

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

Рабочая тетрадь «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике

Студент

 21.05.25
(подпись, дата)

Михрячева Ирина Александровна
(ФИО полностью)

Руководитель

 21.05.25
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

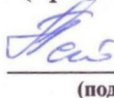
Нормоконтролёр

 28.06.25
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 2.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой

 2.06.25
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой 4/хор (протокол заседания ГЭК от 8.07.25 № 6)

Секретарь ГЭК

 8.07.25
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ.....	7
1.1 Понятие текстовой задачи, ее структура и этапы решения	7
1.2 Анализ школьных учебников по алгебре	20
ГЛАВА 2 РАЗРАБОТКА РАБОЧЕЙ ТЕТРАДИ «ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ» ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ	34
2.1 Практическая значимость разработки рабочей тетради «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике	34
2.2 Критерии оценки 21 задания ОГЭ по математике.....	37
2.3 Разработка рабочей тетради «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике	44
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	72
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	73
ПРИЛОЖЕНИЕ	75

ВВЕДЕНИЕ

Математическое образование занимает особое место в системе общего образования, выступая не только как средство формирования предметных знаний и умений, но и как инструмент развития логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры и математической интуиции обучающихся. В этом контексте текстовые задачи традиционно являются одним из важнейших средств обучения математике, поскольку они обеспечивают связь между абстрактными математическими понятиями и реальными жизненными ситуациями, демонстрируют практическую значимость математических знаний и формируют функциональную грамотность школьников.

Актуальность темы данного исследования обусловлена несколькими ключевыми аспектами современного математического образования. Во-первых, анализ результатов Основного государственного экзамена (ОГЭ) по математике за последние годы свидетельствует о том, что значительная часть выпускников 9-х классов испытывает серьезные затруднения при решении текстовых задач. По данным аналитических отчетов ФИПИ, средний процент выполнения заданий, связанных с текстовыми задачами, составляет от 30% до 50%, что существенно ниже показателей по другим разделам экзамена. Особые трудности вызывают задачи на движение, работу, проценты и смеси – именно те типы заданий, которые имеют наибольшую практическую значимость и формируют математическую грамотность.

Во-вторых, результаты международных исследований качества образования (PISA, TIMSS) показывают, что российские школьники демонстрируют недостаточный уровень умения применять математические знания в реальных ситуациях, свидетельствуя о необходимости совершенствования методик обучения решению текстовых задач, которые моделируют практические ситуации и требуют от учащихся не только

математических знаний, но и умения анализировать, строить математические модели и интерпретировать результаты.

В-третьих, современные образовательные стандарты (ФГОС ООО) ориентированы на формирование не только предметных, но и метапредметных результатов обучения, включающих умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классификации, устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение и делать выводы. Текстовые задачи являются эффективным средством формирования всех перечисленных умений.

В-четвертых, в условиях цифровизации образования и внедрения новых образовательных технологий возникает потребность в современных учебных пособиях, которые учитывают психологические особенности современных школьников, обеспечивают индивидуализацию обучения и интегрируют традиционные и инновационные подходы к обучению математике.

Анализ существующих учебно-методических материалов по подготовке к ОГЭ по математике показывает, что они не всегда эффективно решают проблему формирования навыков решения текстовых задач. Среди основных недостатков можно выделить: недостаточную систематизацию типов задач и методов их решения; отсутствие четких алгоритмов и схем решения для различных типов задач; дефицит задач нарастающей сложности, позволяющих постепенно развивать необходимые навыки; слабую связь математических задач с реальными жизненными ситуациями; отсутствие эффективной системы самоконтроля и отслеживания прогресса; недостаточную адаптацию под индивидуальные особенности учащихся.

Теоретические основы обучения решению текстовых задач и их роль в математическом образовании привлекали внимание многих отечественных и зарубежных исследователей. Анализ научно-методической литературы показывает, что данная проблема рассматривалась с различных точек зрения и

имеет значительную степень разработанности по ряду направлений.

Во-первых, недостаточно разработаны практические методики формирования метакогнитивных умений учащихся при решении текстовых задач, что особенно важно в контексте современного понимания математической грамотности как способности анализировать собственное мышление и контролировать процесс решения.

Во-вторых, несмотря на наличие исследований по использованию ИКТ в обучении математике, вопросы интеграции традиционных и цифровых технологий при обучении решению текстовых задач остаются недостаточно разработанными.

В-третьих, существует дефицит исследований, посвященных адаптивным учебным материалам, которые учитывают индивидуальные особенности учащихся и обеспечивают персонализированные образовательные траектории при обучении решению текстовых задач.

В-четвертых, проблема разработки учебных пособий, специально ориентированных на подготовку к решению текстовых задач в рамках ОГЭ по математике и одновременно развивающих функциональную грамотность учащихся, остается актуальной, о чем свидетельствует ограниченное количество работ по данной тематике.

Объект исследования – процесс обучения решению текстовых задач в курсе математики основной школы.

Предмет исследования – рабочая тетрадь как средство формирования умений решать текстовые задачи при подготовке к ОГЭ по математике.

Цель исследования – теоретически обосновать, разработать и апробировать рабочую тетрадь «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике, обеспечивающую эффективное формирование навыков решения различных типов текстовых задач.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи исследования:

1. Проанализировать методическую литературу по проблеме обучения решению текстовых задач в курсе математики основной школы.

2. Исследовать структуру текстовых задач, этапы их решения и классификацию типов задач, включаемых в ОГЭ по математике.

3. Провести анализ существующих учебников и учебных пособий по математике для основной школы с точки зрения представленности в них текстовых задач и методики обучения их решению.

4. Создать рабочую тетрадь «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике.

Практическая значимость исследования состоит в разработке оригинальной рабочей тетради «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике, которая может быть непосредственно использована в образовательном процессе.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы и приложения. В первой главе рассматриваются теоретические основы обучения решению текстовых задач, включая понятие текстовой задачи, её структуру и этапы решения, а также анализ школьных учебников по алгебре. Вторая глава посвящена разработке рабочей тетради «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике и включает обоснование практической значимости разработки, критерии оценки 21 задания в ОГЭ и описание рабочей тетради. В заключении представлены полученные результаты и подведены итоги выпускной квалификационной работы.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

1.1 Понятие текстовой задачи, ее структура и этапы решения

Текстовая задача является одним из наиболее важных дидактических инструментов в процессе обучения математике. Она представляет собой словесную модель некоторой реальной ситуации, требующей математического анализа и решения с применением математического аппарата.

В методической литературе существует несколько подходов к определению понятия «текстовая задача». По мнению Н.Г. Баженовой и И.Г. Одоевцевой, текстовая задача — это словесная модель ситуации, явления, события, процесса и т.п., в которой описаны количественные характеристики и взаимосвязи между объектами [4]. Текстовая задача отражает реальные процессы и ситуации, встречающиеся в практической деятельности человека.

Т.Е. Демидова и А.П. Тонких определяют текстовую задачу как описание некоторой ситуации на естественном языке с требованием дать количественную характеристику какого-либо компонента этой ситуации, установить наличие или отсутствие некоторого отношения между компонентами или определить вид этого отношения [9].

В.А. Далингер рассматривает текстовую задачу как словесную модель реальной ситуации, для разрешения которой необходимо построить математическую модель и использовать соответствующий математический аппарат [7]. Такое определение подчеркивает роль моделирования в решении текстовых задач.

Структура текстовой задачи включает в себя следующие компоненты:

1. Условие задачи — описание ситуации, в котором указываются объекты и известные величины, характеризующие эти объекты, а также отношения между ними.

2. Требование задачи – указание на неизвестную величину, которую необходимо найти, или на отношение, которое необходимо установить.

3. Данные величины – явно указанные в условии количественные характеристики объектов.

4. Искомые величины – количественные характеристики, которые требуется определить.

5. Зависимости между данными и искомыми величинами – математические отношения, которые связывают известные и неизвестные компоненты задачи.

В своей работе А.В. Белошистая отмечает: «Структурными элементами задачи являются условие и требование (вопрос). Условие задачи – это совокупность данных в ней величин и связей между ними. Требование задачи – это указание на то, что нужно найти» [5].

Процесс решения текстовой задачи является сложной многоступенчатой деятельностью, включающей несколько взаимосвязанных этапов. В методической литературе предлагаются различные подходы к выделению этапов решения текстовых задач.

По мнению В.А. Гусева, решение текстовой задачи включает следующие этапы [6]:

1. Анализ условия задачи:

- чтение условия задачи;
- выделение объектов задачи;
- выделение известных и неизвестных величин;
- установление зависимостей между величинами.

2. Поиск способа решения задачи:

- схематическая запись условия;
- выбор неизвестных (введение переменных);
- составление математической модели (уравнения, системы уравнений, неравенства и т.д.).

3. Осуществление решения задачи:

- решение составленной математической модели;
- получение ответа в общем виде.

4. Проверка и анализ полученного решения:

- проверка соответствия полученного результата условию задачи;
- исследование решения (анализ частных случаев, обобщения);
- поиск других способов решения.

Л.О. Денищева расширяет данную классификацию и предлагает следующие этапы [10]:

1. Восприятие и анализ содержания задачи:

- чтение задачи, выделение условия и вопроса;
- определение объектов задачи и их характеристик;
- выявление отношений между объектами.

2. Поиск и составление плана решения:

- схематическая запись условия (краткая запись, таблица, схематический рисунок);
- выбор метода решения задачи;
- составление плана решения.

3. Реализация плана решения:

- построение математической модели (уравнение, система уравнений);
- преобразование математической модели;
- получение решения.

4. Проверка и исследование решения задачи:

- проверка правильности решения;
- исследование других способов решения;
- формулировка ответа.

5. Учебно-познавательный анализ задачи и ее решения:

- обобщение способа решения;
- установление связей с ранее решенными задачами;

- составление и решение аналогичных задач.

З.И. Исаева отмечает, что наиболее важным и сложным этапом в решении текстовой задачи является построение математической модели, которая отражает взаимосвязи между известными и неизвестными величинами [12].

В методике обучения математике выделяют следующие основные методы решения текстовых задач:

1. Арифметический метод – последовательное выполнение действий над числами для нахождения неизвестной величины.

2. Алгебраический метод – составление уравнения или системы уравнений, где неизвестные величины обозначаются переменными.

3. Геометрический метод – использование геометрических представлений и зависимостей для решения задачи.

4. Графический метод – применение графических зависимостей между величинами для решения задачи.

5. Метод предположений (метод проб и ошибок) – последовательное выдвижение и проверка гипотез о значении искомой величины.

6. Комбинированный метод – сочетание различных методов для решения одной задачи.

С.В. Дворянинов указывает, что выбор метода решения текстовой задачи зависит от ее содержания, сложности, возраста учащихся и целей обучения. В современной школе преобладает алгебраический метод решения текстовых задач, так как он является наиболее универсальным и позволяет решать широкий класс задач [8].

В школьном курсе алгебры и при подготовке к ОГЭ рассматриваются различные типы текстовых задач (Таблица 1).

Таблица 1 - Типы текстовых задач

Задачи на скорость, время, расстояние.	Движение по прямой
	Движение по прямой (навстречу)
	Движение по прямой (вдогонку)
	Движение по окружности (замкнутой трассе)
	Средняя скорость
Задачи на проценты	Движение протяженных тел
	Движение по воде
Задачи на совместную работу	
Концентрация (сплавы, смеси)	

Примеры задач на скорость, время, расстояние.

Задача 1. Движение по прямой.

Мотоциклист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 224 км. На следующий день он отправился обратно в А, увеличив скорость на 2 км/ч. По пути он сделал остановку на 2 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же времени, сколько на пути из А в В. Найдите скорость мотоциклиста на маршруте из А в В.

Решение: Пусть V – скорость мотоциклиста на пути из А в В (в км/ч). Тогда время, затраченное на путь из А в В, равно $\frac{224}{v}$ часов. На обратном пути его скорость была $v + 2$ км/ч. Время, затраченное на обратный путь без учета остановки, равно $\frac{224}{v+2}$ часов. С учетом остановки в 2 часа, общее время на обратный путь составляет $\frac{224}{v+2} + 2$ часа. Составим таблицу:

	Скорость, км/ч	Время, ч	Путь, км
Туда	v	$\frac{224}{v}$	224
Обратно	$v + 2$	$\frac{224}{v + 2}$	224

По условию задачи, время на путь из А в В равно времени на обратный путь с остановкой. Составим уравнение:

$$\begin{aligned}\frac{224}{v} &= \frac{224}{v+2} + 2 \\ \frac{224}{v} - \frac{224}{v+2} - 2 &= 0 \\ \frac{224(v+2) - 224v - 2v(v+2)}{v(v+2)} &= 0 \\ \begin{cases} 224(v+2) - 224v - 2v(v+2) = 0 \\ v \neq 0 \\ v \neq -2 \end{cases}\end{aligned}$$

Решим квадратное уравнение:

$$\begin{aligned}224(v+2) - 224v - 2v(v+2) &= 0 \\ 224v + 224 \cdot 2 - 224v - 2v^2 - 4v &= 0 \\ 2v^2 + 4v - 224 \cdot 2 &= 0 \\ v^2 + 2v - 224 &= 0\end{aligned}$$

Найдем дискриминант полученного уравнения:

$$D = b^2 - 4ac = 2^2 - 4(1)(-224) = 4 + 896 = 900$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{900} = 30$$

$$v_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 + 30}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

$$v_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 - 30}{2} = \frac{-32}{2} = -16$$

Так как скорость не может быть отрицательной, то $v = 14$ км/ч.

Ответ: 14 км/ч

Задача 2. Движение по прямой (навстречу).

Из пунктов А и В, расстояние между которыми 19 км, вышли одновременно навстречу друг другу два школьника и встретились в 9 км от А. Найдите скорость школьника, который пришел из А, если известно, что школьник который пришел из В, шел со скоростью на 1 км/ч меньшей, чем школьник, который двигался из А и сделал в пути получасовую остановку.

Решение: Пусть скорость школьника, шедшего из пункта А, равна x км/ч, $x > 1$

Тогда скорость школьника, шедшего из пункта В, равна $(x-1)$ км/ч.

