МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Графический метод решения задач с параметром»

Студент 17.05.26 Гусева Анастасия Павловна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель 17.05.26 Никитина О.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр 15.06.26 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 01.06.26 № 10)

И.о. заведующего кафедрой 01.06.26 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 25.06.26 № 2)

Секретарь ГЭК 25.06.26 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ..... 3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ 6
1.1 Понятие параметра и основные типы уравнений с параметром..... 6
1.2 Методы решения задач с параметром 9
ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ МЕТОДА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ 15
2.1 Сравнительный анализ учебников по алгебре 7-11 класса 15
2.2 Анализ КИМ ОГЭ и ЕГЭ по теме исследования..... 30
2.3 Методика обучения решению задач с параметрами графическим методом в курсе алгебры старшей школы 36
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 48
ПРИЛОЖЕНИЯ 51

ВВЕДЕНИЕ

В пояснительной записке программ по математике для общеобразовательных учреждений говорится: «Ведущая роль принадлежит математике в формировании алгоритмического мышления, воспитании умений действовать по алгоритму и конструировать новые». Существенную роль в развитии логического и рационального мышления, исследовательских навыков и общей математической культуры обучающихся играют задачи с параметрами.

Трудности при изучении уравнений с параметром связаны с несколькими причинами. Во-первых, учащимся нужно одновременно работать с переменной и с параметром, понимая различие между ними. Во-вторых, решение часто зависит от разбиения на случаи, что требует развитой культуры математического рассуждения. В-третьих, в базовом школьном курсе тема обычно не изучается как самостоятельная содержательная линия: отдельные задания встречаются при рассмотрении различных разделов алгебры, но не всегда объединяются в систему. В результате у школьников формируются разрозненные представления о параметре, а не целостный способ работы с такими задачами.

Одним из путей преодоления этих трудностей является использование графического метода. Он позволяет не только получить ответ, но и увидеть, почему при определенных значениях параметра уравнение имеет одно количество решений, а при других — другое. Для учащихся старшей школы такая наглядность особенно важна, поскольку она позволяет связать алгебраические преобразования с геометрическим смыслом задачи.

Ключевой проблемой, рассматриваемой в исследовании, является недостаточное количество эффективных методических приемов при обучении решению уравнений с параметром на уроках математики, а также часов, отведенных на изучение темы. Традиционные приемы в обучении решению уравнений с параметром ограничиваются механическим применением аналитического метода решения. Отсутствие визуальной опоры приводит к

тому, что учащиеся «зазубривают» алгоритмы решения без осмысления лежащих в их основе принципов, в результате чего формируется поверхностное знание, не позволяющее гибко адаптироваться к нестандартным условиям задач. В курсовой работе будет рассмотрена методика обучения графическому методу, который имеет ряд преимуществ перед другими, поскольку позволяет наглядно представить решение параметрических уравнений.

Цель выпускной квалификационной работы: теоретическое обоснование особенностей обучения решению уравнений с параметром графическим методом, а также разработка конспектов уроков по алгебре для учащихся 11 класса, направленных на поэтапное формирование у школьников необходимых умений и навыков по данной теме, и системы упражнений, позволяющей осуществить подготовку к сдаче ЕГЭ.

Задачи исследования:

1. определить понятие параметра и выделить основные виды уравнений, содержащих параметр;
2. изучить особенности уравнений и неравенств с параметром как элемента школьного курса алгебры и определить их роль в формировании математических умений учащихся;
3. провести анализ учебной литературы и задачного материала с целью выявления методических особенностей изучения темы в рамках школьного курса алгебры;
4. описать структуру применения графического метода решения задач с параметром на плоскости *xOa*;
5. разработать конспекты двух учебных занятий по теме «Решение уравнений с параметром графическим методом на плоскости *xOa*», которые позволят более детально выстроить образовательную траекторию в рамках изучения данной темы;
6. проанализировать задания открытого банка ФИПИ и составить подборку заданий №18 для подготовки к сдаче ЕГЭ.

Объект исследования — процесс обучения решению задач с параметром графическим методом в курсе алгебры старшей школы.

Предмет исследования — методика обучения учащихся решению задач с параметром графическим методом.

Теоретическая значимость исследования выпускной квалификационной работы состоит в обобщении и систематизации теории графического метода решения уравнений с параметром и выявлении методических особенностей изучения данной темы в рамках школьного курса алгебры.

Практическая значимость выпускной квалификационной работы: разработанные уроки и предложенные упражнения по теме «Решение уравнений с параметром графическим методом на плоскости *xOa*» могут быть применимы как при проведении уроков, так и на факультативных занятиях при подготовке учащихся к итоговой аттестации. Подборка заданий позволит учащимся самостоятельно закрепить изученный материал и отработать навыки применения графического метода.

