

ЮЖНЫЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ВЫСШАЯ ШКОЛА БИЗНЕСА

Чурикова С.Ю., Бородина И.П.

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ИНСТРУМЕНТЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ
ОРГАНИЗАЦИЙ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

Ростов-на-Дону
Фонд науки и образования
2015

УДК 330.4
ББК 65.05

Рекомендовано кафедрой экономики и прикладной математики Высшей школы бизнеса Южного федерального университета в качестве учебно-методического пособия для студентов образовательных организаций высшего образования, изучающих дисциплины: «Методы принятия управленческих решений», «Экономико-математические методы», «Моделирование экономических процессов и систем».

Чурикова С.Ю., Бородина И.П.

Ч – 93 Экономико-математические методы и инструменты принятия решений: учебно-методическое пособие для образовательных организаций высшего образования. Ростов-на-Дону: Изд-во Фонд науки и образования, 2015. – 70 с.

ISBN 978-5-9907883-8-1

Рассмотрены современные экономико-математические методы и инструменты принятия решений в экономических системах. Показаны возможности этих методов для использования на практике. Практические примеры решения экономических и управленческих задач сопровождаются пояснениями.

Учебно-методическое пособие состоит из четырех разделов: «Примеры решения простых задач финансовой математики», «Примеры решения транспортных задач и задач о назначениях», «Примеры решения задач теории игр» и «Практические задания».

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов образовательных учреждений высшего образования, а также широкого круга специалистов в сфере управленческого анализа экономических систем и смежных областей деятельности.

ISBN 978-5-9907883-8-1

© Чурикова С.Ю., Бородина И.П., 2015

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение.....	4
1. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРОСТЫХ ЗАДАЧ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ	5
1.1 Нарощенные и дисконтированные суммы. Простые проценты.....	5
1.2 Сложные проценты.....	10
1.3 Чистый приведенный доход.....	12
1.4 Срок окупаемости.....	15
1.5 Внутренняя норма доходности.....	16
2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ О НАЗНАЧЕНИЯХ.....	19
2.1 Сущность транспортной задачи.....	19
2.2 Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов.....	21
2.3 Применение симплекс-алгоритма для решения задачи управления производством.....	37
2.4 Решение транспортной задачи в MS Excel.....	39
3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИГР.....	44
3.1. Элементы теории игр.....	44
3.2 Решение матричных игр в смешанных стратегиях.....	49
3.3 Игра 2×2	53
3.4 Критерии принятия решений в играх с «природой».....	56
4. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ.....	60
4.1 Задачи по финансовой математике.....	60
4.2 Транспортная задача.....	63
4.3 Задачи по теории игр.....	66
Библиографический список.....	68

ВВЕДЕНИЕ

Одним из результативных инструментов управления предприятием является моделирование явлений и процессов, протекающих на предприятии, позволяющее выявить рациональные и наименее затратные способы решения управленческих задач. В результате моделирования отдельных процессов деятельности предприятия, менеджмент получает актуальную информацию, необходимую для принятия решения. Именно поэтому для повышения эффективности управления предприятием важно разрабатывать и применять математические модели [1].

При разработке учебно-методического пособия использовался подход предполагающий, что у пользователей наличествуют элементарные знания в математике, а также дисциплин базового характера в сфере экономики и менеджмента. Структура пособия включает три популярных составляющих инструментальных экономико-математических методов используемых в управленческой деятельности: дисконтирование, решение транспортных задач и теорию игр. Примеры решения задач, представленные в пособии, дают пользователю возможность самостоятельно выполнить задания, предложенные в четвертом разделе.

В результате освоения представленного материала обучающийся сможет овладеть элементарным операционным полем экономико-математических инструментов и методов принятия управленческих решений, которое в дальнейшей деятельности позволит принимать оптимальные решения по различным проблемам производственной деятельности.

1.ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ПРОСТЫХ ЗАДАЧ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКИ

1.1 Нарощенные и дисконтированные суммы. Простые проценты

Финансовая математика – раздел количественного анализа финансовых операций, предметом которого является изучение функциональных зависимостей между параметрами коммерческих сделок или финансово-банковских операций и разработка на их основе методов решения финансовых задач определенного класса.

Процентные деньги или просто проценты в финансовых расчетах представляют собой абсолютную величину дохода (приращение денег) от предоставления денег в долг в любой его форме (причем эта финансовая операция может реально и не состояться): выдача денежной ссуды; продажа в кредит; сдача в аренду; депозитный счет; учет векселя; покупка облигаций и т.п.

Таким образом, проценты можно рассматривать как абсолютную «цену долга», которую уплачивают за пользование денежными средствами.

Абсолютные показатели чаще всего не подходят для сравнения и оценки ввиду их несопоставимости в пространстве и во времени. Поэтому в финансово-коммерческих расчетах широко пользуются относительными показателями.

Относительный показатель, характеризующий интенсивность начисления процентов за единицу времени, – процентная ставка. Методика расчета: отношение суммы процентных денег, выплачивающихся за определенный период времени, к величине ссуды. Этот показатель выражается либо в долях единицы, либо в процентах. Таким образом, процентная ставка показывает, сколько денежных единиц должен заплатить заемщик за пользование в течение определенного периода времени 100 единицами первоначальной суммы долга.

Начисление процентов, как правило, производится дискретно, т.е. за фиксированные одинаковые интервалы времени, которые носят название «период начисления», – это отрезок времени между двумя следующими друг за другом процедурами взимания процентов. Обычные или декурсивные (*postnumerando*) проценты начисляются в конце периода. В качестве единицы периода времени в финансовых расчетах принят год, однако это не исключает использования периода менее года: полугодие, квартал, месяц, день, час.

Период времени от начала финансовой операции до ее окончания называется сроком финансовой операции.

Для рассмотрения формул, используемых в финансовой математике, необходимо ввести ряд условных обозначений: I – проценты за весь срок ссуды (*interest*); PV – первоначальная сумма долга или современная (текущая) стоимость (*present value*); i – ставка процентов за период (*interest rate*), выраженная в долях единицы (например, 15% соответствует 0.15); FV – наращенная сумма или будущая стоимость (*future value*), т.е. первоначальная сумма долга с начисленными на нее процентами к концу срока ссуды; n – срок ссуды в годах.

После начисления процентов возможны два пути: либо их сразу выплачивать, по мере их начисления, либо отдать потом, вместе с основной суммой долга.

Увеличение суммы долга в связи с присоединением к ней процентных денег называется наращением, а увеличенная сумма – наращенной суммой.

Простая процентная ставка применяется к одной и той же первоначальной сумме долга на протяжении всего срока ссуды, т.е. исходная база (денежная сумма) всегда одна и та же.

Сложная процентная ставка применяется к наращенной сумме долга, т.е. к сумме, увеличенной на величину начисленных за предыдущий период процентов, таким образом, исходная база постоянно увеличивается.

При использовании простых ставок проценты (процентные деньги) определяются исходя из первоначальной суммы долга. Схема простых процентов предполагает неизменность базы, с которой происходит начисление процентов [2, 3].

Из определения процентов не трудно заметить, что проценты (процентные деньги) представляют собой, по сути, абсолютные приросты:

$$I = FV - PV \quad 1.1)$$

Поскольку база для их начисления является постоянной, то за ряд периодов общий абсолютный прирост составит их сумму или произведение абсолютных приростов на количество периодов ссуды:

$$I = i \cdot PV \cdot n \quad 1.2)$$

Тогда наращенную сумму по схеме простых процентов можно будет определять следующим образом:

$$FV = PV + I = PV + i \cdot PV \cdot n = PV \cdot (1 + i \cdot n) \quad 1.3)$$

Данная формула называется "формулой простых процентов".

Из формулы определения наращенной суммы (3) можно вывести формулы для определения остальных параметров ссуды:

Величина процентной ставки:

$$i = (FV/PV - 1)/n \quad (1.4)$$

Количество периодов:

$$n = (FV/PV - 1) / i \quad 1.5)$$

В финансовой практике часто приходится решать задачи, обратные определению наращенной суммы: по уже известной наращенной сумме (FV) следует определить неизвестную первоначальную сумму долга (PV).

Такие ситуации возникают при разработке условий финансовой сделки, или когда проценты с наращенной суммы удерживаются непосредственно при выдаче ссуды.

Термин дисконтирование в широком смысле означает определение значения стоимостной величины на некоторый момент времени при условии, что в будущем она составит заданную величину.

Первоначальную сумму долга (дисконтированную сумму) также можно определить из формулы (1.3):

$$PV = FV / (1+i*n) \quad (1.6)$$

Пример 1.1. Рассчитать будущую сумму вклада размером 75000 руб., размещенного под 11% годовых на один год.

Для решения этой задачи введем в ячейку B1 значение PV=75000 руб., в ячейку B2 - значение i=11%, в ячейку B3 - значение n=1 год, в ячейку B4 – формулу определения наращенной суммы (1.3), как представлено на рис. 1.1.

B4		fx =B1*(1+B2*B3)		
	A	B	C	D
1	PV	75000		
2	i	11%		
3	n	1		
4	FV	83250		

Рисунок - 1.1. Иллюстрация расчета примера 1.1

В ячейке B4 появится ответ: 83250 руб. Таким образом, через год наращенная сумма составит 83250 руб.

Пример 1.2. Определить, какая должна быть годовая процентная ставка, чтобы вложив 75000 руб. через год получить 83250 руб.

Для решения этой задачи можно воспользоваться выведенной нами формулой величины процентной ставки (1.4). Для этого введем в ячейку B1 значение PV=75000 руб., в ячейку B2 – формулу величины процентной ставки (1.4), в ячейку B3 - значение n=1, в ячейку B4 – значение FV=83250 руб., как показано на рисунке 1.2.

B2		fx =(B4/B1-1)/B3		
	A	B	C	D
1	PV	75000		
2	i	11%		
3	n	1		
4	FV	83250		

Рисунок - 1.2. Иллюстрация расчета примера 1.2

В ячейке B2 появится ответ: 11%.

Также для решения этой задачи можно было не выводить формулу величины процентной ставки из формулы определения наращенной суммы, а воспользоваться функцией Excel «Подбор параметра» [4,5]. Введем в ячейку B1 значение PV=75000 руб., ячейку B2 оставим пустой, поскольку значение процентной ставки i нам не известно, в ячейку B3 - введем значение n , в ячейку B4 – формулу определения наращенной суммы (1.3), как показано на рисунке 1.3.

B4		fx =B1*(1+B2*B3)		
	A	B	C	D
1	PV	75000		
2	i			
3	n	1		
4	FV	75000		

Рисунок - 1.3. Иллюстрация расчета примера 1.2 - подготовка к расчету наращенной суммы

В меню «Сервис» выберите пункт «Подбор параметра» [4.5]. Необходимо подобрать параметр i таким образом, чтобы значение формулы расчета FV было равно 83250 руб., т.е. в ячейке B4 необходимо установить значение 83250, как показано на рисунке 1.4.

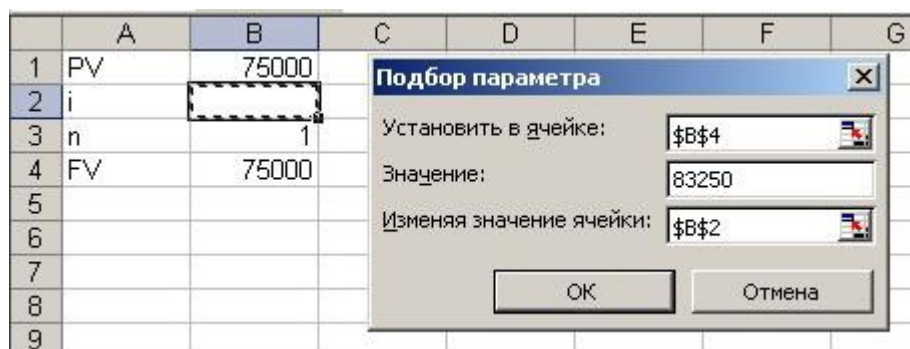


Рисунок - 1.4. Иллюстрация расчета примера 1.2 - использование функции Excel «Подбор параметра»

В результате подбора параметра должно быть найдено решение $i = 11\%$, которое будет вставлено в ячейку B2.

1.2 Сложные проценты

При использовании сложных ставок, т.е. если процентные деньги не выплачиваются сразу по мере их начисления, а присоединяются к первоначальной сумме долга, то долг, таким образом, увеличивается на невыплаченную сумму процентов, и последующее начисление процентов происходит на увеличенную сумму долга:

$$FV = PV + I = PV + PV \cdot i = PV \cdot (1 + i) \quad 1.7)$$

— за один период начисления;

$$FV = (PV + I) \cdot (1 + i) = PV \cdot (1 + i) \cdot (1 + i) = PV \cdot (1 + i)^2 \quad 1.8)$$

— за два периода начисления;

отсюда, за n периодов начисления формула примет вид:

$$FV = PV \cdot (1 + i)^n \quad 1.9)$$

Таким образом, по формуле (1.9) можно определить, какую сумму придется выплатить за ссуду величиной PV через n периодов при процентной ставке i .

Из формулы (1.9) можно вывести формулы для определения величины процентной ставки, срока ссуды и первоначальной суммы долга при известных остальных параметрах ссуды.

Процентная ставка:

$$i = (FV/PV)^{1/n} - 1 \quad (1.10)$$

Срок ссуды:

$$n = \log_{(1+i)}(FV/PV) \quad (1.11)$$

Первоначальная сумма долга (дисконтированная сумма):

$$PV = FV/(1+i)^n \quad (1.12)$$

Пример 1.3. Определить будущую сумму вклада в размере 2000 руб., вложенного под 15% годовых на 3 года с ежемесячным присоединением начисленных процентов к основной сумме вклада.

С помощью Excel эту задачу можно решить несколькими способами.

Способ 1: по формуле сложных процентов (1.9), представлен на рисунке 1.5.

