МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Методические особенности изучения тригонометрических уравнений и неравенств»

Студент 06.05.25 Савинкина Ангелина Руслановна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель 06.05.25 Никитин Н.Д.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр 23.06.25 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 02.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой 2.06.25 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой 4 (хор) (протокол заседания ГЭК от 26.06.25 № 7)

Секретарь ГЭК 26.06.25 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ..... 3

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ 5

1.1 Тригонометрические уравнения и неравенства в школьном курсе алгебры..... 5

1.2 Особенности изучения тригонометрии в школе..... 6

1.3 Содержание школьного курса тригонометрических уравнений и неравенств и его анализ..... 9

1.4 Методы решения тригонометрических уравнений..... 17

1.5 Методы решения тригонометрических неравенств..... 25

1.6 Тригонометрические уравнения в задачах ЕГЭ..... 34

ГЛАВА 2 ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЙ ПОДХОД В ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ НА ФАКУЛЬТАТИВНОМ КУРСЕ..... 39

2.1 Виды и формы дифференцированного обучения. Теория организации дифференцированного подхода к обучению..... 39

2.2 Методические рекомендации по организации дифференцированного подхода при обучении решению тригонометрических уравнений и неравенств..... 41

2.3 Факультативный курс по теме «Решение тригонометрических уравнений и неравенств»..... 43

ЗАКЛЮЧЕНИЕ..... 52

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ..... 53

ПРИЛОЖЕНИЕ..... 56

ВВЕДЕНИЕ

Ни для кого не секрет, что интерес ученика к обучению напрямую зависит от того, насколько успешно или неуспешно он осваивает школьную программу. Когда в виду каких-то обстоятельств ученик испытывает трудности или неудачи в процессе своего обучения, то вместе с этим падает интерес и мотивация к обучению в целом.

Тригонометрия по праву является одной из самых сложных тем всего курса математики старшей школы. Умения и навыки, которые формируются при изучении темы «Тригонометрия» применяются к решению огромного числа задач теоретического и прикладного характера, а так же эти навыки могут и должны быть использованы при сдаче единого государственного экзамена по математике. Однако, тенденция последних лет показывает, что время выделяемое для изучения данного раздела математики постоянно сокращается, что делает освоение данной темы учениками еще более затруднительным, в особенности это касается «слабых» учеников, которым требуется больше времени и внимания для усвоения данной темы. Ученики, которые не усвоили азы решения тригонометрических уравнений и неравенств, как правило теряют интерес и мотивацию не только к дальнейшему изучению данной темы, но и к изучению математики в целом. Поскольку данный раздел широко представлен в содержании основного государственного экзамена, то такие ученики рискуют потерять достаточно большое количество баллов.

Актуальность темы: как показывает практика, у подавляющего большинства школьников возникают трудности при изучении блока тригонометрии в старшей школе. Это связано со многими причинами, среди которых большой объем материала, высокая степень абстрактности изучаемых понятий и недостаточное количество учебного времени, которое отводится под изучение данного раздела. В связи с этим многие учителя вынуждены искать другие пути обучения детей.

Объект исследования: процесс обучения математики.

Предмет исследования: методика формирования умений и навыков решения тригонометрических уравнений и неравенств.

Цель исследования: разработка факультативного курса «Решение тригонометрических уравнений и неравенств».

Задачи исследования:

1. Определить особенности преподавания тригонометрии в школах.
2. Определить место и роль дифференцированного подхода в обучении при изучении тригонометрии.
3. Разработать факультативный курс по теме «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» на основе дифференцированного подхода.

Практическая значимость работы заключается в том, что разработанный факультативный курс может быть использован учителями старших классов при изучении темы «Тригонометрические уравнения и неравенства».

Структура работы: данная работа состоит из введения, двух глав, заключения и приложений. В введении отражены актуальность, цели и задачи исследования, а также его практическая значимость. В первой главе подробно проанализированы учебники алгебры, которые используются в школах, описаны методы решения тригонометрических уравнений и неравенств, а также разобраны задания, которые встречаются в ЕГЭ и часты ошибки. Во второй главе подробно описан дифференцированный подход в обучении и его использование на уроках математики, в частности при изучении раздела тригонометрия. Так же здесь представлена программа факультативного курса, технологические карты двух уроков данного курса и самостоятельные работы.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

1.1 Тригонометрические уравнения и неравенства в школьном курсе алгебры

В настоящее время тема «Тригонометрия» занимает важное место в школьном курсе математики. Данный раздел изучается преимущественно в старшей школе, ведь для успешного усвоения этого курса, необходимо иметь достаточно знаний из программы основной школы. Проанализировав школьные учебники математики за 10 класс, можно сделать вывод, что тема «Тригонометрические уравнения» изучается после тем: «Тригонометрические выражения и их преобразования», «Графики тригонометрических функций и их свойства».

Остановимся подробнее на конкретных учебниках и попробуем их проанализировать. В учебнике Колягина Ю. М. в начале изучения темы «Тригонометрия» большое внимание уделяется тригонометрическим формулам и только после этого начинается изучение тригонометрических уравнений. В начале ученики знакомятся с уравнениями вида $\sin x = a$, $\cos x = a$, $\mathrm{tg}\, x = a$. Здесь же появляются понятия арксинус, арккосинус и арктангенс. Далее учеников знакомят с различными приёмами решения тригонометрических уравнений: метод замены неизвестного и разложение на множители, метод оценки левой и правой частей уравнения. Далее идёт изучение систем тригонометрических уравнений. Неравенства изучаются в самом конце, ведь решение каждого неравенства сводится к решению уравнения, поэтому внимания им уделяется значительно меньше, чем уравнениям.

Следующий учебник Мерзляк А. Г. Изучение темы начинается так же с тригонометрических формул. В отличии от учебника Колягина Ю. М. все формулы помещаются в один параграф и изучаются менее подробно. Здесь упор делается в основном именно на запоминание формул, а не на их вывод. Далее

изучаются тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \mathrm{tg}\, x$, $y = \mathrm{ctg}\, x$ и их графики. Только после этого ученики начинают изучать тригонометрические уравнения и неравенства, которые объединены в один параграф. Сначала вводится определение обратных функций – арксинус, арккосинус и арктангенс, а затем ученики переходят к решению простейших тригонометрических уравнений и затем неравенств. В отличии от учебника Колягина Ю. М., в данном учебнике не разбираются различные приемы решения тригонометрических уравнений, предложенные задания носят базовый характер.

Рассмотрим еще один учебник А. Г. Мордковича. Изучение данного раздела начинается со свойств тригонометрических функций. Данная тема разбирается очень подробно и в отличии от предыдущих учебников сразу заметен «продвинутый» уровень. Далее изучаются тригонометрические уравнения и неравенства и методы их решений. В отличии от учебников Мерзляка А. Г. и Колягина Ю. М. тригонометрические формулы изучаются в конце данного раздела и носят более подробный характер. В самом конце, после изучения всех формул, автор предлагает вернутся к уравнениям и неравенствам и использовать полученные знания на практике. Все эти задания представлены уже на повышенном уровне.

Анализ представленных учебников дает понять, что количество часов, отводимых для изучения данной темы и объем материала несопоставимы. В связи с этим, учащиеся вынуждены заучивать, а не разбираться в сути. Всё это приводит к появлению таких проблем, как отсутствие мотивации к изучению нового материала, трудности в изучении последующих тем данного раздела.

1.2 Особенности изучения тригонометрии в школе

Тригонометрия – один из самых важных разделов математики без которого сложно представить современный курс школьной математики. Этот

раздел имеет огромное значение не только для математики, но и для физики, астрономии, инженерии и многих других наук.

Изучение тригонометрии в школе является важным этапом в формировании математической культуры учащихся, развитии их логического мышления и способности решать прикладные задачи. Однако этот раздел часто вызывает большие трудности у учеников из-за своей абстрактности и необходимости оперировать сложными понятиями.

Тригонометрия, как правило, появляется в 9-10 классах, когда ученики уже обладают достаточным набором знаний и умений по алгебре и геометрии. Изучении тригонометрии делится на несколько этапов:

1. Начальный этап (8-9 класс). Первое знакомство с основными тригонометрическими понятиями – синус, косинус, тангенс, котангенс острого угла прямоугольного треугольника. На этом этапе школьники учатся решать задачи на нахождение сторон и углов треугольника используя само определение тригонометрических функций. Впервые вводится основное тригонометрическое тождество и формула нахождения тангенса острого угла через значения синуса и косинуса.
2. Основной этап (10 класс): Самый важный этап в изучении тригонометрии, где школьники знакомятся с тригонометрическими функциями произвольных углов, впервые строят тригонометрическую окружность, начинают использовать радианную систему измерения углов. Успешность усвоения данного этапа положит основу для дальнейшего изучения и понимания тригонометрии. Данный раздел отличается большим количеством информации, формул и различных свойств, которые нужно не только заучить, но и осознать. Как правило у большинства школьников возникают проблемы с пониманием данного материала.
3. Углубленный этап (11 класс). На этом этапе школьники знакомятся с более сложными задачами, включая тригонометрические уравнения и неравенства, а также применение тригонометрии в задачах с параметрами

и стереометрии. Данный этап требует от школьников глубокого понимания предмета и высокую степень абстрактного мышления.

Тригонометрия считается одним из самых сложных для понимания разделов школьной математики. Это связано со следующими особенностями.

1. Большая абстрактность понятий: Большинство тригонометрических понятий (синус, косинус, тангенс и т.д.) сложно представить наглядно, а учителю сложно это показать. В связи с этим, ученики испытывают ряд трудностей с понимание, что такое радианная мера угла или как взаимосвязаны тригонометрическая окружность и тригонометрические функции.
2. Большое количество информации, которую нужно не просто выучить, но и понять. Раздел тригонометрии включает в себя большое количество формул (формулы приведения, сложения и вычитания, основные тождества). Впервые столкнувшись с таким большим количеством абстрактной информации, школьники «теряются». Для них сложно не только запомнить эти формулы, но и понять, каким образом применять эти формулы для решения конкретных задач.
3. Сложность предлагаемых задач. Задачи данного раздела требуют знаний и умений полученных школьниками за все годы изучения математики в школе, а решение задач требует комплексного подхода (умение решать уравнения, неравенства, умение делать алгебраические преобразования). Поэтому данный раздел может вызвать затруднения у тех учеников, у которых были «пробелы» в знаниях из основной школы.

В связи с этим учителю важно использовать различные подходы, которые могли бы помочь школьникам более успешно освоить данный материал. С этой задачей поможет справится использование различных графиков, анимаций и интерактивных моделей. Например, построение графиков синуса и косинуса на единичной окружности позволит наглядно показать, как изменяются значения функций в зависимости от угла. Большую роль играет систематизация знаний.

Важно систематизировать изучение данного раздела, выделяя основные блоки: определения и свойства функций, основные тождества и формулы, методы решения уравнений и неравенств. Важна и практическая направленность. Решение задач с реальным контекстом помогут учащимся осознать важность этой темы и повысить их мотивацию к изучению.

Подводя итог можно сделать вывод, что учитель играет большую роль в успешном освоении тригонометрии. От успешности выбора методов и подходов к обучению тригонометрии будет зависеть качество знаний учеников. Поэтому, учителям необходимо проявить свой творческий потенциал, для того чтобы преподаваемый материал не стал скучным и однообразным, а наоборот, вызвал интерес к этому разделу математики и повысил мотивацию к его дальнейшему изучению.

1.3 Содержание школьного курса тригонометрических уравнений и неравенств и его анализ

Для того, чтобы проанализировать содержание школьного курса тригонометрических уравнений и неравенств, нам необходимо обратиться к федеральной рабочей программе по математике для 10-11 классов, которая в свою очередь делится на базовый и углубленный уровень.

Рассмотрим базовую программу по математике за 10 класс. В разделе «Числа и вычисления» школьники должны познакомится с понятием синус, косинус, тангенс числового аргумента, а также арксинус, арккосинус, арктангенс числового аргумента. В разделе «Уравнения и неравенства» ученики должны познакомиться с преобразованием тригонометрических выражений и основными тригонометрическими формулами, затем изучаются тригонометрические уравнения. В разделе «Функции и графики» школьники должны изучить тригонометрическую окружность и определение тригонометрической функции числового аргумента.

В базовой программе за 11 класс ученикам предлагается изучить тригонометрические неравенства в разделе «Уравнения и неравенства».

В разделе «Функции и графики» школьникам предлагается познакомиться с тригонометрическими функциями и их свойствами.

Предметные результаты, которых должны достигнуть школьники за 10-11 класс обучаясь по базовой программе.

- Оперировать понятиями: синус, косинус и тангенс произвольного угла, использовать запись произвольного угла через обратные тригонометрические функции.
- Выполнять преобразования тригонометрических выражений и решать тригонометрические уравнения.
- Находить решения простейших тригонометрических неравенств.