Структура работы соответствует поставленной цели и логике исследования. Первая глава содержит теоретические основы изучения графического метода решения уравнений с параметром в школьном курсе: рассматривается определение параметра, различные типы уравнений с параметром, а также графический метод решения уравнений, который на данный момент является наиболее удобным для анализа функций. Во второй главе приводятся различные практические аспекты преподавания темы: представлена методика изучения графического метода решения уравнений с параметром, технологическая карта факультативного занятия и система упражнений, которая позволит грамотно и последовательно сформировать необходимые умения и навыки по данной теме.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ГРАФИЧЕСКОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ

1.1 Понятие параметра и основные типы уравнений с параметром

Для начала необходимо определить, что представляют собой уравнения с параметром. В методической литературе трудно выделить единый подход к определению этого понятия отсутствует, поэтому необходимо рассмотреть формулировки различных авторов.

Итак, В.С. Высоцкий определяет параметр следующим образом: «Если в уравнении коэффициенты при неизвестных величинах зависят от некоторой переменной или нескольких переменных, то эти переменные называются *параметрами*» [6, с.7].

В пособии А.А. Прокофьева можно встретить определение уравнения с параметром: «Пусть дано уравнение с двумя переменными: $F(x, a) = 0$. Если в задаче сформулирована цель: «Для каждого значения переменной a из некоторого числового множества A решить уравнение относительно x», то выражение $F(x, a) = 0$ называют уравнением с переменной x и параметром a, а множество A – областью изменения параметра a» [29, с. 5].

Понятие «решить уравнение с параметром» имеет более узкий смысл, чем решение обычного уравнения. В зависимости от формулировки задания может потребоваться найти корни уравнения для каждого значения параметра; определить значения параметра, при которых существует хотя бы одно решение; установить, при каких значениях параметра число решений равно заданному числу; найти параметры, при которых корни удовлетворяют дополнительным ограничениям.

Именно поэтому в задачах данного типа нельзя ограничиваться механическим применением одной формулы. Решение должно включать анализ

всех возможных случаев, проверку особых значений параметра и обязательную фиксацию ответа в виде множества значений.

Согласно исследованию С.А. Шестакова: «По формулировке любую задачу с параметром можно отнести к одной из следующих групп:

а) найти все значения параметра, для каждого из которых выполняются те или иные условия (уравнение или система уравнений имеют определенное число решений; решение принадлежит определенному множеству или удовлетворяет определенным ограничениям; сами решения не всегда требуется найти);

б) найти все значения параметра, при каждом из которых задача имеет хотя бы одно решение, и указать эти решения для каждого такого значения параметра».

Ю.Н. Макарычев в учебном пособии для классов с углубленным изучением математики «Дополнительные главы к учебнику алгебры» дает следующее определение: «решить уравнение с параметром – это значит установить соответствие, с помощью которого для каждого значения параметра указывается множество корней соответствующего уравнения» [7, с. 161].

Шестаков также отмечает: «для решения многих заданий с параметрами не требуются специальные знания, алгоритмы или идеи – достаточно устойчивых навыков решения основных типов уравнений, умения выполнять алгебраические преобразования и делать логический перебор» [30, с. 5].

Как было упомянуто ранее, при изучении уравнений с параметром у обучающихся возникает ряд трудностей, связанных с необходимостью последовательного рассмотрения всех возможных случаев и грамотной систематизации полученной информации. Если приведенные навыки развиты у учащихся недостаточно, то в процессе изучения темы возникают ошибки, заключающиеся в неверных логических выводах при решении уравнений или, в лучшем случае, в неполном анализе задачи.

В своей работе А.П. Власова делает акцент на важности обучения решению уравнений с параметрами в курсе общеобразовательной школы, напоминая о том, что при сдаче ОГЭ и ЕГЭ школьники ежегодно сталкиваются с трудностями при решении задач с параметром, решение которых без навыков понимания структуры стандартных заданий невозможно. Таким образом, деятельность ученика поднимается с уровня применения алгоритма до уровня полноценного математического исследования [4].

Несмотря на очевидную методическую ценность, задачи с параметром в школьном курсе чаще всего представлены фрагментарно. Отдельные упражнения появляются при изучении линейных и квадратных уравнений, логарифмов и тригонометрических функций, однако между ними не всегда прослеживается единая логика. Поэтому учащиеся могут неоднократно встречаться с параметром в рамках школьного курса алгебры, но так и не сформировать единого алгоритма решения в системе знаний.

Задачи с параметрами охватывают широкий спектр алгебраических уравнений: линейных, квадратных, рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических и тригонометрических. Суть таких задач заключается в том, что параметр может занимать разные позиции в математическом выражении: быть множителем, определять допустимые значения переменной или входить в состав дополнительных ограничений. Вариативность уравнений с параметром указывает на значимость владения различными методами решения и глубокого понимания того, как переменная величина влияет на структуру задачи.

С методической точки зрения важно не просто включать такие задачи в учебный процесс, а выстраивать их в логическую последовательность: начиная от простых случаев, где параметр входит в коэффициент линейного уравнения, переходя к сложным задачам, которые направлены на нахождение указанного количества корней при заданных ограничениях.

Классификация уравнений с параметром

1. Уравнения и их системы, которые необходимо решить для каждого значения параметра, либо для его значений, которые принадлежат определенному множеству.