	B4		fx =B1*(1+B2)^B3		
	A	B	C	D	
1	PV	2000			
2	i	1,250%			
3	n	36			
4	FV	3127,888			

Рисунок - 1.5. Иллюстрация расчета примера 1.3 (способ решения 1)

Примечание: обратите внимание, что ставка процентов за период (1 месяц) = 15% годовых / 12 месяцев = 1.25%, что соответствует 0.0125.

Таким образом, мы определили, что наращенная сумма через 3 года будет равна 3127,888 руб.

Способ 2: составить график наращения основной суммы вклада. Через месяц по формуле простых процентов (1.3) сумма вклада составит $2000 * (1 + 0.0125) = 2025$ руб.

На следующий месяц сумма вклада составит $2025 * (1 + 0.0125) = 2050.313$ руб. Для того, чтобы определить наращенную сумму через 3 года,

составим в Excel график наращения основной суммы вклада для всех 36 месяцев, как показано на рисунке 1.6.

	А	В	С
1	Месяц	Основная сумма	
2		2000	
3	1	=B2*(1+1,25%)	
4	2	=B3*(1+1,25%)	
5	3	=B4*(1+1,25%)	
6	*****	*****	*****
36	34	=B35*(1+1,25%)	
37	35	=B36*(1+1,25%)	
38	36	=B37*(1+1,25%)	

Рисунок - 1.6. Иллюстрация расчета примера 1.3 (способ решения 2)

На рисунке 1.7. представлен результат расчетов в Excel.

	А	В	С
1	Месяц	Основная сумма	
2		2000	
3	1	2025	
4	2	2050,313	
5	3	2075,941	
6	4	2101,891	
34	*****	*****	*****
35	33	3013,464	
36	34	3051,133	
37	35	3089,272	
38	36	3127,888	

Рисунок - 1.7. Иллюстрация результатов расчета примера 1.3 (способ решения 2)

В итоге мы получили такой же результат, как и по формуле сложных процентов - наращенная сумма через 2 года будет равна 1429.50 руб. Из этой таблицы также можно определить, какова будет сумма вклада после каждого начисления процентов.

Пример 1.4. Через 3 года следует накопить сумму в размере 7 тыс. руб. Какой должен быть размер вклада, размещаемый под 11%?

Решение. По формуле (1.12) $PV = 7000 / (1 + 0.11)^3 = 5118,34$ руб.

1.3 Чистый приведенный доход

Поскольку денежные средства распределены во времени, то и здесь фактор времени играет важную роль.

Метод расчета чистого приведенного дохода часто используется при оценке инвестиционных проектов, который предусматривает дисконтирование денежных потоков: все доходы и затраты приводятся к одному моменту времени. Инвестиции – это долгосрочные финансовые вложения экономических ресурсов с целью создания и получения выгоды в будущем, которая должна быть выше начальной величины вложений.

Центральным показателем в рассматриваемом методе является показатель NPV (net present value) – текущая стоимость денежных потоков за вычетом текущей стоимости денежных оттоков. Это обобщенный конечный результат инвестиционной деятельности в абсолютном измерении.

При разовой инвестиции расчет чистого приведенного дохода можно представить следующим выражением [3,4]:

$$NPV = \sum_{k=1}^n [R_k (1+i)^{-k}] - IC \quad (1.13)$$

где R_k – годовые денежные поступления в течение n лет, $k = 1, 2, \dots, n$; IC – стартовые инвестиции; i – ставка дисконтирования.

Важным моментом является выбор ставки дисконтирования, которая должна отражать ожидаемый усредненный уровень ссудного процента на финансовом рынке. Для определения эффективности инвестиционного проекта отдельной фирмой в качестве ставки дисконтирования используется средневзвешенная цена капитала, используемого фирмой для финансирования данного инвестиционного проекта.

Показатель NPV является абсолютным приростом, поскольку оценивает, на сколько приведенный доход перекрывает приведенные затраты: при $NPV > 0$ проект следует принять; при $NPV < 0$ проект не принимается, при $NPV = 0$ проект не имеет ни прибыли, ни убытков.

Необходимо отметить, что показатель NPV отражает прогнозную оценку изменения экономического потенциала фирмы в случае принятия данного проекта.

Пример 1.5. Фирма рассматривает вопрос вложения средств в инвестиционный проект, стоимость которого составляет 230 тыс. долларов. По прогнозам ежегодные поступления составят 70 тыс. долларов. Проект рассчитан на 4 года. Необходимая норма прибыли составляет 7,5%. Следует ли рассмотреть вопрос о вложении положительно?

Решение. Чистая стоимость проекта равна: $NPV = 70000 (1,075)^{-1} + 70000 (1,075)^{-2} + 70000 (1,075)^{-3} + 70000 (1,075)^{-4} - 230000 = 65116,28 + 60573,28 + 56347,24 + 52416,04 - 230000 = 4452,839$ долларов.

Поскольку величина чистой текущей стоимости 4452,839 долларов, т.е. $NPV > 0$, то вопрос о вложении средств в инвестиционный проект следует рассмотреть положительно.

Формулу (1.13) можно ввести в Excel, тогда можно будет увидеть сумму накопленного дисконтированного денежного потока в каждый год реализации инвестиционного проекта, как показано на рисунке 1.8.

	A	B	C	D
1	Период	Денежный поток	Дисконтированный денежный поток	Накопленный дисконтированный денежный поток
2	0	-230000	-230000	-230000
3	1	70000	=B3*(1+0,075)^-A3	=D2+C3
4	2	70000	=B4*(1+0,075)^-A4	=D3+C4
5	3	70000	=B5*(1+0,075)^-A5	=D4+C5
6	4	70000	=B6*(1+0,075)^-A6	=D5+C6

Рисунок - 1.8. Иллюстрация расчета примера 1.5

Результат расчетов представлен на рисунке 1.9.

C6		fx =B6*(1+0,075)^A6		
	A	B	C	D
1	Период	Денежный поток	Дисконтированный денежный поток	Накопленный дисконтированный денежный поток
2	0	-230000	-230000	-230000
3	1	70000	65116,27907	-164883,7209
4	2	70000	60573,28286	-104310,4381
5	3	70000	56347,23987	-47963,19821
6	4	70000	52416,03708	4452,838875

Рисунок - 1.9. Иллюстрация результатов расчета примера 1.5

Для проверки правильности ввода формул можно сравнить величину чистой текущей стоимости на 5-й год реализации проекта со значением, рассчитанным вручную (9599 долларов).

1.4 Срок окупаемости

Для анализа инвестиций применяют и такой показатель, как срок окупаемости (payback period method) – продолжительность времени, в течение которого дисконтированные на момент завершения инвестиций прогнозируемые денежные поступления равны сумме инвестиций.

Период окупаемости можно определить как ожидаемое число лет по формуле:

$$n_{\text{ок}} = \text{Число лет до года окупаемости} + (\text{Не возмещенная стоимость на начало года окупаемости} / \text{Приток наличности (дисконтированный) в течение года окупаемости}) \quad (1.14)$$

Данный показатель определяет срок, в течение которого инвестиции не будут приносить прибыль, поскольку реальный доход от инвестиционного проекта начнет поступать только по истечении периода окупаемости.

Пример 1.6. Определить срок окупаемости проекта, если размер инвестиций составляет 1,5 млн. руб., а денежные поступления в течение 4 лет будут составлять: 400; 900; 800; 750 тыс. руб. соответственно. Ставка дисконтирования 14%.

Решение. Необходимо рассчитать дисконтированный денежный поток. Составим таблицу 1.1.

Таблица 1.1

Дисконтированный денежный поток

Период	0	1	2	3	4
Денежный поток	-1500	400	900	800	750
Дисконтированный денежный поток	-1500	350,8772	692,52078	539,9772	444,0602
Накопленный дисконтированный денежный поток	-1500	-1149,12	-456,602	83,37518	527,4354

Период окупаемости проекта: $k_{\text{ок}} = 2 + 456,602 / 539,977 = 2,85$

Таким образом, период, реально необходимый для возмещения инвестированной суммы, составит 2,85 года или 2 года и 310 дней.

Срок окупаемости существует, если не нарушаются определенные соотношения между поступлениями и размером инвестиций. При ежегодных постоянных поступлениях это соотношение имеет вид: $R_k < IC \cdot i$, т.е. не всякий уровень дохода при прочих равных условиях приводит к окупаемости инвестиций.

1.5 Внутренняя норма доходности

При анализе эффективности инвестиционных проектов широко используется показатель внутренней нормы доходности (IRR – internal rate of return) – это ставка дисконтирования, приравнивающая сумму приведенных доходов от инвестиционного проекта к величине инвестиций, т.е. вложения окупаются, но не приносят прибыль. Величина этой ставки полностью определяется "внутренними" условиями, характеризующими инвестиционный проект.

Применение данного метода сводится к последовательной итерации (повторения) нахождения дисконтирующего множителя, пока не будет обеспечено равенство $NPV = 0$.

Выбираются два значения коэффициента дисконтирования, при которых функция NPV меняет свой знак, и используют формулу:

$$IRR = i_1 + NPV(i_1) / [NPV(i_1) - NPV(i_2)] \cdot (i_2 - i_1) \quad (1.15)$$

Инвестор сравнивает полученное значение IRR со ставкой привлеченных финансовых ресурсов (CC – Cost of Capital): если $IRR > CC$, то проект можно принять; если $IRR < CC$, проект отвергается; $IRR = CC$ проект имеет нулевую прибыль.

Пример 1.7. Рассчитать внутреннюю норму доходности проекта, где затраты составляют 1,5 млн. руб., а денежные поступления в течение 4 лет будут составлять: 400; 900; 800; 750 тыс. руб. соответственно.

Решение. Расчет по ставке 20%: $NPV = 333,33 + 625 + 462,96 + 361,69 - 1500 = 282,986$ тыс. руб.

Поскольку $NPV > 0$, то новая ставка дисконтирования должна быть больше 20 %.

Расчет по ставке 30%: $NPV = 307,7 + 532,5 + 364 + 262,6 + - 1500 = -33$ тыс. руб.

Вычисляем внутреннюю ставку доходности: $IRR = 20 + [282,986 / [282,986 - (-33)]] \cdot (30 - 20) = 28,95\%$.

Внутренняя норма доходности проекта равна 28,95%.

Точность вычисления обратная величине интервала между выбираемыми процентными ставками, поэтому для уточнения величины процентной ставки длина интервала принимается за 1%.

Пример 1.8. Уточнить величину ставки для предыдущего примера.

Решение. Для процентной ставки 28%: $NPV = 312,5 + 549,316 + 381,5 + 279,4 + - 1500 = 22,68$ тыс. руб.

Для процентной ставки 29%: $NPV = 310 + 541 + 372,6 + 270,8 - 1500 = -5,5$ тыс. руб.

Уточненная величина: $IRR = 28 + [22,68 / [22,68 - (-5,5)]] \cdot (29 - 28) = 28,8\%$.

Внутреннюю ставку доходности легко рассчитать с помощью функции Excel «Подбор параметра» [4.5]. Для этого введем в ячейку A1 формулу для расчета NPV (1.15), при этом предполагается, что величина ставки будет находиться в ячейке B1: $400 * (1 + B1)^{-1} + 900 * (1 + B1)^{-2} + 800 * (1 + B1)^{-3} + 750 * (1 + B1)^{-4} - 1500$.

Нам необходимо подобрать величину ставки (ячейка B1) таким образом, чтобы значение формулы расчета NPV было равно 0, т.е. в ячейке A1 необходимо установить значение 0, как показано на рисунке 1.10.

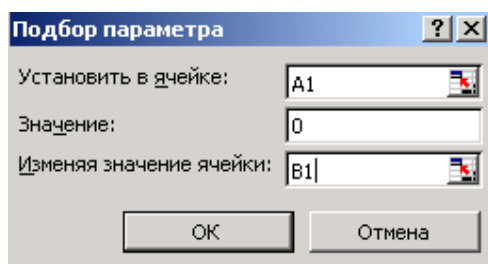


Рисунок - 1.10. Иллюстрация расчета примера 1.8

В результате подбора параметра должно быть найдено решение, которое будет вставлено в ячейку B1 (рис. 1.11).

	А	В
1	0	28,80%

Рисунок - 1.11. Иллюстрация расчета примера 1.8 с использованием функции «Подбор параметра»

Таким образом, точное значение верхнего предела процентной ставки, по которой фирма может окупить кредит для финансирования инвестиционного проекта, равняется 28,8%.

2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ И ЗАДАЧ О НАЗНАЧЕНИЯХ

2.1. Сущность транспортной задачи

Однородный груз необходимо доставить из разных мест отправки. Известны, объем груза отправляемый из каждого пункта и объем груза доставляемый в пункт назначения. Характеристики отправителя несущественны. Требуется таким образом организовать перевозки, чтобы обеспечить минимальный общий пробег груза, минимизировав затраты на транспортировку. Экономико-математическая модель транспортной задачи представляют в виде транспортной таблицы или матрицы [6, 7].

Таблица 2.1

Экономико-математическая модель транспортной задачи

<div>Пункт назначения</div> <div>Пункт отправления</div>		потребители и их спрос				
		B_1	...	B_j	...	B_n
		b_1	...	b_j	...	b_n
A_1	a_1	<div>x_{11}<div>C_{11}</div></div>	...	<div>x_{1j}<div>C_{1j}</div></div>	...	<div>x_{1n}<div>C_{1n}</div></div>
...	...	...	...	...	...	...
A_i	a_i	<div>x_{i1}<div>C_{i1}</div></div>	...	<div>x_{ij}<div>C_{ij}</div></div>	...	<div>x_{in}<div>C_{in}</div></div>
...	...	...	...	...	...	...
A_m	a_m	<div>x_{m1}<div>C_{m1}</div></div>	...	<div>x_{mj}<div>C_{mj}</div></div>	...	<div>x_{mn}<div>C_{mn}</div></div>

Условные обозначения в табл.2.1: A_i – название пункта отправления; B_j – название пункта назначения; a_i – производственная мощность поставщиков; b_j – спрос потребителей; m – число поставщиков; n – число потребителей; i – номер строки (i -й поставщик) $i = 1 \dots m$; j – номер столбца (j -й потребитель) $j = 1 \dots n$; c_{ij} – показатель критерия оптимальности, удельные затраты на транспортировку единицы продукции (себестоимость перевозок) от поставщика i до потребителя j ; x_{ij} – количество продукции, перевозимое от

поставщика i до потребителя j , план перевозок, распределение поставок, корреспонденция грузов.