Составим таблицу по данным значениям:

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Пешеход, шедший из А	x	$\frac{9}{x}$	9
Пешеход, шедший из В	$x-1$	$\frac{10}{x-1}$	10

Так как школьник, шедший из А, сделал по пути остановку на $\frac{1}{2}$ ч., а вышли школьники одновременно, можно составить следующее уравнение:

$$\frac{10}{x-1} - \frac{9}{x} = \frac{1}{2}$$

$$20x - 18(x-1) = x(x-1)$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 6$$

Так как скорость не может быть отрицательной, то $x = 6$ км/ч.

Ответ: 6 км/ч.

Задача 3. Движение по прямой (вдогонку).

Расстояние между городами А и В равно 375 км. Город С находится между городами А и В. Из города А в город В выехал автомобиль, а через 1 час 30 минут следом за ним со скоростью 75 км/ч выехал мотоциклист, догнал автомобиль в городе С и повернул обратно. Когда он вернулся в А, автомобиль прибыл в В. Найдите расстояние от А до С.

Решение: Обозначим скорость (в км/ч) автомобиля за v , $v > 0$ а время (в часах), за которое мотоцикл проезжает от А до С за t , $t > 0$

Составим таблицу по данным задачи:

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Пешеход, шедший из А	v	$t + \frac{3}{2}$	$v(t + \frac{3}{2})$
Пешеход, шедший из В	75	t	$75t$

Тогда имеем $75t = v(t + \frac{3}{2})$, откуда $v = \frac{150t}{2t+3}$

Поскольку весь путь от А до В автомобиль преодолел за время $\frac{3}{2} + 2t$ получаем:

$$v(2t + \frac{3}{2}) = 375$$

$$\frac{150t}{2t+3}(2t + \frac{3}{2}) = 375$$

$$300t^2 + 225t = 750t + 1125$$

$$4t^2 - 7t - 15 = 0$$

$$t_1 = -\frac{5}{4}$$

$$t_2 = 3$$

Так как время не может быть отрицательной, то $t = 3$ ч.

Значит, расстояние от А до С равно $75 \cdot 3 = 225$ км.

Ответ: 225 км.

Задача 4. Движение по окружности (замкнутой трассе).

С одной точки круговой трассы длиной 14 км одновременно выехали два автомобиля в одном направлении. Первый автомобиль движется со скоростью 80 км/ч и через 40 минут после старта опережает второй автомобиль на один круг. Определите скорость второго автомобиля и укажите ответ в км/ч.

Решение: Пусть $V_1 = 80$ км/ч, $V_2 = x$ км/ч. Т.к первый автомобиль опережал второго через 40 мин, то $V_1 > V_2$ и $V_{\text{вдогонку}} = V_1 - V_2 = 80 - x$.

Время, за которое первый нагнал второго 40 мин $= \frac{40}{60}$ ч $= \frac{2}{3}$ ч.

Путь, который он преодолел за время- один круг, т.е. 14 км.

Составим уравнение

$$(80 - x) \frac{2}{3} = 14, x=59$$

Ответ 59 км/ч

Задача 5. Средняя скорость.

Первую половину пути автомобиль проехал со скоростью 69 км/ч, а вторую со скоростью 111 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

$$\frac{\frac{S}{2 * 69} + \frac{S}{2 * 111}}{\frac{S}{2 * 69} + \frac{S}{2 * 111}} = \frac{2 * 111 * 69}{11 + 69} = \frac{2 * 111 * 69}{180} = \frac{37 * 23}{10} = 85,1 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Средняя скорость — это отношение пройденного пути к времени движения. Пусть весь путь составляет S км, тогда первую половину пути автомобиль проехал за $\frac{S}{2*69}$ часов, а вторую — за $\frac{S}{2*111}$ часов. Средняя скорость автомобиля равна:

Ответ: 85,1.

Задача 6. Движение протяженных тел.

Железнодорожный состав длиной в 1 км прошел бы мимо столба за 1 мин., а через туннель (от входа локомотива до выхода последнего вагона) при той же скорости — за 3 мин. Какова длина туннеля (в км) [8]?

Поезд проходит через туннель за 3 минуты, при этом за одну минуту поезд проходит мимо выхода из туннеля, следовательно, от входа локомотива в туннель до выхода проходит 2 минуты. Мимо столба поезд длиной 1 км проходит за 1 минуту, поэтому его скорость равна 1 км/мин. Значит, за 2 минуты поезд пройдет 2 км, поэтому длина туннеля равна 2 км.

Ответ: 2.

Задача 7. Движение по воде.

Расстояние между пристанями А и В составляет 80 км. Из А в В по

течению реки поплыл плот, а через 2 часа за ним отправилась яхта.

Когда яхта пришла в пункт В, она сразу же развернулась и вернулась в А. К этому моменту плот прошел 22 км. Определите скорость яхты в спокойной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Пусть искомая скорость равна v км/ч, $v > 2$.

Составим таблицу по данным задачи:

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
Плот	2	11	22
Яхта	$v + 2$	$\frac{80}{v + 2}$	80
Яхта по пути обратно	$v - 2$	$\frac{80}{v - 2}$	80

Так как лодка вышла на 2 часа позже плота, можно составить уравнение:

$$\frac{80}{v+2} + \frac{80}{v-2} = 9 \Leftrightarrow \frac{80v - 160 + 80v + 160}{v^2 - 4} = 9 \Leftrightarrow 160v = 9v^2 - 36 \Leftrightarrow 9v^2 - 160v - 36 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v = -\frac{2}{9}, \\ v = 18 \end{cases} \Leftrightarrow v = 18.$$

$$\frac{80}{v+2} + \frac{80}{v-2} = 9$$

$$80v - 160 + 80v + 160 = 9v^2 - 36$$

$$9v^2 - 160v - 36 = 0$$

$$v_1 = -\frac{2}{9}$$

$$v_2 = 18$$

Таким образом, скорость яхты в неподвижной воде равна 18 км/ч.

Ответ: 18 км/ч.

Задача 8. Задачи на проценты.

На должность главы городской администрации претендовали три кандидата: Журавлев, Зайцев и Иванов. Во время выборов за Иванова

проголосовали в 2 раза больше избирателей, чем за Журавлева, а за Зайцева - в 3 раза больше, чем за Журавлева и Иванова вместе. Какой процент голосов получил победитель?

Заметим, что победителем на выборах окажется Зайцев. Пусть количество голосов, отданных за Зайцева равно x . Тогда за Журавлева и Иванова вместе отдали $\frac{x}{3}$ Процент голосов, отданных за Зайцева $x: \left(x + \frac{x}{3}\right) * 100 = 75\%$

Ответ: 75%.

Задача 9. Задачи на совместную работу.

Два оператора, работая вместе, могут набрать текст газеты объявлений за 8 часов. Если первый оператор поработает 3 часа, а второй - 12 часов, то они выполнят только 75% всей работы. Сколько времени потребуется каждому оператору, чтобы подготовить весь текст в одиночку?

Пусть первый оператор может выполнить данную работу за $\frac{1}{x}$ часов, а второй за $\frac{1}{y}$ часов. За один час первый оператор выполняет часть всей работы, а второй

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{3}{x} + \frac{12}{y} = \frac{3}{4}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{1}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{8}, \\ \frac{3}{y} = \frac{1}{8}; \end{cases} \quad y = 24, x = 12$$

Ответ: первый оператор за 12 ч, второй оператор за 24 ч.

Ю.Н. Кашицына и М.В. Васильева отмечают, что в контрольно-измерительных материалах ОГЭ по математике представлены различные типы текстовых задач, решение которых требует от учащихся умения анализировать

ситуацию, строить математическую модель и находить решение с использованием соответствующего математического аппарата [13].

Текстовые задачи играют важную роль в математическом образовании, выполняя следующие функции:

1. Образовательная функция – текстовые задачи способствуют формированию и развитию математических знаний, умений и навыков.
2. Развивающая функция – решение текстовых задач развивает логическое мышление, аналитические способности, умение моделировать ситуации.
3. Воспитательная функция – в процессе решения текстовых задач формируются такие качества личности, как настойчивость, целеустремленность, критичность мышления.
4. Практическая функция – текстовые задачи демонстрируют практическое применение математических знаний, связь математики с реальной жизнью.

И.М. Шакирова и Ю.Н. Бурханова указывают, что текстовые задачи являются одним из эффективных средств формирования универсальных учебных действий учащихся, таких как анализ, синтез, обобщение, конкретизация, сравнение [20].

Текстовые задачи способствуют реализации прикладной направленности обучения математике, показывая связь между математическими абстракциями и реальными процессами и явлениями [3].

В процессе обучения решению текстовых задач учащиеся сталкиваются с различными трудностями:

1. Непонимание условия задачи и неумение выделить существенную информацию.
2. Затруднения в выборе метода решения задачи.
3. Сложности в построении математической модели задачи.

4. Недостаточное владение математическим аппаратом для решения составленной модели.

5. Отсутствие навыка проверки и исследования полученного решения.

Одной из основных причин затруднений учащихся при решении текстовых задач является недостаточное развитие умения анализировать текст задачи и строить адекватную математическую модель ситуации [15].

Для преодоления этих трудностей предлагаются различные методические подходы, в том числе использование наглядных моделей, схематических записей, алгоритмических предписаний, поэтапного формирования умений решать текстовые задачи.

Моделирование позволяет наглядно представить взаимосвязи между величинами, что облегчает построение математической модели задачи [17].

Таким образом, текстовая задача является важнейшим дидактическим инструментом в обучении математике, представляющим собой словесную модель реальной ситуации, требующую математического анализа и решения. Структура текстовой задачи включает условие, требование, данные и искомые величины, а также зависимости между ними.

Решение текстовой задачи представляет собой многоэтапный процесс, включающий анализ условия, поиск способа решения, реализацию плана решения, проверку и исследование полученного результата. Для решения текстовых задач применяются различные методы: арифметический, алгебраический, геометрический, графический и др.

В школьном курсе математики и в контрольно-измерительных материалах ОГЭ представлены различные типы текстовых задач: задачи на движение, работу, проценты, числовые зависимости, задачи экономического содержания и др. Текстовые задачи выполняют образовательную, развивающую, воспитательную и практическую функции в обучении математике.

Эффективное обучение решению текстовых задач требует учета типичных трудностей учащихся и применения соответствующих методических подходов, включая использование моделирования, схематических записей и алгоритмических предписаний.

1.2 Анализ школьных учебников по алгебре

Анализ школьных учебников по алгебре имеет важное значение для понимания методических подходов к обучению решению текстовых задач. В данном разделе рассмотрим особенности представления текстовых задач в различных учебниках алгебры для 8-9 классов.

В учебниках Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюка, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой для 8 класса в 2-х частях для изучения алгебры текстовые задачи встречаются преимущественно в главе 3 «Уравнения и системы уравнений» в параграфах 9 и 10 (Рисунок1).

ГЛАВА III. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ	
§ 7. КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ И ЕГО КОРНИ	115
20. Неполные квадратные уравнения	—
21. Формула корней квадратного уравнения	120
22. Решение задач	128
23. Теорема Виета	132
§ 8. КВАДРАТНЫЙ ТРЁХЧЛЕН	137
24. Квадратный трёхчлен и его корни	—
25. Разложение квадратного трёхчлена на множители	141
§ 9. ДРОБНЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ	145
26. Решение дробных рациональных уравнений	—
27. Решение задач	151
§ 10. УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ	155
28. Уравнение с двумя переменными и его график	—
29. Исследование систем двух линейных уравнений с двумя переменными	160
30. Графический способ решения систем уравнений	163
31. Алгебраический способ решения систем уравнений	165
32. Решение задач	169
<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
33. Уравнения с параметром	172
Дополнительные упражнения к главе III	174

Рисунок 1 - Содержание учебника Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюка, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой 8 класс

В главе 3 изучаются новые виды уравнений с одной переменной, рассматривается формула корней квадратного уравнения, которая позволяет вычислять корни уравнения по его коэффициентам. Анализируются зависимости между корнями квадратного уравнения и его коэффициентами.

Детально рассматривается квадратный трёхчлен: изучается, каким образом квадратный трёхчлен можно разложить на множители. Решаются несложные дробные рациональные уравнения. Изучение данных тем в начале позволяет ученикам в дальнейшем решать более разнообразные текстовые задачи [12].

Структура представления текстовых задач в данном учебнике имеет следующие особенности:

1. Постепенное усложнение задач – от простых задач, решаемых с помощью линейных уравнений, к более сложным, требующим составления квадратных уравнений.

2. Тематическое разнообразие – в учебнике представлены задачи на движение, работу, проценты, геометрические задачи, задачи на смеси и сплавы.

3. Методическое сопровождение – для каждого типа задач приводятся образцы решения с подробным объяснением хода рассуждений.

4. Система упражнений – после теоретического материала предлагается система упражнений разного уровня сложности для закрепления умений и навыков.

И.В. Кочетова отмечает, что в учебнике Ю.Н. Макарычева и др. для 8 класса особое внимание уделяется алгебраическому методу решения текстовых задач, который основан на составлении уравнений или систем уравнений [14].

В главе 3 рассматриваются практически все виды текстовых задач, которые могут встретиться школьнику на ОГЭ. К ним относятся:

1. Задачи на движение:

- задачи на движение в одном направлении;
- задачи на движение в противоположных направлениях;
- задачи на движение по кругу;
- задачи на движение по воде.

2. Задачи на работу:

- задачи на совместную работу;
- задачи на производительность труда;

- задачи на заполнение бассейнов.

3. Задачи на проценты:

- задачи на простые проценты;
- задачи на сложные проценты;
- задачи на концентрацию растворов.

Пример задачи (Рисунок 2):

Задача 2. Чашка и блюдо стоили вместе 680 р. После того как чашка подешевела на 20%, а блюдо подорожало на 10%, они стали стоить вместе 580 р. Найдите первоначальную цену чашки и первоначальную цену блюда.

► Пусть первоначальная цена чашки составляла x р., а блюда — y р. Тогда по условию $x + y = 680$. Новая цена чашки составляет 80% первоначальной и равна $0,8x$ р. Новая цена блюда составляет 110% первоначальной и равна $1,1y$ р. Тогда

$$0,8x + 1,1y = 580.$$

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 680, \\ 0,8x + 1,1y = 580. \end{cases}$$

Решением этой системы является пара $x = 560, y = 120$. Следовательно, первоначальная цена чашки была 560 р., а блюда 120 р.
Ответ: 560 р., 120 р. ◀

Рисунок 2 - Пример задачи из учебника Ю. Н. Макарычева, Н. Г.