Далее рассмотрим углубленную программу по математике за 10 класс. В разделе «Числа и вычисления» школьникам предлагается познакомиться с синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом числового аргумента, а также арксинусом, арккосинусом, арктангенсом и арккотангенсом числового аргумента. В отличии от базовой рабочей программы, в углубленном уровне появляется котангенс и арккотангенс. В разделе «Уравнения и неравенства» ученики должны изучить основные тригонометрические формулы, преобразование тригонометрических выражений и тригонометрические уравнения. В разделе «Функции и графики» ученики знакомятся с тригонометрической окружностью и определением тригонометрических функций числового аргумента.

В углубленной рабочей программе за 11 класс ученикам предлагается научиться отбирать корни тригонометрических уравнений с помощью числовой окружности, а также научиться решать тригонометрические неравенства.

Школьники за 10-11 класс обучаясь по углубленной рабочей программе должны достигнуть следующие результаты:

- Свободно оперировать понятиями: синус, косинус, тангенс, котангенс числового аргумента.
- Оперировать понятиями: арксинус, арккосинус и арктангенс числового аргумента.
- Применять основные тригонометрические формулы для преобразования тригонометрических выражений.
- Свободно оперировать понятием: тригонометрическое уравнение, применять необходимые формулы для решения основных типов тригонометрических уравнений.
- Свободно оперировать понятиями: тригонометрическая окружность, определение тригонометрических функций числового аргумента.
- Осуществлять отбор корней при решении тригонометрического уравнения.
- Свободно оперировать понятием тригонометрическое неравенство, применять необходимые формулы для решения основных типов тригонометрических неравенств.
- Свободно оперировать понятием: график тригонометрических функций.

Далее предлагаю рассмотреть тематическое планирование для базового и углубленного уровня, которое предлагается федеральной рабочей программой.

Таблица 1 – Тематическое планирование для 10 класса (базовый уровень).

Название раздела	Количество часов	Основное содержание
Тригонометрические выражения и уравнения	22	Синус, косинус и тангенс числового аргумента. Арксинус, арккосинус и арктангенс числового аргумента. Тригонометрическая окружность, определение тригонометрических функций числового аргумента.

Таблица 2 – Тематическое планирование для 11 класса (базовый уровень).

Название раздела	Количество часов	Основное содержание
Тригонометрические функции и их графики. Тригонометрические неравенства	9	Тригонометрические функции, их свойства и графики. Примеры тригонометрических неравенств

Таблица 3 - Тематическое планирование для 10 класса (углубленный уровень).

Название раздела	Количество часов	Основное содержание
Тригонометрические выражения и уравнения	22	Синус, косинус, тангенс и котангенс числового аргумента. Арксинус, арккосинус и арктангенс числового аргумента. Тригонометрическая окружность, определение тригонометрических функций числового аргумента. Основные тригонометрические формулы. Преобразование тригонометрических выражений.

Таблица 4 - Тематическое планирование для 11 класса (углубленный уровень).

Название раздела	Количество часов	Основное содержание
Графики тригонометрических функций.	14	Тригонометрические функции, их свойства и графики. Отбор корней тригонометрических уравнений с

Продолжение таблицы 4

Тригонометрические неравенства		помощью тригонометрической окружности. Решение тригонометрических неравенств

Делая вывод, мы приходим к тому, что не все учебники математики, соответствуют требованиям федеральной рабочей программы по математике. Поэтому количество часов и порядок тем может отличаться. Несмотря на это, порядок изучения основных разделов тригонометрии остается неизменным: изучение основных тригонометрических понятий, изучение формул, решение тригонометрических уравнений, изучение тригонометрических неравенств.
В рабочих программах есть разделение на профили изучения математики, но нет разделения по уровням, следовательно, эту работу должен выполнять учитель.

Для полного понимания необходимо проанализировать рабочие программы представленных авторов и понять, какое количество часов для изучения конкретной темы необходимо для ее успешного усвоения по мнению каждого автора учебника.

Начнем с примерного поурочного планирования базового уровня Колягина Ю. М. На изучение основных тригонометрических уравнений $\sin x = a$, $\cos x = a$ выделяется по 3 часа для каждого. Для уравнения вида $\mathrm{tg}\, x = a$ выделяется 2 часа, при этом уравнение с котангенсом не рассматривается. Далее рассмотрим методы решения тригонометрических уравнений. Для решения уравнений методом замены переменной отводится 2 часа, методом разложения на множители 1 час. На рассмотрение однородных тригонометрических уравнений выделяется 3 часа. Далее идет урок обобщения и систематизации знаний, а затем контрольная работа. Всего получается 16 часов для изучения представленных тем.

Рассмотрим следующего автора Мордковича А. Г. В отличии от Колягина А. Ю. на изучение простейших тригонометрических уравнений, в том числе

уравнения с котангенсом отводится по 2 часа на каждое из уравнений. На метод замены переменной и разложения на множители выделяется 2 часа. Для изучения однородных тригонометрических уравнений предполагается 3 часа. В отличии от первого учебника, тут не предусмотрен урок обобщения и систематизации знаний, зато есть отдельный урок для анализа контрольной работы. В итоге получаем 17 часов на изучение всего раздела.

Далее учебник Мерзляка А. Г. Здесь, количество часов совпадает с учебником Колягина Ю. М. за исключением однородных тригонометрических уравнений и метода разложения на множители для которых выделяется 2 часа.

Анализируя представленную выше информацию, можно сделать вывод, что количество часов выделяемых для изучения простейших тригонометрических уравнений почти совпадает у всех авторов. Далее программы предлагают изучить различные методы решения этих уравнений. Для изучения метода замены переменной отводится по 2 часа у каждого из авторов. Для однородных уравнений выделяется больше всего времени, это обусловлено тем, что однородные уравнения могут быть представлены в разных видах: 1-й и 2-й степени, неполные квадратные уравнения. Метод разложения на множители занимает от 1 до 2 часов, это объясняется тем, что авторы отводят некоторое время на отработку тригонометрических формул и различные преобразования.

Далее рассмотрим программы профильного уровня тех же авторов по темам «Тригонометрические уравнения и неравенства». Начнем с учебника Колягина Ю. М. Для изучения простейших тригонометрических уравнений вида $\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a$ выделяется по 3 часа на изучение каждого из уравнений. Несмотря на профильный уровень представленной программы, уравнение вида $\operatorname{ctg} x = a$ не рассматривается на отдельном уроке. Перейдем к методам решения тригонометрических уравнений. Здесь появляются новые способы решения, в отличии от программы базового уровня.

Для изучения однородных уравнений и метода замены переменной отводится по 2 часа. Метод разложения на множители и метод оценки левой и правой

части требуют по 1 часу. Метод вспомогательного угла – 1 час. Присутствует урок обобщения и систематизации знаний, а также урок, выделяемый для контрольной работы. В итоге получаем 21 час для изучения данной темы.

Следующий по списку – учебник Мордковича А. Г. Для изучения простейших уравнений и неравенств отводится 4 часа суммарно. Метод разложения на множители, метод замены переменной и метод вспомогательного угла изучаются 1 час каждый. Однородные тригонометрические уравнения изучаются 2 часа. В отличии от предыдущего учебника, здесь не представлен метод оценки левой и правой части, а также отсутствует урок обобщения и систематизации знаний. При этом рассматривается метод универсальной подстановки, который отсутствует в предыдущем учебнике. Особенностью данного учебника является то, что здесь выделяется 5 часов для решения тригонометрических уравнений с применением формул (синус, косинус, тангенс, котангенс суммы и разности двух аргументов, формулы приведения, формулы двойного угла и т.д.). В итоге получаем 16 часов для изучения данного раздела.

Далее учебник Мерзляка А. Г. Для изучения простейших тригонометрических уравнений вида $\sin x = a, \cos x = a$ отводится по 3 часа для каждого. Уравнение вида $\mathrm{tg}\, x = a$ изучается 1 час. Как и в учебнике Колягина Ю. М. уравнение с котангенсом не рассматривается на отдельном уроке, несмотря на профильный уровень учебника. Метод замены переменной, метод разложения на множители, метод оценки левой и правой части и однородные тригонометрические уравнения изучаются 4 часа суммарно, по 1 часу на каждый. Для решения простейших тригонометрических неравенств выделяется 2 часа. В отличии от двух предыдущих учебников, для обобщения и систематизации знаний отводится 2 часа. Метод универсальной подстановки не рассматривается. В итоге получаем 19 часов для изучения данного раздела.

Подводя итог и проанализировав учебники профильного и базового уровня можно заметить, что время для изучения некоторых тем в профильном уровне значительно увеличилось по сравнению с базовым. Несмотря на это, оба

уровня подготовки имеют много общего, например, порядок изучения некоторых тем. Данный раздел начинается с изучения простейших тригонометрических уравнений, в то время как учебник Мордковича А. Г. предлагает нам совместное изучения тригонометрических уравнений и неравенств. На изучение этих двух тем отводится до 9 часов в учебнике Мордковича А. Г., в учебниках Колягина Ю. М и Мерзляка А. Г. по 2 часа для изучения тригонометрических неравенств, и изучаются они в самом конце, отдельно от тригонометрических уравнений, после изучения всех основных методов решения уравнений.

Самое большое количество времени все представленные авторы выделяют на изучение однородных тригонометрических уравнений, это обусловлено тем, что данные уравнения имеют несколько способов решения.

Во всех учебниках предусмотрен урок обобщения и систематизации знаний, который проводится непосредственно перед контрольной работой. В учебнике Мерзляка А. Г. на это уделяется 2 часа, в то время как у других авторов по 1 часу.

Учебник Мордковича А. Г. предлагает ученикам изучить метод решения тригонометрических уравнений, который отсутствует в других учебниках – метод универсальной подстановки. Это является большим преимуществом данного учебника, поскольку знание большого количества методов решения тригонометрических уравнений увеличивает шансы школьников на успешное выполнение того или иного задания.

Во всех трёх учебниках представленных авторов изучение тригонометрических уравнений начинается с уравнения вида $\cos x = a$, следом изучается уравнение вида $\sin x = a$. Формулы корней данных уравнений легко выводятся и их легко объяснить с помощью наглядных пособий.

Во всех учебниках процесс вывода корней данных тригонометрических уравнений описывается достаточно подробно с помощью единичной окружности.

Существенные отличия появляются в изучении уравнений вида $\mathrm{t}g\,x = a, \mathrm{ctg}\,x = a$. В учебнике Мордковича А. Г. изучение данной темы начинается с вывода общих формул этих уравнений, в то время как у двух других авторов выводится только формула $\mathrm{t}g\,x = a$. Изучение уравнений с котангенсом выносится на самостоятельное изучение ученикам. Получив формулу нахождения корней для уравнения с тангенсом, школьники смогут самостоятельно вывести формулу для котангенса дома, следуя алгоритму получения формулы для первого уравнения, которое они изучили в школе.

После того, как ученики научились решать простейшие тригонометрические уравнения, авторы переходят к различным методам решений уравнений, которые имеют более сложный вид. Все авторы рассматривают однородные тригонометрические уравнения, однако более подробный алгоритм решения этих уравнений дает только учебник Мордковича А. Г.

При изучении метода вспомогательного угла и метода приведения уравнения к однородному все авторы предлагают для рассмотреть уравнение вида $A\sin x + B\cos x = C$ и его решение с помощью предложенных методов. Однако в учебнике Мордковича А. Г. рассматривается и частный случай метода вспомогательного угла – метод универсальной подстановки. Другие учебники данный метод решения тригонометрических уравнений не рассматривают.

Далее все авторы предлагают уравнения, которые решаются с помощью тригонометрических формул, которые школьники изучили до уравнений (формулы приведения, двойного угла, суммы и разности двух аргументов и т.д.).

1.4 Методы решения тригонометрических уравнений

При изучении тригонометрических уравнений, в начале рассматриваются простейшие тригонометрические уравнения, ведь решение более сложных уравнений будет сводиться именно к решению простейших.