Для описания задачи принимаем следующие обозначения.

Каждый поставщик предоставляет ровно столько продукции, сколько у него есть, т. е. сумма поставок по каждой строке равна мощности a_i этой строки:

$$a_i = \sum_{j=1}^n x_{ij}, \quad i = 1 \dots m \quad (2.1)$$

Каждый потребитель получает ровно столько продукции, сколько ему требуется, т. е. сумма поставок по каждому столбцу равна спросу b_j этого столбца:

$$b_j = \sum_{i=1}^m x_{ij}, \quad j = 1 \dots n \quad (2.2)$$

Из описанных условий (2.1) и (2.2) следует:

$$\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \quad (2.3)$$

Принимает, что если $\sum_{i=1}^m a_i \neq \sum_{j=1}^n b_j$, то транспортная задача линейного программирования называется открытой. Если $\sum_{i=1}^m a_i < \sum_{j=1}^n b_j$, то назовем транспортную задачу несбалансированной задачей с дефицитом. Иначе, если $\sum_{i=1}^m a_i > \sum_{j=1}^n b_j$ то считаем, что рассматривается несбалансированная задача с избытком.

Чтобы определить суммарные затраты на перевозки, достаточно просуммировать произведения объёмов каждой поставки на соответствующие им удельные затраты на транспортировку. Принимаем, что план оптимален, если целевая функция F может быть сведена к минимуму:

$$F = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij} \cdot c_{ij} \rightarrow \min, \quad a_{ij} \geq 0, b_{ij} \geq 0, x_{ij} \geq 0 \quad (2.4)$$

Если соблюдается условие (2.3), то транспортная задача является закрытой, в ином случае проводится процедура добавления фиктивных поставщиков и потребителей. Открытую транспортную задачу приводят к закрытому виду. Вводится фиктивный потребитель (ФВ) или фиктивный поставщик (ФА). Разница между производственной мощностью и спросом относится на счёт фиктивных показателей. Расходы по доставке груза фиктивному потребителю нулю, так как груз фактически не перевозится.

2.2 Алгоритм решения транспортной задачи методом потенциалов

Метод потенциалов относят к группе методов последовательного приближения. Первоначально определяется исходный допустимый план перевозок, который, зачастую, не является оптимальным, а затем, используя процедуру итерации, допустимый план приводится к оптимальному варианту.

Далее представлен формульно-словесный алгоритм решения методом потенциалов.

Пример 2.1. Рассмотрим пример транспортной задачи (табл. 2.2).

В табл. 2.2 по строкам матрицы представлены пункты отправления от A_1 до A_4 и объемы перевозимого груза в тоннах – 100, 150, 90, 30 т, а по столбцам – пункты (станции) назначения от B_1 до B_5 и объемы выгружаемого груза – 40, 80, 110, 50, 90 т. Рассматривая транспортная задача является сбалансированной ($a_i = b_j = 370$ т), поэтому отсутствует необходимость введения фиктивного потребителя или фиктивного поставщика.

На пересечении строк и столбцов в клетках матрицы в правых верхних углах ячеек записаны показатели критерия оптимальности транспортной задачи (затраты на перевозку единицы груза или кратчайшие расстояния между соответствующими пунктами (станциями) погрузки и выгрузки). Как следует из матрицы расстояние между станцией погрузки A_1 и станцией выгрузки B_1 , равно 10 (или 100, 1000 и т. д.) км, потом – 9, 8, 5 км и т. д.

Целью решения транспортной задачи является поиск способов всех объемов перевозок между всеми пунктами (станциями) погрузки и выгрузки (корреспонденций), позволяющий обеспечить минимальный объем грузооборота в тонно-километрах. Назовем планом любую совокупность корреспонденций, обеспечивающую весь объем перевозок, а минимальный грузооборот, – оптимальным планом перевозок.

Таблица 2.2

Исходная транспортная матрица

Пункт отправления \ Пункт назначения		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
		40	80	110	50	90
A ₁	100	10	9	8	5	3
A ₂	150	4	7	13	6	2
A ₃	90	8	6	9	7	1
A ₄	30	5	4	7	9	2

Пошагово рассмотрим алгоритм решения транспортной задачи линейного программирования.

Шаг 1. Формирование опорного плана.

Любой исходный для последующего решения план называют опорным планом. Для построения опорного плана существует ряд методов, одним из простых является метод северо-западного угла (табл. 2.3).

В «северо-западной» клетке матрицы – A₁B₁ записываем максимально возможную поставку – 40 т (объем выгрузки 40 т, ресурсы станции погрузки 100 т). Так как ресурсы станции погрузки A₁ не исчерпаны, продвинемся по первой строке вправо и запишем в клетку A₁B₂ корреспонденцию с максимально возможной величиной – 60 т. Таким образом добиваемся, что ресурсы станции A₁ полностью использованы, но спрос станции выгрузки B₂ не удовлетворен. Тогда от клетки A₁B₂ опускаемся вниз до клетки A₂B₂ и записываем в нее поставку равную 20 т. Описанным способом следуем далее до последней «юго-западной» клетки матрицы.

Таблица 2.3

Метод северо-западного угла

Пункт назначения \ Пункт отправления		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
		40	80	110	50	90
A ₁	100	40 10	60 9	8	5	3
A ₂	150	4	20 7	110 13	20 6	2
A ₃	90	8	6	9	30 7	60 1
A ₄	30	5	4	7	9	30 2

В результате указанных действий получаем допустимый план перевозок груза. Таким образом, грузооборот транспортной задачи (сумма произведений корреспонденций на расстояние, рассчитанная по табл. 2.3) составит:

$$F_{\text{св-зап.}} = 40 \cdot 10 + 60 \cdot 9 + 20 \cdot 7 + 110 \cdot 13 + 20 \cdot 6 + 30 \cdot 7 + 60 \cdot 1 + 30 \cdot 2 = 2960 \text{ т*км.}$$

Проверим матрицу на вырождения после расстановки корреспонденции, проверив выполнение условия:

$$m + n - 1 = N_{\text{баз}}, \quad (2.5)$$

где m – количество строк, n – количество столбцов, $N_{\text{баз}}$ – количество базисных клеток. То есть число клеток матрицы, содержащих корреспонденции, должно быть равно сумме строк и столбцов без единицы. Решаемый пример соответствует условию (2.5): $8 = 4 + 5 - 1$.

Если план транспортной задачи, отвечает условию $(n + m - 1)$ то его называют базисным планом. Базисными также называются клетки матрицы, содержащие поставки. Небазисными клетками называют те, в которых поставки отсутствуют.

В качестве замечания отметим, что при использовании метода северо-западного угла не учитываются значения показателей критерия оптимальности в клетках матрицы, что является существенным недостатком. Поэтому поставки могут оказаться в клетках с заведомо высокой ценой или большим расстоянием. Опорный план, полученный с использованием этого

метода может быть, далек от оптимального, что приведет к большому объему последующих расчетов для доведения его до оптимального.

При ручном решении транспортных задач предпочтительным является метод минимальной стоимости (метод наименьшего элемента в матрице). Суть этого метода заключается в следующем. В транспортной матрице выбирается клетка с минимальной стоимостью (расстоянием). В рассматриваемом примере это клетка A_3B_5 . В нее записывается максимально возможная поставка – это 90 т (табл. 2.4).

Таблица 2.4

Метод наименьшего элемента в матрице

Пункт отправления \ Пункт назначения		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
		40	80	110	50	90
A_1	100	<div>10</div>	<div>9</div>	<div>8</div>	<div>5</div>	<div>3</div>
A_2	150	<div>4</div>	<div>7</div>	<div>13</div>	<div>6</div>	<div>2</div>
A_3	90	<div>8</div>	<div>6</div>	<div>9</div>	<div>7</div>	<div>1</div>
A_4	30	<div>5</div>	<div>4</div>	<div>7</div>	<div>9</div>	<div>2</div>

Далее отыскиваются клетка, включающее следующее по величине поставка. В нашей задаче это две клетки с расстоянием 2 км в пятом столбце. Однако в эти клетки поставки корреспонденцию грузов ставить нельзя, поскольку спрос станции B_5 полностью удовлетворен поставкой со станции A_3 . На этом основании исключим столбец 5 из дальнейшего построения плана.

Клетки A_2B_1 и A_4B_2 являются следующими по величине показателя критерия оптимальности значение расстояния 4 км. Выбираем одну из них, например, A_2B_1 и записываем в нее поставку 40 т. Далее идет поставка в 30 т. в клетке A_4B_2 , затем A_1B_4 – 50 т, A_2B_2 – 50 т. Остальные ресурсы станций погрузки, оставшиеся после предыдущих действий, распределяем между клетками третьего столбца в клетки A_1B_3 и A_2B_3 .

Для исключения ошибок необходимо проверить балансы погрузки, выгрузки и суммы корреспонденций по строкам и по столбцам матрицы. Целевая функция F плана, составленного методом наименьшей стоимости, равна 2150 т*км . План, составленный с помощью метода наименьшего элемента в матрице существенно лучше плана, построенного методом северо-западного угла. Однако число базисных клеток в плане – 7. Это не соответствует условию (2.5), т. е. меньше требуемого на единицу. Такой план называют вырожденным (случай вырождения). Случай вырождения исправляют путем введения в матрицу недостающего количества базисных клеток с нулевыми поставками. Нулевую поставку вводят в матрицу рядом с базисной клеткой, которая послужила причиной отсутствия базисной клетки.

Для того чтобы выяснить, почему «исчезают» поставки, обратимся к методу северо-западного угла. Из табл. 2.3 видно, что после заполнения «северо-западной» клетки, рядом с ней появляется соседняя базисная клетка, потом еще одна и т.д. Цепочка базисных клеток без разрыва следует до «юго-восточного угла» матрицы. Однако если бы в этой цепочке появилась клетка, связывающая поставщика и потребителя с равными объемами погрузки и выгрузки, и в нее была бы записана такая же поставка, то это привело бы к потере базисной клетки.

Описанная ситуация была реализована в табл. 2.4, когда в клетку A_3B_5 была добавлена корреспонденция объемом 90 т, равная объемам погрузки и выгрузки по соответствующим станциям. Поэтому необходимо ввести в план дополнительную базисную клетку с нулевой поставкой. Эта клетка должна стоять рядом с клеткой A_3B_5 . Из трех соседних клеток выбираем клетку с минимальным расстоянием, например, A_2B_5 . Записываем в нее корреспонденцию, равную «0» (табл. 2.5).

Причиной вырождения плана транспортной задачи может быть наличие поставщиков и потребителей с равными объемами погрузки и выгрузки или равными объемами сумм погрузки и выгрузки по нескольким станциям в различных комбинациях. Такие случаи необходимо находить для

того, чтобы правильно определять места для нулевых поставок. В процессе решения задачи возможны ситуации, когда число базисных клеток превышает величину « $n + m - 1$ ». Нарушение указанного условия показывает наличие ошибки допущенной при построении опорного плана, когда в какую-то клетку была записана не максимально возможная поставка.

Таблица 2.5

Добавление нулевой поставки

Пункт назначения \ Пункт отправления		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅
		40	80	110	50	90
A ₁	100	10	9	50 8	50 5	3
A ₂	150	40 4	50 7	60 13	6	0 2
A ₃	90	8	6	9	7	90 1
A ₄	30	5	30 4	7	9	2

Шаг 2. Проверка оптимальности плана.

Расчет потенциалов. Проверка оптимальности плана проводится с помощью назначения потенциалов. Потенциалы – это некие численные величины, которые назначаются каждой строке и каждому столбцу по определенным правилам. Обозначим через u_i потенциалы строк, а потенциалы столбцов – v_j . Потенциалы строк и столбцов могут принимать любые значения. Принято работать с положительными, целыми и относительно небольшими числами. Такой потенциал первоначально назначается любой строке или столбцу.

Проведем далее процедуру назначения потенциалов. Выберем базисную клетку с максимальным расстоянием. В рассматриваемом примере это клетка A_2B_3 . Присвоим строке, в которой находится эта клетка, потенциал, равный 0 ($u_3 = 0$). Далее можно рассчитать потенциалы столбцов по базисным клеткам строки 3 по формуле:

$$v_j = u_i + c_{ij} \quad (2.6)$$

Потенциал первого, второго, третьего и пятого столбцов соответственно: $v_1 = u_2 + c_{21} = 0 + 4 = 4$; $v_2 = u_2 + c_{22} = 0 + 7 = 7$; $v_3 = u_2 + c_{23} = 0 + 13 = 13$; $v_5 = u_2 + c_{25} = 0 + 2 = 2$.

Полученные потенциалы вписываем напротив соответствующих столбцов ниже матрицы. После нахождения потенциалов по всем базисным клеткам строки 2, переходим к расчету потенциалов строк.

Потенциал строки 1 рассчитываем по найденному потенциалу столбца 3 и базисной клетке A_1B_3 по формуле

$$u_i = v_j - c_{ij}, \quad (2.7)$$

где $u_1 = v_3 - c_{31} = 13 - 8 = 5$. Потенциал строки 3 будет равен: $u_3 = v_5 - c_{35} = 2 - 1 = 1$. Также рассчитываем потенциалы для всех строк и столбцов (табл. 2.6).

