

4. Раскладываем уравнение по формулам синуса или косинуса разности или суммы.

5. Решаем простейшее тригонометрическое уравнение.

Самостоятельная работа 1 уровень («слабые»)	
	Решить уравнение: $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $3 \sin x + 4 \cos x = 5$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $\cos 2x + \sin 2x = 1$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $\sqrt{3} \sin x = \cos x$
	Ответ: _____

Самостоятельная работа 2 уровень («средние»)	
	Решить уравнение: $\operatorname{tg} 3x - 4 \operatorname{ctg} 3x - 3 = 0$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $\sin^2 x + 7 \cos x = 8$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $\cos 2x + 3 \sin x + 1 = 0$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $3 \cos^2 x = 7(\sin x + 1)$
	Ответ: _____
	Решить уравнение: $\cos x + \sin x = 2 \sin x - 1$
	Ответ: _____

Самостоятельная работа 3 уровень («сильные»)
--

	<p>Решить уравнение: $2x(1 + 2 \sin x) = 34 \cos^2 x$.</p> <p>Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; \frac{11\pi}{4}\right]$</p>
	<p>Ответ: _____</p>
	<p>Решить уравнение: $5 + 2 \sin 2x + 5 \cos x = 5 \sin x$</p>
	<p>Ответ: _____</p>
	<p>Решить уравнение: $\frac{2(\cos x + \sin x) + 1 - \cos 2x}{2(1 + \sin x)} = \sqrt{3} + \sin x$</p> <p>Найдите все корни на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$</p>
	<p>Ответ: _____</p>
	<p>Решить уравнение: $\sin 8\pi x + 1 = \cos 4\pi x + \sqrt{2} \cos\left(4\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$</p> <p>Найдите все корни на промежутке $[2 - \sqrt{7}; \sqrt{7} - 2]$</p>
	<p>Ответ: _____</p>
	<p>Решить уравнение: $\sin 3x + 4 \sin^3 x + 4 \cos x = 5$</p>
	<p>Ответ: _____</p>

**Комплексная самостоятельная работа «Способы решения
тригонометрических уравнений»**

Решите уравнения:

I вариант	II вариант
-----------	------------

1. $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ 2. $\cos x + 1 = 0$ 3. $\cos x = \frac{5}{3}$ 4. $\frac{1}{\sqrt{3}} \cos x = \frac{1}{2}$ 5. $* \sin\left(-4x + \frac{\pi}{6}\right) = 0,5$ 6. $* 1 + 3 \sin^2 x = 2 \sin 2x$ 7. $* 2 \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4}\right) = \sqrt{3}$ 8. $** \cos 3x + \cos x = 0$ и найдите все корни, принадлежащие промежутку $\left\{-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\}$ 9. $** \cos \frac{\pi(x+2)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответ запишите корни, принадлежащие промежутку $[-\pi; 0]$	1. $\cos x = \frac{1}{2}$ 2. $\sin x - 1 = 0$ 3. $\operatorname{tg} x = -1$ 4. $\frac{1}{\sqrt{3}} \sin x = \frac{1}{2}$ 5. $* \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = -1$ 6. $* 2 \sin x * \cos x = \cos 2x - 2 \sin 2x$ 7. $* \sqrt{3} \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = 3$ 8. $** \cos x + \sin \frac{x}{2} = 0$ и найдите наибольший отрицательный корень этого уравнения. 9. $** \cos \frac{\pi(x-4)}{6} = \sqrt{3}$. В ответ запишите корни, принадлежащие промежутку $[2\pi; 0]$
--	--

Решение тригонометрических неравенств

Самостоятельная работа 1 уровень («слабые»)
Решить уравнения: 1. $\cos x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 2. $\sin x > \frac{1}{2}$ 3. $\cos x < \frac{\sqrt{3}}{2}$ 4. $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 5. $\operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$

Самостоятельная работа 2 уровень («средние»)
--

Решить уравнения.

1. $\cos^2 2x - 2 \cos 2x \geq 0$
2. $6 \sin^2 x + 5 \sin x + 1 \geq 0$
3. $\sin x + \cos 2x > 1$
4. $-2 < 4 \sin 2x \cos 2x$
5. $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

Самостоятельная работа 3 уровень («сильные»)

Решить уравнения.