Миндюка, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой 8 класс

Для каждого типа задач в учебнике приводятся образцы решения, которые сопровождаются подробными объяснениями. Например, при решении задач на движение обращается внимание на взаимосвязь между скоростью, временем и расстоянием, а также на особенности составления уравнений при различных видах движения.

Следует отметить, что в учебнике Ю.Н. Макарычева для 8 класса текстовые задачи рассматриваются преимущественно в контексте изучения уравнений и систем уравнений, что подчеркивает прикладной аспект данных тем.

В учебниках Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюка, К. И. Нешкова, С. Б. Суворовой для 9 класса в 2-х частях для изучения алгебры текстовые задачи встречаются в главе 4 «Уравнения и системы уравнений» (Рисунок 3)

ГЛАВА IV. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

§7. УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ.	110
19. Уравнение с двумя переменными и его график	—
20. Решение систем уравнений с двумя переменными	117
21. Исследование системы двух линейных уравнений с двумя переменными	124
22. Решение задач с помощью систем уравнений второй степени	126

Рисунок 3 - Содержание учебника Ю. Н. Макарычева, Н. Г. Миндюка, К.
И. Нешкова, С. Б. Суворовой 9 класс

В данной главе особое внимание уделяется системам уравнений с двумя переменными, в которых одно или оба уравнения второй степени. Именно в этой главе рассматриваются задачи на смеси и сплавы. При этом количество текстовых задач по сравнению с 8 классом стало намного меньше.

Структура представления текстовых задач в учебнике для 9 класса имеет следующие особенности:

1. Углубление теоретического материала – рассматриваются более сложные уравнения и системы уравнений, которые могут быть использованы для решения текстовых задач.
2. Специализация текстовых задач – основное внимание уделяется задачам на смеси и сплавы, которые требуют составления систем уравнений.
3. Методическое сопровождение – приводятся образцы решения задач с подробным объяснением каждого шага.
4. Ориентация на подготовку к ОГЭ – предлагаются задачи, аналогичные тем, которые встречаются в контрольно-измерительных материалах.

Анализируя содержание учебника для 9 класса, можно отметить, что в нем представлены следующие типы текстовых задач:

1. Задачи на смеси и сплавы:
 - задачи на смешивание растворов разной концентрации;
 - задачи на сплавы металлов;

- задачи на изменение концентрации.

2. Задачи на системы уравнений:

- задачи, приводящие к системам уравнений второй степени;

- задачи с параметрами.

Л.С. Сагателова отмечает, что в учебнике Ю.Н. Макарычева для 9 класса текстовые задачи интегрированы в изучение алгебраического материала, что способствует формированию у учащихся умения применять математические знания в практических ситуациях [18].

Однако, как отмечается в анализе, количество текстовых задач в учебнике для 9 класса значительно меньше по сравнению с учебником для 8 класса, что может быть связано с тем, что основное внимание в 9 классе уделяется подготовке к ОГЭ, которая включает в себя не только решение текстовых задач, но и другие виды.

В учебниках А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонского, М. С. Якира для 9 класса для изучения алгебры текстовые задачи встречаются в главе 3 «Элементы прикладной математики» (Рисунок 4).

Глава 3. Элементы прикладной математики	138
§ 14. Математическое моделирование	138
§ 15. Процентные расчёты	148
§ 16. Абсолютная и относительная погрешности	152
§ 17. Основные правила комбинаторики	157
§ 18. Частота и вероятность случайного события	162
§ 19. Классическое определение вероятности	171
<i>Сначала была игра</i>	180

318

§ 20. Начальные сведения о статистике	183
<i>Дисперсия</i>	198
<i>Задание № 4 «Проверьте себя» в тестовой форме</i>	201
<i>Задание № 5 «Проверьте себя» в тестовой форме</i>	204
<i>Итоги главы 3</i>	206

Рисунок 4 - Содержание учебника А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонского, М.С. Якира 9 класс

В отличие от учебника Ю.Н. Макарычева, в учебнике А.Г. Мерзляка выделен специальный раздел для изучения текстовых задач. В этом разделе не

только представлены различные задачи, но и рассматриваются этапы построения математических моделей, осуществляется анализ полученного результата, исходя из содержания прикладной задачи.

Особенности представления текстовых задач в данном учебнике:

1. Системный подход — текстовые задачи рассматриваются как часть прикладной математики, с акцентом на построение математических моделей.

2. Методология решения — подробно рассматриваются этапы решения текстовых задач, от анализа условия до интерпретации результата.

3. Практическая направленность — задачи связаны с реальными жизненными ситуациями, что повышает мотивацию учащихся.

4. Разнообразие задач — представлены задачи различных типов и уровней сложности.

Пример задачи из учебника А.Г. Мерзляка демонстрирует подход авторов к представлению текстовых задач. Задача сопровождается подробным решением, которое включает:

- анализ условия задачи;
- введение переменных;
- составление уравнения или системы уравнений;
- решение полученной математической модели;
- интерпретацию результата в контексте задачи;
- проверку решения.

И.Е. Малова отмечает, что учебник А.Г. Мерзляка для 9 класса реализует технологию обучения решению текстовых задач через моделирование, что способствует формированию у учащихся умения анализировать ситуации и строить адекватные математические модели [16].

В учебнике А.Г. Мерзляка представлены следующие типы текстовых задач:

1. Задачи на движение:

- задачи на равномерное движение;

- задачи на движение с переменной скоростью;
- задачи на движение по воде;
- задачи на встречное движение и движение в одном направлении.

2. Задачи на работу:

- задачи на совместную работу;
- задачи на производительность труда;
- задачи на заполнение и опустошение резервуаров.

3. Задачи на проценты и смеси:

- задачи на простые и сложные проценты;
- задачи на смеси и сплавы;
- задачи на концентрацию растворов.

Пример задачи (Рисунок 5):

Пример 3. Два работника могут вместе выполнить производственное задание за 10 дней. После 6 дней совместной работы первого из них перевели на другое задание, а второй продолжал работать. Через 2 дня самостоятельной работы второго оказалось, что сделано $\frac{2}{3}$ всего задания. За сколько дней каждый работник может выполнить это производственное задание, работая самостоятельно?

Решение. Пусть первый работник может выполнить всё задание за x дней, а второй — за y дней. За 1 день первый работник выполняет $\frac{1}{x}$ часть задания, а за 10 дней — $\frac{10}{x}$ часть задания. Второй работник за 1 день выполняет $\frac{1}{y}$ часть задания, а за 10 дней — $\frac{10}{y}$ часть задания. Так как за 10 дней совместной работы они выполняют всё задание, то $\frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1$.

Первый работник работал 6 дней и выполнил $\frac{6}{x}$ часть задания, а второй работал 8 дней и выполнил $\frac{8}{y}$ часть задания. Так как в результате было выполнено $\frac{2}{3}$ задания, то $\frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{2}{3}$.

Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{10}{x} + \frac{10}{y} = 1, \\ \frac{6}{x} + \frac{8}{y} = \frac{2}{3}, \end{cases}$$

Рисунок 5 – Пример задачи из учебника А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонского,
М.С. Якира 9 класс

Особенностью учебника А.Г. Мерзляка является то, что в нем не только рассматриваются различные типы задач, но и уделяется внимание методологии их решения, способствуя формированию у учащихся общего подхода к

решению текстовых задач, который может быть применен в различных ситуациях.

В учебниках А. Г. Мордковича, П. В. Семенова, Л. А. Александровой, Е. Л. Мардахаевой для 9 класса для изучения алгебры текстовые задачи встречаются в главе 1 «Системы уравнений» (Рисунок 6).

Глава 1. Системы уравнений	5
§ 1. Уравнения с двумя переменными	5
§ 2. График уравнения с двумя переменными	11
§ 3. Уравнение окружности на координатной плоскости	17
§ 4. Основные понятия, связанные с системами двух уравнений с двумя переменными	25
§ 5. Решение систем уравнений методом подстановки	31
§ 6. Решение систем уравнений методом алгебраического сложения	38
§ 7. Решение систем уравнений методом введения новых переменных	42
§ 8. Системы уравнений как математические модели реальных ситуаций	48
Итак, в главе 1	59
<i>Вопросы</i>	<i>59</i>
<i>Тест</i>	<i>60</i>
<i>Дополнительные задачи</i>	<i>61</i>
<i>Из истории математики</i>	<i>64</i>

Рисунок 6 – Содержание учебника А. Г. Мордковича, П. В. Семенова, Л. А. Александровой, Е. Л. Мардахаевой 9 класс

В этом учебнике, в отличие от учебника А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонского, М. С. Якира, изначально изучаются виды уравнений с двумя переменными, рассматриваются различные способы решения систем уравнений (метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод введения новых переменных). И только после этого рассматриваются подробные этапы решения математических моделей.

Особенности представления текстовых задач в учебнике А.Г. Мордковича:

1. Алгебраический подход – текстовые задачи рассматриваются в контексте изучения систем уравнений, что обеспечивает прочную математическую основу для их решения.

2. Методическая последовательность — сначала изучаются методы решения систем уравнений, а затем эти методы применяются к решению текстовых задач.

3. Этапность обучения — подробно рассматриваются этапы построения математической модели и ее решения.

4. Практическая направленность — задачи имеют практическое содержание, что способствует пониманию связи математики с реальной жизнью.

Пример задачи из учебника А.Г. Мордковича демонстрирует подход авторов к представлению текстовых задач. Решение задачи включает следующие этапы:

- анализ условия задачи;
- введение переменных;
- составление системы уравнений;
- выбор метода решения системы;
- решение системы уравнений;
- интерпретация полученных результатов;
- проверка решения.

О.А. Дианова и В.В. Краснова отмечают, что в учебнике А.Г. Мордковича для 9 класса особое внимание уделяется формированию умения составлять математические модели текстовых задач, что является ключевым умением при решении задач [11].

В учебнике А.Г. Мордковича представлены следующие типы текстовых задач:

1. Задачи, приводящие к системам уравнений:
 - задачи на нахождение чисел по их сумме и разности;
 - задачи на нахождение чисел по их сумме и произведению;
 - задачи на нахождение чисел по их сумме и отношению.
2. Задачи на движение:

- задачи на движение в одном направлении;
- задачи на встречное движение;
- задачи на движение по кругу;
- задачи на движение по воде.

3. Задачи на работу:

- задачи на совместную работу;
- задачи на производительность труда;
- задачи на заполнение резервуаров.

4. Задачи на смеси и сплавы:

- задачи на смешивание растворов;
- задачи на сплавы металлов;
- задачи на изменение концентрации.

Изучение систем уравнений в начале, как отмечается в анализе, позволяет ученикам правильно составить из условия задачи систему уравнений и решить ее.

Проведенный анализ школьных учебников по алгебре позволяет выявить различия в подходах к обучению решению текстовых задач.

В учебниках Ю. Н. Макарычева и А. Г. Мордковича для 9 классов изначально особое внимание уделяется изучению систем и уравнений с двумя переменными. Однако, в отличие от Ю. Н. Макарычева, А. Г. Мордкович более подробно рассматривает этапы решения математической задачи.

Наиболее детальное рассмотрение построения математической модели представлено в учебнике А. Г. Мерзляка. А. Г. Мерзляк рассматривает текстовые задачи в отдельной главе, а также осуществляет анализ всех видов задач.

Сравнительный анализ учебников по различным параметрам представлен в таблице 2.

Таблица 2 – Сравнительный анализ учебников

Параметр	Ю.Н. Макарычев	А.Г. Мерзляк	А.Г. Мордкович
Структура представления текстовых задач	В контексте изучения уравнений и систем уравнений	В отдельной главе «Элементы прикладной математики»	В контексте изучения систем уравнений
Методический подход	От изучения уравнений к их применению в задачах	От построения математических моделей к их решению	От изучения систем уравнений к их применению в задачах
Этапы решения задач	Представлены в образцах решения задач	Подробно рассматриваются как отдельная тема	Представлены после изучения методов решения систем уравнений
Разнообразие задач	Широкий спектр задач в 8 классе, сужение в 9 классе	Разнообразные задачи практического содержания	Задачи, приводящие к системам уравнений
Практическая направленность	Умеренная	Высокая	Умеренная
Ориентация на ОГЭ	Присутствует	Присутствует	Присутствует

И.И. Целищева и С.А. Зайцева отмечают, что различные учебники по-разному подходят к обучению решению текстовых задач, но все они направлены на формирование у учащихся умения анализировать ситуации, строить математические модели и находить решения» [19].

З.А. Аминова указывает, что учебники А.Г. Мерзляка и А.Г. Мордковича представляют наиболее систематизированный подход к обучению решению текстовых задач, что способствует формированию у учащихся общих методов решения различных типов задач [3].

Анализ школьных учебников по алгебре позволяет выделить следующие особенности представления текстовых задач:

1. Связь с изучаемым математическим аппаратом – текстовые задачи рассматриваются в контексте изучения уравнений, систем уравнений и других тем школьного курса алгебры.

2. Последовательность изложения – от простых задач к более сложным, от задач, решаемых с помощью линейных уравнений, к задачам, требующим составления систем уравнений и уравнений высших степеней.

3. Методическое сопровождение – образцы решения задач, подробные объяснения, схемы, таблицы и другие средства визуализации.

4. Система упражнений – задания для самостоятельного решения, дифференцированные по уровню сложности.

5. Практическая направленность – задачи, связанные с реальными жизненными ситуациями, профессиональной деятельностью, экономикой и т.д.

6. Ориентация на подготовку к ОГЭ – включение задач, аналогичных тем, которые встречаются в контрольно-измерительных материалах.

Н.В. Леонтьева и Е.В. Емельянова отмечают, что при подготовке к ОГЭ необходимо использовать различные учебники и пособия, так как они дополняют друг друга и позволяют рассмотреть различные методы решения текстовых задач [15].

Таким образом, анализ школьных учебников по алгебре показал, что в них представлены различные подходы к обучению решению текстовых задач. В учебниках Ю. Н. Макарычева и А. Г. Мордковича для 9 классов изначально особое внимание уделяется изучению систем и уравнений с двумя переменными. В отличие от Ю. Н. Макарычева, А. Г. Мордкович более подробно рассматривает этапы решения математической задачи, а наиболее детальное рассмотрение построения математической модели представлено в учебнике А. Г. Мерзляка.