2. Уравнения и их системы, для которых необходимо выявить количество решений в зависимости от значения параметра.

3. Уравнения и их системы, для которых необходимо найти все значения параметра, при которых данные уравнения имеют заданное число решений.

4. Уравнения и их системы, множество решений которых (при искомых значениях параметра) удовлетворяет заданным условиям.

1.2 Методы решения задач с параметром

В школьной и экзаменационной практике применяются различные способы решения задач с параметром. Наиболее распространёнными являются аналитический метод, графический метод и приём решения относительно параметра. Каждый из них имеет собственную область применения и требует от учащихся выполнения разных учебных действий.

Аналитический метод основан на последовательном преобразовании уравнения и рассмотрении всех случаев, возникающих при изменении параметра. Он удобен тогда, когда уравнение сводится к известному типу: линейному, квадратному, дробно-рациональному, показательному или тригонометрическому. Его преимущество заключается в строгости рассуждения, однако для школьников он часто оказывается трудным из-за большого количества условий, требующих предельной концентрации внимания и рассмотрения всех возможных случаев.

Пример 1 (аналитический способ): найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $\frac{9x^2-a^2}{3x-9-2a} = 0$ имеет ровно 2 различных решения.

Решение. Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Запишем уравнение в следующем виде:

$$\frac{9x^2 - a^2}{3x - 9 - 2a} = 0$$

$$\frac{(3x - a)(3x + a)}{3x - 9 - 2a} = 0$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x - a = 0 \\ 3x + a = 0 \end{array}\right. \\ 3x - 9 - 2a \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{a}{3} \\ x = -\frac{a}{3} \end{array}\right. \\ x \neq \frac{2a + 9}{3} \end{cases}$$

Для того, чтобы полученная система имела ровно 2 различных решения необходимо, чтобы числа $\frac{a}{3}$ и $-\frac{a}{3}$ были различны, а также, чтобы ни один из указанных корней не совпадал с $\frac{2a + 9}{3}$.

Получим следующее:

$$\frac{a}{3} \neq -\frac{a}{3} \leftrightarrow a \neq 0;$$

$$\frac{a}{3} \neq \frac{2a+9}{3} \leftrightarrow a \neq -9;$$

$$-\frac{a}{3} \neq \frac{2a+9}{3} \leftrightarrow a \neq -3.$$

Запишем ответ в соответствии с полученными результатами.

Ответ: $(-\infty; -9) \cup (-9; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; +\infty)$.

Стоит отметить, что аналитический метод решения задач с параметром вызывает ряд трудностей при его применении школьниками, так как требует высокого уровня математической грамотности. Вследствие этого, более удобным и универсальным является *функционально-графический* метод. Продемонстрируем решение задачи из примера 1 графическим методом.

Решение.

Запишем исходное уравнение в виде системы (аналогично примеру 1):

$$\frac{9x^2 - a^2}{3x - 9 - 2a} = 0$$

$$\frac{(3x - a)(3x + a)}{3x - 9 - 2a} = 0$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x - a = 0 \\ 3x + a = 0 \end{array}\right. \\ 3x - 9 - 2a \neq 0 \end{cases}$$

Для изображения графика исходной функции воспользуемся методом решения задач с параметром на плоскости *xOa*. Для этого выразим переменную *a* через *x*:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a_1 = 3X \\ a_2 = -3x \end{array}\right. \\ a \neq \dfrac{3x - 9}{2} \end{cases}$$

Заметим, что мы получили 3 линейные функции, графиком каждой из которых является прямая. Осуществим построение полученных прямых с помощью программы GeoGebra:

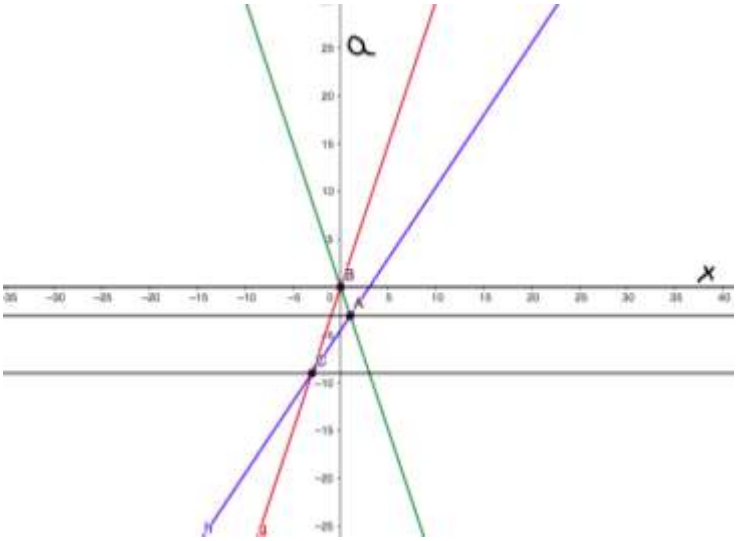


Рисунок 1 - Графическая иллюстрация примера 1

После изображения графиков отметим точки пересечения. Получим точки A, B и C. Построим прямые, параллельные оси *Ox* через эти точки.