Простейшие тригонометрические уравнения имеют вид:

$\sin x = a$, где $|a| \leq 1, x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \epsilon Z;\ -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin a \leq \frac{\pi}{2}$

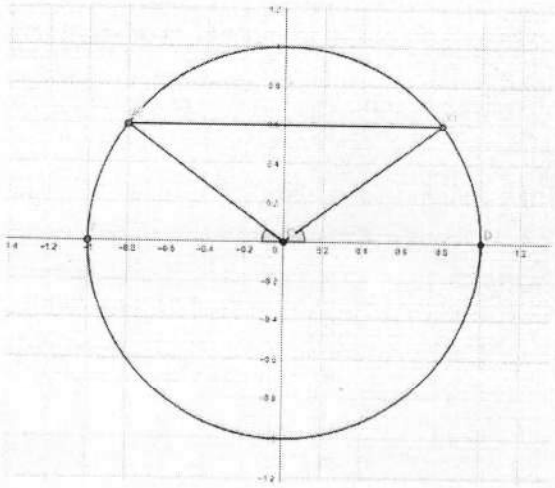


Рисунок 1 –Иллюстрация к решению уравнения вида $sin\, x = a$

Далее рассмотрим частные случаи решения уравнения $sin\, x = a$:

1) $sin\, x = 0: x = \pi k, k \in Z;$

2) $sin\, x = 1: x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z;$

3) $sin\, x = -1: x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$

Далее рассмотрим уравнение вида $\cos x = a$, оно имеет вид:

$\cos x = a$, где $|a| \leq 1, x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \epsilon Z; 0 \leq \arccos a \leq \pi$

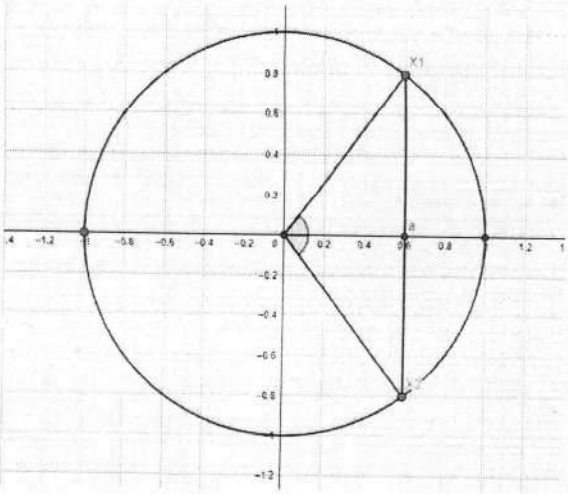


Рисунок 2 –Иллюстрация к решению уравнения вида $cos\, x = a$

Далее рассмотрим частные случаи решения уравнения $\cos x = a$:

1) $\cos x = 0: x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z;$

2) $\cos x = 1: x = 2\pi k, k \in Z;$

3) $\cos x = -1: x = \pi + 2\pi k, k \in Z.$

Рассмотренные уравнения достаточно просты для усвоения, поскольку их легко представить графически и наглядно показать решения на тригонометрической окружности.

Далее рассмотрим уравнение вида $\mathrm{t}g\,x = a$ и его графическое изображение. В общем виде оно имеет вид: $x = \mathrm{arctg}\,a + \pi k, k \epsilon Z$.

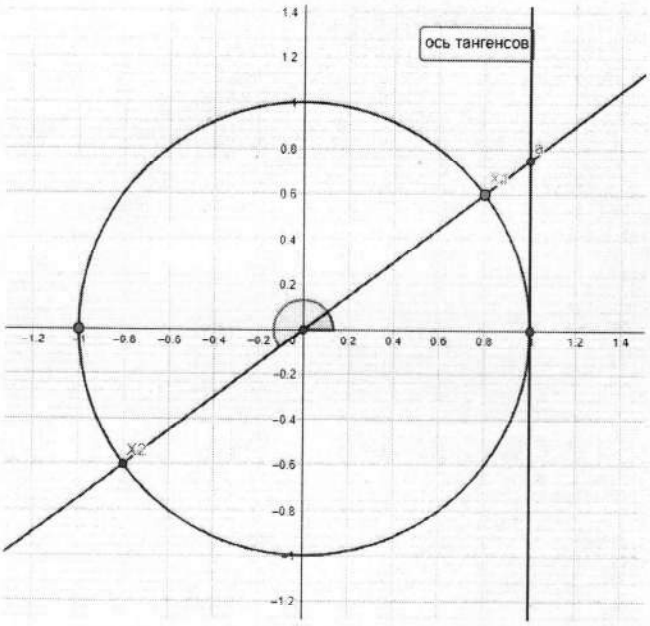


Рисунок 3 –Иллюстрация к решению уравнения вида $tg\,x = a$

Рассмотрим частные случаи решения уравнения данного вида.

1) $tg\,x = 0: x = \pi k, k \in Z$;

2) $tg\,x = 1: x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

3) $tg\,x = -1: x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Данное уравнение усваивается школьниками хуже, поскольку графическая интерпретация уравнения менее очевидна по сравнению с уравнениями синуса и косинуса.

Перейдем к последнему виду простейших тригонометрических уравнений $\mathrm{ct}g\,x = a$. Общий вид данного уравнения: $x = \mathrm{arcctg}\,a + \pi k, k \in Z$

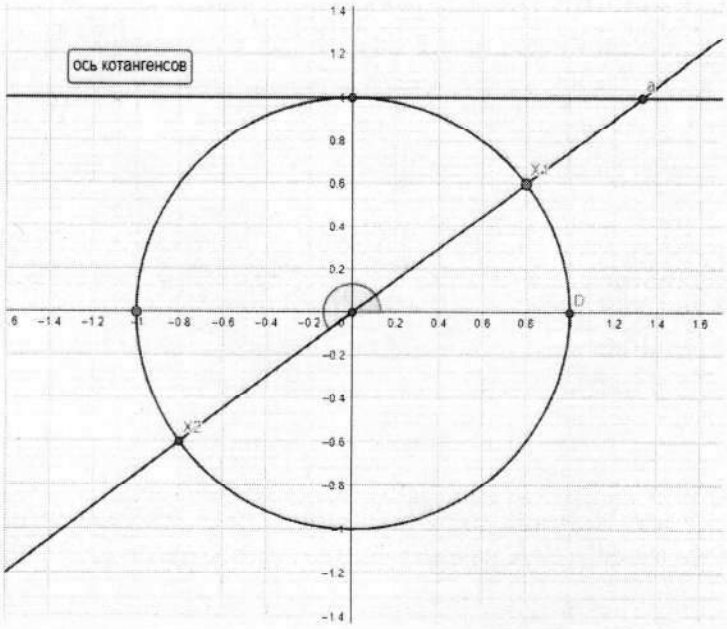


Рисунок 4 –Иллюстрация к решению уравнения $ctg\,x = a$

Рассмотрим частные случаи решения уравнения данного вида.

1) $ctg\,x = 0$: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$;

2) $ctg\,x = 1$: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$;

3) $ctg\,x = -1$: $x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Уравнение котангенса встречается реже, чем уравнение тангенса, а его графическая интерпретация отсутствует в некоторых школьных учебниках.

Рассмотрим примеры простейших тригонометрических уравнений рассмотренных видов:

Пример 1. Решить уравнение $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \epsilon Z$$

Пример 2. Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ x = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$$

Пример 3. Решить уравнение $\mathrm{ctg}\,x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in Z$$

Пример 4. Решить уравнение $\mathrm{tg}\,x = \sqrt{3}$.

$$x = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z$$

Рассмотрев простейшие тригонометрические уравнения, мы можем перейти к более сложным видам этих уравнений, которые будут решаться с помощью специальных методов, о которых мы говорили ранее: метод введения переменной, метод разложения на множители и метод вспомогательного угла. Рассмотрим каждый их них подробнее.

Метод ведения новой переменной

Метод введения новой переменной применяется для упрощения тригонометрических уравнений. Его суть заключается в том, что мы можем заменить сложное тригонометрическое выражение на новую переменную, что позволяет привести исходное уравнение к более простому виду (часто алгебраическому). Этот метод наиболее полезен, когда уравнение содержит однотипные тригонометрические функции (например, только синус или косинус); комбинации различных функций, которые можно выразить через одну; многочлены от тригонометрических функций. Рассмотрим данный метод на конкретном примере.

Пример 5. Решите уравнение $-2\sin^2 x - 5\sin x + 3 = 0$.

Решение. Введем новую переменную t. Пусть $\sin x = t$, где $|t| \leq 1$.

Тогда уравнение примет вид: $-2t^2 - 5t + 3 = 0$.

Решая получившееся квадратное уравнение, мы получаем корни -3 и $\frac{1}{2}$. Первый корень -3 не подходит, так как он не удовлетворяет нашему условию. Возвращаемся к исходной переменной и решаем уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$.

Метод разложения на множители

Этот метод заключается в том, что мы преобразовываем сложное тригонометрическое уравнение в более простое, которое состоит из произведения простых множителей, каждый из которых мы можем решить отдельно, приравняв к нулю. Рассмотрим данный метод на конкретном примере.

Пример 6. Решите уравнение $\sin x \cdot \cos x - \sin x = 0$.

решение. Вынесем общий множитель $\sin x$ за скобку: $\sin x\,(\cos x - 1) = 0$.

Приравниваем каждый из полученных множителей к нулю:

$\sin x = 0$ или $\cos x - 1 = 0$.

Решаем первое уравнение: $\sin x = 0, x = \pi k, k \in Z$.

Решаем второе уравнение: $\cos x - 1 = 0, \cos x = 1, x = 2\pi k, k \in Z$.

Заметим, что все решения $x = 2\pi k$ уже входят в $x = \pi k$, поэтому общее

Решение можно записать так: $x = \pi k, k \in Z$.

Однородные тригонометрические уравнения

Перейдем к однородным тригонометрическим уравнениям и рассмотрим методы их решения. Однородные тригонометрические уравнения – это уравнения, в которых все слагаемые имеют одну и ту же степень относительно синуса или косинуса. Данный вид уравнений решается путем деления на синус или косинус в соответствующей степени, что позволяет нам свести данное уравнение к алгебраическому относительно тангенса или котангенса.

1. Однородные уравнения первой степени имеют вид:

$$a \sin x + b \cos x = 0, a \neq 0, b \neq 0.$$

Разделив обе части уравнения на $\cos x$ получим уравнение $a \operatorname{tg} x + b = 0$

Пример 7. $3 \sin x + 4 \cos x = 0$.

Решение. Разделим обе части этого уравнения на $\cos x$, получим:

$$3 \operatorname{tg} x + 4 = 0, \operatorname{tg} x = -\frac{4}{3}, x = -\operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \pi k, k \in Z.$$

2. Однородные уравнения второй степени имеют вид:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0.$$

Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим уравнение вида $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$. Подстановка $\operatorname{tg} x = t$ приводит это уравнение к уравнению $at^2 + bt + c = 0$.

Пример 8. $3 \sin^2 x - 4 \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$.

Решение. Разделим уравнение на $\cos^2 x$, получим $3 \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 1 = 0$.

Пусть $t = \operatorname{tg} x$, тогда $3t^2 - 4t + 1 = 0$.

Находим корни квадратного уравнения $t = 1$ или $t = \frac{1}{3}$.

Делаем обратную подстановку и получаем уравнения: $\mathrm{t}g\,x = 1, \mathrm{tg}\,x = \frac{1}{3}$.

Значит, $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ или $x = \mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \pi n, n \in Z$.

Рассмотрим алгоритм решения однородных уравнений первой степени:

1. Предполагаем, что $\cos x \neq 0$.
2. Делим обе части уравнения на $\cos x$.
3. Решаем полученное уравнение с тангенсом.
4. Записываем общее решение.

Алгоритм решения однородных уравнений второй степени:

1. Разделим обе части уравнения на выражение $\cos^2 x$ $(\cos x \neq 0)$
2. Решаем относительно тангенса полученное квадратное уравнение.
3. Проверить случай, когда $\cos x = 0$, подставить в исходное уравнение.
4. Записываем общее решение.

Универсальная подстановка

Суть данного метода заключается в том, что совершая определенную подстановку, мы сводим тригонометрическое уравнение к алгебраическому, выражая все тригонометрические функции через одну переменную (тангенс половинного угла). Если ввести замену $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, то все тригонометрические функции выражаются через t: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \mathrm{tg}\,x = \frac{2t}{1-t^2}$. Данный метод решения тригонометрических уравнений хорошо подходит тогда, когда уравнение трудно решить другими способами. Не рекомендуется использовать, если в уравнении содержатся выражения $\sin 2x, \cos 2x$ и т. д. (так как лучше использовать формулы двойного угла).

Пример 8. Решить уравнение $\sin x + \cos x = 1$

Решение. Введем новую переменную $t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, тогда $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Получаем уравнение $\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$. После упрощения уравнение имеет вид $-2t^2 + 2t = 0$.

Решаем полученное квадратное уравнение относительно t и получаем корни 0, 1. Делаем обратную подстановку $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 0$ и $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1$, получаем $x = 2\pi n, n \in Z$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$. Иногда универсальная подстановка «теряет» корень, в том случаем, когда $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ не существует. Подставим $x = \pi$ в исходное уравнение: $\sin\pi + \cos\pi = 0 - 1 = -1 \neq 1 \rightarrow$ потери корней нет.