1. $\frac{1}{2} < \sin \frac{x}{2} \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\frac{2 \cos^2 x + \cos x - 1}{\sin x - 1} < 0$
3. $\frac{2 \cos x - \sqrt{2}}{\cos x} < 0$
4. $5 \sin^2 x + \sin^2 2x > 4 \cos 2x$
5. $\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} > -1$

Технологическая карта занятия "Решение тригонометрических уравнений методом замены переменной"

Предмет		Алгебра	
Класс		10	
Тема		Метод замены при решении тригонометрических уравнениях	
Цель	• Создать условия для расширения и закрепления знаний о способе решения тригонометрических уравнений методом введения новой переменной и отработке умения решать тригонометрические уравнения данным методом		
Задачи	<ul style="list-style-type: none">– организовать повторение учебного материала по простейшим тригонометрическим уравнениям и данным методом решения произвольных тригонометрических уравнений;– организовать рефлексивную процедуру;– расширить знания о данном методе решения тригонометрических уравнений;– организовать тренинг и самоконтроль студентов;		
Формы работы	Групповая, фронтальная		
Этап	Деятельность учителя	Деятельность обучающегося	Организация дифференцированной работы

Организа- ционный момент	<p>- Здравствуйте. На занятии мы будем говорить о методах решения тригонометрических уравнений.</p> <p>Сегодня рассмотрим метод замены переменной.</p> <p>- Это занятие нужно нам для того, чтобы ответить на все ваши вопросы, объяснить то, что вы не поняли по теме, разобраться от и до с данным методом решения тригонометрических уравнений.</p>	Включаются в учебную деятельность, отвечают на вопросы.	Фронтальная работа.																				
Актуализа- ция знаний	<p>- Вспомните значение арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса, заполнив таблицу.</p> <table border="1"> <thead> <tr> <th colspan="2">1 вариант</th><th colspan="2">2 вариант</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>$\frac{\pi}{4}$</td><td>$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$</td><td>$\frac{\pi}{4}$</td></tr> <tr> <td>$\arccos 1$</td><td>0</td><td>$\arcsin 1$</td><td>$\frac{\pi}{2}$</td></tr> <tr> <td>$\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$</td><td>$-\frac{\pi}{6}$</td><td>$\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$</td><td>$\frac{2\pi}{3}$</td></tr> <tr> <td>$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$</td><td>$\frac{5\pi}{6}$</td><td>$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$</td><td>$-\frac{\pi}{3}$</td></tr> </tbody> </table>	1 вариант		2 вариант		$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\arccos 1$	0	$\arcsin 1$	$\frac{\pi}{2}$	$\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{6}$	$\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{2\pi}{3}$	$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{3}$	<p>Вспоминают пройденный материал: находят значение арксинуса, арккосинуса, арктангенса и арккотангенса, заполняют таблицу.</p> <p>Осуществляют</p>	Фронтальная работа.
1 вариант		2 вариант																					
$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\pi}{4}$																				
$\arccos 1$	0	$\arcsin 1$	$\frac{\pi}{2}$																				
$\arcsin \left(-\frac{1}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{6}$	$\arccos \left(-\frac{1}{2}\right)$	$\frac{2\pi}{3}$																				
$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$	$-\frac{\pi}{3}$																				

	<table><tr><td>$\arctg \sqrt{3}$</td><td>$\frac{\pi}{3}$</td><td>$\arctg \frac{\sqrt{3}}{3}$</td><td>$\frac{\pi}{6}$</td></tr></table>	$\arctg \sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\arctg \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	взаимоконтроль.			
$\arctg \sqrt{3}$	$\frac{\pi}{3}$	$\arctg \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\pi}{6}$						
	<p>-Теперь поменяйтесь листочками с соседом и сверьте ответы с ответами на доске.</p> <p>- Вспомним формулы решения простейших тригонометрических уравнений.</p> <table><tr><td>$\sin x = a$</td><td>$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$</td></tr><tr><td>$\cos x = a$</td><td>$x = \pm \arccos a + 2 \pi n, n \in \mathbb{Z}$</td></tr><tr><td>$\operatorname{tg} x = a$</td><td>$x = \arctg a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$</td></tr></table>	$\sin x = a$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2 \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\operatorname{tg} x = a$	$x = \arctg a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	<p>Вспоминают формулы простейших тригонометрических уравнений.</p> <p>Устанавливают соответствие.</p>	
$\sin x = a$	$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$								
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2 \pi n, n \in \mathbb{Z}$								
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \arctg a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$								
	<p>- Теперь поработаем с простейшими</p>								