По рисунку: A(1;-3), B(0;0), C(-3;-9). Так как необходимо, чтобы уравнение имело ровно 2 различных решения, значит, корни не должны совпадать. Отсюда можно сделать вывод, что ординаты точек пересечения не

будут являться решением уравнения. Получим, что $a \neq -9, a \neq -3, a \neq 0$. Все остальные значения будут удовлетворять условию задачи.

Таким образом, $a \in (-\infty; -9) \cup (-9; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; +\infty)$.

В данном примере внутри графического способа был применен *метод решения относительно параметра*, предполагающий, что параметр рассматривается как переменная, которую можно выразить через *x*. Такой подход особенно полезен, если после преобразований получается функция вида: a=f(x). В этом случае задача переводится в графическую плоскость *xOa*, а количество решений определяется по числу пересечений горизонтальной прямой *a = const* с построенным графиком.

Преимущество графического метода заключается в том, что он позволяет наглядно представить решение уравнений с параметром. Построив графический образ, можно сделать вывод о том, как параметр влияет на количество решений или на то, при каких значениях параметра решение отсутствует или единственно. Кроме того, функционально-графический метод избавляет от необходимости выполнения большого объема вычислений при исследовании уравнений. Таким образом, данный метод становится незаменимым инструментом при работе с параметрическими уравнениями.

Разумеется, применение графического метода требует определенных навыков и умений обучающихся выполнять построение графиков различных функций, владеть информацией о сдвигах, растяжении или сжатии, наложении модуля, влиянии коэффициентов на расположение графика относительно осей *Ox* и *Oy* и проводить графические исследования, соответствующие данным значениям параметра. При изучении данного метода имеет место следующая таблица:

Функция	Преобразование графика функции $y = f(x)$
$y = f(x) + A$	Параллельный перенос вдоль оси OY на A единиц вверх, если A>0, и вниз, если A<0.
$y = f(x - a)$	Параллельный перенос вдоль оси OX на a единиц вправо, если $a > 0$, влево, если $a < 0$.
$y = kf(x,)$	Растяжение вдоль оси OY относительно оси OX в k раз, если $k > 1$, и сжатие в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$.
$y = f(kx,)$	Сжатие вдоль оси OX относительно оси OY в k раз, если $k > 1$, и растяжение в $1/k$ раз, если $0 < k < 1$.
$y = -f(x)$	Симметричное отражение относительно оси OX всего графика
$y = \lvert f(x) \rvert$	Часть графика, расположенная выше оси OX остается без изменения. Часть графика, расположенная ниже оси OX, симметрично отражается относительно этой оси вверх.
$y = f(-x)$	Симметричное отражение относительно оси OY всего графика.
$y = f(\lvert x \rvert)$	Часть графика, расположенная в области $x \geq 0$, остается без изменения, а его часть для области $x \leq 0$ стирается и заменяется симметричным отображением относительно оси OY части графика для $x \geq 0$.

Рисунок 2 - Таблица преобразования функций

В зависимости от того, какая роль отводится параметру в задаче, можно выделить два основных графических приема: первый – построение графического образа на координатной плоскости *xOy*, второй – на координатной плоскости *xOa*.

Первый прием осуществляется следующим образом [3]: «исходное уравнение преобразуют к виду g(x)=f(x,a). На плоскости *xOy* строится график функции y=g(x). Функция задает семейство кривых, зависящих от параметра. Кривые этого семейства получаются из кривой y=f(x) с помощью некоторого элементарного преобразования (параллельного переноса вдоль осей, растяжения, наложения модуля или в случае линейной зависимости между x и y – поворота относительно некоторой точки). Построив графический образ уравнения g(x)=f(x,a) можно установить, сколько точек пересечения имеют графики функций y=g(x) и y=f(x,a) – это определяет количество корней уравнения g(x)=f(x,a), a, следовательно, и исходного уравнения в зависимости от значения параметра».

Таким образом, можно привести алгоритм действий для каждого из описанных выше приемов:

