МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Математика и суперкомпьютерное моделирование»

Курсовая работа

по дисциплине «Функциональный анализ»

на тему «Интеграл Лебега как функция множества. Теорема Радона-Никодима»

ПГУ С1.1.09.18ВФ1.13

Специальность – 01.05.01 Фундаментальные математика и механика

Профиль подготовки – Вычислительная математика и вычислительная механика

Выполнил студент: _____ Тарасова Я.С.

Группа: 18ВФ1

Руководитель:

к. ф.-м. н., доцент _____ Цупак А.А.

Работа защищена с оценкой _____

Преподаватель _____

Дата защиты _____

2021

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»
Зав. кафедрой МСМ, д.ф-м.н.
_____Ю.Г. Смирнов

ЗАДАНИЕ
на курсовую работу по дисциплине «Функциональный анализ»
Тема: «Интеграл Лебега как функция множества. Теорема Радона-Никодима»

а) Изучить литературу по теме курсовой работы.
б) Изложить реферативно изученный по теме теоретический материал.
в) Самостоятельно придумать и решить задачи по теме курсовой работы.
г) Привести примеры, иллюстрирующие связь темы курсовой работы с другими разделами дисциплины.

Руководитель работы, доцент Цупак А.А.

Оглавление

Введение 4
Глава 1. Интеграл Лебега как функция множества 5
1.1 Понятия интеграла Лебега 5
1.2 Свойства интеграла 9
1.3 Критерии интегрируемости по Лебегу и связь с интегралом Римана 12
1.4 Пространства интегрируемых функций 14
Глава 2. Теорема Радона–Никодима 18
Глава 3. Практические задачи 21
Заключение 23
Список используемой литературы 25

Введение

Данная курсовая работа посвящена Интегралу Лебега как функции множества и теоремы Радона-Никодима.

Цель данной курсовой работы – познакомить тех, кто интересуется математикой с Интегралом Лебега как функции множества и теоремы Радона-Никодима.

Данная курсовая работа состоит из трёх глав:

1) Интеграл Лебега как функция множества;

2) Теорема Радона-Никодима;

3) Примеры решения практических задач.

В первой главе рассматривается понятия интеграла Лебега, его свойства, критерий интегрируемости по Лебегу и пространства интегрируемых функций.

Во второй главе рассматривается теорема Радона-Никодима.

В третьей главе приводятся решённые примеры.

Глава 1. Интеграл Лебега как функция множества

1.1 Понятия интеграла Лебега

Пусть дана мера μ на пространстве X с σ-алгеброй A, в качестве которой может быть взята и A_μ. Задание меры на множествах позволяет естественным образом ввести интеграл на функциях с конечным числом значений, принимаемых на множествах из A, т.е. функциях вида

$$f(x) = c_1 I_{A1}(x) + \ldots + c_n I_{An}(x),$$

где c_i — числа, $A_i \in A$, I_i — индикатор множества A, т.е.

$I_A(x) = 1$ при $x \in A$, $I_A(x) = 0$ при $x \ni A$.

Такие функции называют простыми. Конечно, они не такие уж простые, так как множества A_i могут быть сложными. Не следует путать эти функции со ступенчатыми на отрезки — те еще проще.

Для простой функции f ее интеграл Лебега задается формулой

$$\int_x f d\mu := \int_x f(x)\mu(dx) := \sum_{i=1}^{n} c_i \mu(A_i).$$

Функцию f можно разными способами записать в указанном виде, но легко проверить с помощью аддитивности меры, что указанная сумма от этого не зависит. Поэтому можно использовать представление, в котором все c_i различны (т.е. это все значения, взятые один раз), а множества A_i дизъюнктны (это не предполагается заранее).