	<p>тригонометрическими уравнениями. Установите соответствие между уравнением и его решением:</p> <table><tr><td>$\sin x = 0$</td><td>$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$</td></tr><tr><td>$\cos x = -1$</td><td>$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$</td></tr><tr><td>$\sin x = 1$</td><td>$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$</td></tr><tr><td>$\cos x = 1$</td><td>$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$</td></tr><tr><td>$\operatorname{tg} x = 1$</td><td>$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$</td></tr><tr><td>$\sin x = -1$</td><td>$x = \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$</td></tr><tr><td>$\cos x = 0$</td><td>$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$</td></tr></table> <p>- Переходим к решению произвольных тригонометрических уравнений.</p>	$\sin x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\cos x = -1$	$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\sin x = 1$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\cos x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\operatorname{tg} x = 1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\sin x = -1$	$x = \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$		
$\sin x = 0$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$																
$\cos x = -1$	$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$																
$\sin x = 1$	$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$																
$\cos x = 1$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$																
$\operatorname{tg} x = 1$	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$																
$\sin x = -1$	$x = \pi + \pi n, n \in \mathbb{Z}$																
$\cos x = 0$	$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$																
Фиксация затруднений	- Проговорим алгоритм решения тригонометрических уравнений методом замены:	Активно слушают, предлагают стратегии	Фронтальная работа.														

	<p>1. Преобразуйте тригонометрическое уравнение так, чтобы в его записи был один аргумент и одна тригонометрическая функция.</p> <p>2. Введите новую переменную.</p> <p>3. Составьте уравнение с новой переменной.</p> <p>4. Решите уравнение с новой переменной.</p> <p>5. Вернитесь к замене.</p> <p>6. Решите простейшие тригонометрические уравнения.</p> <p>7. Запишите ответ.</p> <p>- Решите уравнение:</p> $\cos\left(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ <p>- Аргумент косинуса имеет вид: $\left(\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$</p> <p>- Введем новую переменную: $t = \frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{6}$</p> <p>- Теперь уравнение имеет вид: $\cos t = \frac{1}{2}$</p> <p>- Это простейшее тригонометрическое уравнение, которое вы уже умеете решать.</p>	<p>решения, записывают решение в тетрадь.</p> <p>Записывают алгоритм действий.</p>	
--	---	--	--

$$t = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

- Определим значение арккосинуса по таблице:

$$t = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

- Мы нашли t , теперь найдем x . Сделаем обратную замену:

$$\frac{\pi x}{3} + \frac{\pi}{6} = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

-Выразим x . Для этого нужно перенести $\frac{\pi}{6}$ в правую часть:

$$\frac{\pi x}{3} = \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + 2\pi k.$$

- Делим на $\frac{\pi}{3}$ обе части уравнения:

$$x = \pm 1 - \frac{1}{2} + 6\pi k.$$

- Рассмотрим корни уравнения с +1 и -1:

$$x = 1 - \frac{1}{2} + 6k \text{ или } x = -1 - \frac{1}{2} + 6k,$$

$$x = \frac{1}{2} + 6k \text{ или } x = -\frac{3}{2} + 6k,$$

	- На каком этапе возникли затруднения при решении уравнения?		
Практическая работа	<p>- Решите уравнение:</p> $\sin x^2 = 1.$ <p>- Обратите внимание, что в квадрат возведен аргумент! Действуем по алгоритму:</p> <p>1. Водим новую переменную: $t = x^2$. Получаем $\sin t = 1$.</p> <p>2. Решение: $t = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.</p> <p>3. Делаем обратную замену: $x^2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.</p> <p>4. Выражаем x: мы работаем с квадратным уравнением, значит правая часть уравнения должна быть неотрицательным числом. Проверим это: при $k = 0$ правая часть уравнения равна $\frac{\pi}{2}$; при $k = -1$ правая часть уравнения равна $\frac{\pi}{2} - 2\pi = -\frac{3\pi}{2}$. То есть уравнение будет иметь решение при $k \geq 0$. Ответ можно записать в виде: $x = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}; k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$.</p> <p>- Что вы не смогли сделать?</p>	<p>Проговаривают алгоритм решения.</p> <p>Один ученик решает на доске, другие – в тетрадях. Сравниваем полученный ответ с эталоном.</p>	Фронтальная работа.