Метод введения вспомогательного угла

Рассмотрим последний метод решения тригонометрических уравнений – метод введения вспомогательного угла. Данный метод заключается в том, что мы можем преобразовать выражение $a\sin x + b\cos x$ в $R\sin(x + \alpha)$, где $R = \sqrt{a^2 + b^2}$, α – вспомогательный угол, который определяется из условий: $\cos\alpha = \frac{a}{R}, \sin\alpha = \frac{b}{R}$. Аналогично можно преобразовать косинус $a\sin x + b\cos x$ в $R\cos(x + \alpha)$.

Алгоритм решения методом вспомогательного угла:

1. Приводим уравнение к виду $a\sin x + b\cos x = c$.
2. Находим $R = \sqrt{a^2 + b^2}$
3. Проверяем условие разрешимости уравнения: $|c| \leq R$, если $|c| > R$, то решений нет.
4. Вводим вспомогательный угол α: $\cos\alpha = \frac{a}{R}, \sin\alpha = \frac{b}{R}$.
5. Переписываем уравнение в виде $\sin(x + \alpha) = \frac{c}{R}$ или $\cos(x - \alpha) = \frac{c}{R}$.
6. Решить полученное уравнение.

Приведем конкретный пример решения тригонометрического уравнения методом введения вспомогательного угла.

Пример 9. Решите уравнение: $3\sin x + 4\cos x = 2$.

Находим коэффициенты a = 3, b = 4, значит $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$.

Делим обе части уравнения на 5, получаем $\frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x = \frac{2}{5}$.

Вводим вспомогательный угол α такой, что $\cos\alpha = \frac{3}{5}, \sin\alpha = \frac{4}{5}$.

Теперь уравнение можно записать в виде $\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha = \frac{2}{5}$.

Используя формулу сложения получаем: $\sin(x+\alpha)=\frac{2}{5}$

Решаем полученное уравнение $(x+\alpha)=\arcsin\frac{2}{5}+2\pi n, (x+\alpha)=\pi-\arcsin\frac{2}{5}+2\pi n$. Отсюда $x=-\alpha+\arcsin\frac{2}{5}+2\pi n$, $x=-\alpha+\pi-\arcsin\frac{2}{5}+2\pi n$. Упростим ответ и получим численное значение угла:

$\alpha=arctg\frac{4}{3}$, так как $\operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$.

$x=-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\arcsin\frac{2}{5}+2\pi n, n\in Z$, $x=-\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+\pi-\arcsin\frac{2}{5}+2\pi n, n\in Z$ – решение уравнения.

1.5 Методы решения тригонометрических неравенств

Тригонометрические неравенства в школьном курсе математики изучаются после тригонометрических уравнений, поскольку их решение сводится к решению уравнений. Для успешного решения неравенств, от ученика требуются знания свойств тригонометрических функций, умения работать с единичной окружностью и применять различные методы решения уравнений.

Тригонометрические неравенства разделяются на несколько типов как и уравнения. Для решения каждого из них требуется специальный подход.

Начнем с простейших тригонометрических неравенств, которые имеют вид:

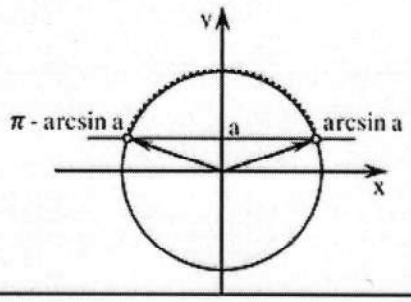
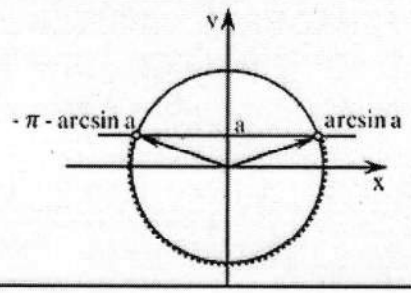
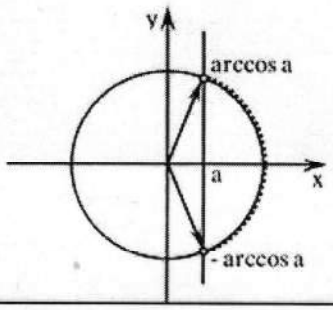
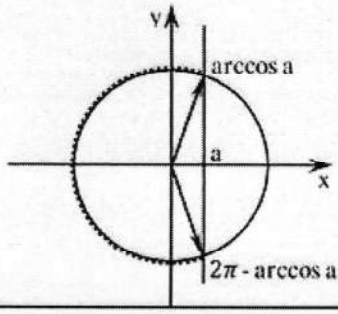
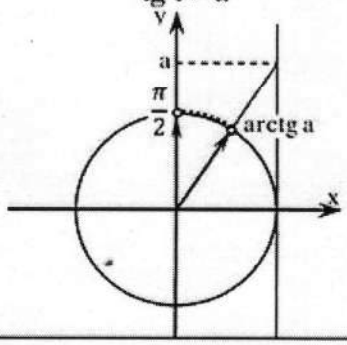
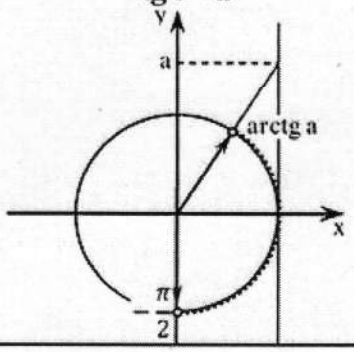
$$\sin x > a \text{ (или } \sin x \geq a),$$
$$\cos x < b \text{ (или } \cos x \leq b),$$
$$\operatorname{tg} x > c \text{ (или } \operatorname{tg} x \geq c),$$
$$\operatorname{ctg} x < d \text{ (или } \operatorname{ctg} x \leq d).$$

Алгоритм решения данного типа неравенств.

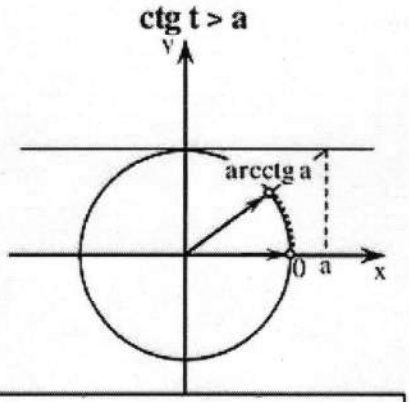
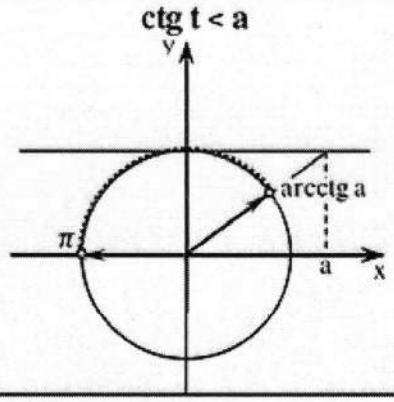
1. Найти точки на числовой окружности, в которых тригонометрическая функция принимает значение a, b, c, d.

2. С помощью единичной окружности определить промежутки, которые удовлетворяют нашему неравенству.
3. Учитывая периодичность функции, записываем решение.

Таблица 5 – Интерпретация решений тригонометрических неравенств

sin t > a  **arcsin a + 2πn < t < π - arcsin a + 2πn, n∈Z**	**sin t < a**  **- π - arcsin a + 2πn < t < arcsin a + 2πn, n∈Z**
cos t > a  **- arccos a + 2πn < t < arccos a + 2πn, n∈Z**	**cos t < a**  **arccos a + 2πn < t < 2π - arccos a + 2πn, n∈Z**
tg t > a  **arctg a + πn < t < π/2 + πn, n∈Z**	**tg t < a**  **-π/2 + πn < t < arctg a + πn, n∈Z**

Продолжение таблицы 5

ctg t > a  **πn < t < arcctg a + πn, n∈Z**	**ctg t < a**  **arcctg a + πn < t < π + πn, n∈Z**

Пример 1. Решить неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$

Решение. Решаем уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$

Проверяем на единичной окружности в каком промежутке синус больше $\frac{1}{2}$.

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi n < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Ответ: $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right), n \in Z.$

Пример 2. Решить неравенство $\cos x < -\frac{1}{2}$.

Решаем уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}, x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, x = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

Проверяем, в каких интервалах косинус меньше $-\frac{1}{2}$: $\frac{2\pi}{3} + 2\pi n < x < \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Ответ: $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ \frac{4\pi}{3} + 2\pi n\right), n \in Z.$

Следующий тип тригонометрических неравенств - это неравенства сводящиеся к простейшим. Данный вид неравенств легко приводится к простейшему виду с помощью замены переменной. Если аргументом тригонометрической функции является линейное выражение, то можно сделать замену. Рассмотрим данный способ на конкретном примере.

Пример 3. Решите неравенство $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. Заменим аргумент синуса $t = 2x + \frac{\pi}{4}$.

Решаем простейшее неравенство $\sin t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq t \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$.

Возвращаемся к х: $\frac{\pi}{4} + 2\pi n \leq 2x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$.

Решаем двойное неравенство: $2\pi n \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \pi n \leq x \leq \frac{\pi}{4} + \pi n$.

Ответ: $x \in \left[\pi n, \frac{\pi}{4} + n\pi\right], n \in Z$.

Следующий вид неравенств – это неравенства решаемые методом интервалов. Если неравенство можно разложить на множители, то можно использовать метод интервалов на тригонометрической окружности. Рассмотрим данный метод на конкретном примере:

Пример 4. Решите неравенство $\mathrm{t}g\, x \cdot \sin 3x \geq 0$

Решаем простейшие тригонометрические уравнения $\mathrm{t}g\, x = 0,\ \sin 3x = 0$.

Получаем: $x = \pi n; x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n; x = \frac{\pi}{3} n, n \in Z$.

Определим точки разрыва и периодичность. Тангенс имеет период π и разрывы в $x = \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in Z$. Синус имеет период 2π, но $\sin 3x$ имеет период $\frac{2\pi}{3}$. Общий период нашего выражения – это наименьшее общее кратное π и 2π, то есть 2π. Делая вывод, достаточно решить неравенство на промежутке 2π, а затем учесть периодичность. Найдем все критические точки на промежутке от 0 до 2π.

1. Нули $\mathrm{tg}\, x$: $0, \pi$.
2. Нули $\sin 3x$: $0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.
3. Точки разрыва $\mathrm{t}g\, x$: $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$.

Рассмотрим каждый интервал между критическими точками.

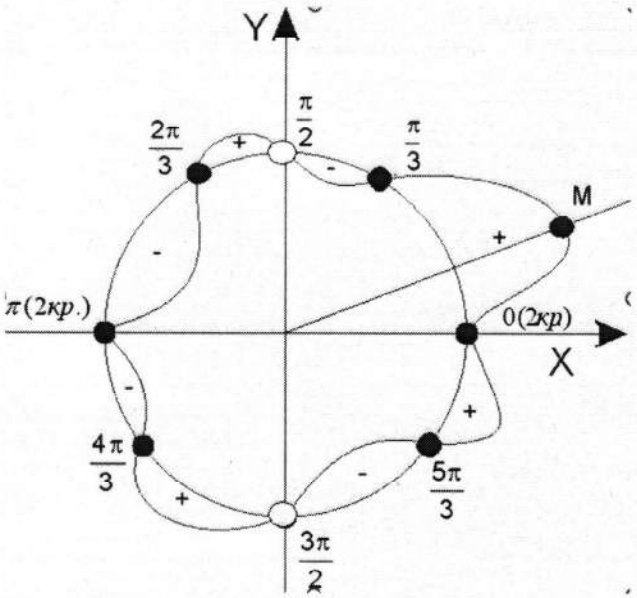


Рисунок 5 – Графическая интерпретация неравенства

Неравенство выполняется на: $\left[0,\frac{\pi}{3}\right] \cup \left(\frac{\pi}{2},\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3},\frac{3\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right]$.

Окончательное решение: $x \in \left[-\frac{\pi}{3}+2\pi k,\frac{\pi}{3}+2\pi k\right] \cup \left(\frac{\pi}{2}+2\pi k,\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}+2\pi k,\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right), k \in Z.$

Рассмотрим еще один способ решения тригонометрических неравенств – графический. Суть этого метода заключается в том, что мы можем найти решение нашего неравенства используя график тригонометрической функции. Данный метод не всегда удобен, поскольку построение графика занимает достаточно много времени. Рассмотрим простейшие тригонометрические неравенства.

1) Графическая интерпретация решения неравенств вида $\sin x > a, \sin x \geq a$.