Простые функции — функции с конечным числом значений с измеримыми прообразами значений. Уже на этом этапе интеграл Лебега приписывает интеграл неинтегрируемым по Риману функциям, например функции Дирихле (равной 1 на множестве рациональных чисел и 0 на иррациональных). Такая функция проста с точки зрения Лебега, ее интеграл равен нулю. [1]

Естественность такого введения интеграла при заданной мере состоит в том, что желательно иметь интеграл, линейный по f и дающий меру множества на ее индикаторе. Тем самым никак иначе на простых не задать. Но как продолжить интеб́грал на более сложные функции? Здесь очень важной оказывается концепция измеримой функции.

Определение 1. Функция f на пространстве X с σ-алгеброй A называется измеримой относительно A или A-измеримой, если

$\{x: f(x) < c\} \in A$ для всех чисел c.

Здесь очень важен квантор «для всех». Иногда вместо этого говорят «для любого» c, после чего многие думают, что достаточно взять какое-то c, какое им любо. Но нет, надо именно для всякого! [1]

Обратим внимание, что в определении измеримости никаких мер нет, только их потенциальные области определения!

Ниже мы проверим, что для измеримой функции f ее положительная и отрицательная части

$$f^+ = max(f, 0), f^- = max(-f, 0)$$

тоже измеримы.

Теперь введем интеграл Лебега для A-измеримых функций.

Определение 2. Для A-измеримой функции $f \geq 0$ положим

$$\int_x f\, d\mu = sup_\varphi \int_x \varphi d\mu,$$

где sup берется по всем простым функциям $\varphi \leq f$. Функция f называется интегрируемой, если этот sup конечен.

Знакопеременная функция $f = f^+ - f^-$ называется интегрируемой, если таковы f^+ и f^-, а ее интеграл есть разность их интегралов:

$$\int_x f\,d\mu = \int_x f^+\,d\mu - \int_x f^-\,d\mu.$$

Сразу обратим внимание на то, что в этом определении нет ни- каких «если что-то от чего-то не зависит»: здесь сразу никто ни от кого не зависит, интеграл неотрицательной функции всегда есть, либо бесконечный, либо конечный (как сумма неотрицательного ряда), в последнем случае функция объявляется интегрируемой. Для знакопеременной функции отдельно рассматриваются две функции, тоже нет никаких «условностей». [2]

Наконец, сделаем еще один технический шаг, в котором в измеримости все же появляется мера.

Будем говорить, что некоторое свойство точек выполнено почти всюду относительно меры μ или μ -п.в., если множество точек без этого свойства входит в A_μ и имеет меру нуль.

Например, можно сказать, что функция почти всюду определена или почти всюду неотрицательна.

Подмножество $E \subset X$ можно наделить следовой σ-алгеброй $A|E$, состоящей из пересечений $A \cap E$, где $A \in A$. Тем самым E превращается тоже в измеримое пространство.

Определение 3. Будем называть μ-измеримой такие функции f, что f определена вне некоторого множества Z меры нуль и измерима в указанном выше смысле на $X\backslash Z$ относительно $A_\mu|_{X\backslash Z}|$.

Смысл этого шага — разрешить функции не быть определенной на множестве меры нуль, т.е. рассматривать п.в. определенные функции. В

главном определении никаких мер не было, функция должна была быть всюду задана. Теперь это слегка ослабили. При этом не требуется как-то принудительно доопределять не всюду заданную функцию или переопределять, если у нее где-то было бесконечное значение — такие значения не считаем значениями, они возможно лишь на множестве меры нуль. Тем самым всюду равная бесконечности функция у нас не считается функцией. [4]

Определение 4. Причислим к интегрируемым такие μ -измеримые функции, которые интегрируемы в указанном смысле на своей области определения.

В качестве задаче следует проверить, что μ -измеримая функция станет A_μ-измеримой после до определения ее произвольными числовыми значениями (скажем, нулем) на множестве меры нуль, где она не была определена. Значения интеграла и сам факт его существования от этого не зависят.