Таблица 2.6

Расстановка потенциалов и перераспределение поставок

Пункт назначения \ Пункт отправления		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	
		40	80	110	50	90	u_i
A ₁	100	10	9	8	5	3	5
A ₂	150	40	7	13	6	2	0
A ₃	90	8	6	9	7	1	1
A ₄	30	5	4	7	9	2	3
v_j		4	7	13	10	2	

Проверка соответствия небазисных клеток условию оптимальности. Оптимальный план транспортной задачи должен отвечать критерию оптимальности, который реализуется соответствием небазисных клеток матрицы следующему условию:

$$v_j - u_i \leq c_{ij}. \quad (2.8)$$

Если это условие (2.8) выполняется для всех небазисных клеток, то план является оптимальным, иначе, если условие не выполнено хотя бы для одной клетки, то план не оптимален. Тогда говорят, что существует некоторый план с меньшим функционалом.

Разность потенциалов может быть интерпретирована как некая условная цена перевозки единицы продукции по маршруту от станции «i» к станции «j». Если она ниже c_{ij} , значит, применение данного маршрута не улучшит план, а если c_{ij} ниже разности потенциалов, т. е. условие (2.8) не выполняется, то значит, существует лучший план, который необходимо найти.

Проверим условие (2.8) для табл. 2.6. анализируя каждую клетку: A_1B_1 : $4 - 5 < 10$, условие выполняется; A_1B_2 : $7 - 5 < 9$, условие выполняется и т. д.

Если для всех небазисных клеток условие (2.8) выполняется, то рассматриваемый план будет оптimalен.

В рассматриваемом примере условие не выполняется для клетки A_2B_4 ($10 - 0 > 6$), клетки A_3B_3 ($13 - 1 > 9$), а также для клеток A_3B_4 , A_4B_3 , следовательно, разработанный опорный план не оптimalен. Отметим эти клетки.

Шаг 3. Процедура улучшения плана.

Проведем процедуру улучшения плана, используя контур перераспределения поставок. Улучшение плана реализуется по одной из небазисных клеток, для которой условие оптимальности оказалось невыполненным.

В нашем плане наличествует четыре клетки с невыполненным условием оптимальности. Выбираем ту, для которой условие оптимальности не выполняется в наибольшей степени. В рассматриваемом примере это клетка A_2B_4 . Для нее условие оптимальности не выполнено на 4 единицы ($10 - 0 - 6 = 4$). Для этой клетки строим цепь перераспределения поставок.

Контур перераспределения поставок – это замкнутая ломаная линия, соединяющая клетки матрицы ходом шахматной ладьи. В вершинах контура обязательно расположена одна небазисная клетка (несоответствующая условию оптимальности), а остальные соответствуют только базисным клеткам. Линии контура могут пересекаться. Для небазисной клетки A_2B_4 цепь будет проходить по клеткам A_1B_4 , A_1B_3 , A_2B_3 (табл. 2.7).

Таблица 2.7

Возможные варианты построения цикла перераспределения

Пункт назначения \ Пункт отправления		В ₁	В ₂	В ₃	В ₄	В ₅
		b ₁	b ₂	b ₃	b ₄	b ₅
A ₁	a ₁	C ₁₁	C ₁₂	C ₁₃	C ₁₄	C ₁₅
A ₂	a ₂	C ₂₁	C ₂₂	C ₂₃	C ₂₄	C ₂₅
A ₃	a ₃	C ₃₁	C ₃₂	C ₃₃	C ₃₄	C ₃₅
A ₄	a ₄	C ₄₁	C ₄₂	C ₄₃	C ₄₄	C ₄₅

В нашем примере конфигурация контура (цепи поставок) простая. Однако контур может иметь любую форму, в том числе и прихотливую (табл. 2.7). Для построения контура используют эвристические методы анализа при этом, учитывая, что каждая небазисная клетка транспортной матрицы обязательно имеет одну цепь перераспределения поставок.

Перераспределение поставок (табл. 2.6) производится по контуру. Определим объем перераспределения поставок, присвоив клеткам – вершинам контура – знаки «+/-». В небазисную клетку A₂V₄ ставим «+», поскольку в нее будет вводиться поставка. Чередую «+» с «-», расставляем знаки по всем вершинам контура. Величина объема перераспределения поставок принимается равной минимальной поставке в отрицательной клетке. В нашем случае это 50 единиц груза. Суть перераспределения в том, что к поставкам в положительных клетках прибавляется найденный объем, а для отрицательных клеток отнимается. Результат представлен в табл. 2.6.

Целевая функция F нового плана, представленного в табл. 2.6 (выделенные поставки), составляет 1950 т*км, что на 200 т*км меньше значения функционала F предыдущего плана, а, значит, план поставки улучшен.

Полученный улучшенный план, представленный в табл. 2.6, также требует проверки на оптимальность, поэтому возвращаемся к операции 2. Процесс решения задачи повторяется до тех пор, пока не будет получен оптимальный план. Эта совокупность повторяющихся действий носит

итеративный (циклический) характер. Через определенное число итераций может быть найден оптимальный план. После этого осуществляется переход от второй операции к четвертой (табл. 2.8).

Таблица 2.8

Повторение шагов 2, 3

Пункт отправления \ Пункт назначения		B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	B ₅	u _i
		40	80	110	50	90	
A ₁	100	<div><div></div><div>10</div></div>	<div><div></div><div>9</div></div>	<div><div>100</div><div>8</div></div>	<div><div></div><div>5</div></div>	<div><div></div><div>3</div></div>	5
A ₂	150	<div><div>40</div><div>4</div></div>	<div><div>60 50</div><div>7</div></div>	<div><div>10</div><div>13</div></div>	<div><div>50</div><div>6</div></div>	<div><div>0</div><div>2</div></div>	0
A ₃	90	<div><div></div><div>8</div></div>	<div><div></div><div>6</div></div>	<div><div>*</div><div>9</div></div>	<div><div></div><div>7</div></div>	<div><div>90</div><div>1</div></div>	1
A ₄	30	<div><div></div><div>5</div></div>	<div><div>20 30</div><div>4</div></div>	<div><div>*</div><div>10</div></div>	<div><div></div><div>9</div></div>	<div><div></div><div>2</div></div>	3
v _j		4	7	13	6	2	

От матрицы к матрице грузооборот должен снижаться. Если план не оптимален, то необходимо произвести повторный расчёт потенциалов, проверить небазисные клетки на соответствие условию оптимальности. Покажем дальнейшее решение задачи, основываясь на данных табл. 2.6. Результат действий второй и третьей итераций приведен в табл. 2.8.

Таблица 2.9

Оптимальный план поставок

Пункт отправления \ Пункт назначения		В ₁		В ₂		В ₃		В ₄		В ₅		u _i
		40		80		110		50		90		
A ₁	100	10		9		8		5		3		2
A ₂	150	4		7		13		6		2		0
A ₃	90	8		6		9		7		1		1
A ₄	30	5		4		7		9		2		3
v _j		4		7		10		6		2		

Проверка плана на оптимальность показывает, что для двух клеток условия оптимальности не выполняются. После перераспределения поставок по клетке A₄B₃, получаем новый план (табл. 2.9).

Проверка плана перевозок на оптимальность по условию (2.8) показала, что для всех небазисных клеток матрицы условия оптимальности выполняются. Целевая функция оптимального плана равна 1920 т*км.

Таким образом, разработан план перевозок, обеспечивающий минимальный объем работы при транспортировке всего груза между станциями погрузки и выгрузки.

Пример 2.2. Рабочие бригады С-1, С-2 и С-3 численностью 70, 99 и 80 человек принимают участие в работах. Для выполнения работы в пунктах Π_1 , Π_2 , Π_3 и Π_4 необходимо выделить соответственно 47, 59, 49 и 43 человека. Производительность труда работников зависит от производственного плана, от численности бригады и характеризуется для указанных бригад и пунктов в штуках на человека за рабочий день и представлена в матрице (табл.2.10).

Таблица 2.10

Производительность труда работников

B_j		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4
A_i		47	59	49	43
CO-1	70	3	7	2	5
CO-2	99	2	3	4	6
CO-3	80	6	4	3	5

Общая численность человек - сумма = 249 чел.

Требуется: распределить работников по пунктам так, чтобы за рабочий день было произведено максимальное количество продукции; определить, сколько штук будет произведено в четырех пунктах при оптимальном распределении работников.

Решение.

1.Проверяем задачу на сбалансированность.

Общее количество человек в рабочих бригадах на 51 больше требуемого общего количества человек для производства изделий. Задача является не сбалансированной.

Чтобы сбалансировать задачу, добавляем фиктивный пункт производства, для которого нужно выделить 51 человека.

Производительность труда работников на фиктивном пункте принимаем равной НУЛЮ.

Составляем исходную матрицу (табл.2.11).

Таблица 2.11

Исходная матрица

B_i		Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5
A_i		47	59	49	43	51
CO-1	70	3	7	2	5	0
CO-2	99	2	3	4	6	0
CO-3	80	6	4	3	5	0

Сумма = 249 чел.

Обозначения: Π_5 – фиктивный пункт производства; C_{ij} – производительность труда работников i -го СО на j -м пункте производства; X_{ij} – количество работников, направляемое из i -го СО на j -ое пункт производства; U_i – условные оценки СО; V_j – условные оценки пунктов производства.

2. Составляем математическую модель прямой и двойственной задач.

Модель прямой задачи: Целевая функция (на максимум)

$$Z_{\max} = 3x_{11} + 7x_{12} + 2x_{13} + 5x_{14} + 2x_{21} + 3x_{22} + 4x_{23} + 6x_{24} + 6x_{31} + 4x_{32} + 3x_{33} + 5x_{34}$$

Система ограничений:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = 70,$$

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 47,$$

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = 99,$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 59,$$

$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = 80,$$

$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 49,$$

$$x_{ij} \geq 0$$

$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 43,$$

$$x_{15} + x_{25} + x_{35} = 51,$$

$$x_{ji} \geq 0$$

Модель

двойственной

задачи:

$$Z_{\min} = 70U_1 + 99U_2 + 80U_3 + 47V_1 + 59V_2 + 49V_3 + 43V_4 + 51V_5$$

$$U_i + V_j \geq C_{ij}, \quad U_i, V_j - \text{произвольного знака}$$

3. Решаем задачу по методу максимального элемента.

Составляем опорный план (табл.2.12).

Опорный план

A_i		B_i	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5	U_i
			47	59	49	43	51	
CO-1	70		59			11 - W	+W	$U_1=-1$
		3	7	2	5	0		
CO-2	99	18 - W		49	32 + W			$U_2=0$
		2	3	4	6	0		
CO-3	80	29 + W					51 - W	$U_3=4$
		6	4	3	5	0		
V_i			$V_1=2$	$V_2=8$	$V_3=4$	$V_4=6$	$V_5=-4$	$W=11$

Проверяем на вырожденность.

$Z = m + n - 1 = 3 + 5 - 1 = 7$ Базисных клеток 7. План не вырожден.

Проверяем опорный план на оптимальность:

Задаем $U_2 = 0$ и определяем значения потенциалов.

$$U_2 + V_1 = 2, \quad V_1 = 2,$$

$$U_2 + V_3 = 4, \quad V_3 = 4,$$

$$U_2 + V_4 = 6, \quad V_4 = 6,$$

$$U_3 + V_1 = 6, \quad U_3 = 6 - V_1 = 6 - 2 = 4,$$

$$U_1 + V_2 = 7, \quad V_2 = 7 - U_1 = 7 - (-1) = 8,$$

$$U_1 + V_4 = 5, \quad U_1 = 5 - V_4 = 5 - 6 = -1,$$

$$U_3 + V_5 = 0, \quad V_5 = 0 - U_3 = -4,$$

Вычисляем оценки для всех незаполненных клеток (Δ_{ij})

$$\Delta_{11} = U_1 + V_1 - 3 = -1 + 2 - 3 = -2 \quad -$$

$$\Delta_{12} = U_1 + V_3 - 2 = -1 + 4 - 2 = 1 \quad +$$

$$\Delta_{15} = U_1 + V_5 - 0 = -1 + (-4) - 0 = -5 \quad -$$

$$\Delta_{22} = U_2 + V_2 - 3 = 0 + 8 - 3 = 5 \quad +$$

$$\Delta_{25} = U_2 + V_5 - 0 = 0 + (-4) - 0 = -4 \quad -$$

$$\Delta_{32} = U_3 + V_2 - 4 = 4 + 8 - 4 = 8 \quad +$$

$$\Delta_{33} = U_3 + V_3 - 3 = 4 + 4 - 3 = 5 \quad +$$

$$\Delta_{34} = U_3 + V_4 - 5 = 4 + 6 - 5 = 5 \quad +$$

Опорное решение не является оптимальным, так как имеются отрицательные оценки.

Переходим к следующему плану. Для клетки (1,5) с наименьшей оценкой (-5) строим цикл. Ставим в эту клетку коэффициент W со знаком «+» и применяя метод наибольшего элемента находим цикл, (табл. 2.12). Определяем из цикла $W = 11$. Осуществляем сдвиг по циклу и строим следующий план (табл. 2.13).

Таблица 2.13

Текущий план для $W = 11$

A_i		B_i	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5	U_i
			47	59	49	43	51	
CO-1	70			59			11	$U_1=4$
			3	7	2	5	0	
CO-2	99	7	-W		49	43	+W	$U_2=0$
			2	3	4	6	0	
CO-3	80	40	+W				40	$U_3=4$
			6	4	3	5	0	
V_i			$V_1=2$	$V_2=3$	$V_3=4$	$V_4=6$	$V_5=-4$	

Проверяем план на оптимальность методом максимального элемента, как в п.3.