	<p>- Удалось ли получить верный ответ?</p> <p>- Вы можете объяснить, как вы действовали, и доказать, что действовали правильно?</p> <p>- Далее мы поработаем в группах. Те, кто хорошо справился с заданиями сейчас будут консультантами. Объединитесь с теми, кому нужна помощь и кто не совсем уверен, что понял тему занятия.</p> <p>- Я предлагаю вам еще одно задание для парной работы:</p> $tg^2 x - tg x = 2.$	<p>Работают в парах/группах. Решают предложенное уравнение вместе.</p> <p>1. Вводим переменную: $t^2 - t = 2.$</p> <p>2. Находим корни уравнения: $t = -1$ и $t = 2$</p> <p>3. Делаем обратную замену: $tg x = 1$ или $tg x = 2.$</p>	<p>Групповая работа с привлечением "консультантов" - хорошо успевающих учеников.</p> <p>Консультантов объединяем в пары со слабоуспевающими учениками и даем им время на самостоятельную</p>
--	--	---	--

		<p>4. Решаем простейшее тригонометрическое уравнение: $\operatorname{tg} x = 1$,</p> $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} (-1)$ $+ \pi k, k \in \mathbb{Z},$ $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k;$ $\operatorname{tg} x = 2$ $x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$ <p>Ответ:</p> $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k; x$ $= \operatorname{arc} \operatorname{tg} 2$ $+ \pi k, k \in \mathbb{Z}.$	работу в паре.
Закрепление материала	<p>- Предлагаю для решения три варианта самостоятельной работы, чтобы вы проверили свои силы и оценили знания. Задания распределены по трем конвертам, чем ярче цвет, тем задания сложнее. Выбирайте.</p> <p>- Сверим ответы с доской.</p> <p>- Выделим типичные ошибки, отработаем их вместе.</p>	Решают дифференцированную самостоятельную работу.	<p>Организация дифференцированной самостоятельной работы.</p> <p>Самостоятельная работа приведена в работе.</p>

	Будем пользоваться помощью консультантов.		
<p>Подведение итогов.</p> <p>Рефлексия.</p>	<p>Подведем итоги занятия.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Что нового вы узнали на занятии? – Какую цель мы ставили в начале занятия? – Наша цель достигнута? – Что нам помогло справиться с затруднением? – Какие знания нам пригодились при выполнении заданий на уроке? – Как вы можете оценить свою работу? <p>Сегодня вы хорошо поработали, особенно активны были ...</p> <p>Кто работал у доски, пусть сам себя оценит. Оцените друг друга при работе в парах.</p>	<p>Отвечают на вопросы, анализируют свою работу.</p>	<p>Фронтальная работа.</p>

Технологическая карта занятия "Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители"

Предмет		Алгебра	
Класс		10	
Тема		Метод разложения на множители при решении тригонометрических уравнениях	
Цель	• Создать условия для расширения и закрепления знаний о способе решения тригонометрических уравнений методом разложения на множители и отработке умения решать тригонометрические уравнения данным методом		
Задачи	– организовать повторение учебного материала по простейшим тригонометрическим уравнениям и данным методом решения произвольных тригонометрических уравнений; – организовать рефлексивную процедуру; – расширить знания о данном методе решения тригонометрических уравнений; – организовать тренинг и самоконтроль студентов;		
Формы работы	Групповая, фронтальная		
Этап	Деятельность учителя	Деятельность обучающегося	Организация дифференцированной работы

Организа- ционный момент	<p>- Здравствуйте. На занятии мы будем говорить о методах решения тригонометрических уравнений. Сегодня рассмотрим метод разложения на множители.</p> <p>- Это занятие нужно нам для того, чтобы ответить на все ваши вопросы, объяснить то, что вы не поняли по теме, разобратся от и до с данным методом решения тригонометрических уравнений.</p>	Включаются в учебную деятельность, отвечают на вопросы.	Фронтальная работа.
Актуализа- ция знаний	<p>- Вспомним стандартные тригонометрические уравнения. Заполните пропуски в таблице:</p> $\sin x = a \quad -1 \leq a \leq 1 \quad \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + 2\pi n \\ x = \pi - \arcsin a + 2\pi n \\ , n \in \mathbb{Z} \end{array} \right.$ $\cos x = a \quad -1 \leq a \leq 1 \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{tg} x = a \quad a \in \mathbb{Z} \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ $\operatorname{ctg} x = a \quad a \in \mathbb{Z} \quad x = \operatorname{arccotg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ <p>- Вспомним, что значит "разложить на множители":</p> $a * b + a * c = a * (b + c)$ <p>- Метод решения уравнений путем разложения на</p>	<p>Актуализируют знания по пройденному материалу.</p> <p>Заполняют пропуски в таблице, сверяют с доской.</p>	Фронтальная работа.