1.2 Свойства интеграла

Из определения интеграла Лебега следует, что две почти всюду равные функции либо одновременно интегрируемы, либо нет, причем их интегралы совпадают в случае интегрируемости. Это достаточно проверить для неотрицательных функций, когда нужное равенство следует из того, что если φ и ψ — простые функции и $\varphi \leq \psi$ почти всюду, то интеграл от φ не больше интеграла от ψ. [2]

Из определения сразу следует, что если f и g интегрируемы и $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_x f\, d\mu \leq \int_x g\, d\mu.$$

Более того, если $0 \leq f(x) \leq g(x)$, где f и g измеримы и g интегрируема, то определение влечет и интегрируемость f. Из неравенства выше вытекает оценка для ограниченных функций:

$$\left|\int_x f\, d\mu\right| \leq \sup|f(x)|\, \mu(x).$$

Кроме того, из этого же вытекает одно из важнейших неравенств теории интеграла:

Неравенство Чебышева: если f интегрируема, то

$$\mu(x\colon |f(x)| \geq R) \leq \frac{1}{R}\int_x |f| d\mu, \qquad R > 0.$$

В самом деле, $R\mu(x\colon |f(x)| \geq R)$ есть интеграл от простой функции g, равной R на множестве $\{x\colon |f(x)| \geq R\}$ и 0 вне его. При этом $g \leq |f|$.

Еще отметим, что если $f \geq 0$ имеет нулевой интеграл, то $f(x) = 0$ почти всюду. В самом деле, множество $\mu(\{f \geq 1/n\}) = 0$, так как f не меньше

простой функции $n^{-1}I_{f\geq 1/n}$ с интегралом $n^{-1}\mu(\{f \geq 1/n\}) > 0$. При этом $\{f > 0\} = \cup_n n\{f \geq 1/n\}$. Конечно, сказанное следует и из неравенства Чебышева.

Однако при нашем определении интеграла неочевидна его линейность по функции (ниже приведены равносильные определения, при которых линейность более очевидна, а также другие, при которых еще менее очевидна). Линейность будет получена из следующей леммы, которая полезна тем, что при вычислении интеграла позволяет перебирать не все простые функции меньше данной неотрицательной, а взять какую-либо возрастающую к ней последовательность. [3]

Лемма 1. Пусть $f \geq 0$ интегрируема и f_n — простые, причем $f_n(x)$ возрастает к $f(x)$ почти всюду. Тогда интеграл от f есть предел интегралов от f_n.

Доказательство. Переопределив на множестве меры нуль, считаем, что сходимость есть всюду. Интегралы от f_n. возрастают к некоторому числу I не больше интеграла $I(f)$ от f. Проверим, что $I = I(f)$. В противном случае найдется простая функция $\varphi \leq f$, для которой интеграл равен $I + \varepsilon$ с некоторым $\varepsilon > 0$. Заметим, что функции $\varphi_n = min(f_n., \varphi)$ являются простыми и возрастают к φ, ибо для тех x, где $\varphi(x) < f(x)$, при всех достаточно больших n имеем $\varphi_n(x) = \varphi(x)$. Найдется такое $M > 0$,что $|\varphi_n| \leq M, |\varphi| \leq M$. Пусть $\varepsilon > 0$. По теореме Егорова найдется такое измеримое множество X_ε с $\mu(X\backslash X_\varepsilon) < \varepsilon/(4M)$, на котором сходимость равномерна, т.е. $|\varphi(x) - \varphi_n(x)| \leq \varepsilon/(2 + 2\mu(X)$ при $n \geq N$ для некоторого N. Для простых функций линейность интеграла очевидна, поэтому интеграл по X есть сумма интегралов по X_ε и $X\backslash X_\varepsilon$. Интегралы от φ_n и φ по $X\backslash X_\varepsilon$ не больше $\varepsilon/4$. Интегралы по X_ε отличаются менее, чем на на $\varepsilon/2$, что дает противоречие.

Следствие. Если f и g интегрируемы и неотрицательны, то $f + g$ интегрируема и

$$\int_x (f+g)\,d\mu = \int_x f\,d\mu + \int_x g\,d\mu.$$

Выше было показано, что f и g есть пределы возрастающих последовательностей простых функций f_n и g_n соответственно, тогда $f + g$ есть предел $f_n + g_n$, причем такие же соотношения верны и для интегралов.