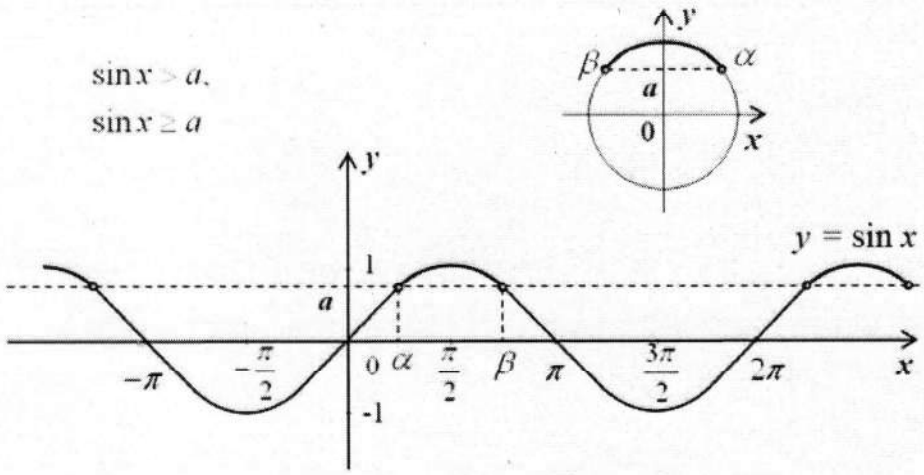


Рисунок 6 – Графическая интерпретация решений неравенств

$$\sin x > a, \sin x \geq a$$

2) Графическая интерпретация решения неравенств вида

$\sin x < a, \sin x \leq a.$

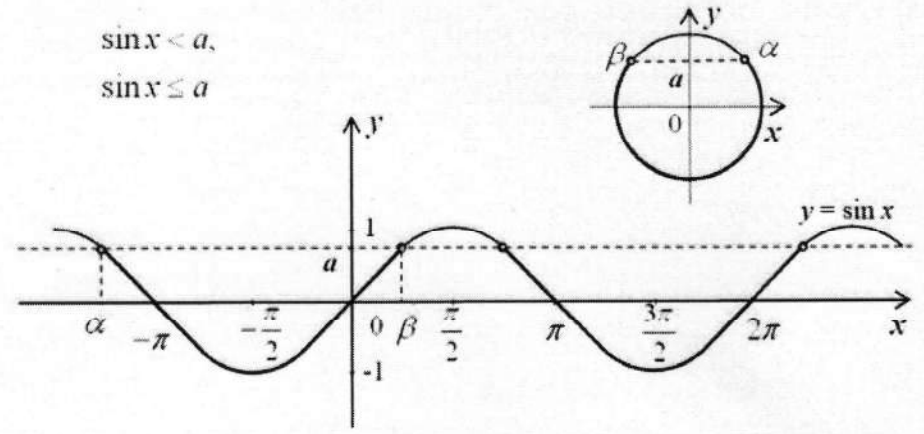


Рисунок 7 – Графическая интерпретация решений неравенств вида

$$\sin x < a, \sin x \leq a$$

3) Графическая интерпретация решений неравенств вида

$\cos x > a, \cos x \geq 0.$

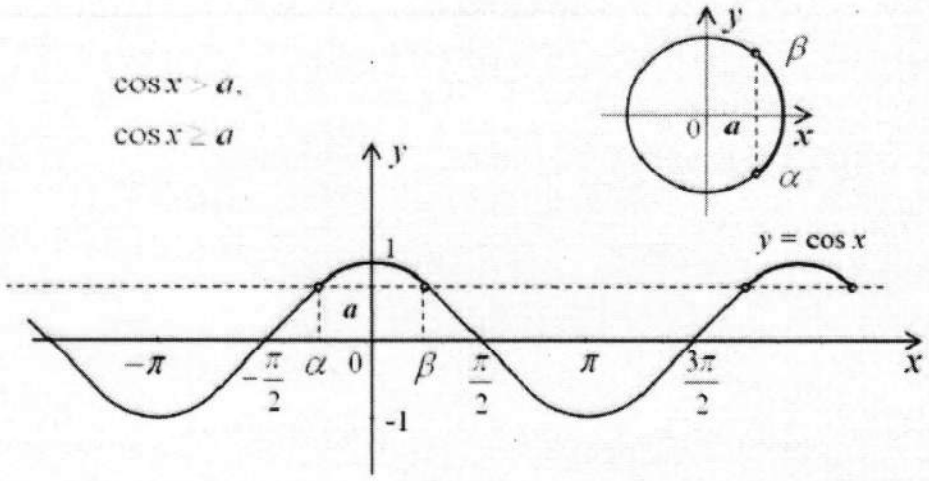


Рисунок 8 – Графическая интерпретация решений неравенств

$$\cos x > a, \cos x \geq 0$$

4) Графическая интерпретация решений неравенств вида

$$\cos x < a, \cos x \leq a.$$

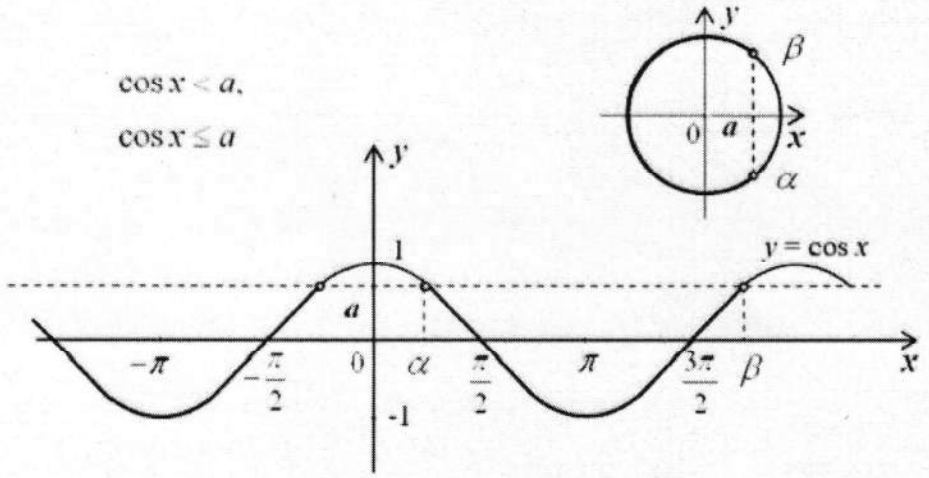


Рисунок 9 – Графическая интерпретация решений неравенств вида

$$\cos x < a, \cos x \leq a$$

5) Графическая интерпретация неравенств вида $\operatorname{tg} x > a, \operatorname{tg} x \geq a.$

tg $x > a$, tg $x \geq a$

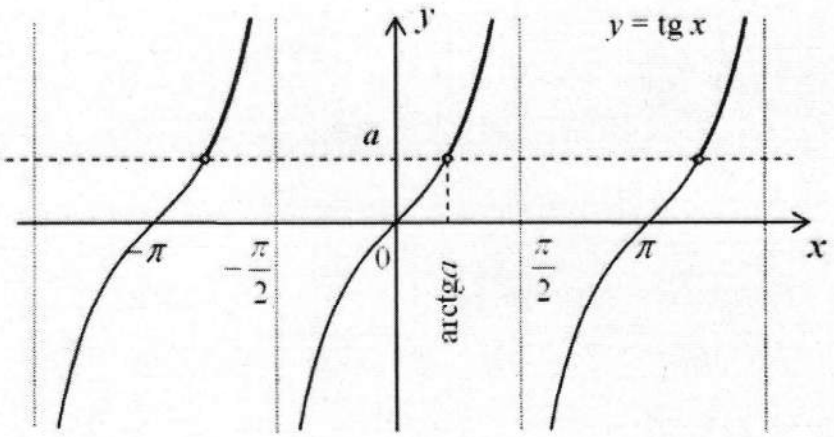


Рисунок 10 - Графическая интерпретация решений неравенств вида

$$tg\,x > a, tg\,x \geq a.$$

6) Графическая интерпретация решений неравенств вида

$\mathrm{tg}\,x < a, \mathrm{tg}\,x \leq a.$

tg $x < a$, tg $x \leq a$

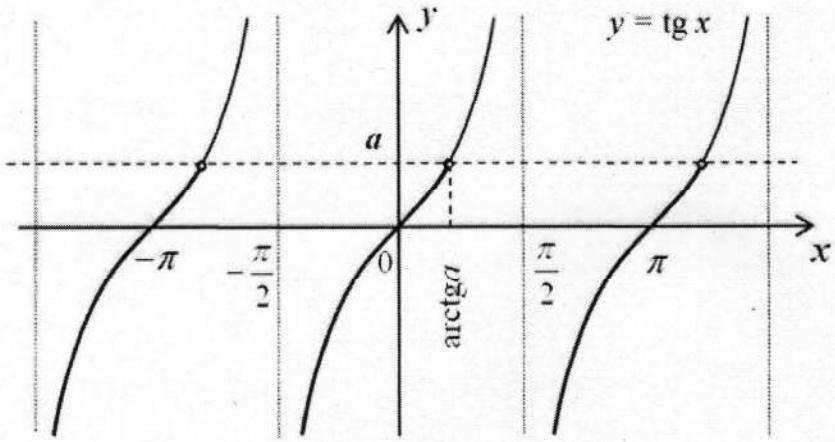


Рисунок 11 - Графическая интерпретация решений неравенств вида

$$tg\,x < a, tg\,x \leq a.$$

7) Графическая интерпретация решений неравенств вида

$\mathrm{ctg}\,x < a, \mathrm{ctg}\,x \leq a.$

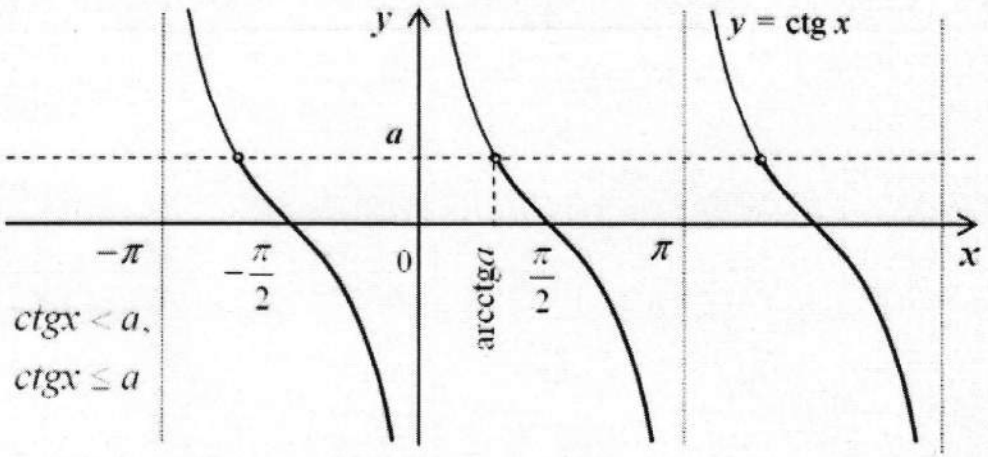


Рисунок 12 -Графическая интерпретация решений неравенств вида

$$ctg\,x < a, ctg\,x \leq a.$$

8) Графическая интерпретация решений неравенств вида

$\mathrm{ctg}\,x > a, \mathrm{ctg}\,x \geq a.$

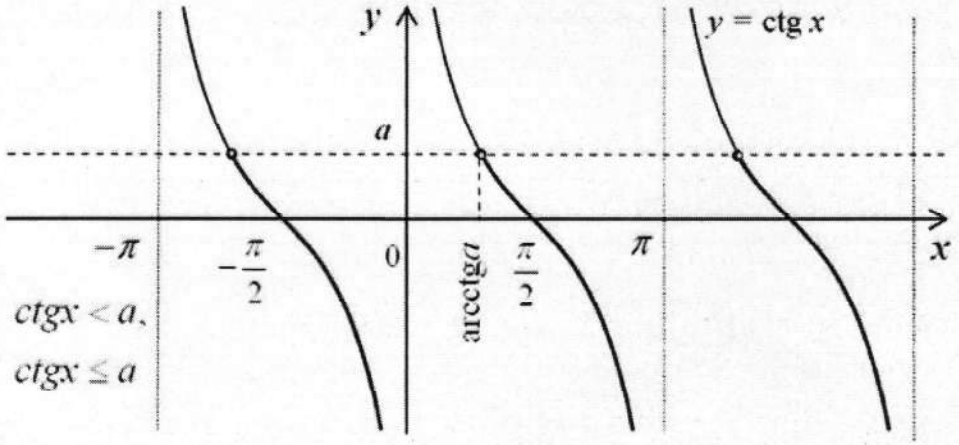


Рисунок 13 -Графическая интерпретация решений неравенств вида

$$ctg\,x > a, ctg\,x \geq a.$$

Тригонометрические неравенства занимают особое место в школьном курсе математики. Они требуют хорошего понимания свойств тригонометрических функций, умения работать с единичной окружностью и владения различных методов решений тригонометрических уравнений.