Задаем $U_2 = 0$ и определяем значения потенциалов.

$$U_2 + V_1 = 2, \quad V_1 = 2,$$

$$U_2 + V_3 = 4, \quad V_3 = 4,$$

$$U_2 + V_4 = 6, \quad V_4 = 6,$$

$$U_3 + V_1 = 6, \quad U_3 = 6 - V_1 = 6 - 2 = 4,$$

$$U_3 + V_5 = 0, \quad V_5 = 0 - U_3 = -4,$$

$$U_1 + V_5 = 0, \quad U_1 = 0 - V_5 = 0 - (-4) = 4,$$

$$U_1 + V_2 = 7, \quad V_2 = 7 - U_1 = 7 - 4 = 3,$$

Вычисляем оценки для всех незаполненных клеток (Δ_{ij})

$$\begin{aligned}\Delta_{11} &= U_1 + V_1 - 3 = 4 + 2 - 3 = 3 \quad + \\ \Delta_{13} &= U_1 + V_3 - 2 = 4 + 4 - 2 = 6 \quad + \\ \Delta_{14} &= U_1 + V_4 - 5 = 4 + 6 - 5 = 5 \quad + \\ \Delta_{22} &= U_2 + V_2 - 3 = 0 + 3 - 3 = 0 \quad + \\ \Delta_{25} &= U_2 + V_5 - 0 = 0 + (-4) - 0 = -4 \quad - \\ \Delta_{32} &= U_3 + V_2 - 4 = 4 + 3 - 4 = 3 \quad + \\ \Delta_{33} &= U_3 + V_3 - 3 = 4 + 4 - 3 = 5 \quad + \\ \Delta_{34} &= U_3 + V_4 - 5 = 4 + 6 - 5 = 5 \quad +\end{aligned}$$

Определяем из цикла $W=7$ Осуществляем сдвиг по циклу и строим следующий план (табл. 2.14).

Таблица 2.14

Текущий план для $W=7$

A_i		B_i	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	Π_5	U_i
			47	59	49	43	51	
CO-1	70		3	7	2	5	0	$U_1=0$
CO-2	99		2	3	4	6	0	$U_2=0$
CO-3	80		6	4	3	5	0	$U_3=0$
V_i			$V_1=6$	$V_2=7$	$V_3=4$	$V_4=6$	$V_5=0$	

Проверяем план на оптимальность методом максимального элемента, как в п.3.

Задаем $U_2 = 0$ и определяем значения потенциалов.

$$U_2 + V_3 = 4, \quad V_3 = 4,$$

$$U_2 + V_4 = 6, \quad V_4 = 6,$$

$$U_2 + V_5 = 0, \quad V_5 = 0,$$

$$U_3 + V_5 = 0, \quad U_3 = 0,$$

$$U_3 + V_1 = 6, \quad V_1 = 6,$$

$$U_1 + V_5 = 0, \quad U_1 = 0,$$

$$U_1 + V_2 = 7, \quad V_2 = 7,$$

Вычисляем оценки для всех незаполненных клеток (Δ_{ij})

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{11} &= U_1 + V_1 - 3 = 0 + 6 - 3 = 3 + \\ \Delta_{13} &= U_1 + V_3 - 2 = 0 + 4 - 2 = 2 + \\ \Delta_{14} &= U_1 + V_4 - 5 = 0 + 6 - 5 = 1 + \\ \Delta_{21} &= U_1 + V_1 - 2 = 0 + 6 - 2 = 4 + \\ \Delta_{22} &= U_1 + V_2 - 3 = 0 + 7 - 3 = 4 + \\ \Delta_{32} &= U_3 + V_2 - 4 = 0 + 7 - 4 = 3 + \\ \Delta_{33} &= U_3 + V_3 - 3 = 0 + 4 - 3 = 1 + \\ \Delta_{34} &= U_3 + V_4 - 5 = 0 + 6 - 5 = 1 + \end{aligned} \right\} \text{нет отрицательных оценок}$$

план табл. 2.14 оптимален.

Определяем значение целевой функции прямой и двойственной задачи:

$$Z_{\max} = 7 \cdot 59 + 4 \cdot 49 + 6 \cdot 43 + 6 \cdot 47 = 1149$$

$$Z_{\min} = 6 \cdot 47 + 7 \cdot 59 + 4 \cdot 49 + 6 \cdot 43 = 1149$$

Исходя из первой теоремы двойственности, в условии нашей задачи $Z_{\max} = Z_{\min} = 1149$ ($Z = Z'$), последний план оптимален

Ответ:

1) Чтобы за рабочий день было произведено максимальное количество продукции, следует распределить работников по пунктам следующим образом:

- Из С-1 выделить 59 человек для производства на Π_2 , а 11 человек останутся в С;

- из С-2 выделить 49 человек для производства на Π_3 и 43 человека для производства на Π_4 , а 7 человек останутся в СО;

- из С-3 выделить 47 человек для производства на Π_1 , а 33 человека оставить в С.

2) При данном оптимальном распределении работников на четырех пунктах будет создано 1149 штук изделий.

2.3 Применение симплекс-алгоритма для решения задачи управления производством

При решении задачи оптимизации с числом свободных переменных большим трех, следует использовать симплекс-метод, позволяющий определять экстремум функции.

Рассмотрим задачу об организации производства, обеспечивающей максимум прибыли на производственном предприятии.

Пример 2.3. Производственное предприятие имеет три цеха, оснащенных различным оборудованием. В цехах может быть отремонтировано x_1 , x_2 и x_3 единиц техники ежемесячно. Всего же направлено в ремонт 10 единиц техники. При этом за ремонт одного образца рабочие первого цеха получают сдельно 1 млрд. руб., второго цеха – 2 млрд. руб., и третьего также – 2 млрд. руб. По условию договора предприятия с профсоюзом рабочим должно быть выплачено в виде заработной платы не менее 8 млрд. руб.

Станковый парк предприятия обеспечен на 18 тыс. станко-часов. На ремонт одного образца в первом цехе требуется 1000 станко-часов, второго – 2000 станко-часов, а в третьем цехе – 4000 станко-часов. За ремонт одного образца в первом цехе завод получит 4 млрд. руб. прибыли, во втором – 5 млрд. руб. прибыли, в третьем – 3 млрд. руб. прибыли. Требуется найти такой план ремонта техники, при котором будет обеспечена наибольшая прибыль.

Постановка задачи: Целевая функция $f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \max$.

Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8$, $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18$.

Решение задачи симплекс-методом

1. Перейдем от задачи на максимум целевой функции к задаче на минимум, введем функцию $g = -f = -4x_1 - 5x_2 - 3x_3$, которую будем минимизировать с прежними ограничениями.

2. Перейдем от ограничений неравенств к ограничениям-равенствам. Введем новые переменные x_4 и x_5 позволяющие перейти к равенствам, по следующим формулам: $x_4 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8$; $x_5 = -x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 18$.

3. Получим задачу линейного программирования:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10;$$

$$x_4 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8;$$

$$x_5 = -x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 18.$$

$$g = -4x_1 - 5x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$$

4. Найдем вид канонической задачи линейного программирования. Для этого выразим в первом уравнении x_1 через другие неизвестные и подставим это его выражение во второе и третье уравнения, а также в уравнение для функции g . Получим:

$$x_1 = -x_2 - x_3 + 10;$$

$$x_4 = x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 8 = x_2 + x_3 + 2;$$

$$x_5 = -x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 18 = -x_2 - 3x_3 + 8.$$

$$g = -4x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -x_2 + x_3 - 40.$$

5. Шаг симплекс-алгоритма. Из полученного выражения для целевой функции g видно, что для ее уменьшения следует увеличивать неизвестное x_2 . Неизвестное x_3 увеличивать нецелесообразно, потому что это приведет к увеличению функции g . Все неизвестные x_1 неотрицательны.

Увеличение x_2 возможно до 10 согласно первому уравнению и до 8 согласно второму. При больших значениях x_2 станут отрицательными значения x_5 и x_1 . Второе ограничение не препятствует увеличению x_2 . Из этого следует, что прежде проявляется второе ограничение, разрешающим элементом является число -1 .

Поэтому выразим x_2 из второго ограничения и подставим его выражение в первое в третье ограничения, а также в выражение для целевой функции. Получим:

$$x_1 = -x_5 + 2x_3 + 2;$$

$$x_4 = -x_5 - 2x_3 + 10;$$

$$x_2 = -x_5 - 3x_3 + 8.$$

$$g = x_5 + 4x_3 - 48.$$

6. В выражении для функции цели g оба неизвестных входят со знаком «+». Поэтому можно утверждать, что найден оптимальный план: $x_5=x_3=0$. Подставив эти значения в последнюю систему ограничений, получим и остальные неизвестные: $x_1=2$, $x_2=8$, $x_4=10$.

Оптимальное значение функции $g = -48$. В качестве заключения по решению задачи можно сказать, что ремонт в третьем цехе производить не следует, в первом необходимо ремонтировать 2, а во втором 8 единиц техники. При этом прибыль составит 48 млрд. руб.

2.4 Решение транспортной задачи в MS Excel

Рассмотрим последовательность решения предыдущего примера с помощью надстройки «Поиск решения» в MS Excel [4, 5].

Пример 2.4. Вначале вводятся исходные данные (рис. 2.1).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2		Объем производства, потребления и себестоимость							
3		Пункты производства	Пункты потребления						
4				B1	B2	B3	B4	B5	
5				40	80	110	50	90	
6		A1	100	10	9	8	5	3	
7		A2	150	4	7	13	6	2	
8		A3	90	8	6	9	7	1	
9		A4	30	5	4	7	9	2	
10									
11		Ограничения для транспортной задачи							
12		Пункты производства	Пункты потребления						
13				B1	B2	B3	B4	B5	
14				4	4	4	4	4	
15		A1	5	1	1	1	1	1	
16		A2	5	1	1	1	1	1	
17		A3	5	1	1	1	1	1	
18		A4	5	1	1	1	1	1	
19									
20			min	125					

Рисунок - 2.1. Исходные данные

Расчет ограничений транспортной задачи выполняется в следующей последовательности: в ячейки столбика C15:C18 вводим зависимость с

помощью функции СУММ Мастера функций. Для этого в диалоговом окне вводим адрес строки. На рис. 2.2 представлен адрес для ячейки C15. Аналогичные расчеты следует выполнить для всех пунктов производства и потребления.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2			Объем производства, потребления и себестоимость							
3		Пункты производства	Пункты потребления							
4			B1	B2	B3	B4	B5			
5			40	80	110	50	90			
6		A1	100	10	9	8	5	3		
7		A2	150	4	7	13	6	2		
8		A3	90	8	6	9	7	1		
9		A4	30	5	4	7	9	2		
10										
11			Ограничения для транспортной задачи							
12		Пункты производства	Пункты потребления							
13			B1	B2	B3	B4	B5			
14			4	4	4	4	4			
15		=СУММ(D15:H15)		1	1	1	1	1		
16		A2	5	1	1	1	1	1		
17		A3	5	1	1	1	1	1		
18		A4	5	1	1	1	1	1		
19										
20			min	125						

Аргументы функции

СУММ

Число1 D15:H15 = {1;1;1;1;1}
Число2 = число

= 5

Суммирует аргументы.

Число1: число1;число2;... от 1 до 30 аргументов, которые суммируются.
Логические значения игнорируются.

Рисунок - 2.2. Ввод ограничительных уравнений

В ячейку D20 вводим целевую функцию (рис. 2.3), представляющую собой сумму произведений себестоимости перевозки тонны груза на один километр и, соответственно, объем перевозок, условно принятый за единицу по всем пунктам производства и потребления.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2			Объем производства, потребления и себестоимость							
3		Пункты производства		Пункты потребления						
4				B1	B2	B3	B4	B5		
5				40	80	110	50	90		
6		A1	100	10	9	8	5	3		
7		A2	150	4	7	13	6	2		
8		A3	90	8	6	9	7	1		
9		A4	30	5	4	7	9	2		
10										
11			Ограничения для транспортной задачи							
12		Пункты производства		Пункты потребления						
13				B1	B2	B3	B4	B5		
14				4	4	4	4	4		
15		A1	5	1	1	1	1	1		
16		A2	5	1	1	1	1	1		
17		A3	5	1	1	1	1	1		
18		A4	5	1	1	1	1	1		
19										
20			min	=СУММПРОИЗВ(D6:H9;D15:H18)						

Аргументы функции

СУММПРОИЗВ

Массив1 D6:H9 = {10;9;8;5;3;4;7;13;}

Массив2 D15:H18 = {1;1;1;1;1;1;1;1;1}

Массив3 = массив

= 125

Возвращает сумму произведений соответствующих элементов массивов или диапазонов.

Массив2: массив1;массив2;... от 2 до 30 массивов, чьи компоненты нужно перемножить, а затем сложить полученные произведения. Все

Рисунок - 2.3. Ввод целевой функции

Запускаем «Поиск решения» и заполняем соответствующие ячейки (рис. 2.4.). В поле с единицами располагаются изменяемые ячейки.

При вводе ограничений должны соблюдаться равенства содержимого ячеек рассчитанных сумм указанным в условии значениям (балансовые ограничения транспортной задачи). Введенные зависимости должны быть равны объему производства и потребления соответственно.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
2			Объем производства, потребления и себестоимость						
3		Пункты производства		Пункты потребления					
4				B1	B2	B3	B4	B5	
5				40	80	110	50	90	
6		A1	100	10	9	8	5	3	
7		A2	150	4	7	13	6	2	
8		A3	90	8	6	9	7	1	
9		A4	30	5	4	7	9	2	
10									
11			Ограничения для транспортной задачи						
12		Пункты производства		Пункты потребления					
13				B1	B2	B3	B4	B5	
14				4	4	4	4	4	
15		A1	5	1	1	1	1	1	
16		A2	5	1	1	1	1	1	
17		A3	5	1	1	1	1	1	
18		A4	5	1	1	1	1	1	
19									
20			min	125					
21									
22									
23									
24									
25									
26									
27									
28									
29									
30									
31									
32									
Дей									

Поиск решения

Установить целевую ячейку:

Равной:

☐ максимальному значению
☐ значению:

☒ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Предположить

Ограничения:

\$C\$15:\$C\$18 = \$C\$6:\$C\$9

\$D\$14:\$H\$14 = \$D\$5:\$H\$5

Добавить

Изменить

Удалить

Выполнить

Заккрыть

Параметры

Восстановить

Рисунок - 2.4. Этап «Поиск решения»

Во вкладке «Параметры» отметить «Линейная модель» и «Неотрицательная значения». Затем нажать «Выполнить» и сохранить полученное значение (рис. 2.5).