Закончим этот раздел важной теоремой. [3]

Теорема 1. (Абсолютная Непрерывность Интеграла Лебега) Пусть функция f интегрируема по мере μ. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$\int_A |f|\,d\mu \le \varepsilon$ при $\mu(A) \le \delta$.

1.3 Критерии интегрируемости по Лебегу и связь с интегралом Римана

Удобные критерии интегрируемости по Лебегу формулируются в терминах рядов и интегралов Римана.

Сначала рассмотрим пример. [2]

Пример. Пусть функция f принимает значения c_n на дизъюнктных измеримых множествах A_n. Тогда ее интегрируемость равносильна условию

$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \mu(A_n) < \infty.$

В случае интегрируемости

$\int_x f \, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n| \mu(A_n).$

Доказательство. По определению все сводится к $c_n \geq 0$. Простые функции g_n, равные c_i на A_i при $i \leq n$ и 0 на остальных, возрастают к f, их интегралы — частичные суммы ряда.

Теорема 2. Измеримая функция f интегрируема относительно конечной меры μ в точности тогда, когда

$\sum_{n=1}^{\infty} n\mu(x : n \leq |f(x)| < n + 1) < \infty.$

Это равносильно также условию

$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(x: |f(x)| \geq n) < \infty.$

или же интегральному условию

$\int_0^{\infty} \mu(x: |f(x)| > t) dt < \infty.$

Доказательство. Пусть $g(x) = n$ при $n \leq |f(x)| < n + 1, n \geq 0$. Функция g измерима и $g \leq f \leq g + 1$. Значит, интегрируемость g равносильна интегрируемости f. В силу примера первый ряд есть интеграл от g. Его сходимость равносильна сходимости второго ряда, ибо

$$\mu(|f| \geq n) = \mu(n \leq |f| < n+1) + \mu(n+1 \leq |f| < n+2) + \cdots.$$

Функция $t \to \mu(x: |f(x)| > t)$ убывает, ее несобственный интеграл конечен в точности тогда, когда сходится первый ряд. [3]

Из теории римановского интеграла известно, что функция f на отрезке интегрируема по Риману в точности тогда, когда она ограничена и почти всюду непрерывна.

Однако и без этого факта легко сравнить интегралы Римана и Лебега.

Теорема 3. Если f на $[a, b]$ интегрируема по Риману, то она интегрируема и по Лебегу и оба интеграла равны.

Это же верно, если f имеет абсолютный несобственный интеграл Римана. Однако если f имеет несобственный интеграл Римана, но не абсолютный, то она не интегрируема по Лебегу. [2]

Доказательство. Пусть $[a, b] = [0,1]$. Пусть $n \geq 1$. Поделим отрезок точками $k/2^n$ и положим $f_n(x) = inf_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n})} f(x)$, $F_n(x) = sup_{[k2^{-n},(k+1)2^{-n})} f(x)$. Тогда $f_n \leq f \leq F_n, f_n \leq f_{n+1}, F_{n+1} \leq F_n$. Функции f_n и F_n ступенчатые, их интегралы Римана равны интегралам Лебегам и стремятся к интегралу Римана от f . Функции $g(x) = \lim f_n$ и $G = \lim F_n$ измеримы, причем $g \leq f \leq F$. Кроме того, интеграл Лебега от g есть предел интегралов (Лебега и Римана) от f_n, а интеграл от G есть предел интегралов от F_n, т.е. g и G имеют равные интегралы. Тогда $g = G$ п.в., откуда $f = g = G$ п.в. и верно равенство для интегралов.

1.4 Пространства интегрируемых функций

Линейное пространство X (над R или C; считается, что все знают, что такое линейное пространство, но обычно почти никто не знает точного определения) называется нормированным, если на нем задана функция $x \to \| x \|$, называемая нормой и удовлетворяющая условиям:

1) $\| x \| \geq 0$, причем $\| x \| = 0$ лишь при $x = 0$,

2) $\| \lambda x \| = |\lambda| \| x \|$ для всех чисел λ и $x \in X$;

3) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ — неравенство треугольника.