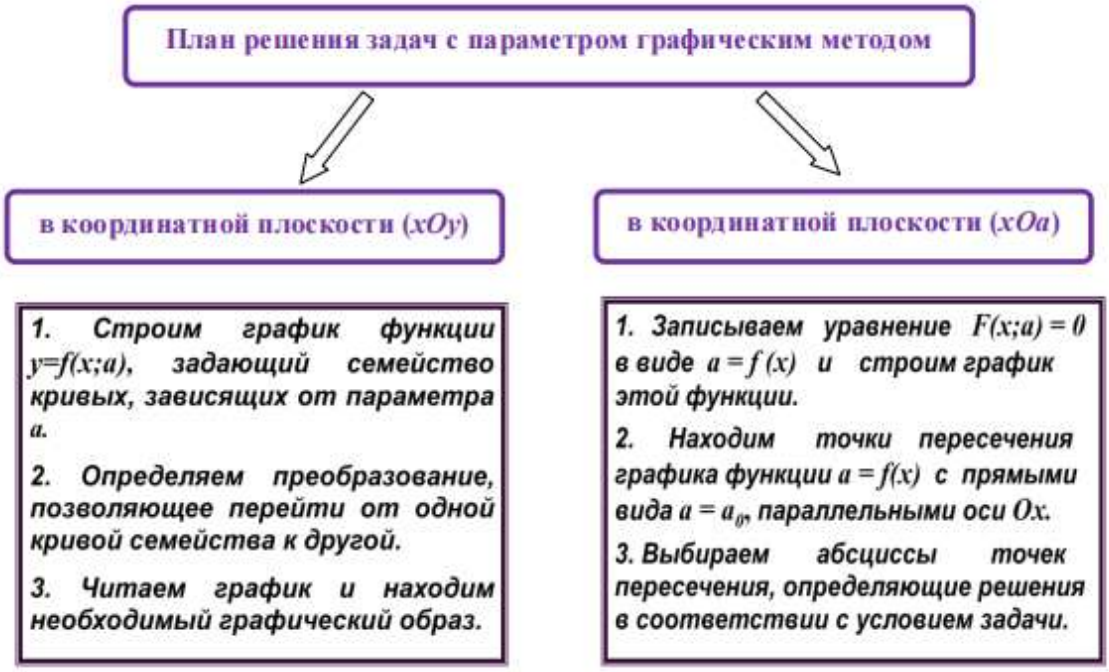


Рисунок 3 - План решения задач с параметром графическим методом

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ИЗУЧЕНИЯ МЕТОДА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРОМ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ

2.1 Сравнительный анализ учебников по алгебре 7-11 класса

Тема «параметр» в школьных учебниках 7–11 классов по алгебре присутствует, но освещается в основном фрагментарно и зависит от конкретного УМК. Как правило, в базовом курсе она не выделяется в отдельную главу, но включается в качестве задач повышенной сложности в конце разделов.

В рамках исследования мной проводился сравнительный анализ учебников по алгебре, разработанных Мерзляком А. Г., Макарычевым Ю. Н., Мордковичем А. Г. и Никольским С. М. Было необходимо оценить потенциал этих учебников для формирования и развития исследовательских умений учащихся, в частности, при решении уравнений с параметрами. Так, рассмотрению подлежат содержание учебно-методических комплексов и задачный материал.

Анализ содержания учебников по алгебре для 7-9 классов (в контексте ФГОС) демонстрирует, что текущие образовательные программы предоставляют учащимся обширные возможности для осуществления исследовательской деятельности. Данный потенциал реализуется через изучение уравнений с одной переменной, линейных уравнений с двумя переменными, решение прикладных задач с использованием уравнений, а также освоение концепции корня уравнения и различных методологий решения систем уравнений. Особое внимание уделяется ознакомлению учащихся с понятием равносильных уравнений и их свойствами, что предполагает возможность их самостоятельного исследования.

Главный недостаток УМК базового курса алгебры 7–9 классов состоит в том, что задачи с параметром не образуют целостную систему. Учащиеся могут встретить задание, где требуется найти значение коэффициента, определить

количество корней или установить условие существования решения, но эти задания редко сопровождаются обобщением. В результате ученик решает конкретный номер, не всегда понимая, что работает с частным случаем более широкой темы.

Ни один из авторов не предлагает отдельного разъяснения понятия «параметр» или систематизированных алгоритмов решения уравнений и неравенств с ним. Это создает серьезные трудности для учащихся при подготовке к ЕГЭ, где подобные задания являются обязательными. Кроме того, отсутствие в учебной программе регламентированных часов на изучение содержательно-методической линии «задачи с параметром» приводит к тому, что данные задачи, если и включаются в учебный материал, то в качестве заданий повышенной сложности и, как правило, не рассматриваются в рамках уроков алгебры.

В учебнике по алгебре Никольского С. М. Для учащихся 7 класса пункт 5.8 главы «Алгебраические выражения» включает в себя задания, имеющие сходство с задачами с параметром. Дается следующая формулировка:

№331. Укажите все значения a и b, для которых верно равенство:

А) a+b=0;

Б) a · b=1.

Данное задание представлено в качестве дополнительного материала к главе, что автоматически относит его к категории задач повышенной трудности. Следует отметить, что автор учебного пособия не вводит понятие параметра ни в рамках данной темы, ни в предыдущих разделах. Это существенно влияет на усвоение материала учащимися и порождает определенные трудности при решении аналогичных задач.

При изучении темы «Решение уравнений с двумя переменными» учащиеся снова сталкиваются с задачей с параметрами:

№681.

а) при каком *a* пара чисел (3;-2) является решением уравнения 3x-ay-4=0?

б) при каком *b* пара чисел (-1;-4) является решением уравнения bx-7y-4=0?

С помощью подобных заданий авторы представленного учебного пособия способствуют развитию исследовательских умений обучающихся, начиная с базовых линейных уравнений и осуществляя переход к более комплексным задачам – системам уравнений с двумя переменными. Последующие разделы учебника не содержат задач с параметрами, за исключением блока «задания для повторения», где автор уделяет внимание нескольким подобным упражнениям с целью закрепления материала.