А. Г. Мерзляк рассматривает текстовые задачи в отдельной главе «Элементы прикладной математики», а также осуществляет анализ всех видов задач. В учебнике А. Г. Мордковича изначально изучаются различные методы решения систем уравнений, а затем эти методы применяются к решению текстовых задач.

Каждый из рассмотренных учебников имеет свои достоинства и может быть эффективно использован при подготовке к ОГЭ по математике. Однако для наиболее полного формирования умений решать текстовые задачи

целесообразно использовать дополнительные учебные пособия и материалы, специально ориентированные на подготовку к экзамену.

Результаты анализа школьных учебников по алгебре могут быть использованы при разработке рабочей тетради для подготовки к ОГЭ по математике, которая должна учитывать особенности представления текстовых задач в различных учебниках и дополнять их системой упражнений, направленных на формирование и развитие умений решать задачи различных типов.

Изучение теоретических основ обучения решению текстовых задач и анализ школьных учебников по алгебре позволяют сделать следующие выводы:

1. Текстовая задача является важным дидактическим инструментом в обучении математике, представляющим собой словесную модель реальной ситуации, требующую математического анализа и решения.

2. Структура текстовой задачи включает условие, требование, данные и искомые величины, а также зависимости между ними. Решение текстовой задачи представляет собой многоэтапный процесс, включающий анализ условия, поиск способа решения, реализацию плана решения, проверку и исследование полученного результата.

3. В школьном курсе математики и в контрольно-измерительных материалах ОГЭ представлены различные типы текстовых задач: задачи на движение, работу, проценты, числовые зависимости, задачи экономического содержания и др.

4. Анализ школьных учебников по алгебре показал, что в них представлены различные подходы к обучению решению текстовых задач. В учебниках Ю. Н. Макарычева и А. Г. Мордковича для 9 классов изначально особое внимание уделяется изучению систем и уравнений с двумя переменными. А. Г. Мерзляк рассматривает текстовые задачи в отдельной главе и осуществляет анализ всех видов задач.

5. Каждый из рассмотренных учебников имеет свои достоинства и может быть эффективно использован при подготовке к ОГЭ по математике. Однако для наиболее полного формирования умений решать текстовые задачи целесообразно использовать дополнительные учебные пособия и материалы, специально ориентированные на подготовку к экзамену.

6. При разработке рабочей тетради для подготовки к ОГЭ по математике необходимо учитывать особенности представления текстовых задач в различных учебниках и дополнять их системой упражнений, направленных на формирование и развитие умений решать задачи различных типов.

7. Эффективное обучение решению текстовых задач требует учета типичных трудностей учащихся и применения соответствующих методических подходов, включая использование моделирования, схематических записей и алгоритмических предписаний.

Таким образом, теоретический анализ проблемы обучения решению текстовых задач и анализ школьных учебников по алгебре создают основу для разработки рабочей тетради, направленной на подготовку учащихся к решению текстовых задач в контексте ОГЭ по математике.

ГЛАВА 2 РАЗРАБОТКА РАБОЧЕЙ ТЕТРАДИ «ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ» ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ОГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ

2.1 Практическая значимость разработки рабочей тетради «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике

Текстовые задачи традиционно являются одним из наиболее сложных разделов школьного курса математики и одновременно важнейшим компонентом Основного государственного экзамена (ОГЭ). Эти задачи требуют от учащихся не только математических знаний и вычислительных навыков, но и умения анализировать информацию, моделировать ситуации, выстраивать логические связи и критически мыслить. Практика показывает, что значительная часть школьников испытывает серьезные трудности при решении текстовых задач, что негативно сказывается на результатах ОГЭ и дальнейшем математическом образовании.

Анализ статистики результатов ОГЭ по математике за последние годы демонстрирует, что текстовые задачи остаются «камнем преткновения» для многих выпускников 9-х классов. По данным аналитических отчетов ФИПИ, средний процент выполнения заданий, связанных с текстовыми задачами, составляет от 30% до 50%, что значительно ниже показателей по другим разделам экзамена. Особые затруднения вызывают задачи на движение, работу, проценты и смеси – именно те типы заданий, которые имеют наибольшую практическую значимость и формируют математическую грамотность.

Существующие учебно-методические материалы по подготовке к ОГЭ, как показывает анализ, не всегда эффективно решают проблему формирования навыков решения текстовых задач. Среди основных недостатков можно выделить:

1. Недостаточную систематизацию типов задач и методов их решения

2. Отсутствие четких алгоритмов и схем решения для различных типов задач

3. Дефицит задач нарастающей сложности, позволяющих постепенно развивать необходимые навыки

4. Слабую связь математических задач с реальными жизненными ситуациями

5. Отсутствие эффективной системы самоконтроля и отслеживания прогресса

6. Недостаточную адаптацию под индивидуальные особенности учащихся

В этом контексте разработка специализированной рабочей тетради «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике приобретает особую практическую значимость. Такая тетрадь призвана стать эффективным инструментом, который поможет преодолеть существующие проблемы и повысить качество подготовки учащихся.

Практическая значимость разрабатываемой рабочей тетради проявляется в нескольких аспектах:

Для учащихся:

- Систематизация знаний и формирование целостного представления о текстовых задачах.

- Поэтапное освоение алгоритмов решения различных типов задач.

- Развитие математического мышления и аналитических способностей.

- Возможность самостоятельной работы и самоконтроля.

- Индивидуализация образовательной траектории.

- Повышение мотивации к изучению математики через практико-ориентированные задачи.

- Формирование метапредметных навыков (анализ, синтез, моделирование).

Для учителей:

- Эффективный инструмент для организации как классной, так и домашней работы.

- Возможность дифференцированного подхода к обучению.
- Снижение временных затрат на подготовку дидактических материалов.
- Системный подход к формированию навыков решения текстовых задач.
- Возможность объективной оценки прогресса учащихся.
- Разнообразие методических приемов и подходов к объяснению материала.

Для образовательного процесса в целом:

- Повышение качества математического образования.
- Улучшение результатов ОГЭ по математике.
- Формирование функциональной математической грамотности.
- Развитие общеучебных компетенций.
- Подготовка к дальнейшему изучению математики на профильном уровне.
- Преемственность между основной и старшей школой

Важным аспектом практической значимости разрабатываемой рабочей тетради является её потенциал для внедрения в различные форматы образовательного процесса:

1. Использование на уроках математики в качестве дополнительного материала при изучении соответствующих тем.
2. Применение на факультативных занятиях и в кружковой работе для углубленного изучения методов решения текстовых задач.
3. Организация дополнительных занятий по подготовке к ОГЭ.
4. Самостоятельная работа учащихся под руководством родителей или репетиторов.
5. Дистанционное обучение с возможностью онлайн-консультаций.
6. Индивидуальная коррекционная работа с учащимися, испытывающими затруднения.

Особую актуальность разработка специализированной рабочей тетради приобретает в контексте современных образовательных тенденций, таких как:

- Цифровизация образования.
- Индивидуализация образовательных траекторий.
- Компетентностный подход в образовании.
- Формирование функциональной грамотности.
- Практико-ориентированность образования.

Таким образом, разработка рабочей тетради «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике является не просто созданием еще одного учебного пособия, а ответом на реальные потребности современной образовательной системы, направленным на решение конкретных проблем математического образования.

Разработка специализированной рабочей тетради «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике обладает высокой практической значимостью, обусловленной необходимостью преодоления существующих трудностей в освоении данного раздела и повышения эффективности подготовки к экзамену. Тетрадь призвана стать многофункциональным инструментом, полезным для различных участников образовательного процесса и применимым в разных форматах обучения. Практическая ценность разработки определяется её потенциалом в систематизации знаний учащихся, формировании устойчивых навыков решения текстовых задач, развитии математического мышления и, в конечном итоге, повышении качества математического образования и результатов ОГЭ.

2.2 Критерии оценки 21 задания ОГЭ по математике

Задание № 21 содержит в себе виды различных текстовых задач.

Критерии оценивания 21 задания представлены на рисунке 7.

Содержание критерия	Баллы
Ход решения задачи верный, получен верный ответ	2
Верно составлена математическая модель задачи (в алгебраической или иной форме), однако решение до конца не доведено или содержит ошибки ИЛИ Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>2</i>

Рисунок 7 – Содержание критерия

Два велосипедиста одновременно отправляются в 112-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 9 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ: 12 км/ч.

Решение. Пусть скорость второго велосипедиста равна x км/ч. Тогда $x + 9$ км/ч — скорость первого. Первый велосипедист проехал 112 км за $\frac{112}{x+9}$ часов, а второй — за $\frac{112}{x}$ часов. По условию время, затраченное первым велосипедистом на весь путь, на 4 часа меньше времени второго.

Составим уравнение:

$$\frac{112}{x} + \frac{112}{x+9} = 4$$

Это уравнение приводится к квадратному $x^2 + 9x - 252 = 0$, корнями которого являются числа 12 и -21. Отрицательный корень посторонний.

Ответ: 12 км/ч.

Таблица 3- Содержание критерия

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2

Верно составлена математическая модель задачи (в алгебраической или иной форме), однако решение до конца не доведено или содержит ошибки ИЛИ Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Примеры оценивания решения задания 21.

Пример 1 Два велосипедиста одновременно отправляются в 112-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 9 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Ответ: 12 км/ч.

	S	t	V
1 вел.	112	$\frac{112}{x}$	x
2 вел.	112	$\frac{112}{x-9}$	$x-9$

$\frac{112}{x-9} = \frac{112}{x} + 4$ (П.к. первый вел. пришел на 4 ч раньше!)

$\frac{112}{x-9} = \frac{112}{x} + 4 \quad | \cdot x$

$\frac{112x}{x-9} = 112 + 4x$

$\frac{112x}{x-9} = 112 + 4x \quad | \cdot (x-9)$

$112x = 112x - 1008 + 4x^2 - 36x$

$112x - 1008 + 4x^2 - 36x - 112x = 0$

$4x^2 - 36x - 1008 = 0$

$D = 1296 - 4 \cdot 4 \cdot (1008) = 14424$

$x_1 = \frac{36 + \sqrt{14424}}{8} = 21$
 $x_2 = \frac{36 - \sqrt{14424}}{8} = -12$
 $x = 21$ (скорость первого вел.)
 $x - 9 = 21 - 9 = 12$ (скорость второго вел.)
 Ответ: 12 км/ч

Рисунок 8 – Пример решения задачи

Таблица 4 – Содержание критерия оценивания

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно составлена математическая модель задачи (в алгебраической или иной форме), однако решение до конца не доведено или содержит ошибки ИЛИ Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Комментарий. Задача решена верно.

Оценка 2 балла.

Пример 2. Два велосипедиста одновременно отправляются в 224-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 2 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ: 14 км/ч

Пусть скорость первого велосипедиста равна x км/ч. Тогда скорость второго велосипедиста равна $(x-2)$ км/ч. Тогда время, за которое прибудет до финиша первый велосипедист, равно $\left(\frac{224}{x}\right)$ ч. Тогда второй велосипедист прибудет до финиша за $\left(\frac{224}{x-2}\right)$ ч. По условию задачи известно, что первый велосипедист прибывает к финишу на 2 часа раньше.

Составим и решим уравнение:

$$\frac{224}{x-2} - \frac{224}{x} = 2$$

$$\frac{x(x-2) \cdot 224}{x(x-2)} - \frac{x(x-2) \cdot 224}{x} = 2x(x-2)$$

$$224x - 224(x-2) = 2x(x-2)$$

$$224x - 224x + 448 = 2x^2 - 4x$$

$$-2x^2 + 4x + 448 \quad | : (-2)$$

$$x^2 - 2x - 224 = 0$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-224) = 4 + 896 = 900$$

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{2 + 30}{2} = 16$$

$$x_2 = \frac{-(-2) - \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{2 - 30}{2} = -\frac{28}{2} = -14$$

Условию задачи удовлетворяет x_1 .

Ответ: 16 км/ч.

Рисунок 9 – Пример решения задачи

Таблица 5 – Содержание критерия

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	0
Верно составлена математическая модель задачи (в алгебраической или иной форме), однако решение до конца не доведено или содержит ошибки ИЛИ Решение в целом верное, но содержит не существенные недостатки или вычислительные ошибки	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	0

Комментарий. Задача решена верно. Однако на последнем этапе имеется ошибка: скорость второго велосипедиста не вычислена, и в ответе дана скорость первого велосипедиста вместо скорости второго.

Оценка 1 балл.

Пример 3. Два велосипедиста одновременно отправляются в 112-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 9 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым. Ответ: 12 км/ч.

1в. S (км) t (ч) V (км/ч)

2в. 112 $x-9$ $\frac{112}{x-9}$

Пусть x – время (t) первого велосипедиста, тогда $x-9$ – время (t) второго велосипедиста. Расстояние (S) – 112 км; Тогда чтобы найти скорость (V) первого нужно: ($S:t$): $\frac{112}{x}$ км/ч; скорость (V) второго: (S,t): $\frac{112}{x-9}$ км/ч. А первый вел. едет на 4 часа больше, чем второй. Можно составить уравнение:

$$\frac{112}{x-9} - \frac{112}{x} = 4; \quad \frac{112}{x-9} - \frac{112}{x} - \frac{4}{1} \cdot \frac{x^2-9x}{x^2-9x} = 0;$$

$$\frac{112x - 112(x-9) + 1008 - 4x^2 + 36x}{x(x-9)} = 0; \quad \frac{1008 - 4x^2 + 36x}{x(x-9)} = 0;$$

$$\begin{cases} 1008 - 4x^2 + 36x = 0, \\ x(x-9) \neq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 1008 - 4x^2 + 36x = 0, \\ x \neq 0; x \neq 9; \end{cases}$$

$$1008 - 4x^2 + 36x = 4x^2 - 36x - 1008 = x^2 - 9x - 252 = 0;$$

$$4x^2 - 36x - 1008 = 0 \quad |:4; \quad x^2 - 9x - 252 = 0$$

$$x^2 - 9x - 252 = 0; \quad D = 81 - 4 \cdot (-252) = 1008$$

$$D = 81 + 1008 = 1089$$

$$x_1 = \frac{9 + 33}{2} = \frac{42}{2} = 21; \quad x_2 = \frac{9 - 33}{2} = -\frac{24}{2} = -12;$$

По условию задачи подходит 21 км/ч, т.к. V -скорость не может быть отрицательной.