Нормированное пространство становится метрическим с метрикой

$d(x, y) = \| x - y \|$.

Нормированное пространство называется банаховым (в честь Стефана Банаха — Banach), если оно полно относительно указанной метрики. Например, пространство многочленов не банахово с равномерной нормой $\| f \| = max_{t \in [0,1]} |f(t)|$, а пространство всех непрерывных функций на $[0, 1]$ банахово с этой нормой. [3]

Важный частный случай нормированного пространство — евклидово пространство, т.е. линейное пространство E со скалярным произведением, иначе говоря, с функцией (x, y) на $E \times E$, линейной по каждому аргументу, для которой $(x, y) = (y, x), (x, x) \geq 0$ и $(x, x) = 0$ лишь при $x = 0$. В комплексном случае вместо симметричности $(x, y) = (y, x)$, а линейность только по первому аргументу. Норма евклидова пространства задается формулой

$$\| x \| = \sqrt{(x, x)}.$$

Неравенство треугольника выводится из неравенства Коши–Буняковского

$|(x, y)| \leq \| x \| \| y \|$,

которое в свою очередь вытекает из неравенства $(x + ty, x + ty) \geq 0$ при всех t.

Полное евклидово пространство называется гильбертовым. Пространство многочленов со скалярным произведением

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$$

является неполным евклидовым.

Цель этого параграфа — устроить из пространств L^p банаховы, а из L^2 гильбертово пространство. Пока что они даже не являются линейными (но чтобы это увидеть, надо знать определение линейного пространства, а раз все равно никто не знает, то не будет это проверять), да и с нормой проблема: на $L^1(\mu)$ хотелось бы задать норму формулой

$$\| f \| 1 = \int |f(x)|\mu(dx)$$

но ведь такой интеграл может быть нулевым не только для ненулевой функции, что запрещено условием для нормы. Аналогичная проблема с $\| f \|_p$ на L^p.

Выход такой: вместо $L^p(\mu)$ берется пространство $\mathrm{L^p}(\mu)$ классов эквивалентности из $L^p(\mu)$, когда функции f и g считаются эквивалентными, если равны почти всюду. Легко проверить, что это отношение эквивлентности. Линейные операции над классами напрашиваются: сумма классов с представителями f и g есть класс с представителем $f + g$, где функции просто складываются во всех точках, где обе определены (напомним, что измеримые функции могут быть не определены на множестве меры нуль). Аналогично с умножением на число. Найдя определение линейного пространства в учебнике линейного алгебры, можно проверить, что $L^p(\mu)$ и правда линейное пространство. [3]

Норма на $L^1(\mu)$ задается как $\| f \|_1$ для представителя класса эквивалентности (это не зависит от выбора представителя), на этот раз проблем

нет, так как если интеграл от $|f|$ нулевой, то $f = 0$ почти всюду, т.е. это представитель нуля (с точки зрения L^1, но не L^1, все почти всюду нулевые функции отождествляются с тождественно нулевой). На $L^p(\mu)$ аналогично норма задается как $\| f \|_1$ для представителя класса эквивалентности, причем неравенство треугольника обеспечено неравенством Минковского.

Скалярное произведение в $L^2(\mu)$ задается формулой

$$(f, g)_2 = \int f(x)g(x)\mu(dx)$$

для представителей классов эквивалентности. В комплекном случае

$$(f, g)_2 = \int f(x)\bar{g}(x)\mu(dx).$$

Зачем сопряжение в комплексном случае? А как в C: $zz \geq 0$, но z^2 может быть каким угодно.

Хотя элементы L^p — классы эквивлентности, а не индивидуальные функции, обращаются с ними как с индивидуальными функциями и говорят «рассмотрим функцию f из L^2» вместо длинного «рассмотрим класс эквивлентности из L^2, представителем которого служит функция f».