множители является универсальным способом решения уравнений. Он основан на утверждении, что произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а другие при этом имеют смысл.

$$f(x) * g(x) = 0 \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) = 0 \\ \text{ОДЗ} \end{cases}$$

- Частное двух выражений равно нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 0 \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$$

- Применяя этот способ, обычно заменяют исходное уравнение равносильным ему уравнением, в котором в правой части стоит число нуль, а выражение в левой части после разложения его на множители представляет собой произведение нескольких множителей. Это позволяет свести решение произвольного тригонометрического уравнения к решению одного или нескольких простейших тригонометрических уравнений.

<p>Фиксация затруднений</p>	<ul style="list-style-type: none"> - Рассмотрим тригонометрическое уравнение, решаемое методом разложения на множители: $2 \cos 2x \sin x - 1 + 2 \cos 2x - \sin x = 0.$ - Вынесем общий множитель $2 \cos 2x$ за скобки: $2 \cos 2x (\sin x + 1) - (\sin x + 1) = 0$ $\rightarrow (\sin x + 1)(2 \cos 2x - 1) = 0$ - Исходное уравнение равносильно совокупности двух уравнений: $\sin x + 1 = 0$ и $2 \cos 2x - 1 = 0$. - Решаем простейшие тригонометрические уравнения: $\sin x = -1 \text{ и } \cos 2x = \frac{1}{2}$ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \text{ и } x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z.$ - Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ и $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$. - На основании решения составим алгоритм действий при решении тригонометрических уравнений методом разложения на множители: <ol style="list-style-type: none"> 1. Преобразуйте тригонометрическое уравнение так, чтобы правой части был 0. 2. Вынесите общий множитель за скобку. 	<p>Решают тригонометрические уравнения.</p>
		<p>Проговаривают и записывают алгоритм действий.</p>

	<p>3. Сгруппируйте множители в произведения.</p> <p>4. Приравняйте каждое произведение к 0.</p> <p>5. Решите простейшие тригонометрические уравнения.</p> <p>6. Запишите ответ.</p> <p>- Давайте спрогнозируем на каком этапе может возникнуть большее количество затруднений?</p>		
Практическая работа	<p>- Иногда для решения тригонометрических уравнений нам понадобятся другие тригонометрические формулы https://mathus.ru/math/trigform.pdf . Я выведу их на экран, а вы можете пользоваться справочниками у вас на столах.</p> <p>- Решить уравнение: $\sin 7x + \sin 3x = 3 \cos 2x$.</p> <p>- Применим формулу для суммы синусов: $2 \sin 5x * \cos 2x = 3 \cos 2x$.</p> <p>- Преобразуем уравнение так, чтобы в правой части был 0: $2 \sin 5x * \cos 2x - 3 \cos 2x = 0$.</p> <p>- Выносим за скобки $\cos 2x$, получим: $\cos 2x (\sin 5x - 3/2) = 0$.</p> <p>- Приравниваем каждый множитель к 0:</p>	Решают тригонометрические уравнения методом разложения на множители.	Фронтальная работа, групповая работа с привлечением консультантов.