Ответ: 21 км/ч – скорость второго.

Рисунок 9 – Пример решения задачи

Таблица 6 – Содержание критерия

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	0
Верно составлена математическая модель задачи (в алгебраической или иной форме), однако решение до конца не доведено или содержит ошибки ИЛИ Решение в целом верное, но содержит несущественные недостатки или вычислительные ошибки	0
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
<i>Максимальный балл</i>	<i>0</i>

Комментарий. В описании переменных многочисленные логические ошибки, в результате уравнение составлено неверно.

Оценка 0 баллов.

Требования к решению и оформлению задания №21

Данные критерии не представляют собой образец оформления решения задач, а лишь выделяют ключевые аспекты для проверяющих.

Критерии были разработаны в соответствии с одним из возможных решений, а именно тем, которое изложено в рекомендациях. Если обучающие предлагают свое решение, критерии формируются предметной комиссией с учетом описанного общего подхода.

Решения предложенное учениками могут включать в себя недочеты, не отраженные в критериях, но которые, тем не менее, позволяют оценить результат выполнения задания положительно. В подобных случаях решение о том, как квалифицировать такой недочет, принимает предметная комиссия.

При решении любой задачи необходимо либо сделать полное объяснение, прокомментировать введение переменной и всех величин математической модели при составлении уравнения или заполнить таблицу, обязательно прописывая измерения величин. В таблице должны быть указаны все необходимые обозначения: переменные, математические символы, единицы

измерения; строки и столбцы должны быть все заполнены верно. Ө При решении задачи с помощью дробно-рационального уравнения обязательно нужно указать ОДЗ.

При решении задачи с помощью квадратного уравнения обязательно нужно прописать нахождение корней (решить данное уравнение), а не просто записать корни уравнения.

При решении квадратного уравнения, именно в задачах, с помощью теоремы Виета, необходимо проверить, действительно ли эти числа являются корнями данного уравнения.

При решении задач, связанных с нахождением скорости или производительности нельзя вводить единицу, нужно ввести переменную (например, обозначить работу буквой A , путь - буквой S).

Типичные ошибки:

1. Место нахождения скорости сближения при встречном движении – сумма, пишут разность;
2. Перевод единиц измерения;
3. Неправильные формулы;
4. Отсутствие перехода от расстояния, пройденного поездом к длине поезда;
5. Нет краткой записи (схемы, таблицы, единиц измерения);
6. Приближенные значения;
7. Вычислительные ошибки (сокращение дробей).

За что могут снять балл?

1) Стали часто встречаться задачи на среднюю скорость. Если путь взять за единицу, в этом случае проверяющие сразу поставят ноль баллов! Путь нужно брать за переменную!

2) Один балл снимут на проверке, если начать прямо в таблице составлять уравнение, пропустив этап сравнения. В таблице есть числовые

значения, есть переменная, сравнение должно производиться строго под таблицей.

3) Если задача решается без введения переменной, соответственно нет необходимости в таблице, и получен правильный ответ, то балл может быть снят за недостаточность пояснений. Это произойдёт, если в решении школьника не понятно, откуда что взяли.

4) Также балл снимается, если при правильном оформлении допущена вычислительная ошибка.

5) Если получается дробное уравнение, то оно должно иметь прописанные ограничения, которые накладываются на переменную. Чаще всего эти ограничения никак не влияют на отбор корней, но за их отсутствие снимают баллы.

6) Если задача свелась к решению квадратного уравнения и в процессе получается отрицательный корень, то нельзя бросать и не досчитывать его. Нужно досчитать, а потом пояснить - это значение отрицательное, не подходит по смыслу задачи. Если этого не сделать, то тоже могут снять один балл.

7) Если в таблице нет единиц измерения, то за это тоже снимают один балл.

2.3 Разработка рабочей тетради «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике

В данном параграфе представлена разработка рабочей тетради «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике. Тетрадь создана с учетом выявленных в предыдущих разделах проблем и потребностей, а также в соответствии с разработанными критериями эффективности. Основной целью тетради является формирование устойчивых навыков решения текстовых задач различных типов, встречающихся в ОГЭ по математике, а также развитие математического мышления и метапредметных компетенций учащихся.

Рабочая тетрадь «Текстовые задачи» основана на инновационной концепции, сочетающей несколько ключевых принципов:

1. Принцип адаптивной сложности.

В отличие от большинства существующих пособий, где задания расположены в линейной последовательности, данная рабочая тетрадь реализует принцип «адаптивной сложности». Каждый раздел тетради содержит задания трех уровней сложности, которые визуальным образом маркированы и организованы таким образом, что учащийся может выбрать индивидуальную траекторию движения:

- «Базовый уровень» – задания, направленные на формирование основных навыков решения задач определенного типа.

- «Стандартный уровень» – задания, соответствующие типовым задачам ОГЭ.

- «Продвинутый уровень» – задания повышенной сложности, требующие нестандартного подхода.

При этом тетрадь содержит специальную «карту прогресса», позволяющую учащемуся отслеживать свое продвижение по каждому типу задач и каждому уровню сложности.

2. Принцип метакогнитивного подхода.

Отличительной особенностью тетради является ориентация не только на формирование навыков решения конкретных типов задач, но и на развитие метакогнитивных способностей учащихся – умения анализировать собственное мышление, выявлять ошибки в рассуждениях, выстраивать стратегии решения.

Для реализации этого принципа в тетрадь включены:

- Задания на анализ готовых решений и поиск ошибок.

- Упражнения на составление плана решения задачи.

- Рефлексивные вопросы после каждого блока заданий.

- Специальные «метакогнитивные паузы» – задания, предлагающие учащемуся проанализировать свой подход к решению.

- Задания на создание собственных задач определенного типа.

3. Принцип визуализации алгоритмов.

В основе работы с текстовыми задачами лежит умение выделять в условии ключевые данные и отношения, переводить текстовую информацию в математическую модель.

Для формирования этого навыка в тетради используется принцип визуализации алгоритмов:

- Каждый тип задач сопровождается визуальным алгоритмом решения .
- Для каждого типа задач разработана специальная графическая модель для структурирования данных.
- Включены задания на заполнение пропусков в визуальных схемах.
- Используются специальные графические органайзеры для записи решения.

4. Принцип сюжетной целостности.

Для повышения мотивации и вовлеченности учащихся в работу с тетрадью используется принцип сюжетной целостности:

- Задания объединены общей сюжетной линией «Математическое путешествие».
- Каждый раздел представляет собой определенный «остров» со своими задачами и головоломками.
- По мере решения задач учащийся продвигается по карте, открывая новые локации.
- Предусмотрены «бонусные задания» и «секретные маршруты» для дополнительной мотивации.
- Введены элементы игрофикации (баллы, достижения, уровни мастерства).

Рабочая тетрадь «Текстовые задачи» имеет модульную структуру, позволяющую гибко использовать материалы в зависимости от потребностей конкретного учащегося.

Тетрадь состоит из следующих разделов:

Вводный раздел «Карта математического путешествия»

- Общие рекомендации по работе с тетрадью.
- Диагностический тест для определения исходного уровня.
- Карта продвижения по разделам тетради.
- Общие стратегии работы с текстовыми задачами.
- Справочные материалы по основным формулам и понятиям.

Раздел 1. «Остров Пропорций: Задачи на проценты, концентрацию и смеси»:

- Алгоритмы решения задач на проценты.
- Визуальные модели для задач на концентрацию.
- Методы решения задач на смеси и сплавы.
- Практические задания различных уровней сложности.
- Метакогнитивные упражнения для данного типа задач.

Раздел 2. «Архипелаг Движения: Задачи на движение»:

- Подраздел «Равномерное движение в одном направлении».
- Подраздел «Равномерное движение в противоположных направлениях».
- Подраздел «Движение по воде».
- Подраздел «Движение по окружности».
- Подраздел «Сложные задачи на движение».

Раздел 3. «Полуостров Труда: Задачи на совместную работу»:

- Алгоритмы решения задач на совместную работу.
- Графическое представление процесса работы.
- Задачи на планирование работы.
- Задачи на производительность труда.
- Комбинированные задачи на работу и время.
- Нестандартные логические задачи.

Раздел 4. «Интеграционная дельта: Комплексные задачи»:

- Задачи, объединяющие несколько типов.

- Практико-ориентированные комплексные задачи.
- Задачи из реальной жизни.
- Проектные задания.
- Олимпиадные задачи.

Итоговый раздел «Финишная прямая»:

- Итоговые тесты по всем разделам.
- Типовые варианты заданий ОГЭ.
- Рекомендации по подготовке к экзамену.
- Анализ типичных ошибок.
- Стратегии поведения на экзамене.

Каждый раздел имеет единую структуру и включает следующие элементы:

1. Теоретический блок:

- Основные понятия и формулы
- Алгоритмы решения задач данного типа
- Визуальные схемы и модели
- Примеры решения типовых задач
- Типичные ошибки и как их избежать

2. Практический блок:

- Задания базового уровня с пошаговыми подсказками
- Задания стандартного уровня (типовые задачи ОГЭ)
- Задания продвинутого уровня (повышенная сложность)
- Задания на поиск ошибок в готовых решениях
- Задания на составление собственных задач

3. Рефлексивный блок:

- Вопросы для самоанализа
- Чек-лист освоения материала
- Карта прогресса
- Метакогнитивные задания

- Рекомендации по дальнейшей работе

Разработанная рабочая тетрадь «Текстовые задачи» обладает рядом уникальных особенностей, которые отличают её от существующих аналогов и повышают эффективность работы с ней.

Примеры теоретического материала.

Задача 1. Моторная лодка проплыла по течению реки 3 часа и против течения реки 2 часа. Путь пройденный моторной лодкой против течения, на 41 км меньше пути, пройденного по течению. Известно, что скорость моторной лодки в стоячей воде равна 28,5 км/ч. Найдите скорость течения.

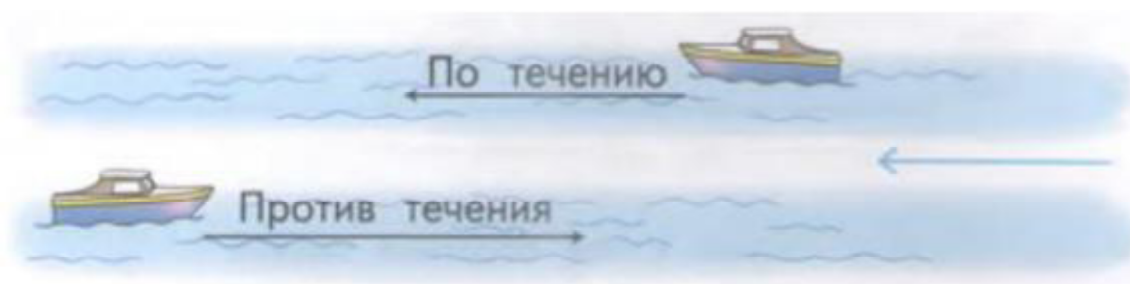


Рисунок 10 – Задачи на движения

Составим таблицу:

	Скорость	Время	Расстояние
Моторная лодка	28,5 км/ч		
Течение реки	2 км/ч		
По течению	$(28,5+x)$ км/ч	3 ч	$3(28,5+x)$ км
Против течения	$(28,5-x)$ км/ч	2 ч	$2(28,5-x)$ км

$$3(28,5+x)-2(28,5-x) = 41;$$

$$85,5+3x-57+2x=41;$$

$$5x=12,5$$

$$x=2,5 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 2,5 км/ч

Задача 2. В 10:00 из пункта А отправился в пункт В катер, который располагается в 30 км от пункта А. Простояв 2 часа 30 минут в пункте В, катер

отправилась назад и вернулась в пункт А в 18:00. Известно, что скорость течения реки равна 1 км/ч. Определите (в км/ч) собственную скорость лодки.

Составим таблицу:

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
По течению	$x + 1$	$\frac{30}{x + 1}$	30
Против течения	$x - 1$	$\frac{30}{x - 1}$	30

Так как катер вернулся в пункт отправления через 8 часов после выезда и 2 часа 30 минут из них стояла в пункте В, то он была в пути в течение $8 - 2,5 = 5,5$ часа. Составим уравнение:

$$\frac{30}{x + 1} + \frac{30}{x - 1} = 5,5$$

$$\frac{30(x - 1) + 30(x + 1)}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{11}{2}$$

$$\frac{60x}{(x + 1)(x - 1)} = \frac{11}{2}$$

Скорость против течения равна $x - 1$ км/ч, значит, $x > 1$.

Тогда $(x + 1)(x - 1) > 0$ и можем до множить левую и правую части уравнения на $2 \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$. Получаем

$$60x \cdot 2 = 11(x + 1)(x - 1)$$

$$120x = 11(x^2 - 1)$$

$$D = 120^2 + 4 \cdot 11 \cdot 11 = 4(60^2 + 11 \cdot 11) = 2^2 + 61^2 = 122^2$$

$$x_1 = \frac{120 + 122}{2 \cdot 11} = \frac{242}{22} = 11$$

$$x_2 = \frac{120 - 122}{2 \cdot 11} = \frac{-2}{22} < 0$$

Так как $x > 0$, то собственная скорость катера равна 11 км/ч.

Ответ: 11 км/ч.

Задачи на производительность.

Человек (машина, станок) работает какое-то время, при этом производит какую-либо продукцию (выполняет какую-либо работу) и делает это с определенной скоростью (производительность труда). Производительность – это объем работы, выполняемый за единицу времени (например, за час или за день). По-другому, скорость выполнения работы.

Рабочий процесс состоит из трех оставляющих: производительность (скорость работы), выполненный объем работ, время работы

$$P = \frac{A}{t} = \frac{\text{работа}}{\text{время}}$$

Производительность – это объем работы, выполняемый за единицу времени (например, за час или за день). По-другому, скорость выполнения работы.

$$P = \frac{A}{t}; t = \frac{A}{P}; A = P * t$$

Удобно составлять таблицу для решения задач:

	Производительность	Время	Работа
1 рабочий	x детали в день		
2 рабочий	(x+4) детали в день		

Задача 1. Мастер делает всю работу за 3 часа, а его ученик – за 6 часов. За сколько времени сделают они всю работу, если будут работать совместно?