Отметим, что сходимость f_n к f в L^1 влечет сходимость по мере в силу неравенства Чебышева:

$$\mu(x: |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\int_x |f - f_n| d\mu.$$

Однако сходимость почти всюду из этого не следует.

Отметим, что множество простых функций всюду плотно в L^p: для каждой функции $f \in L^p(\mu)$ есть последовательность простых функций, сходящаяся к f в L^p. Для этого сначала приблизим f ограниченными функциями, взяв $f_n(x) = f(x)$ при $|f(x)| \leq n$, $f_n(x) = n$ при $f(x) > n$ и $f_n(x) = -n$ при $f(x) < -n$ (сходимость в L^p следует из теоремы Лебега). Ограниченные функции можно приближать простыми даже равномерно. [2]

Из доказанного следует, что пространство $L^p(\mu)$ является пополнением множества простых функций (точнее, множества соответствующих классов эквивалентности) по норме $\| f \|_1$. В принципе так можно и определять эти пространства, но такое определение крайне неудачно. Ведь тогда еще надо отдельно доказывать, что элементы пополнения (как абстрактного пополнения метрического пространства) реализуются с помощью функций. Однако это определение можно модифицировать более удачно. Включим его в следующий равносильных определений интегрируемости μ-измеримой функции f:

1) f интегрируема в смысле основного определения;

2) функции $min(f^+, n)$ и $min(f^-, n)$ имеют равномерно ограниченные интегралы, причем интеграл от ограниченной функции g вводится так: g есть равномерный предел простых g_n, тогда их интегралы имеют предел, который и берется в качестве интеграла от g;

3) при некотором $\varepsilon > 0$ сходится ряд $L(\varepsilon) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n\mu(x: \varepsilon n \leq n = -\infty$

$f(x) < \varepsilon n + \varepsilon)$; тогда доказывается, что существует конченый предел $lim\ L(\varepsilon)$, который принимается в качестве интеграла;

4) если $f \geq 0$, то интеграл от f есть несобственный интеграл Римана

$\int_0^{\infty} \mu(x: f(x) > t)dt,$

если он конечен; для знакопеременных отдельно рассматриваются f^+ и f^-;

5) существует последовательность простых функций f_n, которая сходится к f почти всюду и фундаментальна в $L^1(\mu)$. [2]

Глава 2. Теорема Радона–Никодима

Для всякой меры μ (возможно, бесконечной) на A и всякой μ-интегрируемой функции f возникает новая мера

$$\nu(A) := (f \cdot \mu)(A) := \int_A f \, d\mu .$$

Счетная аддитивность следует из теоремы Лебега: если множества $A_n \in A$ дизъюнктны и A — их объединение, то $I_A f = \sum_{n=0}^{\infty} I_{A_n} f$, причем $\sum_{n=0}^{\infty} I_{A_n} |f| \leq |f|$, поэтому данный ряд можно проинтегрировать почленно.

Функция f называется плотность (или плотностью Радона – Никодима) меры $\nu = f \cdot \mu$ относительно меры μ и обозначается символом $d\nu / d\mu$.

Как по мере ν узнать, задается ли она плотностью относительно меры μ? Мы рассмотрим случай неотрицательных мер. [2]

Определение. Мера $\nu \geq 0$ на A называется абсолютно непрерывной относительно меры $\mu \geq 0$ на A, если $\nu(A) = 0$ для всякого множества A с $\mu(A) = 0$.

Ясно, что мера с плотностью относительно μ абсолютно непрерывна относительно μ. Следующая теорема Радона – Никодима утверждает, что верно и обратное.

Ее доказательство основано на теореме Рисса, имеющей и самостоятельный интерес.

Теорема 4. Всякая непрерывная линейная функция l на гильбертовом пространстве H имеет вид

$$l(x) = (x, v)$$

для некоторого $v \in H$. В частности, всякая непрерывная линейная функция l на $L^2(\mu)$ имеет вид

$$l(\varphi) = \int \varphi(t)\psi(t)\,\mu(dt)$$

для некоторого $\psi \in L^2(\mu)$.