Знакомство с параметром в учебнике алгебры Макарычева Ю. Н. для учащихся 7 класса происходит в момент изучении линейной функции $y=kx$ и линейных уравнений. В них коэффициент при переменной фактически выполняет роль параметра, поскольку от его значения зависит наличие решения или принадлежность корня определённому множеству. Однако понятие «параметр» на этом этапе также не становится предметом отдельного разъяснения. Такой подход можно считать естественным для 7 класса, но при дальнейшем обучении он требует методического продолжения [1].

Автор учебников Мордкович А. Г. уже в 7 классе использует слово «параметр» в заданиях повышенной сложности, осуществляя подготовку учеников к терминологии: «найдите значение *c*, если график функции y=5x+c проходит через точку M(1;2)» — по сути, это задача на нахождение параметра *c*, определение которого в явном виде снова не дается [17].

В учебнике Мерзляка А. Г. Для 7 класса задачи с параметрами также начинают появляться, и их главная цель — не запутать, а научить учащихся мыслить логически, рассматривая различные варианты. Например, в параграфе «линейные уравнения с одной переменной» можно встретить следующие задания:

№61. При каком значении *a* уравнение не имеет корней:

1) ax=6;

2) (3-a)x=4;

3) (a-2)x=a+2.

№62. При каком значении *a* любое число является корнем уравнения?

А) ax=a;

Б) (a-2)x=2-a

В) a(a+5)x=a+5.

№65. Решите уравнение: (m+8)x=m+8.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что на этапе обучения в 7 классе общая теория по теме отсутствует: авторы учебников не дают определения уравнениям с параметром и не предлагают универсальных алгоритмов решения. Задачи, имеющие сходство с параметрическими, присутствуют точечно и сосредоточены, в основном, в рубриках «дополнительные упражнения» в конце глав.

Далее следует проанализировать учебную литературу для обучающихся 8 класса. В учебнике по алгебре для учащихся 8 класса (базовый уровень) под редакцией Мордковича А. Г. не представлено ни одного параграфа, имеющего название «Задачи с параметрами» или «Уравнения и неравенства с параметрами». Но стоит отметить, что после знакомства учащихся с квадратичной функцией, ее свойствами и графиком встречается несколько заданий с параметрами среднего уровня трудности:

№474. Найдите значение коэффициента c и постройте график функции $y = x^2 - 6x + c$, если известно, что наименьшее значение функции равно 1.

В параграфе 14, посвященном графическому решению квадратных уравнений, представлены упражнения, включающие уравнения с параметром. Задачи с номерами 518-522 требуют определения значения параметра при заданном количестве корней уравнения. Подобные упражнения можно отнести к категории задач повышенной сложности.

№521. При каких значениях уравнение $x^2 + 4x - 6 = p$ имеет два корня.

Домашняя контрольная работа также включает уравнение с параметром. Для успешного решения подобных задач учителю необходимо ознакомить

учеников с ключевыми методами работы с параметрами в квадратных уравнениях – аналитическим и графическим. Учитывая, что школьная программа 8 класса не предусматривает детального изучения этих методов, их освоение обычно происходит в рамках факультативных занятий.

Позднее можно встретить понятия «Параметр» и «Уравнение с параметром» в главе 4 «Квадратные уравнения» § 25 «Формулы корней квадратных уравнений» в следующем виде [6]: $x^2- (2p+1)x+ (p^2+p-2)=0$.

Отличие данного квадратного уравнения от ранее изученных заключается в том, что его коэффициенты являются буквенными выражениями, а не числовыми значениями. Такие уравнения принято классифицировать как уравнения с буквенными коэффициентами или уравнения с параметрами. В рассматриваемом случае параметр *p* входит в состав коэффициента при переменной *x* и свободного члена. В данном параграфе автор представляет два примера, иллюстрирующих методику решения уравнений, содержащих параметр. Дополнительно, к разделу «Формулы корней квадратных уравнений» прилагается сборник из 48 упражнений, из которых 5 предназначены для отработки навыков решения уравнений с параметром. Например, №794.

При каких значениях параметра p уравнение:

а) $x^2+ px + 24 = 0$ имеет корень, равный 6;

б) $3x^2+ px -54 = 0$ имеет корень, равный -5.

В учебнике Никольского С. М. первый раз учащиеся 8 класса сталкиваются с подобными заданиями только при изучении темы «Квадратные и рациональные уравнения» [24]. В качестве примера можно привести следующие задания:

№233. При каких числовых значениях *m* существуют корни уравнения $x^2+m=0$?

№236. Найдите все значения *a*, при каждом из которых уравнение имеет единственный корень:

а) $ax^2-(a+1)x=0$;

б) $ax^2+(a-1)x=0$.

Позднее в разделе «Исследуем» представленного учебника также присутствуют задачи с параметром:

№248.Найдите все значения *m*, при каждом из которых уравнение имеет 2 совпадающих корня:

а) $x^2+mx+3=0$;

б) $2x^2-mx-2=0$;

в) $3x^2-2x+m=0$;

г) $x^2=mx+m$.