Анализ задачи. Это задача на работу, работают 2 человека, поэтому на совместную работу. Сказано ли, какая это работа (детали, предметы или другое) и ее количество? Очень часто в задачах на производительность сказано абстрактно «работа». В таких случаях можно придумать и написать любое число, удобное для нас. Но обычно предлагают работу принять за 1.

Какой вопрос задачи? За сколько времени сделают они всю работу, если будут работать совместно? Необходимо знать работу и совместную

производительность. Чтобы найти сколько они вместе изготовят за 1 час (какую часть работы они сделают), необходимо знать, производительность каждого.

Решение.

1. Найдем производительность каждого участника, т.е. определим какую часть работы делает каждый из них за 1 час.

$1:3 = \frac{1}{3}$ часть работы делает мастер за 1 ч — производительность мастера

$1:6 = \frac{1}{6}$ часть работы делает ученик за 1 ч — производительность ученика.

2. Какую часть работы сделают они вместе за 1 час?

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \text{ часть работы за 1 ч.}$$

3. За сколько времени сделают они всю работу, если будут работать совместно? Например, работа 18 деталей.

$$1:\frac{1}{2} = 2 \text{ ч потребуется и мастеру и ученику на}$$

выполнение всей работы вместе.

Ответ: 2 часа.

Задача 2. Двое рабочих изготовили 135 деталей. Первый рабочий работал 7 дней, а второй — 12 дней. Сколько деталей изготавливал ежедневно каждый рабочий, если первый за 3 дня сделал на 3 детали больше, чем второй за 4 дня?

Составим таблицу:

	Производительность	Время	Работа
1 рабочий	х детали в день	7 дней	7х
2 рабочий	у детали в день	12 дней	12у
1 рабочий	х детали в день	3 дня	3х
2 рабочий	у детали в день	4 дня	4у

Эта задача состоит из двух условий. Можно ввести две переменные, для каждого условия составить таблицу, а затем составить систему двух уравнений.

.Пусть x деталей изготавливал в день первый рабочий, а y - второй рабочий.

Так как вдвоем они изготовили 135 деталей, то получим первое уравнение: $7x + 12y = 135$. Так как первый за 3 дня сделал на 3 детали больше, чем второй за 4 дня: $3x - 4y = 3$.

$$\begin{cases} 7x + 12y = 135 \\ 3x - 4y = 3 \end{cases}$$

Умножим второе выражение на 3:

$$\begin{cases} 7x + 12y = 135 \\ 9x - 12y = 9 \end{cases}$$

Вычислим из первого уравнения второе:

$$16x = 144$$

$$x = 9$$

9 деталей в день изготавливал в день первый рабочий.

$$-4y = -24$$

$$y = 6$$

6 деталей в день изготавливал в день второй рабочий.

Ответ: 9; 6.

Задачи на движение.

По прямой.

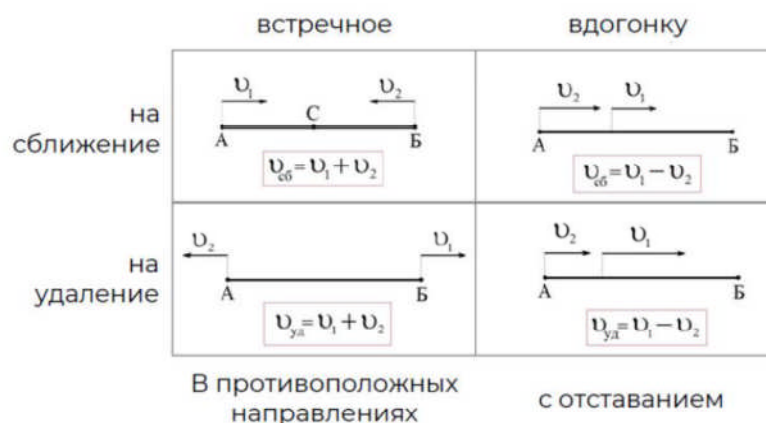


Рисунок 11 – Формулы задачи на движения

Задача 1. Экскурсионный автобус выехал из Санкт-Петербурга в Пушкинские горы со скоростью 70 км/ч. Через час вслед за ним выехал автомобиль со скоростью 90 км/ч.

За сколько часов автомобиль догонит автобус?

Решение. За сколько часов автомобиль догонит автобус? Сколько часов в пути будет автомобиль? Обозначим – x ч. Сколько часов в пути будет автобус? – на 1 ч больше, чем автомобиль – $(x+1)$ ч.

Составим таблицу:

	Скорость, км/ч	Время, ч	Расстояние, км
автобус	70	$x+1$	$70(x+1)$
автомобиль	90	x	$90x$

Расстояние они пройдут одинаковое, поэтому составим уравнение:
 $90x=70(x+1)$

$$x=3,5\text{ч}$$

Ответ: 3,5 ч.

По замкнутой трассе.

Два мотоциклиста стартуют одновременно в одном направлении из двух диаметрально противоположных точек круговой трассы, длина которой равна 14 км. Через сколько минут мотоциклисты поравняются в первый раз, если скорость одного из них на 21 км/ч больше скорости другого?

Решение. Обозначим t ч – время, через которое мотоциклисты поравняются. Скорость одного – x км/ч, скорость второго – $(x+21)$ км/ч. За t ч первый пройдет – xt км, второй – $(x+21)t$ км. Так как второй пройдет на 7 км больше, то получим уравнение:

$$(x+21)t-xt=7\text{км}$$

$$t=1/3\text{ч}=20\text{ мин}$$

Движение протяжных тел.

Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 72 км/ч, проезжает мимо лесополосы, длина которой равна 300 метрам, за 30 секунд. Найдите длину поезда в метрах.



Рисунок 12 – Условие к задачи

Решение. Известно: скорость 72 км/ч,

$$\text{время } 30 \text{ с} = \frac{30}{60} \text{ мин} = \frac{1}{2} \text{ мин} = \frac{1}{2} * \frac{1}{60} \text{ ч} = \frac{1}{120} \text{ ч}$$

расстояние = длина лесополосы + длина поезда

$$S = \frac{72 \text{ км}}{\text{ч}} * \frac{1}{120} \text{ ч} = 0,6 \text{ км} = 600 \text{ м}$$

600 м – длина лесополосы и длина поезда вместе.

600-300=300(м) длина поезда.

Ответ: 300 метров.

Задачи смеси сплавов.

Чтобы найти концентрацию вещества в растворе, необходимо массу этого вещества разделить на массу всего раствора. Часто концентрация вещества выражается в процентах.

$$c = \frac{m}{M} * 100\% \quad m = \frac{M * C}{100\%}$$

Задача 3. Имеется два сплава железа и хрома. Из таких сплавов изготавливают сталь для изготовления инструментов. В первом сплаве содержится 5% хрома, во втором сплаве – 30% хрома. Сколько килограммов каждого сплава надо взять, чтобы получить сплав массой 100 кг, содержащей 18% хрома. Решение. 3 сплава. Известны концентрации трех сплавов. Известна

масса третьего сплава 100кг. Массу одного из сплавов обозначим x кг, тогда масса второго – $(100-x)$ кг.

Составим таблицу:

	С, %	М, кг	м, кг
1 сплав	5	x	$\frac{5x}{100}$
2 сплав	30	$100-x$	$\frac{30(100-x)}{100}$
3 сплав (смесь)	18	100	$\frac{18 * 100}{100}$

$$\frac{5x}{100} + \frac{30(100-x)}{100} = \frac{18 * 100}{100}$$

умножим обе части на сто

$$5x + 30(100-x) = 18 * 100$$

разделим обе части на 5

$$x + 60 + (100-x) = 18 * 20$$

$$1x + 600 - 6x = 360$$

$$-5x = -240$$

$$x = 48$$

48 кг – масса первого сплава. Если $x=48$, то $100-x=100-48=52$ (кг) масса второго сплава.

Ответ: 48 кг, 52 кг.

Пример 4. Фрагмент «Навигатора успеха»

НАВИГАТОР УСПЕХА: КАРТА ПРОГРЕССА

Тип задач: Задачи на движение (Рисунок 13)

Подтип задачи	Базовый уровень	Стандартный уровень	Продвинутый уровень
Равномерное движение в одном направлении	□□□□□	□□□□□	□□□□□
Равномерное движение в противоположных направлениях	□□□□□	□□□□□	□□□□□
Движение по воде	□□□□□	□□□□□	□□□□□
Движение по окружности	□□□□□	□□□□□	□□□□□
Сложные задачи на движение	□□□□□	□□□□□	□□□□□

Рисунок 13 – Карта успеха задачи на движения

Мой текущий статус: _____

Следующая цель: _____

Мои сильные стороны: _____

Требуют дополнительной работы: _____

Достижения:

- ☐ «Начинающий путешественник» (решено 5 базовых задач)
- ☐ «Опытный штурман» (решено 10 задач стандартного уровня)
- ☐ «Мастер навигации» (решено 5 задач продвинутого уровня)
- ☐ «Покоритель скоростей» (безошибочно решено 3 задачи подряд)
- ☐ «Математический GPS» (создана собственная задача на движение)

ЗАДАЧНЫЙ КОНСТРУКТОР: СОЗДАЕМ ЗАДАЧИ НА ДВИЖЕНИЕ

Шаг 1: Выберите тип задачи на движение

- ☐ Движение в одном направлении
- ☐ Движение в противоположных направлениях
- ☐ Движение по воде
- ☐ Движение по окружности

Шаг 2: Выберите контекст задачи

- ☐ Транспорт (поезда, автомобили)
- ☐ Спорт (бегуны, велосипедисты)
- ☐ Природа (течение реки, ветер)
- ☐ Космос (движение планет, спутников)

Шаг 3: Определите известные величины (минимум 3)

- ☐ Скорость первого объекта
- ☐ Скорость второго объекта
- ☐ Расстояние между объектами
- ☐ Время движения
- ☐ Время встречи
- ☐ Пройденный путь

Шаг 4: Определите неизвестную величину

- ☐ Скорость объекта
- ☐ Расстояние
- ☐ Время
- ☐ Соотношение скоростей

Шаг 5: Создайте текст задачи, используя выбранные параметры

[Место для составления текста задачи]

Шаг 6: Решите составленную задачу и проверьте корректность

[Место для решения]

Шаг 7: Усложните задачу, добавив дополнительное условие

[Место для модификации задачи]

Примеры практического материала.

Задачи на движения.

Задача 1. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 60 км. На следующий день он отправился обратно в А, увеличив скорость на 10 км/ч. По пути он сделал остановку на 3 часа, в результате чего затратил на обратный путь столько же

времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А.

Решение.

Пусть скорость велосипедиста на пути из А в В равна x км/ч. Тогда скорость на пути из В в А равна $x+9$ км/ч. Составим таблицу:

		Скорость, км	Время, ч	Путь, км
Туда		x	$\frac{60}{x}$	60
Обратно		$x+10$	$\frac{60}{x+10}$	60

По условию время, затраченное на обратный путь, вместе с трёхчасовой остановкой такое же, как и время, затраченное на путь из А в В. Составим уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{60}{x+10} + 3 &= \frac{60}{x} \\ \frac{60}{x+10} - \frac{60}{x} + 3 &= 0 \\ \begin{cases} 60x - 60(x+10) + 3x(x+10) = 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq -10 \end{cases} \end{aligned}$$

Решим первое уравнение системы:

$$\begin{aligned} 60x - 60(x+10) + 3x(x+10) &= 0 \\ 60x - 60x - 60 \cdot 10 + 3x^2 + 30x &= 0 \\ 3x^2 + 30x - 60 \cdot 10 &= 0 \\ x^2 + 10x - 200 &= 0 \end{aligned}$$

Найдем дискриминант полученного уравнения:

$$D = 10^2 + 4 \cdot 20 = 900 = 30^2$$

$$x_1 = \frac{-10 + 30}{2} = 10$$

$$x_2 = \frac{-10 - 30}{2} = -20$$

Корень $x = -20$ не подходит по смыслу задачи, так как $x > 0$. Поэтому скорость велосипедиста на пути из А в В равна 10 км/ч, следовательно, его скорость на пути из В в А равна $10 + 10 = 20$ км/ч.

Ответ: 20 км/ч.

Задача 2. Два велосипедиста одновременно отправляются в 112-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 9 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Решение.

Пусть скорость второго велосипедиста равна x км/ч. Тогда скорость первого велосипедиста равна $x + 9$ км/ч. Составим таблицу:

	Скорость, км	Время, ч	Путь, км
Первый	$x + 9$	$\frac{112}{x + 9}$	112
Второй	x	$\frac{112}{x}$	112

По условию задачи первый велосипедист прибыл к финишу на 4 часа раньше второго. Тогда можем составить уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{112}{x + 9} + 4 &= \frac{112}{x} \\ \frac{112}{x + 9} - \frac{112}{x} + 4 &= 0 \\ \frac{112x - 112(x + 9) + 4x(x + 9)}{x(x + 9)} &= 0 \\ \begin{cases} 112x - 112(x + 9) + 4x(x + 9) = 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq -9 \end{cases} \end{aligned}$$

Решим первое уравнение системы:

$$\begin{aligned} 112x - 112(x + 9) + 4x(x + 9) &= 0 \\ 112x - 112x - 1008 + 4x^2 + 36x &= 0 \\ 4x^2 + 36x - 1008 &= 0 \end{aligned}$$

$$x^2 + 9x - 252 = 0$$

Найдем дискриминант полученного уравнения:

$$D = 9^2 + 4 * 252 = 1089 = 33^2$$

$$x_1 = \frac{-9 + 33}{2} = 12$$

$$x_2 = \frac{-9 - 33}{2} = -21$$

Корень $x_2 = -21$ не подходит по смыслу задачи, так как $x > 0$. Поэтому скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым, равна 12 км/ч.

Ответ: 12 км/ч.

Задача 3. Из двух городов одновременно навстречу друг другу отправились два велосипедиста. Проехав некоторую часть пути, первый велосипедист сделал остановку на 20 минут, а затем продолжил движение до встречи со вторым велосипедистом. Расстояние между городами составляет 210 км, скорость первого велосипедиста равна 20 км/ч, скорость второго — 30 км/ч. Определите расстояние от города, из которого выехал второй велосипедист, до места встречи.

Пусть первый велосипедист до места встречи ехал t часов. Тогда второй велосипедист ехал до места встречи $t + \frac{20}{60}$ часа. Составим таблицу.