Теорема 5. (Теорема Радона – Никодима) Если мера ν абсолютно непрерывна относительно μ, то она задается плотностью относительно μ.

Доказательство. Возьмем новую меру $\lambda = \mu + \nu$. На $L^2(\mu)$ рассмотрим линейную функцию

$$l(\varphi) = \int \varphi\, d\nu.$$

Она корректно определена: так как $\nu \leq \lambda$, то всякая λ-интегрируемая функция оказывается λ-интегрируемой, причем эквивалентные функции дают одинаковые интегралы. По неравенству Коши–Буняковского

$$|l(\varphi)| \leq \| \varphi \|_{L^2(\nu)}) \leq \| \varphi \|_{L^2(\lambda)},$$

что влечет непрерывность l. По теореме Рисса найдется такая функция

$\psi \in L^2(\lambda)$, что

$$\int \varphi\, d\nu = \int \varphi\psi\, d\lambda.$$

Значит,

$$\int \varphi\, d\nu = \int \varphi\psi\, d\nu + \int \varphi\psi\, d\mu,$$

откуда

$$\int \varphi(1-\psi) d\nu = \int \varphi\psi d\mu.$$

Это верно для всех $\varphi \in L^2(\lambda)$. Если взять φ равным индикатору множества $A = \{\psi < 0\}$, то левая часть неотрицательна, а правая неположительна. Значит, обе равны нулю, откуда $\mu(A) = 0$, а тогда $\nu(A) = 0$. Аналогично, взяв $B = \{\psi \geq 1\}$, получаем $\mu(B) = 0$ и потому $\nu(B) = 0$. Итак, $0 \leq \psi < 1$ почти всюду относительно μ и ν. Теперь заметим, что

$$f = \frac{\psi}{1-\psi}$$

интегрируема относительно μ. Действительно, функции

$$\varphi_n = (1 - \psi)^{-1} I_{\{\psi \le 1-1/n\}}$$

ограничены и стремятся к $(1 - \psi)^{-1}$. Для них имеем $\varphi_n = (1 - \psi) I_{\{\psi \le 1-1/n\}}$, $\varphi_n \psi = f I_{\{\psi \le 1-1/n\}}$, откуда

$$\nu(\{\psi \le 1 - 1/n\}) = \int f I_{\{\psi \le 1-1/n\}} \, d\mu,$$

т.е. правые части равномерно ограничены, что по теореме Беппо Леви дает μ-интегрируемость f, ибо множества $\{\psi \le 1 - 1/n\}$ возрастают ко всему пространству. Теперь то же самое можно проделать с $\varphi_n I_A = (1 - \psi)^{-1} I_{\{\psi \le 1-1/n\}}$ для $A \in A$. Это даст

$$\nu(A \cap \{\psi \le 1 - 1/n\}) = \int f I_{\{\psi \le 1-1/n\}} \, d\mu$$

что при $n \to \infty$ дает нужное равенство

$$\nu(A) = \int_A f d\mu$$

означающее, что $f = d\nu/d\mu$.

Из доказательства можно извлечь более сильное утверждение: если даны две меры $\mu \ge 0$ и $\nu \ge 0$, то ν можно разложить в сумму $\nu = \nu_1 + \nu_2$, где мера ν_1 абсолютно непрерывна относительно μ, а мера ν_1 взаимно сингулярна с мерой μ, т.е. полностью сосредоточена на некотором множестве $A_0 \in A$ с $\mu(A_0) = 0$. Конечно, это следует и из самой теоремы: записав $\mu = f \cdot \lambda, \nu = g \cdot \lambda$, где $\lambda = \mu + \nu$, в качестве A_0 возьмем множество $\{f = 0\} \cap \{g > 0\}$. [3]

Глава 3. Практические задачи

№1. Будет ли измерима функция $f(x) = \begin{cases} n, & x = \frac{m}{n} \in Q, (m,n) = 1, \\ & 1, x \in R \backslash Q \end{cases}$?