	A	B	C	D	E	F	G	H	
2		Объем производства, потребления и себестоимость							
3		Пункты производства		Пункты потребления					
4	B1			B2	B3	B4	B5		
5	40			80	110	50	90		
6		A1	100	10	9	8	5	3	
7		A2	150	4	7	13	6	2	
8		A3	90	8	6	9	7	1	
9		A4	30	5	4	7	9	2	
10									
11		Ограничения для транспортной задачи							
12		Пункты производства		Пункты потребления					
13	B1			B2	B3	B4	B5		
14	40			80	110	50	90		
15		A1	100	0	0	100	0	0	
16		A2	150	40	60	0	50	2,33E-12	
17		A3	90	0	0	0	0	90	
18		A4	30	0	20	10	0	0	
19									
20		min		1920					
21									
22									
23									
24									
25									
26									
27									
28									
29									
30									
31									

Результаты поиска решения

?

✕

Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены.

☒ Сохранить найденное решение

☐ Восстановить исходные значения

Тип отчета

Результаты

Устойчивость

Пределы

ОК

Отмена

Сохранить сценарий...

Справка

Рисунок - 2.5. Результаты этапа «Поиск решения»

Как видно из рисунка 2.5, функционал ($F = 1920 \text{ т*км}$), найденный с помощью метода потенциалов, совпадает со значением целевой функции определённой с помощью надстройки «Поиск решения» в MS Excel.

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ИГР

3.1. Элементы теории игр

Математическая теория конфликтных ситуаций называется теорией игр (ТИ). Задачей ТИ является выработка рекомендаций поведения, которое приводило бы к наибольшей выгоде той или иной стороны.

Игра – это упрощенная формализованная модель реальной конфликтной ситуации.

Игрок – это одна из сторон в игровой ситуации.

Стратегия игрока – это его правила действия в каждой из возможных ситуаций игр [8].

Стратегия игрока, обеспечивающая ему максимальный выигрыш, называется оптимальной стратегией этого игрока.

Некооперативные игры в сравнении с кооперативными.

Экономические игры, в которых играют фирмы, могут быть кооперативными и некооперативными. Игра кооперативная, если игроки могут заключать соглашения, обязывающие их планировать совместные стратегии. Игра некооперативная, если невозможны заключения таких соглашений и принуждение к их выполнению [9].

Пример кооперативной игры: торг между покупателем и продавцом относительно цены товара. Если издержки производства товара составляют 100\$, и покупатель оценивает его в 200\$, возможна кооперативная игра, потому что соглашение о продаже товара по цене между 101\$ и 199\$ максимизирует сумму излишка покупателя и прибыли продавца, улучшая положение обеих сторон.

Другая кооперативная игра может включать две фирмы в некоторой отрасли, которые договариваются о совместных инвестициях в развитие новой технологии (ни одна из фирм не в состоянии сделать это в одиночку). Если фирмы намерены заключить контракт, в котором есть пункт о разделе

прибыли от совместных инвестиций, то возможно кооперативное решение улучшающее положение обеих сторон.

Пример некооперативной игры: две конкурирующие фирмы, учитывая вероятное поведение друг друга независимо одна от другой определяют стратегию ценообразования или рекламы для завоевания рынка.

Основное различие между кооперативными и некооперативными играми лежит в возможности соглашений [9].

Матричные игры. Решение матричных игр в чистых стратегиях. Рассмотрим парную игру с нулевой суммой, в которой выигрыш одного игрока равен проигрышу другого.

Пример 3.1. У каждого игрока А и В конечное число возможных действий – чистых стратегий.

Игрок А располагает m чистыми стратегиями $A_1, A_2, \dots, A_m$. Игрок В – n чистыми стратегиями $B_1, B_2, \dots, B_n$. Игра определена, если указано правило, определяющее соответствие каждой паре чистых стратегий A_i и B_j число a_{ij} – выигрыш игрока А за счет игрока В. При $a_{ij} < 0$ игрок А платит игроку В сумму $|a_{ij}|$. Если известны значения a_{ij} выигрыша для каждой пары (A_i, B_j) стратегий, то можно составить матрицу игры – платежную матрицу.

Платежная матрица – это табличная запись функции выигрыша, исхода игры (табл.3.1).

Таблица 3.1

Платежная матрица

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2	B_3		B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}		a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}		a_{2n}
...	...	...	...		
A_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{m3}		a_{mn}

Целью игроков является выбор наиболее выгодных стратегий, доставляющих игроку А максимальную выгоду, а игроку В минимальный проигрыш. В теории игр предполагают, что каждый игрок считает своего противника экономически рациональным и стремящимся помешать сопернику получить наибольшую выгоду.

Стратегию игрока А называют оптимальной, если при ее применении выгода игрока А не уменьшается, какими бы стратегиями не пользовался игрок В.

Оптимальной стратегией для игрока В называют стратегию, при использовании которой потери игрока В не увеличиваются, какие бы стратегии ни применял игрок А.

С учетом этого игрок А анализирует матрицу выигрышей: для каждой чистой стратегии A_i он определяет минимальное значение $\alpha_i = \min_j a_{ij}$ ($i = \overline{1, m}$). Затем по минимальным выигрышам α_i он отыскивает такую чистую стратегию A_{i_0} , при которой этот минимальный выигрыш будет максимальным, т.е. находит

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}.$$

Число α называется нижней чистой ценой игры (максимином). Оно показывает, какую минимальную выгоду может получить игрок А, применяя свои чистые стратегии при любых действиях игрока В. Соответствующая стратегия A_{i_0} игрока А называется максиминной.

Игрок В старается максимально уменьшить проигрыш. Для каждой чистой стратегии B_j он отыскивает $\beta_j = \max_i a_{ij}$ ($j = \overline{1, n}$). Затем по β_j находит свою стратегию B_{j_0} , при которой его проигрыш будет минимальным, т.е.

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}.$$

Число β называется верхней чистой ценой игры (минимаксом). Оно показывает, какой максимальный проигрыш при использовании своих чистых стратегий может быть у игрока В. Соответствующая чистая стратегия B_{j_0} игрока В минимаксной.

Игрок А, используя чистые стратегии обеспечивает выигрыш не меньше α , а игрок В в результате применения своих чистых стратегий не позволит игроку выиграть больше, чем β . Осмотрительность определяющая выбор игроками максиминной и минимаксной стратегий, называют принципом минимакса.

Пример 3.2. Найти максиминную и минимаксную стратегии в игре с

матрицей
$$\begin{pmatrix} 0 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решим заданную матрицу, представив ее в табличной форме (табл. 3.2).

Таблица 3.2

Табличная форма

	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	α_i
A ₁	0	4	-1	3	-1
A ₂	1	0	2	2	0
A ₃	3	1	-2	-1	-2
β_j	3	4	2	3	

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{-1; 0; -2\} = 0.$$

Максиминной чистой стратегией является A₂.

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min\{3, 4, 2, 3\} = 2.$$

Минимаксной для игрока В является стратегия B₃.

Теорема 1. В матричной игре нижняя чистая цена игры не превосходит верхней чистой цены игры, т.е. $\alpha \leq \beta$ [10].

Доказательство:

По определению

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i = \min_j a_{ij} \leq a_{ij} \\ \beta_j = \max_i a_{ij} \geq a_{ij} \end{aligned} \right| \Rightarrow \alpha_i = \min_j a_{ij} \leq a_{ij} \leq \max_i a_{ij} = \beta_j,$$

значит $\alpha_i \leq a_{ij} \leq \beta_j$ или $\alpha_i \leq \beta_j$.

Это неравенство справедливо при любых сочетаниях i и j . Будет оно справедливо для тех i и j , для которых $\max_i \alpha_i = \alpha$ и $\min_j \beta_j = \beta$, и при этих i и j получим $\alpha \leq \beta$.

Если в матричной игре нижняя и верхняя чистые цены игры совпадают, т.е. $\alpha = \beta$, то это игра имеет седловую точку в чистых стратегиях и чистую цену игры $v = \alpha = \beta$.

Обозначим через i^* и j^* номера чистых стратегий, при которых имеет место равенство $\alpha = \beta$. Пару чистых стратегий (A_{i^*}, B_{j^*}) игроков А и В, при которых достигается равенство $\alpha = \beta$, называют седловой точкой матричной игры, а элемент $a_{i^*j^*}$ матрицы, стоящий на пересечении i^* строки и j^* столбца, – седловым элементом платежной матрицы.

Седловый элемент $a_{i^*j^*}$ является наименьшим в i^* строке и наибольшим в j^* столбце, т.е. $(a_{ij^*} \leq a_{i^*j^*} \leq a_{ij})$. Поэтому, если игрок В отойдет от своей минимальной стратегии, то его проигрыш может увеличиться. Аналогично, отклонение игрока А от своей максимальной стратегии ведет к уменьшению его выгоды. Таким образом, минимальные стратегии в игре с седловой точкой обладают свойством устойчивости, создают ситуацию равновесия. Следовательно, если в матрице игры существует седловый элемент, то наилучшими для игроков являются их минимальные стратегии. Назовем чистые стратегии A_{i^*} и B_{j^*} , образующие седловый элемент, оптимальными чистыми стратегиями соответственно игроков А и В. Набор $\{A_{i^*}, B_{j^*}, v\}$ назовем решением игры.

Пример 3.3. Производственное предприятие планирует к массовому выпуску новый вид товаров. Спрос на новый товар не может быть точно определен. Предполагают, что его величина характеризуется тремя возможными состояниями (I, II, III). С учетом этих состояний анализируется три возможных варианта выпуска нового вида товара (A_1, A_2, A_3). Каждый из этих вариантов требует своих затрат и обеспечивает различный эффект. Прибыль (тыс. руб.), которую получает предприятие при данном объеме

выпуска нового вида товара и соответствующем состоянии спроса, определяется матрицей представленной в табл.3.3.

Таблица 3.3

Спрос на новый товар

	I	II	III
A ₁	22	22	22
A ₂	21	23	23
A ₃	20	21	24

Найти объем выпуска нового вида товара обеспечивающий среднюю величину прибыли при любом состоянии спроса.

Решение. Проверим, имеет ли исходная матрица седловую точку.

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \max_i a_i = \max\{22, 21, 20\} = 22 \\ \beta &= \min_j \beta_j = \min\{22, 23, 24\} = 22 \end{aligned} \right| \Rightarrow \alpha = \beta = 22$$

Число 22 – цена игры. Игра имеет седловую точку, соответствующую варианту A₁ выпуска нового вида товара. Объем выпуска нового вида товара, соответствующий данному варианту, обеспечивает прибыль в 22 тыс. руб. при любом состоянии спроса.

3.2 Решение матричных игр в смешанных стратегиях

В реальной практике, решая экономические и управленческие задачи редко можно встретить игры, решение которых может быть реализовано с использованием принципа минимакса. При отсутствии седловой точки нет и мотивов, которые удерживают игроков в рамках минимаксных стратегий при повторении игры. Однако с отклонением от них исчезает и гарантия минимаксного выигрыша.

Правомерным является вопрос возможности использования нескольких стратегий в процессе решения игры для гарантировано большего α выигрыша.

Стратегии, чередующиеся случайным образом, называются смешанными. При использовании смешанной стратегии перед каждой партией игры используется механизм случайного выбора (подбрасывание монеты, игральной кости и т.п.). При этом выбирается та стратегия, на которую пал жребий. В результате тактика становится более гибкой и противник не знает заранее, с какой обстановкой ему придется встретиться [11].

Пример 3.4. В табл. 3.4 представлены исходные данные. Игрок А может выиграть не менее 3 единиц, а игрок В может ограничить свой проигрыш (выигрыш игрока А) 6 единицами. Область между числами 3 и 6 является условно нейтральной, а каждый игрок может попытаться улучшить свой результат за счет этой области. A_2 и B_1 – минимаксные стратегии игроков.

Таблица 3.4

Исходные данные.

		B_1	B_2	α_i	$\alpha = 3, \beta = 6.$
	A_1	2	9	2	
	A_2	6	3	3	
	β_j	6	9		

Если игрок В отметит, что игрок А предпочитает стратегию A_2 , то он может использовать стратегию B_2 и уменьшить выигрыш игрока А до 3. Но если игрок А разоблачит замысел игрока В и применит стратегию A_1 , то он увеличит свой выигрыш до 9. В свою очередь, узнав об этом, игрок В выберет стратегию B_1 и понизит выигрыш игрока А до 2. Таким образом, в каждой партии игрокам надо так выбирать стратегии, чтобы противник о них не догадался, т.е. использовать механизм случайного выбора.

Пусть имеется игра $m \times n$, которую можно представить в виде таблицы (табл.3.5).

Обозначим через $p_1, p_2, \dots, p_m$ вероятности, с которыми игрок A использует чистые стратегии $A_1, A_2, \dots, A_m$. Ясно, что

$$p_i \geq 0, i = \overline{1, m}, \sum_{i=1}^m p_i = 1. \quad (3.1)$$

Упорядоченное множество $\vec{p} = (p_1; p_2; \dots; p_m)$ (m -мерный вектор), элементы которого удовлетворяют условиям (3.1), называют смешанной стратегией игрока A . Т.е. смешанной стратегией игрока A является полный набор вероятностей применения его чистых стратегий. Механизм случайного выбора чистых стратегий, который использует игрок A , обеспечивает ему множество смешанных стратегий. Любая чистая стратегия A_i есть частный случай смешанной стратегии $\vec{p} = (0; 0; \dots; 1; 0; \dots; 0)$ и, i -ая компонента которой равна 1, а остальные равны 0 [12].