№250. При каких значениях *a* уравнение $x^2+2x+a=0$:

а) имеет 2 различных корня;

б) имеет единственный корень;

в) не имеет корней?

№251. Решите уравнение для каждого действительного числа *a*:

а) $x^2-3ax+2a^2=0$;

б) $ax^2-2x+1=0$;

в) $x^2-4x+4a=0$;

г) $x^2-2x+a=0$.

В приведенных упражнениях можно заметить внедрение прототипов уравнений с параметром на этапе изучения квадратных уравнений. Таким образом автор делает акцент на значимости данной темы в рамках программы по алгебре основной школы. Кроме того, похожие задания встречаются в конце учебника в составе блока для повторения изученного материала.

При изучении темы «Квадратное уравнение и его корни» по учебнику Макарычева Ю. Н. уравнения с параметром (в неявном виде) представлены в качестве дополнительных заданий повышенной сложности. В них необходимо найти значение переменной (параметра), если известен корень уравнения или какое-то соотношение корней. Можно выделить два номера (№ 661, 662), где необходимо найти значение параметра, если известны знаки корней уравнения.

Также в учебнике названного автора присутствует пункт 27 «Уравнения с параметром» с пометкой «для тех, кто хочет знать больше», т. е. решению задач указанного пункта времени на уроке, скорее всего, не отводится.

В учебнике алгебры для 8 класса под редакцией А. Г. Мерзляка задачи с параметрами (в частности, для линейных и дробно-рациональных уравнений) интегрированы в общую систему упражнений, но снова в качестве заданий повышенной сложности. Рассмотрим некоторые из них:

№691. Докажите, что при любом значении *m* не имеет корней уравнение: $x^2 + mx + m^2 + 1 = 0$

Решение:

$D=m^2 - 4(m^2+1) = m^2 - 4m^2 - 4 = -3m^2 - 4 < 0$ при любом *m*.

№693. Для каждого значения *a* решите уравнение:

$X^2 + (3a + 1)x + 2a^2 + a = 0$

Решение:

$D= (3a+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2a^2+a)=9a^2+6a+1-8a^2- 4a=a^2+2a+1=(a+1)^2$

1) $a+1=0$; $a=-1$; $D=0$

$$x = \frac{-(3a+1)}{2} = \frac{-(3\cdot(-1)+1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

2) $a \neq -1$; $D>0$

$$x_1 = \frac{-3a - 1 - (a + 1)}{2} = \frac{-3a - 1 - a - 1}{2} = \frac{-4a - 2}{2} = -2a - 1$$

$$x_2 = \frac{-3a - 1 + (a + 1)}{2} = \frac{-3a - 1 + a + 1}{2} = \frac{-2a}{2} = -a$$

Таким образом, если $a= -1$, то $x=1$;

Если $a \neq -1$, то $x_1 = -2a - 1$, $x_2 = -a$.

№744. При каком значении *a* сумма квадратов корней уравнения

$x^2 + (a -1) \cdot x – 2a = 0$ равна 9

Решение:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - a \\ x_1 x_2 = -2a \end{cases}$$

$$9 = x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1\,x_2\, + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$
$$= (1 - a)^2 - 2(-2a) = 1 - 2a + a^2 + 4a = a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2$$
$$(a + 1)^2 = 9\ ;$$
$$a + 1 = 3;\ a + 1 = -3$$
$$a = 2;\quad a = -4$$

Затем обучающиеся исследуют, есть ли у данного уравнения корни: при a=-4 d=-7, значит уравнение не имеет корней, а следовательно a=-4 не подходит. Таким образом, у данного уравнения один корень a=2, поскольку при a=2 d=17.

В углубленном курсе алгебры 8 класса того же автора появляется параграф 7 «Рациональные уравнения с параметрами», в котором представлен аналитический метод решения уравнений такого вида.

Пример: при каких значениях параметра a уравнение $\frac{(x-a)(x+2)}{x-1} = 0$ имеет единственное решение?

Решение: необходимо найти все значения параметра a, при которых множество корней данного уравнения является одноэлементным. Переходим к равносильной системе:

$$\begin{cases} (x - a)(x + 2) = 0 \\ x - 1 \neq 0. \end{cases}$$

Откуда получим:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -2 \end{array}\right. \\ X \neq 1. \end{cases}$$

При любом значении параметра a исходное уравнение имеет корень x=-2. Для того, чтобы этот корень оставался единственным, нужно, чтобы корень x=a или был равен уже найденному корню, или не удовлетворял условию x ≠ -1. Отсюда a = -2 или a=1.

Проанализировав учебно-методические комплексы для учащихся 8 класса, можно сделать вывод, что задания с параметром довольно часто внедряются в задачный материал, но, в основном, как дополнительные упражнения к главам.

Понятие параметра частично вводится, но системное закрепление, анализ и исследование уравнений с параметром практически не представлены. Это негативно сказывается на формировании исследовательских навыков учащихся при подготовке к итоговой аттестации.