	$\cos 2x = 0 \text{ и } \sin 5x - \frac{3}{2} = 0.$ <p>- Решаем простейшие тригонометрические уравнения:</p> $\cos 2x = 0 \rightarrow \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \text{ и } \sin 5x - \frac{3}{2} = 0$ <p style="text-align: center;">$\rightarrow$ не имеет корней.</p> <p>- Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$</p> <p>- Далее мы поработаем в группах. Те, кто хорошо справился с заданиями сейчас будут консультантами. Обединитесь с теми, кому нужна помощь и кто не совсем уверен, что понял тему занятия.</p> <p>- Я предлагаю вам еще одно задание для парной работы: $\cos 3x + \sin 5x = 0.$</p>		
		<p>1. Преобразуем уравнение, используя формулу $\sin t = \cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$ и формулу суммы косинусов:</p> <p>и формулу суммы косинусов: $\cos 3x + \cos \pi - 5x = 0,$</p> $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$	

	<p>- Решите уравнение: $\sin x + \sin 2x = 0$</p>	<p>2. Решаем простейшие тригонометрические уравнения: $2 \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ и $\cos 4x - \pi 4 = 0$.</p> <p>Ответ: $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, x = \frac{3\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z}$.</p> <p>Будем использовать формулу двойного угла: $\sin x + 2\sin x \cos x = 0$.</p> <p>Выносим за скобки $\sin x(1 + 2 \cos x) = 0$.</p> <p>Приравниваем множители к 0:</p> $\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases}$	
--	--	---	--

Решите уравнение: $2 \sin x * \sin \frac{\pi}{2} * \sin \frac{\pi}{3} + \sin 2 = 0$

Решаем простейшие тригонометрические уравнения:

$$\begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

Заметим, что в этом уравнении есть табличные углы:

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1 \text{ и } \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Воспользуемся формулой двойного угла: $\sin 2x =$

$$2 \sin x \cos x \rightarrow$$

$$2 \sin x * 1 * \frac{\sqrt{3}}{2} +$$

$$2 \sin x \cos x = 0.$$

Вынесем за скобки

		<p>общий множитель:</p> $\sin x \left(\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0.$ <p>Приравняем к 0:</p> $\sin x = 0 \text{ и } \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$ <p>Решим простейшие тригонометрические уравнения: $x =$</p> $\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$ <p>Записываем ответ.</p>	
Закрепление материала	<p>- Предлагаю для решения три варианта самостоятельной работы, чтобы вы проверили свои силы и оценили знания. Задания распределены по трем конвертам, чем ярче цвет, тем задания сложнее. Выбирайте.</p> <p>- Сверим ответы с доской.</p> <p>- Выделим типичные ошибки, отработаем их вместе.</p> <p>Будем пользоваться помощью консультантов.</p>	Решают дифференцированную самостоятельную работу.	<p>Организация дифференцированной самостоятельной работы.</p> <p>Самостоятельная работа приведена в работе.</p>

<p>Подведение итогов.</p> <p>Рефлексия.</p>	<p>Подведем итоги занятия.</p> <ul style="list-style-type: none"> – Что нового вы узнали на занятии? – Какую цель мы ставили в начале занятия? – Наша цель достигнута? – Что нам помогло справиться с затруднением? – Какие знания нам пригодились при выполнении заданий на уроке? – Как вы можете оценить свою работу? <p>Сегодня вы хорошо поработали, особенно активны были ...</p> <p>Кто работал у доски, пусть сам себя оценит. Оцените друг друга при работе в парах.</p>	<p>Отвечают на вопросы, анализируют свою работу.</p>	<p>Фронтальная работа.</p>
---	---	--	----------------------------

**Самостоятельная работа "Решение тригонометрических уравнений
№1"**

Самостоятельная работа "Решение тригонометрических уравнений"
Решите уравнения:
$\sin x = 0$
$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg} x = -1$
$\operatorname{ctg} \left(\frac{x + \pi}{3} \right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sin^2 3x - 3 \sin 3x + 2 = 0$
$4 \cos^2 x - 4 \cos x + 1 = 0$
$\frac{1}{\sin^2 x} = \operatorname{ctg} x + 3$
$2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \operatorname{tg} x$
$\sin 2x + \sqrt{3} \sin x = 0$

**Самостоятельная работа "Решение тригонометрических уравнений
№2"**

Самостоятельная работа "Решение тригонометрических уравнений"
Решите уравнения:
$\cos 3x = -1$
$\sin \frac{2x}{3} = 1$
$\sin 5x = 0$
$\cos \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$
$2 \sin^2 x - 7 \cos 2x - 5 = 0$
$tg^2 x - 2tg x - 3 = 0$
$5 \sin \frac{x}{6} - \cos \frac{x}{3} + 3 = 0$
$\cos \left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$
$\cos 2x + 3 \sin^2 x = 1,25$

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»