1.6 Тригонометрические уравнения в задачах ЕГЭ

Тригонометрические уравнения занимают большое место в едином государственном экзамене по математике (ЕГЭ) как базового, так и профильного уровня. Попробуем рассмотреть основные типы тригонометрических уравнений, которые встречаются в ЕГЭ, методы их решений и типичные ошибки школьников.

Как показывает практика, в заданиях ЕГЭ чаще всего встречаются тригонометрические уравнения следующих видов:

1. Простейшие тригонометрические уравнения ($\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$) . Для их решения требуется знание стандартных тригонометрических формул и учет области допустимых значений.
2. Тригонометрические уравнения, сводящиеся к квадратным ($a \sin^2 x + b \sin x + c = 0, a \cos^2 x + b \cos x + c = 0$) . Данный тип уравнений решается через замену $t = \sin x$ или $t = \cos x$.
3. Однородные уравнения первой и второй степени ($a \sin x + b \cos x = 0$, $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$). Решение данного типа уравнений сводится к делению всех членов уравнения на $\cos x$ или $\cos^2 x$.
4. Тригонометрические уравнения решаемые с помощью разложения на множители. Данный метод заключается в том, что мы преобразовываем сложное тригонометрическое уравнение в более простое, которое состоит из произведения простых множителей, каждый из которых мы можем решить отдельно, приравняв к нулю.

Рассмотрим каждый из типов тригонометрических уравнений, которые могут встретиться на едином государственном экзамене по математике профильного уровня в задании №13.

Пример 1. а) Решите уравнение $\cos 2x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

б) Найдите корни этого уравнения принадлежащие промежутку $[-2\pi; \pi]$.

Решение. а) Преобразуем это уравнение $2 \cos^2 x - 1 = \cos x \leftrightarrow 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$. Сделаем замену $\cos x = t$ и решим полученное квадратное

уравнение. Получаем корни $t = 1$ и $t = -\frac{1}{2}$. Решаем простейшие тригонометрические уравнения $\cos x = 1$, $\cos x = -\frac{1}{2}$. Корни $x = 2\pi k$, $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$. б) с помощью тригонометрической окружности сделаем отбор корней принадлежащих промежутку $[-2\pi;\ \pi]$: $-2\pi;\ -\frac{4\pi}{3}$.

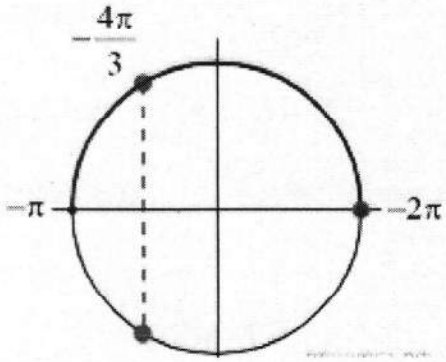


Рисунок 14 – Отбор корней на единичной окружности

Пример 2. а) Решите уравнение $\sqrt{3}\sin 2x + 3\cos 2x = 0$.

б) Найдите все корни данного уравнения принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$.

Решение. Если $\cos 2x = 0$, то из уравнения следует, что $\sin 2x = 0$. Это противоречит основному тригонометрическому тождеству. Поэтому $\cos 2x \neq 0$ и на него можно поделить обе части уравнения, получаем уравнение $\sqrt{3}\,tg\,2x + 3 = 0 \leftrightarrow \operatorname{tg} 2x = -\sqrt{3} \leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{3} + \pi k \leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, k \in Z$. б) с помощью единичной окружности отберем корни принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2}; 3\pi\right]$: $\frac{11\pi}{6}, \frac{7\pi}{3}, \frac{17\pi}{6}$.

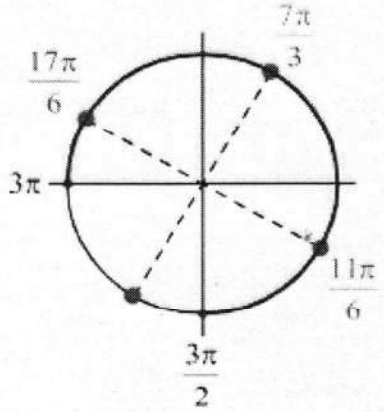


Рисунок 15 – Отбор корней на единичной окружности

Пример 3. а) Решить уравнение $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0$.

б) Найдите все корни этого уравнения принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Запишем уравнение в виде $2\sin x \cos x + \sqrt{3}\sin x = 0$. Вынесем общий множитель за скобку $\sin x\left(2\cos x + \sqrt{3}\right) = 0$. Решим полученные уравнения $\sin x = 0$ и $2\cos x + \sqrt{3} = 0$. Получим корни $x = \pi k, x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$. б) С помощью тригонометрической окружности отберем корни принадлежащие промежутку $\left[\frac{5\pi}{2}; \frac{7\pi}{2}\right]$: $\frac{17\pi}{6}, 3\pi, \frac{19\pi}{6}$.

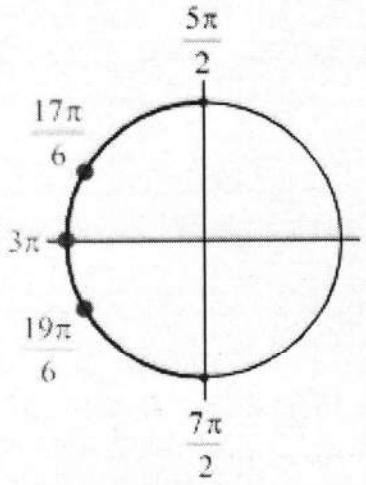


Рисунок 16 – Отбор корней на единичной окружности

Как правило, решение тригонометрических уравнений вызывает трудности у многих школьников. Анализ результатов единого государственного экзамена прошлых лет позволяет выделить характерные ошибки, которые допускают школьники при выполнении экзаменационных заданий по данной теме. Знание этих ошибок и способов их предотвращения значительно повышают шанс на сдачу экзамена на высокий балл. Рассмотрим типичные виды ошибок.

1. Алгебраические ошибки при различных преобразованиях (неверное использование формул сокращенного умножения, ошибки в знаках при переносе слагаемых из одной части уравнения в другую, неверное раскрытие скобок).

2. Ошибки в применении тригонометрических формул (ошибки в использовании формул двойного угла, формул приведения и т.д.).
3. Ошибки в области определения уравнения (несоблюдение условий существования корней, потеря ограничений при возведении в квадрат, игнорирование ограничений для тангенса и котангенса).
4. Ошибки при написании общего решения уравнения (ошибки в определении периода функции, неверное объединение решений).
5. Неверный отбор корней (ошибки при использовании метода интервалов, арифметические ошибки при отборе корней, потеря корней).

В связи с этим, можно выделить некоторые методические рекомендации, которые помогут ученикам предотвратить появление типичных ошибок на экзамене и успешно справиться с тригонометрическими уравнениями.

1. Систематизация знаний (предложить ученикам составить таблицу или список для всех основных тригонометрических формул, подробно разобрать каждый тип тригонометрических уравнений и составить алгоритм решения для каждого из них).
2. Практика алгебраических преобразований (регулярно предлагать ученикам задания на отработку различных алгебраических преобразований, ввести взаимопроверку решений).
3. Решение сложных тригонометрических уравнений (просить учеников определить тип уравнения, выбрать оптимальный метод решения, проверить область определения, записать общее решение, выполнить отбор корней при необходимости).
4. Работа с отбором корней (рекомендуется использовать тригонометрическую окружность для наглядности, проверять граничные значения промежутка.

Подводя итог, тригонометрические уравнения в ЕГЭ занимают особое место. Решение данного типа заданий требует от учеников глубоких знаний теории и практических навыков решения уравнений. Ключевыми факторами

для успешной сдачи экзамена являются умение решать тригонометрические уравнения разных типов, применять различные методы решений и проводить анализ. Систематическая работа по предотвращению ошибок и регулярная практика с разбором типичных ошибок значительно повышает шансы ученика на успешное выполнение заданий из данного раздела.

ГЛАВА II. ДИФФЕРЕНЦИРОВАННЫЙ ПОДХОД В ОБУЧЕНИИ РЕШЕНИЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ НА ЭЛЕКТИВНОМ КУРСЕ

2.1 Виды и формы дифференцированного обучения. Теория организации дифференцированного подхода к обучению

В последнее время все большую популярность набирает дифференцированный подход в обучении. Дифференцированное обучение – это педагогический подход, который направлен на создание оптимальных условий для развития каждого ученика с учетом его индивидуальных особенностей развития, потребностей и интересов. В основе дифференцированного подхода к обучению лежит осознание необходимости адаптировать учебный процесс к индивидуальным особенностям каждого ребенка.

К основным принципам дифференцированного обучения относятся:

1. Индивидуальный подход – принцип в педагогике, согласно которому в процессе учебно-воспитательной работы с классом учитель взаимодействует с каждым отдельным учеником индивидуально, по особой модели, учитывая его личностные особенности.
2. Вариативность – принцип использования разнообразных методов, форм и средств обучения.
3. Гибкость – принцип возможного изменения стратегии обучения в зависимости от динамики развития ученика.
4. Педагогическая поддержка – создание условий для самореализации и преодоления трудностей в процессе обучения

Дифференциация в обучении может происходить по различным критериям: по уровню сложности заданий, по темпу усвоения материала, по интересам учащихся и т.д. В современной педагогике существует несколько основных видов дифференциации обучения:

1. Внешняя дифференциация. Данный вид дифференциации предполагает разделение школьников на несколько групп на основе определенных критериев. К данному виду можно отнести разделение классов на математические, гуманитарные, биологические и т.д., специализированные школы для одаренных детей.
2. Внутренняя дифференциация. Данный вид дифференциации осуществляется внутри одного класса или конкретной группе учеников и предполагает адаптацию учебного процесса к личностным особенностям каждого конкретного ученика. К данному виду можно отнести уровневую дифференциацию – это задания различной степени сложности, групповую дифференциацию – это работа в малых группах по интересам или уровню подготовки учеников, индивидуализированное обучение – это создание персонального плана обучения для каждого конкретного ученика.
3. Смешанная дифференциация. Данный вид включает в себя элементы как внутренней, так и внешней дифференциации, например, обучение в профильном классе, но с индивидуальными заданиями для каждого ученика или отдельной группы учеников.

Организация дифференцированного обучения – это достаточно сложный процесс, который нужно грамотно организовать для того, чтобы он принес положительные результаты. В методике обучения выделяют несколько основный этапов, которые нужно соблюдать для достижения поставленных целей.

1. Диагностический этап. Целью данного этапа является выявление личностных особенностей каждого ученика для последующей дифференциации. К методам, которые можно использовать на данном этапе относится психолого-педагогическое тестирование, различные беседы с учениками, наблюдение за учебной активностью, анализ уже имеющихся учебных результатов каждого ученика. На данном этапе полезно выяснить интересы и предпочтения учеников, определить ведущий тип мышления, проанализировать уровень знаний.

2. Проектировочный этап. Целью данного этапа является разработка стратегии обучения с учетом выявленных индивидуальных особенностей. На данном этапе необходимо определить конкретные критерии дифференциации, разработать задания, которые будут соответствовать каждому уровню, сформировать учебные группы или индивидуальные учебные маршруты, подобрать методы и формы обучения.
3. Этап реализации. Целью данного этапа является применение разработанных подходов в учебном процессе.
4. Этап мониторинга и корректировки. На данном этапе необходимо оценить эффективность дифференцированного подхода и скорректировать его если это необходимо.

Делая вывод, организация дифференцированного обучения – это достаточно сложный процесс и его реализация требует от учителя конкретных знаний, которые помогли бы ему успешно осуществить дифференциацию в классе или определенной группе учеников.

2.2 Методические рекомендации по организации дифференцированного подхода при обучении решению тригонометрических уравнений и неравенств

В рамках предлагаемого мною факультативного курса, рассчитанного на восемь занятий, предлагается использовать уровневую дифференциацию в формате групп. Предлагаемый подход позволяет адаптировать учебный процесс под индивидуальные возможности учащихся и повысить эффективность усвоения раздела «Решение тригонометрических уравнений и неравенств».

Выделим несколько этапов по реализации дифференцированного обучения:

1. Формирование академических групп. Академические группы – это форма организации учащихся, предполагающая возможный переход между группами по мере усвоения материала. Критерием распределения служит

группами по мере усвоения материала. Критерием распределения служит уровень подготовки учеников, определяемый по результатам входной самостоятельной работы (Приложение 3). Мы будем выделять три группы. Группа А (базовый уровень) – это учащиеся с пробелами в знаниях, способные решать задания в несколько действий, но испытывающие трудности при анализе условий и поиске решений. Группа Б (средний уровень) – это учащиеся, уверенно решающие типовые задачи, но затрудняющиеся при переходе к заданиям нового типа. Группа В (продвинутый уровень) – это ученики способные решать сложные задач, применять свои знания для решения нестандартных и творческих задач.