Таблица 3.5

Игра $m \times n$

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2		B_n	p_i
A_1	a_{11}	a_{12}		a_{1n}	p_1
A_2	a_{21}	a_{22}		a_{2n}	p_2
...	...	...		...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	p_m
q_j	q_1	q_2		q_n	

Аналогично упорядоченное множество $\vec{q} = (q_1; q_2; \dots; q_n)$, элементы которого удовлетворяют соотношениям $q_j \geq 0, j = \overline{1, n}, \sum_{j=1}^n q_j = 1$, является смешанной стратегией игрока B .

Пусть игроки A и B применяют смешанные стратегии $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Это означает, что игрок A использует стратегию A_i с вероятностью p_i , а игрок B – стратегию B_j с вероятностью q_j . Вероятность выбора комбинации стратегий

(A_i, B_j) равна $P(A_i; B_j) = p_i q_j$, при этом будет получен выигрыш a_{ij} . При использовании смешанных стратегий игра носит случайный характер, случайной становится и величина выигрыша игрока A (проигрыша игрока B). Средняя величина выигрыша (математическое ожидание) является функцией от смешанных стратегий $\vec{p}$ и $\vec{q}$ и определяется:

$$f(\vec{p}; \vec{q}) = a_{11} p_1 q_1 + a_{12} p_1 q_2 + \dots + a_{mn} p_m q_n = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i q_j.$$

Функция $f(\vec{p}; \vec{q})$ называется платежной функцией игры с матрицей $(a_{ij})_{m \times n}$.

Для решения игры с точки зрения игрока A необходимо найти такие смешанные стратегии $\vec{p}$ и $\vec{q}$, при которых ему обеспечивался бы средний выигрыш, равный $\min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} f(\vec{p}; \vec{q})$. Эту величину назовем верхней ценой игры $\beta = \min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} f(\vec{p}; \vec{q})$.

Аналогичной должна быть ситуация для игрока B : нижняя цена игры $\alpha = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} f(\vec{p}; \vec{q})$.

Оптимальным назовем смешанные стратегии $\vec{p}^*$ и $\vec{q}^*$ игроков A и B , удовлетворяющие равенству:

$$\min_{\vec{q}} \max_{\vec{p}} f(\vec{p}; \vec{q}) = \max_{\vec{p}} \min_{\vec{q}} f(\vec{p}; \vec{q}) = f(\vec{p}^*; \vec{q}^*);$$

$$v = f(\vec{p}^*; \vec{q}^*) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} p_i^* q_j^* - \text{цена игры.}$$

Отметим свойства оптимальных смешанных стратегий [13].

1) Основная теорема теории игр: любая конечная матричная игра с нулевой суммой имеет, по крайней мере, одно решение, возможно, в смешанных стратегиях.

Применение оптимальной стратегии позволяет получить выигрыш, равный цене игры v , где $\alpha \leq v \leq \beta$.

2) Для того, чтобы смешанные стратегии $\vec{p}^* = (p_1^*; p_2^*; \dots; p_m^*)$ и $\vec{q}^* = (q_1^*; q_2^*; \dots; q_n^*)$ были оптимальными для игроков А и В в игре с матрицей $(a_{ij})_{m \times n}$ и ценой v необходимо и достаточно выполнение неравенств:

$$\sum_{i=1}^m a_{ij} p_i^* \geq v \quad (j = \overline{1, n});$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j^* \leq v \quad (i = \overline{1, m}).$$

3) Пусть $\vec{p}^*$ и $\vec{q}^*$ – оптимальные смешанные стратегии игроков А и В в игре I с матрицей $(a_{ij})_{m \times n}$ и ценой v . Тогда $\vec{p}^*$ и $\vec{q}^*$ будут оптимальными в игре I' с матрицей $(ba_{ij} + c)_{m \times n}$, где $b > 0$, и ценой $v' = bv + c$.

Благодаря этому утверждению любую платежную матрицу можно преобразовать в платежную матрицу, все элементы которой положительны, поэтому цена игры v' также положительна.

3.3 Игра 2×2

В приведенных формулах для α и β функции $\min$ и $\max$ вычисляются на бесконечных множествах смешанных стратегий, поэтому значения α и β нельзя найти путем перебора вариантов. Воспользуемся теоремой об активных стратегиях. Стратегии игроков, входящие в их оптимальные смешанные стратегии, называются активными.

В оптимальной смешанной стратегии $\vec{p}^* = (0; 0,2; 0,8; 0)$ активными являются стратегии A_2 и A_3 .

Теорема 2. Применение оптимальной смешанной стратегии обеспечивает игроку максимальный α средний выигрыш (или минимальный средний проигрыш), равный цене игры v , независимо от того, какую стратегию применяет другой игрок, если только тот не выходит за пределы своих активных стратегий [9].

Найдем решение в случае игры 2×2 .

Пример 3.5. У игроков A и B по две стратегии, игра не содержит седловую точку. Найдем оптимальную смешанную стратегию $\bar{p}^* = (p_1^*; p_2^*)$.

Решение. Матрица игры имеет вид, представленный на рис.3.1.

$A_i \backslash B_j$	B_1	B_2
A_1	a_{11}	a_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}

Рисунок - 3.1. Вид матрицы игры

Поскольку игра не имеет решения в чистых стратегиях, в оптимальной стратегии $\bar{q}^* = (q_1^*; q_2^*)$ игрока B числа $q_1^* \neq 0$ и $q_2^* \neq 0$, т.е. обе стратегии B_1 и B_2 активные. Тогда по теореме об активных стратегиях, если игрок A придерживается своей оптимальной стратегии $\bar{p}^* = (p_1^*; p_2^*)$, то игрок B может, не влияя на значение выигрыша, применять какую-либо из своих чистых активных стратегий B_1 или B_2 . Игрок A получит средний выигрыш равный цене игры. Имеем два уравнения:

$$a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v \text{ (при стратегии } B_1);$$

$$a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v \text{ (при стратегии } B_2).$$

Учитывая, что $p_1^* + p_2^* = 1$, будем иметь систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Решив ее, найдем оптимальную смешанную стратегию $\bar{p}^* = (p_1^*; p_2^*)$ игрока A и цену игры v . Рассуждая аналогично, для определения оптимальной стратегии игрока B получим систему уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* = v; \\ a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* = v; \\ q_1^* + q_2^* = 1. \end{cases}$$

Пример 3.6. Имеются две конкурирующие фирмы A и B , выпускающие однотипные изделия, соответственно видов I и II , которые могут быть окрашены в один из двух цветов: красный (кр.) или синий (син.). Изучение спроса покупателей показало, что если выпущены изделия I кр. и II

кр., то 40% покупателей получают I кр. и 60% – II кр. Если выпущены I кр. и II син., то 90% покупателей приобретают I кр. Если изготовлены I син. и II кр. будет продано 70% I син. Если сделаны I син. и II син., то 20% покупателей получат I син.

Найти оптимальные стратегии и цену матричной игры.

Решение. В табл. 3.6 представлена платежная матрица игры (выигрыш a_{ij} фирмы A).

Таблица 3.6

Платежная матрица примера 3.6

A \ B	II кр.	II син.	α_i
I кр.	-20	80	-20
I син.	40	-60	-60
β_j	40	80	

$$\left. \begin{array}{l} \alpha = \max\{-20, -60\} = -20 \\ \beta = \min\{40, 80\} = 40 \end{array} \right| \Rightarrow \alpha \neq \beta$$

– игра не имеет седловой точки.

Найдем оптимальное решение матричной игры в смешанных стратегиях.

Пусть фирма A придерживается своей оптимальной стратегии $\bar{p}^* = (p_1^*; p_2^*)$. По теореме об активных стратегиях, при применении фирмой B чистой стратегии B_1 или B_2 фирма A получит средний выигрыш, равный цене игры, т.е.

$$\begin{cases} -20p_1^* + 40p_2^* = v; \\ 80p_1^* - 60p_2^* = v; \\ p_1^* + p_2^* = 1. \end{cases}$$

Решим систему трех уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{cases} p_1^* = 1 - p_2^*; \\ -20(1 - p_2^*) + 40p_2^* = 80(1 - p_2^*) - 60p_2^*, \end{cases} \begin{cases} p_2^* = 1/2; \\ p_1^* = 1 - 1/2, \end{cases} \begin{cases} p_1^* = 1/2; \\ p_2^* = 1/2, \end{cases}$$

$$v = 80 \cdot \frac{1}{2} - 60 \cdot \frac{1}{2} = 10 \quad \bar{p}^* = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right), \quad v = 10.$$

– цена игры.

Составим систему уравнений для определения $\bar{q}^* = (q_1^*, q_2^*)$ оптимальной стратегии игрока В.

$$\begin{cases} -20q_1^* + 80q_2^* = 10; \\ 40q_1^* - 60q_2^* = 10; \\ q_1^* + q_2^* = 1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем $\bar{q}^* = \left(\frac{7}{10}, \frac{3}{10}\right)$.

При таких оптимальных стратегиях изделия фирмы А будут покупать 55%, фирмы В – 45% покупателей ($55\% + 45\% = 100\%$).

3.4 Критерии принятия решений в играх с «природой»

На практике встречаются ситуации, в которых один из игроков равнодушен к выигрышу и не стремится воспользоваться просчетами второго участника. Такая игра может быть реализована, когда в качестве одного из игроков выступает «природа». Под термином «природа» будем понимать комплекс внешних обстоятельств, при которых приходится принимать решения. Такая игра возникает, когда заранее неизвестен покупательный спрос на производимую продукцию или объем перевозок, который должна выполнить железная дорога и т.д. Игру такого типа называют игрой с «природой».

Пусть игрок А может использовать только стратегии $A_1, A_2, \dots, A_m$. Природа П также обладает множеством стратегий $P_1, P_2, \dots, P_n$. Под стратегией природы будем понимать совокупность внешних условий (или состояния природы), в которых игроку А приходится выбирать свою стратегию. Из прошлого опыта игроку А обычно известны возможные состояния природы, а иногда и вероятности, с которыми природа их реализует.

Если игрок А имеет возможность оценить последствия использования каждой своей чистой стратегии A_i в зависимости от любого состояния P_j

природы, т.е. если ему известен численный результат a_{ij} для каждой допустимой комбинации $(A_i; P_j)$, то игру можно задать платежной матрицей $(a_{ij})_{m \times n}$.

Время от времени выгодно от платежной матрицы перейти к матрице рисков, которая более четко оценивает превосходство одной стратегии по сравнению с другой при существующем состоянии природы.

Риском называют величину $r_{ij} = \beta_j - \alpha_{ij} \geq 0$; где $\beta_j = \max_i \alpha_{ij}$ — максимально возможный выигрыш игрока А при состоянии P_j (максимальный элемент j-го столбца платежной матрицы).

Рассмотрим критерии, на основе которых игрок А принимает решение, анализируя матрицу выигрышей или матрицу рисков.

Максимальный критерий Вальда для чистых стратегий является критерием крайнего пессимизма, т.к. игрок А исходит из предположения, что природа «действует» против него наихудшим образом. Игрок А выбирает такую чистую стратегию A_i , при которой наименьший выигрыш $\min_j \alpha_{ij}$ будет максимальным, т.е. обеспечивается максимум $W = \max_i \min_j \alpha_{ij}$. Иначе, здесь определяется обычная максимальная чистая стратегия игрока А.

Критерий минимального риска Сэвиджа, как и критерий Вальда, является критерием крайнего пессимизма. Критерий Сэвиджа рекомендует выбирать в качестве оптимальной ту чистую из стратегий A_i , при которой минимизируется величина $\max_j r_{ij}$ максимального риска, т.е. $S = \min_i \max_j r_{ij}$.

Критерий Гурвица (критерий пессимизма-оптимизма) рекомендует рассчитывать на нечто среднее. В области чистых стратегий оптимальной считается стратегия, найденная из условия:

$H = \max_i \{ \lambda \min_j \alpha_{ij} + (1 - \lambda) \max_j \alpha_{ij} \}$, где $\lambda \in (0; 1)$ и выбирается из субъективных соображений. При $\lambda = 1$ $H = \max_i \min_j \alpha_{ij}$. Критерий Гурвица превращается в критерий Вальда. При $\lambda = 0$ $H = \max_i \max_j \alpha_{ij}$ — в критерий

крайнего оптимизма. При $0 < \lambda < 1$ получаем среднюю позицию между крайним пессимизмом и крайним оптимизмом.

На практике анализируют ситуацию с точки зрения нескольких критериев, и если рекомендации совпадают, то выбирают рекомендуемое решение.

Пример 3.7. Руководство SM (супермаркета) заказывает товар вида А. Спрос на данный вид товара лежит в пределах от 6 до 9 единиц. Если заказать товара недостаточно, то его можно срочно заказать еще. Если спрос будет меньше наличного товара, то нереализуемый товар хранится на складе SM. Требуется определить такой объем заказа на товар, при котором дополнительные затраты, связанные с хранением и срочным завозом, были бы минимальными, если расходы на хранение единицы товара составляют 1 млн. руб., а по срочному заказу и завозу – 2 млн. руб.

Решение. Покупательский спрос выступает в качестве второго игрока – природы, стратегии которого определяются данными спроса, т.е. $\Pi_1 = 6$ ед., $\Pi_2 = 7$ ед., $\Pi_3 = 8$ ед., $\Pi_4 = 9$ ед. Игрок А – руководство SM, стратегии которого лежат в тех же пределах. Составим платежную матрицу игры. Найдем решение игры по критериям Вальда, Сэвиджа и Гурвица при $\lambda = 0,2$.

1. *Критерий Вальда.* Проиллюстрируем критерий Вальда (табл. 3.7).