Утверждаю: зав. кафедрой
«21» 09 2023 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Назаренко Ирины Сергеевны

Тема работы «Методические особенности изучения тригонометрических
уравнений и неравенств в школе»

Утверждена приказом по Университету от «26.09» 2023 г. № 09729/0

Срок сдачи студентом законченной работы «06» 06 2024 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
	– Выявить роль, место, методические особенности преподавания тригонометрии;		выполнено
	– Изучить учебную литературу о тригонометрических уравнениях и неравенствах в школьном курсе математики;		выполнено
	– Изучить психолого-педагогическую литературу об использовании дифференцированного обучения;		выполнено
	– Определить методические особенности дифференцированного обучения на уроках тригонометрии;		выполнено
	– Разработать факультативный курс по теме «Решение тригонометрических уравнений и неравенств на основе дифференцированного подхода;		выполнено

	– Апробировать факультативный курс в общеобразовательной школе.		выполнено
--	--	--	-----------

Дата выдачи задания «18» 09 2023г.

Руководитель Окелет Гукилина О.Г.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

Сюф Назаренко М.С.
(подпись) (Ф.И.О.)

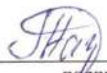
Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения
группы 193ФПМ1 Назаренко И. С.

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Назаренко Ирина Сергеевна, студентка 5 курса заочной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему: «Методические особенности изучения тригонометрических уравнений и неравенств в школе», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


подпись
05.06.2024
дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 5.06.2024
дд.мм.гггг

Руководитель ВКР  О.Г. Никитина
подпись И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ»
выпускной квалификационной работы на тему: «Методические особенности
изучения тригонометрических уравнений и неравенств в школе»
студентки 5 курса Назаренко Ирины Сергеевны
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика»
Руководитель ВКР Никитина Ольга Геннадьевна



Отчет предоставлен сервисом
«Антиплагиат» - <http://pnzgu.antiplagiat.ru>



Отчет о проверке

Автор: Назаренко Ирина Сергеевна
Название документа: Диплом Назаренко

Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна
Организация: Пензенский государственный университет

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
29.69%

Оригинальность:
69.63%

Цитирование:
0.48%

Самоцитирование:
0%

«Совпадения», «Цитирование»,
«Самоцитирование», «Оригинальность»
являются отдельными показателями,
отображаются в процентах и в сумме
дают 100%, что соответствует
проверенному тексту документа.

Дата 5.06.2024 Никитина О. Г. *Никитина*

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методические особенности изучения тригонометрических
уравнений и неравенств в школе»
студентки Назаренко Ирины Сергеевны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 193ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Назаренко Ирины Сергеевны посвящена методическим особенностям изучения тригонометрических уравнений и неравенств в школе.

Актуальность данной темы состоит в том, недостаток времени для изучения тригонометрических уравнений и неравенств в классах с базовым профилем подготовки способствует слабому усвоению этих тем обучающимися, что приводит к поиску дополнительного времени, форм и методов преподавания.

Цель работы состоит в разработке и апробации факультативного курса "Тригонометрические уравнения и неравенства".

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, заключения, списка литературы и приложений.

Основная часть состоит из двух глав.

В первой главе отражены теоретические аспекты изучения тригонометрических уравнений и неравенств в школьном курсе математики, проведен анализ материала о тригонометрических уравнениях и неравенствах в различных школьных учебниках, обозначены роль и место изучения тригонометрических уравнений и неравенств. Здесь же описаны виды и основные методы решения тригонометрических уравнений и неравенств.

Вторая глава посвящена формированию умений и навыков решения тригонометрических уравнений и неравенств в условиях реализации факультативного курса на основе дифференцированного подхода. В этой главе рассмотрена сущность дифференцированного подхода, особенности его применения при рассмотрении тем "Тригонометрические уравнения" и "Тригонометрические неравенства". Здесь же приведена программа факультативного курса и результаты его апробации.

В приложениях приведены технологические карты уроков и дифференцированные самостоятельные работы.

Работа Назаренко И.С. является самостоятельным исследованием.

Практическая значимость исследования в том, что результаты работы могут быть использованы автором при работе в школе.

Выпускная квалификационная работа Назаренко Ирины Сергеевны заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель ВКР Никитина Ольга Геннадьевна, доцент кафедры
«Математическое образование», к.ф.-м.н. 