	Скорость, км	Время, ч	Путь, км
Первый	20	t	$20t$
Второй	30	$t + \frac{20}{60}$	$30(t + \frac{20}{60})$

Так как два велосипедиста встретились, то суммарно они проехали путь, равный расстоянию между городами, то есть 210 км. Составим уравнение:

$$20t + 30\left(t + \frac{20}{60}\right) = 210$$

$$20t + 30t + \frac{20}{2} = 210$$

$$20t + 30t + 10 = 210$$

$$50t = 200$$

$$10t = 40$$

$$t = 4$$

Следовательно, второй велосипедист ехал до места встречи $4 + \frac{20}{60} = \frac{13}{3}$ часа. Значит, за это время он проехал расстояние, равное $30 * \frac{13}{3} = 130$ км.

Ответ: 130 км.

Задача 4. Первые 330 км автомобиль ехал со скоростью 110 км/ч, следующие 105 км — со скоростью 35 км/ч, а последние 150 км — со скоростью 50 км/ч. Найдите среднюю скорость автомобиля на протяжении всего пути.

Составим таблицу:

Часть пути	Скорость, км	Время, ч	Путь, км
Первая	110	$\frac{330}{110}$	330
Вторая	35	$\frac{105}{35}$	105
Третья	50	$\frac{150}{50}$	150

На первые 300 км автомобиль потратил $\frac{330}{110} = 3$ часов, на следующие 105 км потратил $\frac{105}{35} = 3$ часа, а на последние 150 км потратил $\frac{150}{50} = 3$ часа.

Всего автомобиль потратил на дорогу

$$3 + 3 + 3 = 9 \text{ часов}$$

при этом длина всего его пути равна

$$330 + 105 + 150 = 585 \text{ км.}$$

Тогда средняя скорость равна:

$$V_{\text{ср}} \frac{585}{9} = 65 \text{ км/ч.}$$

Ответ: 65 км/ч.

Задача 5. Поезд, двигаясь равномерно со скоростью 86 км/ч, проезжает мимо пешехода, идущего в том же направлении параллельно путям по платформе со скоростью 6 км/ч, за 18 секунд. Найдите длину поезда в метрах.

Пусть длина поезда равна x км.

Поскольку пешеход идет в одном направлении с поездом, скорость сближения конца поезда и пешехода равна разности их скоростей, то есть $86 - 6 = 80$ км/ч.

Тогда со скоростью сближения 80 км/ч пешеход и конец поезда сближаются на расстояние, равное длине поезда, за 18 секунд.

Переведём 18 секунд в часы. 18 секунд — это $\frac{18}{60} = 0,3$ минуты, то есть $\frac{0,3}{60} = \frac{1}{200}$ часа.

Тогда

$$x = 80 * \frac{1}{200} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0,4 \text{ км.}$$

Значит, длина поезда равна 0,4 км, то есть 400 м.

Задачи на производительность.

Задача 1. Первый рабочий за час делает на 9 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 216 деталей, на 4 часа быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

Решение.

Пусть второй рабочий делает x деталей в час. Тогда первый рабочий делает $x+9$ деталей в час. Составим таблицу:

Рабочие	Производительность, дет./час	Время, ч	Работа, дет.
Первый	$x + 9$	$\frac{216}{x + 9}$	216
Второй	x	$\frac{216}{x}$	216

Поскольку первый выполняет заказ из 216 деталей на 4 часа быстрее второго, можем составить уравнение:

$$\frac{216}{x} - \frac{216}{x + 9} = 4$$

Разделим обе части уравнения на 4:

$$\frac{54}{x} - \frac{54}{x+9} = 1$$

$$\frac{54}{x} - \frac{54}{x+9} - 1 = 0$$

$$\frac{54(x+9) - 54x - x(x+9)}{x(x+9)} = 0$$

$$\begin{cases} 54(x+9) - 54x - x(x+9) = 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq -9 \end{cases}$$

$$54(x+9) - 54x - x(x+9) = 0$$

$$54x - 54x - 486 - x^2 - 9x = 0$$

$$x^2 + 9x - 486 = 0$$

$$D = 9^2 + 4 * 486 = 2025 = 45^2$$

$$x_1 = \frac{-9 + 45}{2} = 18$$

$$x_2 = \frac{-9 - 45}{2} = -27$$

Поскольку по смыслу задачи $x > 0$, то $x = 18$. Тогда первый рабочий за час делает $18 + 9 = 27$ деталей.

Ответ: 27

Задача 2. Пусть первая труба пропускает x литров воды в минуту. Тогда вторая труба пропускает $x + 15$ литров воды в минуту. Составим таблицу:

Трубы	Скорость, л./мин	Время, мин	Объем, л
Первая	x	$\frac{100}{x}$	100
Вторая	$x + 15$	$\frac{100}{x + 15}$	100

Поскольку первый выполняет заказ из 216 деталей на 4 часа быстрее второго, можем составить уравнение:

$$\frac{100}{x} - \frac{100}{x + 15} = 6$$

$$\frac{100}{x} - \frac{100}{x+15} - 6 = 0$$

$$\frac{100(x+15) - 100x - 6x(x+15)}{x(x+15)} = 0$$

$$\begin{cases} 100(x+15) - 100x - 6x(x+15) = 0 \\ x \neq 0 \\ x \neq -15 \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$100(x+15) - 100x - 6x(x+15) = 0$$

$$100x + 1500 - 100x - 6(x^2 + 15x) = 0$$

$$1500 - 6(x^2 + 15x) = 0$$

Разделим полученное уравнение на 6:

$$250 - x^2 - 15x = 0$$

$$x^2 + 15x - 250 = 0$$

$$D = 15^2 + 4 * 250 = 225 + 1000 = 1225 = 35^2$$

$$x_1 = \frac{-15 + 35}{2} = 10$$

$$x_2 = \frac{-15 - 35}{2} = -25$$

Поскольку по смыслу задачи $x > 0$, то $x = 10$. Тогда вторая труба за минуту пропускает $10 + 15 = 25$ литров воды.

Ответ: 25

Задача 3. Три экскаватора разной производительности роют котлован. Работа будет выполнена, если каждый проработает 12 часов. Она также будет выполнена, если первый проработает 8 часов, второй — 16, а третий — 10. Сколько часов должен проработать второй экскаватор, чтобы завершить работу, если до него первый проработал 10 часов, а третий — 11?

Примем всю работу за 1, производительность первого экскаватора за x второго — за y третьего — за z .

Работа будет выполнена, если каждый экскаватор проработает 12 часов, то есть:

$$12x + 12y + 12z = 1$$

Работу также будет выполнена, если выполнено второе условие задачи:

$$8x + 16y + 10z = 1$$

Сложим оба уравнения:

$$12x + 8x + 12y + 16y + 12z + 10z = 2$$

$$20x + 28y + 22z = 2$$

$$10x + 14y + 11z = 1$$

Заметим, что в получившемся уравнении первый экскаватор работал 10 часов, а третий — 11, то есть это нужный нам случай. Производительность второго экскаватора у умножается на 14, значит, это ответ.

Ответ: 14

Задачи на проценты.

Задача 1. Свежие фрукты содержат 81% воды, а высушенные — 16%. Сколько сухих фруктов получится из 420 кг свежих фруктов?

Составим таблицу:

Тип фруктов	Вода, %	Сухое вещество, %
Свежие	81	19
Высушенные	16	84

В процессе высушивания масса сухого вещества фруктов не изменяется.

Изначально масса сухого вещества составляла 19% от всей массы свежих фруктов, то есть

$$420 * \frac{19}{100} = \frac{420 * 19}{100}$$

После высушивания фруктов масса сухого вещества стала составлять 84% от всей массы x сухих фруктов. Тогда она была равна

$$x * \frac{84}{100} = \frac{420 * 19}{100}$$

$$x = \frac{420 * 19}{100} * \frac{100}{84}$$

$$x = \frac{5 * 84 * 19}{84}$$

$$x = 5 * 19$$

$$x = 95$$

Таким образом, масса сухих фруктов равна 95 кг.

Ответ: 95 кг.

Задача 2. Имеются два сосуда, содержащие 4 кг и 16 кг раствора кислоты различной концентрации. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 57% кислоты. Если же слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 60% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом растворе?

Пусть концентрация первого раствора равна $x\%$ а концентрация второго раствора $y\%$ Составим таблицу:

Растворы	Масса раствора, кг	Концентрация, %	Масса вещества, кг
Первый	4	x	$\frac{x}{100} * 4$
Второй	16	y	$\frac{y}{100} * 16$
Смесь	$4 + 16 = 20$	57	$\frac{57}{100} * 20$

Так как масса чистого вещества не меняется, то

$$\frac{x}{100} * 4 + \frac{y}{100} * 16 = \frac{57}{100} * 20$$

По условию, если слить равные массы этих растворов, то полученный раствор будет содержать 60% кислоты. Пусть массы первого и второго раствора равны k кг.

Составим таблицу:

Растворы	Масса раствора, кг	Концентрация, %	Масса вещества, кг
Первый	k	x	$\frac{x}{100} * k$
Второй	k	y	$\frac{y}{100} * k$
Смесь	$k + k = 2k$	60	$\frac{60}{100} * 2k$

Так как масса чистого вещества не меняется, то

$$\frac{x}{100} * k + \frac{y}{100} * k = \frac{60}{100} * 2k$$

$$\frac{x}{100} + \frac{y}{100} = \frac{60}{100} * 2$$

Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{100} * 4 + \frac{y}{100} * 16 = \frac{57}{100} * 20 \\ \frac{x}{100} + \frac{y}{100} = \frac{60}{100} * 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x + 16y = 57 * 20 \\ x + y = 60 * 2 \end{cases}$$

Разделим обе части первого уравнения системы на 4:

$$\begin{cases} x + 4y = 57 * 5 \\ x + y = 60 * 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 4y = 285 \\ x + y = 120 \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$\begin{cases} x + 4y - x - y = 285 - 120 \\ x + y = 120 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = 165 \\ x + y = 120 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 55 \\ x = 65 \end{cases}$$

Следовательно, концентрация первого раствора равна 65%. Найдём массу кислоты в первом растворе:

$$\frac{64}{100} * 4 \text{ кг} = \frac{13}{5} = 2,6 \text{ кг.}$$

Ответ: 2,6 кг

Задача 3. Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

Пусть масса 30-процентного раствора равна x , а 60-процентного y . Составим таблицу.

Растворы	Масса раствора, кг	Концентрация, %	Масса вещества, кг
30%	x	$0.3 x$	0.3
30%	y	$0.6 y$	0.6
30%	10	$0,5 * 10$	$0,5$
Первый новый раствор	$x + y + 10$	$0,36(x + y + 10)$	$0,36$
Второй новый раствор	$x + y + 10$	$0,41(x + y + 10)$	$0,41$

Получаем следующую систему:

$$\begin{cases} 0.3 x + 0.6 y = 0,36(x + y + 10) \\ 0.3 x + 0.6 y + 0,5 * 10 = 0,41(x + y + 10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0.3 x + 0.6 y = 0,36 x + 0,36 y + 3,6 \\ 0.3 x + 0.6 y + 5 = 0,41 x + 0,41 y + 4,1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0,24 y - 0,06 x = 3,6 \\ 0,11 x - 0,19 y = 0,9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 y - x = 60 \\ 11 x - 19 y = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 y - 60 \\ 44 x - 660 - 19 y = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 y - 60 \\ 25 y = 750 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 y - 60 \\ 25 y = 750 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 * 30 - 60 = 60 \\ y = 30 \end{cases}$$

Таким образом, масса 30-процентного раствора равна 60 кг.

Ответ: 60 кг

Задача 4. Семь одинаковых рубашек дешевле одной куртки на 9%. На сколько процентов десять таких же рубашек дороже одной куртки?

В условии цену рубашек сравнивают с ценой куртки, то есть цена одной куртки равна 100%. Семь рубашек дешевле куртки на 9%, то есть их стоимость составляет $100\% - 9\% = 91\%$ от стоимости куртки.

Тогда цена одной рубашки выражается как $\frac{91\%}{7} = 13\%$ от стоимости куртки.

Теперь можем посчитать цену для 10 рубашек

$$10 * 13\% = 130\%$$

Тогда 10 рубашек дороже куртки на $130\% - 100\% = 30\%$

Ответ: 30%

Задача 5. Смешали 4 литра 35-процентного раствора вещества с 11 литрами 5-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Пусть концентрация получившегося раствора равна $x\%$. Составим таблицу:

Растворы	Масса раствора, кг	Концентрация, %	Масса вещества, кг
Первый	4	35	$\frac{35}{100} * 4$
Второй	11	5	$\frac{5}{100} * 11$
Смесь	$4 + 11 = 15$	x	$\frac{x}{100} * 15$

Так как масса чистого вещества не меняется, то

$$\frac{35}{100} * 4 + \frac{5}{100} * 11 = \frac{x}{100} * 15$$

Домножим обе части получившегося уравнения на 20:

$$\frac{700}{100} * 4 + \frac{100}{100} * 11 = \frac{x}{100} * 300$$

$$7 * 4 + 11 = 3x$$

$$28 + 11 = 3x$$

$$39 = 3x$$

$$x = 13$$

Следовательно, концентрация получившегося раствора составляет 13%.

Ответ: 13

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное исследование по теме «Рабочая тетрадь «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике» позволило решить важную методическую задачу по созданию эффективного учебного пособия, направленного на формирование устойчивых навыков решения текстовых задач у учащихся 9-х классов. Данная работа имеет как теоретическую, так и практическую значимость в контексте совершенствования математического образования и подготовки школьников к государственной итоговой аттестации.

В ходе исследования были решены все поставленные задачи и получены следующие результаты:

1. Проанализирована методическая литература по проблеме обучения решению текстовых задач в курсе математики основной школы.
2. Исследована структура текстовых задач, этапы их решения и классификацию типов задач, включаемых в ОГЭ по математике.
3. Проведен анализ существующих учебников и учебных пособий по математике для основной школы с точки зрения представленности в них текстовых задач и методики обучения их решению.
3. Создана рабочая тетрадь «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике.

Цель работы достигнута, поставленные задачи решены.