2. Реализация факультативных уроков. Весь курс занятий будет разделен на 4 больших блока каждый и которых поможет нам достичь определенных образовательных целей. Первый блок будет посвящен теоретическим знаниям, которыми должны обладать ученики по теме «Тригонометрия». Далее, теория будет подкрепляться практикой, которая в свою очередь будет усложняться по мере приобретения навыков решения уравнений и неравенств. Следующий этап – это контроль знаний учащихся, в нашем случае самостоятельные и контрольная работа. И последний этап – рефлексия.
3. Подведение итогов обучения. Разделим учеников на условные группы – те, кто усвоил необходимый минимум (оценка 3), те, кто способен решать комплексные задачи и находить различные пути решения (оценка 4) и те, кто «свободно» себя чувствует в данном разделе (оценка 5).

В случае дифференцированного обучения, самостоятельные работы – это некий способ обратной связи, которую получает учитель по результатам проделанной работы.

В связи с тем, что мы предлагаем разделить учеников на три академические группы, то логичным продолжением было бы разделение самостоятельных работ на три уровня, каждый из которых соответствовал бы уровню знаний и умений каждой из наших групп. В случае, если в какой-то из

групп появляются ученики, которые преуспевают больше, чем другие, то в таком случае нужно организовать переход данного ученика из одной академической группы в другую, например, по результатам самостоятельной работы, чтобы стимулировать прогресс в обучении.

На этапе составления самостоятельной работы очень важно внимательно подойти к выбору заданий. Нужно помнить, что задания для первой группы должны носить базовый характер и проверять, в первую очередь, усвоение основных понятий и методов решения. Можно предложить ученикам тестовую форму проверки знаний, где ученик может выбрать правильный ответ из списка предложенных. Задания для второй группы имеют несколько другой вид. Для данной группы учеников целесообразно предложить задания, которые требуют анализа и комплексного подхода. Тестовая форма заданий не приветствуется, здесь лучше предложить ученикам задания с открытым ответом, где они смогут продемонстрировать свое собственное решение. Задачи для третьей группы должны носить усложненный характер. Сюда подойдут нестандартные задачи, требующие творческого подхода и смекалки, которые нельзя решить по определенному алгоритму.

Не исключено, что ребенок находящийся в первой академической группе захочет решить задание из блока, предназначенного для второй группы. Здесь важно не ограничивать ученика и дать ему свободу выбора заданий. Максимальное количество баллов, которое можно получить за верное решение задания из первого блока – 1 балл, задания второго блока – 2 балла и задания третьего блока – 3 балла.

Примеры самостоятельных работ представлены в приложении 1.

2.3 Факультативный курс по теме «Решение тригонометрических уравнений и неравенств»

Исходя из того, что раздел тригонометрических уравнений и неравенств вызывает большие трудности у многих учеников старшей школы, поскольку

количество часов выделяемых для изучения данного раздела не велико и объем и сложность представленного материала оказываются непосильными для большинства учеников, то было принято решение создать факультативный курс, который помог бы школьникам эффективно освоить данный раздел.

Актуальность данного факультативного курса обусловлена тем, что блок тригонометрии широко представлен на едином государственном экзамене по математике, ведь тригонометрические уравнения и неравенства – это обязательная часть экзамена. В задачах повышенной сложности часто встречаются комбинированные уравнения и неравенства, которые требуют от ученика комплексного и нестандартного подхода. Не стоит забывать и про олимпиады, где блок тригонометрии входит в перечень основных тем.

Основная цель курса заключается в формировании у учащихся системных знаний и навыков решения тригонометрических уравнений и неравенств различными способами, а также подготовить их к успешному выполнению экзаменационных и олимпиадных задач.

Остановимся подробнее на структуре курса. Первый и второй урок будет посвящен простейшим тригонометрическим уравнениям и их частным случаям. Планируется рассмотреть уравнения вида $\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$, а также отбор корней на данном промежутке с помощью тригонометрической окружности. На третьем уроке ученикам предлагается рассмотреть метод разложения на множители. В теоретической части нужно обязательно обратить внимание на вынесение общего множителя за скобку, на группировку и использование основных тригонометрических тождеств. На четвертом уроке рассматривается метод замены переменной. Теория данного урока будет включать в себя замену тригонометрической функции и квадратные уравнения относительно тригонометрических функций. Пятый урок посвящен методу введения вспомогательного угла. Особое внимание уделяется преобразованиям выражения $a \sin x + b \cos x$, а также использованию формулы вспомогательного угла. На шестом уроке разбирается универсальная подстановка и её применение к решению тригонометрических уравнений. После того, как ученики изучили

основные методы решения уравнений, то можно переходить к изучению тригонометрических неравенств, поскольку решение каждого неравенства будет сводиться к решению соответственного тригонометрического уравнения. На седьмом уроке разбираются простейшие тригонометрические неравенства вида $\sin x > a, \cos x > a, \operatorname{tg} x > a, \operatorname{ctg} x > a$ и метод интервалов на тригонометрической окружности. Окончанием курса послужит контрольная работа (Приложение 2), которая будет включать в себя задания по всему изученному материалу. После чего подводятся итоги работы, ребята оценивают свои результаты и делают соответствующие выводы. Учителю нужно дать понять детям, что окончание курса не является причиной останавливаться на изучении тригонометрии, получив необходимые навыки, школьники смогут продолжить изучать данный раздел математики самостоятельно, постоянно совершенствую свои навыки и умения.

Данный курс подойдет как для подготовки к единому государственному экзамену в 11 классе, так и для 10 класса после изучения соответствующих тем на основных уроках.

Таблица 6 – Тематическое планирование факультативного курса.

№	Название темы	Кол-во часов
1	Простейшие тригонометрические уравнения	2
2	Метод разложения на множители	1
3	Метод замены переменной	1
4	Метод введения вспомогательного угла	1
5	Метод универсальной подстановки	1
6	Неравенства	1
7	Контрольная работа	1
Итог:		8

Примеры уроков представлены в следующих технологических картах:

Технологическая карта урока «Уравнения вида $\sin x = a, \cos x = a$ и их решение»

Предмет: Алгебра

Класс: 10

Тема: Уравнения вида $\sin x = a, \cos x = a$ и их решение

Тип урока: Открытие новых знаний

Форма работы: Фронтальная, групповая, индивидуальная

Цель: Сформировать навыки решения уравнений вида $\sin x = a, \cos x = a$, понимать геометрический смысл решений

Название этапа	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Формируемые УУД
Организационный этап (2 мин.)	Приветствует учеников, проверяет готовность к уроку, создает положительный настрой на работу.	Готовятся к уроку и настраиваются на работу.	Регулятивные: самоорганизация Личностные: мотивация к учению.
Актуализация знаний (8 мин.)	Задает ученикам вопросы: • Что такое синус и косинус? • Какие значения они могут принимать? • Как выглядят их графики?	Отвечают на вопросы, вспоминают свойства тригонометрических функций, решают простейшие уравнения устно.	Познавательные: анализ, актуализация опорных знаний. Коммуникативные: умение слушать и отвечать.

	Предлагает решить устно: • $\sin x = 0, \cos x = 0$		
Постановка проблемной ситуации (5 мин.)	Записывает на доске уравнения: $\sin x = 0{,}5$ и $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, затем спрашивает как найти все решения? Почему решений может быть бесконечно?	Формулируют проблему: Как записать общее решение? Как учесть период?	Регулятивные: целеполагание. Познавательные: постановка проблемы.
Открытие нового знания (15 мин.)	Показывает алгоритм решения при $\|a\| \leq 0$: $\sin x = a$: $x = \arcsin a + 2\pi n, x = \pi - \arcsin a + 2\pi n, n \in Z$. Аналогично для $\cos x = a$. Показывает на единичной окружности решения.	Записывают алгоритм, рисуют окружность, отмечают решения на ней и решают примеры предложенные в начале урока $\sin x = 0{,}5$ и $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.	Познавательные: Усвоение новых понятий. Логические: установление причинно-следственных связей.
Первичное закрепление (10 мин.)	Раздает карточки с дифференцированными заданиями. Первый уровень	Решают уравнения, записывают ответы в тетрадь, обсуждают решения в парах,	Регулятивные: Контроль и коррекция. Коммуникативные: Работа в

	$\sin x = 1, \cos x = 0, \sin x = \frac{1}{2}$, второй уровень $\cos x = -\frac{1}{2}, \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sin x = \frac{1}{2} - 1$, третий уровень $\sin 2x = 1, 2\sin x + 2\sin x = 2, \cos x - 1 = -\cos x$. Помогает детям отвечая на вопросы и корректируя ответы.	задают вопросы учителю.	парах.

Технологическая карта урока «Метод разложения на множители»

Предмет: Алгебра

Класс: 10

Тема: Метод разложения на множители

Тип урока: Открытие новых знаний

Форма работы: Фронтальная, групповая, индивидуальная

Цель: Сформировать навыки решения уравнений методом разложения на множители

Название этапа	Деятельность учителя	Деятельность ученика	Формируемые УУД
Организационный этап (2 мин.)	Приветствует класс, проверяет готовность к уроку, создает положительный настрой на работу.	Готовятся к уроку, настраиваются на работу.	Регулятивные: Самоорганизация. Личностные: Мотивация к учению.
Актуализация знаний (8 мин.)	Задает вопросы: • Какие методы решения тригонометрических уравнений вы уже знаете? • Вспомните формулы разложения на множители (разность	Отвечают на вопросы, вспоминают алгебраические методы разложения на множители. Выполняют устные задания.	Познавательные: активизация опорных знаний. Коммуникативные: умение слушать и отвечать.

	квадратов, вынесение общего множителя за скобку).		
Постановка проблемной ситуации (5 мин.)	Записывает на доске уравнение $\sin^2 x - \sin x = 0$ и спрашивает учеников, можно ли решить данное уравнение уже известными методами? Как можно преобразовать левую часть?	Анализируют уравнение, предлагают возможные пути решения, формируют проблему: необходимо разложение на множители.	Регулятивные: целеполагание Познавательные: постановка проблемы
Открытие новых знаний (15 мин.)	Объясняет алгоритм: 1. Перенести все члены в одну сторону. 2. Разложить выражение на множители. 3. Приравнять каждый из множителей к 0. 4. Решить полученные простейшие уравнения Разбирает конкретные примеры: $\sin^2 x - \sin x = 0$, $\sin x \cdot \cos x - \sin x = 0$. Демонстрирует решение на доске.	Записывают алгоритм решения в тетрадь, участвуют в разборе примеров, задают вопросы. Решают вместе с учителем.	Познавательные: усвоение новых понятий. Логические: установление причинно-следственных связей.
Первичное	Предлагает детям задания по уровням.	Решают уравнения в тетрадях,	Регулятивные: контроль и

закрепление (10 мин.)	Первый уровень $\sin x + \sin x \cos x = 0$, второй уровень $2\cos^2 x - \cos x = 0$, третий уровень $\sin^3 x - \sin x = 0$. Организует работу детей и при необходимости отвечает на вопросы. Приглашает трёх учеников из каждой группы к доске для демонстрации и объяснения своего решения.	работают в парах и обсуждают решения, задают вопросы учителю. Некоторые ученики демонстрируют свое решение на доске.	коррекция. Коммуникативные: работа в парах.
Самостоятельная работа (8 мин.)	Предлагает дифференцированную самостоятельную работу, состоящую из трёх уравнений для каждой из групп учеников	Решают уравнения самостоятельно, проверяют по образцу после выполнения.	Регулятивные: самооценка. Познавательные: применение знаний на практике.
Рефлексия (3 мин.)	Задает вопросы: • В чем суть разложения на множители? • Какие уравнения удобно решать этим методом? • Какие возникли трудности?	Отвечают на вопросы и пытаются продолжить фразу «Сегодня я научился…». «Мне было сложно…»	Личностные: самоанализ. Коммуникативные: аргументация своего мнения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как показывает практика, у подавляющего большинства школьников возникают трудности при изучении блока тригонометрии в старшей школе. Это связано со многими причинами, среди которых большой объем материала, высокая степень абстрактности изучаемых понятий и недостаточное количество учебного времени, которое отводится под изучение данного раздела. В следствии этого у многих детей снижается мотивация к обучению, а у некоторых вовсе пропадает. Несмотря на это, тригонометрия традиционно занимает важное место как в едином государственном экзамене по математике, так и во всевозможных олимпиадах и математических конкурсах. Исходя из этого, многие ученики вынуждены искать дополнительные пути изучения тригонометрии, часто прибегая к самостоятельному изучению дома, но в силу объективной сложности данного раздела, многие из них сталкиваются с рядом проблем, ведь без профессионального сопровождения учителя сложно достигнуть высоких результатов.