Решение. Образом этой функции является множество всех натуральных чи-сел с нулем. Если в качестве подмножества образа взять какое-то множество натуральных чисел, то его прообразом будет являться какое-то подмножество рациональных чисел, имеющих меру ноль. В силу полноты меры Лебега любое такое подмножество имеет также нулевую меру. Если в качестве подмножества образа взять точку 0, то его прообразом будет являться все множество иррациональных чисел, которое измеримо. Если в качестве подмножества образа взять точку ноль, и вдобавок еще какое-то подмножество натуральных чисел, то прообраз будет измерим как объединение измеримого множества и множества меры ноль.

Таким образом, эта функция является измеримой. [1]

№2. Привести пример ограниченной функции, разрывной в каждой точке отрезка $[a, b]$ и интегрируемой по Лебегу. Будет ли эта функция интегрируема по Риману?

Решение. Это — функция, равная единице в каждой алгебраической точке отрезка $[a, b]$, и равная нулю в каждой трансцендентной точке этого же отрезка. Она не будет интегрируема по Риману, так как нижние суммы Дарбу будут равны нулю, а верхние — единице, но будет интегрируема по Лебегу, так как число алгебраических чисел счетно, следовательно, их мера равна нулю, и функция является ограниченной и измеримой. [1]

№3. Существует ли интеграл Лебега на $[2, +\infty)$ от функции $f\ (x) = \frac{1}{x ln^2 x}$?

Решение. Так как функция положительна и непрерывна на всей области определения, для существования интеграла Лебега необходимо и достаточно сходимости соответствующего несобственного интеграла Римана:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{xln^2x} = \int_2^{\infty} \frac{d(\ln x)}{ln^2x} - \frac{1}{ln\,x}|_2^{+\infty} = ln2,$$

следовательно, интеграл Лебега существует и равен $ln\ 2$. [3]

Заключение

В данной курсовой работе были рассмотрены следующие темы: интеграл Лебега и теорема Радона-Никодима, показано решение некоторых задач.

Все эти темы относятся к большому разделу высшей математики «Функциональный анализ», который наряду с другими является основой высшей математики.

Функциональный анализ, часть современной математики, главной задачей которой является изучение бесконечномерных пространств и их отображений. Наиболее изучены линейные пространства и линейные отображения. Для Ф. а. характерно сочетание методов классического анализа, топологии и алгебры. Абстрагируясь от конкретных ситуаций, удаётся выделить аксиомы и на их основе построить теории, включающие в себя классические задачи как частный случай и дающие возможность решать новые задачи. Сам процесс абстрагирования имеет самостоятельное значение, проясняя ситуацию, отбрасывая лишнее и открывая неожиданные связи. В результате удаётся глубже проникнуть в сущность математических понятий и проложить новые пути исследования.

Развитие Ф. а. происходило параллельно с развитием современной теоретической физики, при этом выяснилось, что язык Ф. а. наиболее адекватно отражает закономерности квантовой механики, квантовой теории поля и т.п. В свою очередь эти физические теории оказали существенное влияние на проблематику и методы Ф. а.

На мой взгляд данная курсовая работа будет интересна всем, кто интересуется математикой.

Список используемой литературы

1. ТКА [Электронный ресурс]: методичка Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова: http://www.tka4.org/materials/study/ (дата обращения: 07.06.2021).

2. Math.Phys [Электронный ресурс]: КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ: Теорема Радона: http://math.phys.msu.ru/data/151/lecII03a04.pdf (дата обращения: 07.06.2021).

3. Math.Hse [Электронный ресурс]: Конспект Лекций: Мера И Интеграл. Лектор В. И. Богачев: https://math.hse.ru/data/2020/12/28/1579678380/Matan20-lectures.pdf (дата обращения: 07.06.2021).

4. Шевцов Г.С. Линейная алгебра: Учеб. пособие. - Г.С. Шевцов/М.: Гардарики, 1999.