Практическая значимость результатов исследования заключается в возможности использования разработанной рабочей тетради в реальном образовательном процессе для повышения качества подготовки учащихся к ОГЭ по математике. Тетрадь может быть успешно интегрирована как в рамках основной программы, так и для организации факультативной и самостоятельной работы учащихся.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгебра 9 класс: учебник для общеобразовательных организаций / Г. В. Дорофеев [и др] ; 7-е изд., перераб. Москва : Просвещение, 2019. 336 с.
2. Алгебра 9 класс : учебник для общеобразовательных организаций / Ю. Н. Макарычев [и др] ; Москва : Просвещение, 2016. 175 с.
3. Аминова З. А. Методические особенности решения текстовых задач по математике / З. А. Аминова // Вестник Череповецкого государственного университета. М. : 2012. С. 110-113.
4. Баженова Н. Г. Теория и методика решения текстовых задач // Баженова Н. Г., Одоевцева И. Г. Методика решения текстовых задач : М. 2012. 89 с.
5. Белошистая А. В. Методика работы с текстовыми логическими заданиями // Начальная школа. 2007. № 8. С. 42-46.
6. Гусев В. А. Теория и методика обучения математике: психолого-педагогические основы / В. А. Гусев. М. : 2013. № 3. 456 с.
7. Далингер В. А. Совершенствование процесса обучения учащихся решению текстовых задач / В. А. Далингер // Омский научный вестник. 2011. № 2(96). С. 168-170.
8. Дворянинов С. В. От условия текстовой задачи – к уравнению / С. В. Дворянинов // Математика в школе. 2019. № 2. С. 35-37.
9. Демидова Т. Е. Теория и практика решения текстовых задач: пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений М. : Академия, 2002. 288 с.
10. Денищева Л. О. Теория и методика обучения математике в школе: учебное пособие. М. : Бином, 2014. 247 с.
11. Дианова О. А. Различные способы решения текстовых задач / О. А. Дианова, В. В. Краснова // Конференциум АСОУ : сборник научных трудов и материалов научно-практических конференций. 2022. № 3. С. 325-339.

12. Исаева З. И. Методика обучения решению текстовых задач с помощью составления уравнений / З. И. Исаева // Проблемы современного педагогического образования : 2021. С. 82-86.
13. Кашицына Ю. Н. Методика обучения решению текстовых задач по математике с использованием средств ИКТ. 2020. № 1(80). С. 224-229.
14. Кочетова И. В. Методика обучения учащихся 8-го класса решению текстовых задач с помощью квадратных уравнений // Учебный эксперимент в образовании. 2023. № 3(107). С. 73-80.
15. Леонтьева Н. В. О методах решения текстовых задач в условиях подготовки к ОГЭ // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2016. № Т9. С. 6-10.
16. Малова И. Е. Текстовые задачи : реализация образовательных технологий в содержании школьных учебников математики // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2017. № Т.11. С. 244-254.
17. Радюк Н. М. Решение текстовых задач с помощью моделирования // Современное образование Витебщины. 2016. № 1(11). С. 20-23.
18. Сагателова Л. С. Методические особенности решения текстовых задач // Математика в школе. 2024. № 5. С. 17-29.
19. Целищева И. И. Моделирование при обучении решению текстовых задач // Математика в школе. 2008. № 5. С. 36-45.
20. Шакирова И. М. Текстовые задачи в школьном курсе математики // Вестник Набережночелнинского государственного педагогического университета. 2022. № S3(38). С. 261-264.

Фрагмент рабочей тетради

1. Из пунктов А и В, расстояние между которыми 19 км, вышли одновременно навстречу друг другу два пешехода и встретились в 9 км от А. Найдите скорость пешехода, шедшего из А, если известно, что он шел со скоростью, на 1 км/ч большей, чем пешеход, шедший из В, и сделал в пути получасовую остановку.

2. Рыболов в 5 часов утра на моторной лодке отправился от пристани против течения реки, через некоторое время бросил якорь, 2 часа ловил рыбу и вернулся обратно в 10 часов утра того же дня. На какое расстояние от пристани он отдалился, если скорость реки равна 2 км/ч, а собственная скорость лодки 6 км/ч?

3. Из A в B одновременно выехали два автомобилиста. Первый проехал с постоянной скоростью весь путь. Второй проехал первую половину пути со скоростью, меньшей скорости первого автомобилиста на 11 км/ч, а вторую половину пути проехал со скоростью 66 км/ч, в результате чего прибыл в B одновременно с первым автомобилистом. Найдите скорость первого автомобилиста, если известно, что она больше 40 км/ч.

4. Дорога между пунктами A и B состоит из подъема и спуска, а ее длина равна 14 км. Турист прошел путь из A в B за 4 часа, из которых спуск занял 2 часа. С какой скоростью турист шел на спуске, если его скорость на подъеме меньше его скорости на спуске на 3 км/ч?

5. Свежие фрукты содержат 81% воды, а высушенные — 16%. Сколько сухих фруктов получится из 420 кг свежих фруктов?

6.Смешав 30-процентный и 60-процентный растворы кислоты и добавив 10 кг чистой воды, получили 36-процентный раствор кислоты. Если бы вместо 10 кг воды добавили 10 кг 50-процентного раствора той же кислоты, то получили бы 41-процентный раствор кислоты. Сколько килограммов 30-процентного раствора использовали для получения смеси?

7.Смешали 4 литра 35-процентного раствора вещества с 11 литрами 5-процентного раствора этого же вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

8. При смешивании первого раствора кислоты, концентрация которого равна 20%, и второго раствора этой же кислоты, концентрация которого 50%, получился раствор, содержащий 30% кислоты. В каком отношении были взяты первый и второй растворы?

9. Три экскаватора разной производительности роют котлован. Работа будет выполнена, если каждый проработает 12 часов. Она также будет выполнена, если первый проработает 8 часов, второй — 16, а третий — 10. Сколько часов должен проработать второй экскаватор, чтобы завершить работу, если до него первый проработал 10 часов, а третий — 11?

10 Первая труба пропускает на 15 литров воды в минуту меньше, чем вторая труба. Сколько литров воды в минуту пропускает вторая труба, если резервуар объёмом 100 литров она заполняет на 6 минут быстрее, чем первая труба?

11 Первый рабочий за час делает на 9 деталей больше, чем второй, и выполняет заказ, состоящий из 216 деталей, на 4 часа быстрее, чем второй рабочий, выполняющий такой же заказ. Сколько деталей в час делает первый рабочий?

12 Игорь и Паша красят забор за 3 часа. Паша и Володя красят этот же забор за 4 часа, а Володя и Игорь — за 6 часов. За сколько минут мальчики покрасят забор, работая втроем?

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: заочная

Утверждаю: зав. кафедрой
«30» 10 2024 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Михрячевой Ирины Александровны

(ФИО полностью)

Тема работы Рабочая тетрадь «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике

Утверждена приказом по Университету от «25.12» 20 24 г. № 1351/0

Срок сдачи студентом законченной работы «21» мая 20 25 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
	1. Проанализировать психолого-педагогическую и методическую литературу по проблеме обучения решению текстовых задач в курсе математики основной школы.	Сентябрь- Октябрь 2024	<i>выполнено</i>
	2. Исследовать структуру текстовых задач, этапы их решения и классификацию типов задач, включаемых в ОГЭ по математике.	Ноябрь- Декабрь 2024	<i>выполнено</i>
	3. Провести анализ существующих учебников и учебных пособий по математике для основной школы с точки зрения представленности в них текстовых задач и методики обучения их решению.	Январь 2025	<i>выполнено</i>
	4. Создать рабочую тетрадь «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике.	Февраль- Апрель 2025	<i>выполнено</i>
	5. Оформление работы.	Май 2025	<i>выполнено</i>
	6. Подготовка речи для выступления, разработка презентации	Май 2025	<i>выполнено.</i>

Дата выдачи задания «28» 10 2024г.

Руководитель *М.А. Курявцева* *Курявцева Е.?*
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению
Михриева Ч.А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студента (ки) 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения
Михрячевой Ирины
Александровны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Михрячева Ирина Александровна,

Ф.И.О. студента

студент (ка) 5 курса заочной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Рабочая тетрадь «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

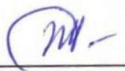
Я ознакомлен (на) с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.



подпись
30.05.25

ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 30.05.25
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР 

подпись Е.Г. Журавлева

ПРОТОКОЛ

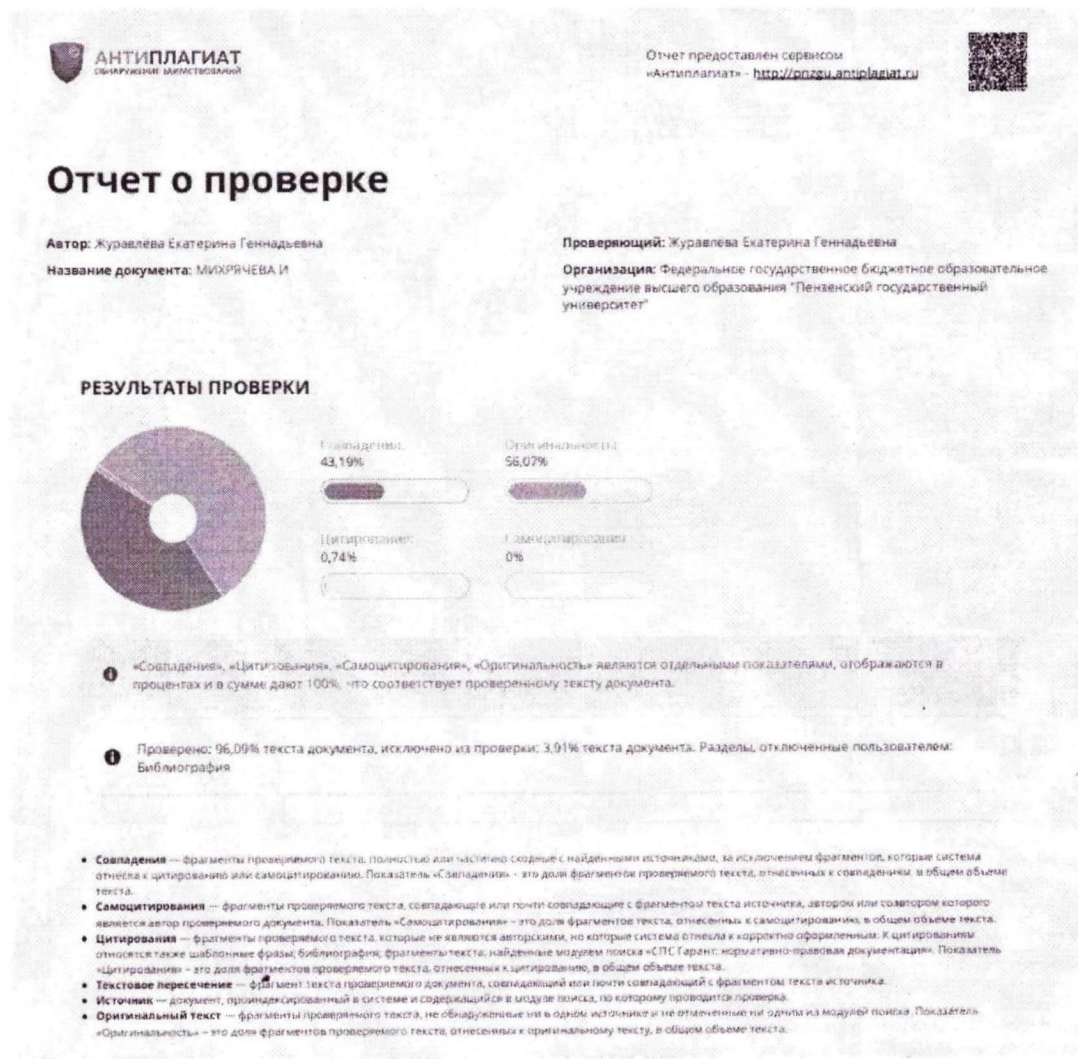
проверки на оригинальность в системе "Антиплагиат.ВУЗ" выпускной квалификационной работы на тему «Рабочая тетрадь «Текстовые задачи» для подготовки к ОГЭ по математике»

студентки 5 курса Михрячевой Ирины Александровны

направления подготовки 44.03.01 "Педагогическое образование"

профиль подготовки "Математика"

Руководитель ВКР Журавлева Е.Г.



ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 148

Тип документа: Не указано

Дата проверки: 30.05.2025 13:01:52

Дата корректировки: Нет

Комментарий: не указано

Количество страниц: 84

Символов в тексте: 92509

Слов в тексте: 13165

Число предложений: 1940

Руководитель ВКР

30.05.25

дата, подпись

Е.Г. Журавлева

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Рабочая тетрадь "Текстовые задачи" для подготовки
к ОГЭ по математике»
студентки Михрячевой Ирины Александровны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»
профиль «Математика», гр. 203ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Михрячевой Ирины Александровны посвящена разработке рабочей тетради "Текстовые задачи".

Для учителей математики не секрет, что решение текстовых задач вызывает у учащихся трудности, в каком бы возрасте они не находились. Трудности связаны элементарно с прочтением текста задачи, у значительного процента школьников средней школы не сформировано умение читать и понимать текст одновременно. Дефицит такого качества чтения делает весьма затруднительным выбор структурированной информации и поиск нужной стратегии при решении, сформированной в виде сюжетного смыслового текста учебной задачи. Текстовые задачи являются традиционным разделом на экзамене по математике. Как правило, основная трудность при решении текстовой задачи состоит в переводе ее условий на математический язык уравнений. Умение переводить текстовую информацию в математическую форму – это основа для решения задач, которая требует от детей внимательности, креативности и логического мышления.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы, приложения.

В ходе выполнения работы были решены следующие задачи: изучены основные виды текстовых задач; проведен анализ школьных учебников по теме исследования; разобраны основные способы решения текстовых задач; изучено содержание ОГЭ по математике; разработана рабочая тетрадь. Рабочая тетрадь «Текстовые задачи» помогает подготовиться к ОГЭ по математике, структурируя материал и предлагая разнообразные задания. Регулярная практика помогает анализировать ошибки и стимулирует интерес к математике, делая учебу более эффективной. Тетрадь удобна для использования как на уроках, так и для самостоятельной работы.

Работа является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован в школе.

Выпускная квалификационная работа Михрячевой И.А. удовлетворяет требованиям, предъявляемым к выпускным работам и заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель, к.п.н., доцент кафедры
«Математическое образование»



Е.Г. Журавлева