Разработанный курс по решению тригонометрических уравнений и неравенств призван помочь ученикам эффективно освоить программу и достигнуть высоких результатов на едином государственном экзамене по математике и на различных олимпиадах. Дифференцированный подход в обучении дает возможность ученикам с разными исходными знаниями и способностями изучать данный раздел в том темпе, в котором им будет комфортно, не пытаясь решать сложные задания с самого начала, либо наоборот, если ученик уверен в своих знаниях, то мы можем предложить ему нестандартные задания, которые требуют комплексного подхода и творческого мышления.

Таким образом, поставленные цели и задачи работы были достигнуты, факультативный курс был разработан и готов к использованию на уроках.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра и начала математического анализа 10 класс : учебник для общеобразовательных учреждений : базовый и профильный уровни / С. М. Никольский [и др.]. М. : Просвещение, 2009. 430 с.

2. Алгебра и начала математического анализа 10 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций : базовый и углубленный уровни / А. Г. Мордкович [и др.]. М. : Мнемозина, 2014. 463 с.

3. Алгебра и начала математического анализа. Углубленный уровень. 10 класс /Г. К. Муравин [и др.]. М. : Дрофа, 2013. 318 с.

4. Алгебра и начала математического анализа: учебник для 10 кл. средней школы (базовый и профильный уровни) / Ю. М. Колягин [и др.]. М. : Просвещение, 2011. 368 с.

5. Алимов Ш. А. Математика : алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : учеб. для общеобразовательных организаций: базовый и углубл. уровни. М. : Просвещение, 2016. 463 с.

6. Горский Е. А. Использование электронных средств обучения при изучении тригонометрических функций // Вестник Псковского государственного университета. Серия : Естественные и физико-математические науки. 2015. С. 68.

7. ЕГЭ Тригонометрические уравнения и неравенства URL: https://mathb-ege.sdamgia.ru/test?theme=75. Заглавие с экрана (дата обращения: 03.12.2024).

8. Жафяров А. Ж. Методология и технология повышения компетентности учителей, студентов и учащихся по тригонометрии. Н. : Новосибирский государственный педагогический университет, 2011. 235 с.

9. Зайцева М. А. Виды дифференцированных заданий и некоторые вопросы методики их предъявления URL: https://nsportal.ru/shkola/korrektsionnayapedagogika/library/2014/01/11/vidydifferen

tsirovannykh-zadaniy-i-nekotorye-0. Заглавие с экрана (дата обращения: 02.12.2024).

10. Звавич В. И. Тригонометрические уравнения (решение уравнений + варианты самостоятельных работ) // Математика в школе. 2000. № 3. С. 18-27.

11. Зеленина О. А. Дифференцированное обучение в начальной школе URL: https://www.1urok.ru/categories/10/articles/37873. Заглавие с экрана (дата обращения: 01.12.2024).

12. Капин А. В. Технологическая карта урока математики для 11 класса на тему "Решение тригонометрических уравнений методом введения новой переменной" URL: https://infourok.ru/tehnologicheskaya-karta-uroka-matematikidlya-11-klassa-na-temu-reshenie-trigonometricheskih-uravnenij-metodomvvedeniya-novoj-p-6800215.html. Заглавие с экрана (дата обращения: 10.12.2024).

13. Колягин Ю. М. Профильная дифференциация обучения математике // Математика в школе. 1990. № 4. С. 21-26.

14. Мамонтова Т. С. Приемы запоминания значений тригонометрических функций // Научно-методический журнал "Концепт". 2018. № 8. С. 51.

15. Мурадова С. Р. К вопросу обучения тригонометрии в основной общеобразовательной школе // Лучшая студенческая статья 2018 : сборник статей XIII Международного научно-практического конкурса. В 2-х частях. Пенза : МЦНС "Наука и Просвещение", 2018. С. 166

16. Мурадова С. Р. К вопросу обучения тригонометрии в основной общеобразовательной школе // Лучшая студенческая статья 2018 : сборник статей XIII Международного научно-практического конкурса. В 2-х частях. Пенза : МЦНС "Наука и Просвещение", 2018. С. 166

17. Примерная рабочая программа ФГОС ФРП-Математика-10-11 классы база // Единое содержание общего образования общего образования. URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/20.pdf. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.12.2024).

18. Примерная рабочая программа ФГОС ФРП-Математика-10-11 классы углубленный уровень. // Единое содержание общего образования общего образования. URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/20.pdf. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.12.2024).

19. Современные образовательные технологии обучения. // Аксаринская СОШ, МАОУ. URL: http://aksarinskayaschool.ru/wpcontent/uploads/files/Технология%20дифференцированного%20обучения.PDF. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.12.2024).

20. Утеева Р. А. Теоретические основы организации учебной деятельности учащихся при дифференцированном обучении математике в средней школе : специальность 13.00.02 «Теория и методика обучения и воспитания (по областям и уровням образования)» : диссертация на соискание ученой степени доктора педагогических наук / Утеева Роза Азербаевна ; Москва, 1998. 37 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Самостоятельная работа по теме «Метод разложения на множители»

Уровень 1 (базовый)

Решите уравнения:

1) $\sin 2x - \sin x = 0$

2) $\cos^2 x - \cos x = 0$

3) $2 \sin x \cos x = \cos x$

4) $\sin x \cdot \operatorname{tg} x = \sin x$

5) $\sin 3x + \sin x = 0$

Уровень 2 (средний)

Решите уравнения:

1) $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x$

2) $\sin 3x + \sin x = 0$

3) $2 \cos^2 2x = \sqrt{3} \cos 2x$

4) $\sin^3 x + \sin^2 x - 2 \sin x = 0$

5) $\frac{\cos^2 x - \cos x}{5} = 0$

Уровень 3 (продвинутый)

Решите уравнения:

1) $2 \cos^2 2x = \sqrt{3} \cos 2x$

2) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 4x = 1,5$

3) $6 \sin^2 x + 7 \cos x - 7 = 0$

4) $2 \sin^4 x + 3 \cos 2x + 1 = 0$

5) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 4 + 3 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 0$

Самостоятельная работа по теме «Метод замены переменной»

Уровень 1 (базовый)

Решите уравнение:

1) $2 \sin^2 x - \sin x = 0$

2) $\cos^2 x + 3\cos x - 4 = 0$

3) $\cos 2x + 5\cos x + 3 = 0$

4) $\sin^2 x + 3\sin x - 4 = 0$

5) $2\sin^2 x + 7\sin x + 3 = 0$

Уровень 2 (средний)

Решите уравнение:

1) $\cos 2x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

2) $\cos 2x = 1 - \cos(\frac{\pi}{2} - x)$

3) $\cos 2x + \sin^2 x = 0,75$

4) $6\sin^2 x + 15\sin(\frac{3\pi}{2} + x) - 12 = 0$

5) $\cos 2x + 3\cos x + 2 = 0$

Уровень 3 (продвинутый)

Решите уравнения:

1) $\cos 2x - 5\sqrt{2}\cos x - 5 = 0$. **Укажите корни принадлежащие промежутку** $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

2) $2\sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}\cos x$. **Укажите корни принадлежащие промежутку** $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

3) $6\sin^2 x + 7\cos x - 7 = 0$

4) $4\sin^2 x - 12\sin x + 5 = 0$

5) $\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 4 + 3\,\mathrm{ctg}\frac{x}{2} = 0$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Итоговая контрольная работа

Уровень 1 (базовый)

Решите уравнения:

1) $\sin^2 x - \sin x = 0$

2) $\sin 2x - \cos x = 0$

3) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$

4) $\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x} = 1 + \sin 2x$

5) $\sin x * \cos x \geq \frac{1}{4}$

Уровень 2 (средний)

Решите уравнения:

1) $\cos 2x = \sin(x + \frac{\pi}{2})$

2) $2\sin 2x = 4\cos x - \sin x + 1$

3) $3\cos x + 2\sin x = 1$

4) $2\cos^2 x + 2\sin 2x = 3$

5) $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 \leq 0$

Уровень 3 (продвинутый)

Решите уравнения:

1) $6\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 2 = 0.$

2) $\sin 2x - 2\sqrt{3}\cos^2 x - 4\sin x + 4\sqrt{3}\cos x = 0.$

3) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{2}.$

4) $\sqrt{3}\sin 2x + 3\cos 2x = 0$. Найдите все корни принадлежащие промежутку $\left[3\pi; \frac{9\pi}{2}\right]$.

5) $\sqrt{\cos x + \frac{1}{2}} > 2\cos x.$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Вводная самостоятельная работа на определение уровня подготовки.

Решите уравнения:

1) $\cos 2x - 3\cos x + 2 = 0$

2) $\sqrt{3}\sin 2x + 3\cos 2x = 0$

3) $\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right) = \cos x$

4) $\sin x = 1$

5) $\cos^2 x - \cos x = 0$

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«30» 10 2024 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Савинкиной Ангелины Руслановны
(ФИО полностью)

Тема работы «Методические особенности изучения тригонометрических уравнений и неравенств»

Утверждена приказом по Университету от «25.12» 2024 г. № 1350/о

Срок сдачи студентом законченной работы «6» мая 2025 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучить учебную литературу о тригонометрических уравнениях и неравенствах в школьном курсе математики.	Сентябрь – октябрь 2024	выполнено
2.	Выявить роль, место, методические особенности преподавания тригонометрии.	Ноябрь – декабрь 2024	выполнено
3.	Изучить литературу об использовании дифференцированного обучения.	Январь – февраль 2025	выполнено
4.	Определить методические особенности дифференцированного обучения на уроках тригонометрии.	Март – апрель 2025	выполнено
5.	Разработать факультативный курс по теме «Решение тригонометрических уравнений и неравенств на основе дифференцированного подхода».	Май – июнь 2025	выполнено

Дата выдачи задания «28» 10 2024г.

Руководитель _____ Никитин Н.Д.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

_____ Савинкина А.Р.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
заочной формы обучения
группы 21ФПМ1 Савинкиной А.Р.

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Савинкина Ангелина Руслановна, студентка 4 курса заочной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему *«Методические особенности изучения тригонометрических уравнений и неравенств»* выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

Савинкина
подпись
04.05.25
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 04.05.25
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР
подпись
Н.Д. Никитин
И.О.Ф.

Протокол
проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ»
выпускной квалификационной работы на тему: «Методические особенности изучения тригонометрических уравнений и неравенств»
студентки 4 курса Савинкиной Ангелины Руслановны
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика»
Руководитель ВКР Никитин Н.Д.

АНТИПЛАГИАТ
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАИМСТВОВАНИЙ

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - http://pnzgu.antiplagiat.ru

Отчет о проверке

Автор: Савинкина Ангелина Руслановна
Название документа: ВКР Савинкина А.

Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна
Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ

Совпадения: 27,81%
Оригинальность: 72,19%
Цитирования: 0%
Самоцитирования: 0%

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

Проверено: 91,4% текста документа, исключено из проверки: 8,6% текста документа. Разделы, отключенные пользователем: Титульный лист, Содержание, Библиография

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 111
Тип документа: Выпускная квалификационная работа
Дата проверки: 04.05.2025 13:26:59
Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 68
Символов в тексте: 72735
Слов в тексте: 9474
Число предложений: 1732

Дата 04.05.2025 Никитин Н.Д.

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методические особенности изучения тригонометрических уравнений и неравенств»
студентки Савинкиной Ангелины Руслановны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль подготовки «Математика», гр. 21ФПМ1

Работа Савинкиной Ангелины Руслановны посвящена вопросам изучения тригонометрических уравнений и неравенств в школе.

Актуальность темы состоит в том, что тригонометрия является одной из самых сложных тем всего курса математики старшей школы. Умения и навыки, которые формируются при изучении темы «Тригонометрия» применяются к решению огромного числа задач теоретического и прикладного характера. Вместе с тем у подавляющего большинства школьников возникают трудности при изучении блока тригонометрии в старшей школе. Это связано со многими причинами, среди которых большой объем материала, высокая степень абстрактности изучаемых понятий и недостаточное количество учебного времени, которое отводится под изучение данного раздела.

Цель исследования - разработка факультативного курса «Решение тригонометрических уравнений и неравенств».

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

В первой главе подробно проанализированы учебники алгебры, которые используются в школах, описаны методы решения тригонометрических уравнений и неравенств, а также разобраны задания, которые встречаются в ЕГЭ и частые ошибки.

Во второй главе подробно описан дифференцированный подход в обучении и его использование на уроках математики, в частности при изучении раздела тригонометрия. Так же здесь представлена программа факультативного курса, технологические карты двух уроков данного курса и самостоятельные работы.

Работа Савинкиной Ангелины Руслановны является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован автором при работе в школе.

Выпускная квалификационная работа Савинкиной Ангелины Руслановны заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель ВКР Никитин Николай Дмитриевич, доцент кафедры «Математическое образование», к.ф.-м.н. _____