Таблица 3.7

Платежная матрица

$A_i \backslash \Pi_j$	$\Pi_1=6$	$\Pi_2=7$	$\Pi_3=8$	$\Pi_4=9$	α_i
$A_1=6$	0	-2	-4	-6	-6
$A_2=7$	-1	0	-2	-4	-4
$A_3=8$	-2	-1	0	-2	-2
$A_4=9$	-3	-2	-1	0	-3
β_j	0	0	0	0	

$$W = \max_i \{-6; -4; -2; -3\} = -2.$$

Оптимальной является стратегия АЗ, т.е. необходимо заказывать по 8 единиц товара.

2. *Критерий Сэвиджа.* Перейдем к матрице рисков, поместим в правом добавочном столбце значения максимального риска r_i (табл. 3.8), где $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, $\beta_j = \max_i a_{ij}$.

Таблица 3.8

Платежная матрица

$\begin{matrix} A_i \\ \backslash \\ \Pi_j \end{matrix}$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	r_i
A ₁	0	2	4	6	6
A ₂	1	0	2	4	4
A ₃	2	1	0	2	2
A ₄	3	2	1	0	3

$S = \min\{6; 4; 2; 3\} = 2$. Оптимальной является также стратегия АЗ.

3. *Критерий Гурвица.* В добавочных столбцах платежной матрицы запишем оценки (табл. 3.9), при $\lambda = 0,2$:
 $\alpha_i = \min_j a_{ij}$, $w_i = \max_j a_{ij}$, $H_i = \lambda \alpha_i + (1 - \lambda) w_i$.

Таблица 3.9

Платежная матрица

$\begin{matrix} A_i \\ \backslash \\ \Pi_j \end{matrix}$	Π_1	Π_2	Π_3	Π_4	α_i	w_i	h_i
A ₁	0	-2	-4	-6	-6	0	-1,2
A ₂	-1	0	-2	-4	-4	0	-0,8
A ₃	-2	-1	0	-2	-2	0	-0,4
A ₄	-3	-2	-1	0	-3	0	-0,6

$H = \max_i \{-1,2; -0,8; -0,4; -0,6\} = -0,4$, а значит, оптимальной является стратегия АЗ.

Следовательно, руководство SM имеет все основание заказывать по 8 единиц товара, т.к. все три критерия говорят в пользу стратегии АЗ.

4. ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАДАНИЯ

4.1 Задачи по финансовой математике

Задание 1. Определите, какую сумму необходимо создать вклад под $i\%$ годовых, для получения через год FV руб.? Использовать формулы наращенных процентов (1.3) и дисконтированных сумм (1.6) с применением функции Excel «Подбор параметра». Задания по вариантам представлены в табл.4.1.

Таблица 4.1

Варианты заданий

Вариант	i	FV	Вариант	i	FV
1	17	11150	20	25	5150
2	24	15150	21	19	15650
3	17	17150	22	13	5150
4	23	10650	23	12	5650
5	10	8150	24	24	16650
6	12	15150	25	18	9150
7	20	6150	26	20	17150
8	22	11650	27	16	18650
9	25	13650	28	16	10650
10	23	9650	39	15	8150
11	20	5650	30	11	12150
12	9	15150	41	16	15650
13	14	20150	42	16	8650
14	18	7150	43	13	12150
15	14	14650	44	11	12650
16	25	19650	45	17	15650
17	22	8650	46	19	13150
18	20	19650	47	24	7650
19	11	19150	39	12	11650

Задание 2.

1. Произведены капиталовложения PV руб. на n лет под $i\%$ годовых, при условии ежемесячного приращения процентов к вкладу. Необходимо сформировать график наращивания основной суммы депозита и определить сумму наращивания через n лет.

2. Найти наращенную сумму, используя в качестве исходных условия задания 1 и применяя формулы сложных процентов (1.9). Сравнить результаты. Задания по вариантам представлены в табл.4.2.

Таблица 4.2

Варианты заданий

Вар.	PV	n	i	Вар.	PV	n	i
1	5150	3	14	20	7150	3	10
2	7150	3	9	21	14150	4	14
3	12150	4	11	22	6150	3	9
4	16150	2	18	23	16150	3	14
5	10150	3	16	24	13150	2	17
6	19150	3	9	25	13150	3	15
7	18150	3	16	26	16150	2	12
8	9150	3	12	27	8150	2	16
9	5150	4	10	28	14150	2	11
10	13150	2	11	29	15150	4	9
11	16150	4	15	30	20150	3	10
12	13150	2	12	31	17150	3	18
13	14150	4	12	32	19150	2	15
14	6150	2	18	33	17150	4	18
15	6150	2	13	34	11150	3	12
16	13150	4	19	35	6150	4	10
17	6150	2	12	36	11150	2	13
18	5150	3	15	37	18150	3	18
19	14150	4	9	38	20150	4	16

Задание 3. Компания намерена произвести инвестирование в производство нового товара IC руб. Предварительный анализ проекта показал, что инвестиции будут доходными, начиная со 2-го года начала производства нового товара, доход составит R руб. в год в течение n лет. Ответьте на вопрос: стоит ли реализовывать инвестирование с заданной нормой прибыли $i\%$? Рассчитайте в Excel график дисконтированного денежного потока с накопленным итогом, в каждом году воплощения проекта в жизнь. Задания по вариантам представлены в табл.4.3.

Задание 4. Рассчитайте внутреннюю норму доходности, используя в качестве исходных данных условия, представленные в предыдущем задании 3.

Таблица 4.3

Варианты заданий

Вар.	IC	R	n	i
1	650150	140150	4	16
2	600150	230150	4	13
3	690150	120150	6	20
4	530150	270150	4	13
5	620150	200150	6	20
6	610150	140150	7	16
7	530150	300150	5	13
8	570150	230150	5	19
9	560150	300150	4	14
10	570150	300150	7	12
11	680150	120150	6	15
12	650150	110150	4	19
13	560150	130150	5	18
14	690150	210150	7	16
15	660150	200150	4	12
16	690150	220150	6	9
17	530150	150150	6	9
18	500150	200150	7	11
19	650150	300150	7	12
20	650150	230150	7	18
21	650150	140150	4	16
22	600150	230150	4	13
23	690150	120150	6	20
24	530150	270150	4	13
25	620150	200150	6	20
26	610150	140150	7	16
27	530150	300150	5	13

4.2 Транспортная задача

Задание 5. Найти целевую функцию, учитывая заданные ограничения.

Все переменные в заданиях имеют неотрицательные значения.

Варианты заданий.

1. Целевая функция $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \max$.

Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8$, $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18$.

2. Целевая функция $f(x) = x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \max$.

Ограничения: $4x_1 + x_2 + x_3 = 20$, $2x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$, $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 24$.

3. Целевая функция $f(x) = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 30$, $2x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 12$, $x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 40$.

4. Целевая функция $f(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 8$, $x_1 - x_2 + x_3 \geq -1$, $x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$.

5. Целевая функция $f(x) = x_1 + 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 12$, $2x_1 - x_2 + x_3 \geq -2$, $x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 8$.

6. Целевая функция $f(x) = x_1 - 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \max$.

Ограничения: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 20$, $2x_1 + x_2 - x_3 \geq 10$, $x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 25$.

7. Целевая функция $f(x) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \max$.

Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 25$, $2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \geq 10$, $x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 30$.

8. Целевая функция $f(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 30$, $x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 10$, $x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 50$.

9. Целевая функция $f(x) = x_1 + 3x_2 - x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 + 2x_2 - x_3 \geq -2$, $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 12$.

10. Целевая функция $f(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $2x_1 + x_2 + x_3 = 16$, $x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 10$, $x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq 12$.

11. Целевая функция $f(x) = 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geq 8$, $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18$.

12. Целевая функция $f(x) = x_1 + 3x_2 - x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq -2$, $x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 12$.

13. Целевая функция $f(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 30$, $x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 10$, $x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 50$.

14. Целевая функция $f(x) = x_1 + 2x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, $2x_1 + x_2 + x_3 \geq 5$, $x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 24$.

15. Целевая функция $f(x) = x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $2x_1 + x_2 + x_3 = 16$, $x_1 + 2x_2 - 2x_3 \geq 10$, $x_1 - 2x_2 - 2x_3 \leq 12$.

16. Целевая функция $f(x) = 2x_1 + x_2 + 5x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $4x_1 + x_2 + x_3 = 30$, $2x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 12$, $x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 40$.

17. Целевая функция $f(x) = x_1 - 4x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 20$, $2x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 10$, $x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 25$.

18. Целевая функция $f(x) = x_1 + 2x_2 - 3x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 25$, $2x_1 - 3x_2 + 3x_3 \geq 10$, $x_1 - 3x_2 + 4x_3 \leq 30$.

19. Целевая функция $f(x) = x_1 + 2x_2 - x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 12$, $2x_1 - x_2 + x_3 \geq -2$, $x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 8$.

20. Целевая функция. $f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \min$

Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 10$, $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 8$, $x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 18$.

21. Целевая функция. $f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min$

Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 8$, $x_1 - x_2 + x_3 \geq -1$, $x_1 + x_2 - x_3 \leq 10$.

22. Целевая функция $f(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 2$, $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 3$, $2x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 6$.

23. Целевая функция $f(x) = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 21$, $x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 15$, $x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 43$.

24. Целевая функция $f(x) = 2x_1 + 10x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$.

Ограничения: $x_1 + x_2 + x_3 = 11$, $x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 5$, $x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 23$.

25. Целевая функция $f(x) = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 \rightarrow \max$.

Ограничения: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10$, $x_1 + 4x_2 + 6x_3 \geq 8$, $x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 18$.

Задание 6. На производственных участках A_i ($i=1,2,3$) изготавливается однородный товар в количестве a_i единиц. Себестоимость производства единицы продукции i -м производственным участке составляет C_i . Готовая продукция поставляется на склады B_j ($j=1, 2, 3, 4$), потребности которых составляют b_j ед. стоимость перевозки единицы продукции из A_i в B_j задана матрицей C_{ij} .

Необходимо выполнить следующее:

- 1) Формализовать математическую модель прямой и двойственной задач, вербально описав экономический смысл всех переменных;
- 2) Сформировать план транспортирования товаров, при котором суммарные затраты по ее изготовлению и доставке на склады минимальны, учитывая, что товары произведены на участке A_i , имеют минимальную себестоимость;
- 3) Найти суммарные минимальные затраты Z_{min} ;
- 4) Определить пункты назначения перевозок;
- 5) Определить производственные участки на которых останется нераспределенная продукция указав её объем.

Необходимые исходные числовые данные приведены в табл. 4.4.

Таблица 4.4

Исходные условия

Параметры		a_1	a_2	a_3	C_1	C_2	C_3	b_1	b_2	b_3	b_4
		499	280	489	2	3	5	172	238	185	344
C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{14}	C_{21}	C_{22}	C_{23}	C_{24}	C_{31}	C_{32}	C_{33}	C_{34}
4	4	3	2	2	8	7	2	4	2	2	10

4.3 Задачи по теории игр

Задание 7. Решить игру, заданную матрицей, изобразив ее графическую иллюстрацию.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, 2. $\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$.

Задание 8. Найти оптимальные стратегии игр и цену. Варианты платежных матриц представлены далее:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$,

2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

3. $\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$,

4. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

5. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание 9. Для приведенных платежных матриц рассчитать верхнюю и нижнюю цены игры, найти минимаксные и максиминные стратегии, определить наличие или отсутствие седловых точек. При наличии седловых точек выписать цену игры и оптимальные решения.

1. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

2. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$,

$$3. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$5. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ -2 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & 3 & -2 \\ -4 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 10. Для приведенных платежных матриц матричных игр выявить: доминирующие строки, доминирующие столбцы и найти для упрощенных матриц α и β . Если $\alpha = \beta$, то выписать цену игры и оптимальные стратегии для упрощенных и исходных матриц.

$$1. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; 2. \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; 3. \begin{pmatrix} -6 & -2 & 5 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & -4 & 1 & -3 \\ 2 & -5 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Чурикова С.Ю., Бородина И.П. Моделирование как эффективный инструмент управления предприятием /Инженерный вестник Дона, №2, ч.2 (2015). url: ivdon.ru/ru/magazine/archive/n2p2y2015/3023
2. Бережная Е.В. Математические методы и моделирование экономических систем: учебное пособие для вузов /Е.В. Бережная, В.И. Бережной. – СПб.: Питер, 2007. – 432 с.
3. Маркин Ю.П. Математические методы и модели в экономике. М.: Высшая школа, 2007. – 422 с.
4. Мур Дж., Уэдерфорд Л. и др. Экономическое моделирование в Microsoft Excel, 6-е изд.: Пер с англ. М.: «Вильямс», 2004.
5. Ульрих Л. Электронные таблицы Microsoft Excel. Проблемы и решения: практическое пособие.: Пер с англ. М.: ЭКОМ, 2002.
6. Шикин, Е.В. Математические методы и модели в управлении: учебник для вузов. М.: Дело, 2007. – 440 с.
7. Кузнецов Б.Т. Математические методы и модели исследования операций. М.: ЮНИТИ, 2005.
8. Вильямс Дж. Д. Совершенный стратег. М.: ИЛ, 1960.
9. Карлин С. Математические методы в теории игр, программировании и экономике М.: Мир, 1964.
- 10.Мак-Кинси Дж. Введение в теорию игр. М.: Физматгиз, 1966.
- 11.Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.
- 12.Воробьев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков, М.: Наука, 1985.
- 13.Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. М.: Наука, 1981.

Учебное издание

Чурикова Светлана Юрьевна,
Бородина Инна Петровна

**ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
МЕТОДЫ И ИНСТРУМЕНТЫ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ**

Печатается в авторской редакции

Сдано в набор 21.12.2015. Подписано в печать 28.12.2015.
Формат 60х84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Times»
Печать цифровая. Усл. печ. л. 2,42. Заказ 20/15.
Тираж 550 экз.

Типография ЗАО «Центр Универсальной Полиграфии»
344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Садовая, 111,
тел. 8-918-570-30-30