Рассмотрим различные УМК для девятикласснников. Учебник 9 класса Макарычева Ю. Н. содержит задачи с параметрами в разделе дополнительных упражнений к главе 1 «Функции, их свойства и графики».

№168. При каких значениях параметра *k* график функции

$$y=4x^2+3kx-k^2+1$$

а) пересекает ось х в двух точках;

б) касается оси х;

в) не имеет с осью х общих точек?

№169. При каком значении параметра *p* функция $y=3x^2+6px+4p$

а) возрастает на промежутке [4; +∞);

б) убывает на промежутке (-∞; -5]?

Можно отметить, что все же автор косвенно приводит примеры параметрических задач, но в качестве упражнений повышенной сложности. Также заметим, что приведенные упражнения требуют графического метода решения, что позволяет частично осуществить подготовку учащихся к сдаче Основного государственного экзамена. Явное определение понятия параметр и алгоритм решения подобных задач отсутствуют. Кроме того, в системе упражнений для повторения курса 7-9 классов заданий, содержащих параметр, не представлено.

Особое внимание стоит уделить учебникам алгебры для учащихся 7–9 классов под редакцией Мордковича А. Г. профильного уровня. Здесь содержательно-методическая линия «Задачи с параметрами» присутствует в явном виде и на ее изучение в 9 классе отводится 6 часов. Например, в учебнике для учащихся 8 класса с повышенным уровнем математической подготовки в главе «Алгебраические уравнения» § 39 называется «Задачи с

параметрами». В тексте параграфа разобрано 5 примеров и приведены замечания; кроме того, наконец дается определение параметра: *«если дано уравнение f(x, a) = 0, которое надо решить относительно переменной x и в котором буквой a обозначено произвольное действительное число, то говорят, что задано уравнение с параметром».*

Мерзляк А. Г. в учебнике для 9 класса профильного уровня вводит графический метод решения уравнений с параметром. Так в § 6 построение графиков функций y = f (|x|) и y = |f(x)| представлен ряд заданий с параметром, нацеленный на применение графического метода (№6.18 - 6.23):

6.18. При каких значениях параметра *a* уравнение ||x-1|-1=x-a

имеет бесконечно много корней?

6.21. При каких значениях параметра *a* уравнение |3|x + 1|-2| = a-x

имеет три корня?

Позднее, в § 7 «Квадратичная функция, ее график и свойства» автор приводит пример решения уравнения с параметром так же графическим методом.

Пример: при каких значениях параметра *a* уравнение имеет 3 корня?

$$(a + 4x - x^2 - 3)(a - 1 - |x - 2|) = 0$$

Произведение равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Перепишем исходное уравнение в следующем виде:

$$a + 4x - x^2 - 3 = 0 \text{ или } a - 1 - |x - 2| = 0$$

$$a_1 = x^2 - 4x + 3;$$

$$a_2 = |x - 2| + 1.$$

Построим графики соответствующих функций в плоскости *xOa*:

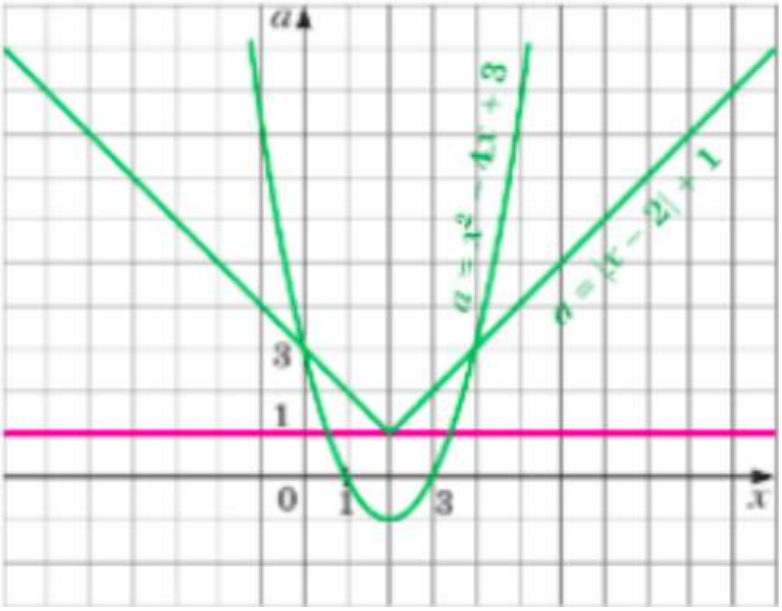


Рисунок 4 - Графическая иллюстрация примера из УМК Мерзляка А. Г.

Построим прямую, параллельную оси *x* так, чтобы она имела с графиком ровно 3 точки пересечения. Наглядно представлено, что прямая a=1 пересекает график в трех точках. Следовательно, a=1.

Среди всех приведенных учебников именно данный УМК впервые освещает в явном виде графический метод решения уравнений с параметром. Но, как можно заметить, тема встречается только в учебной литературе профильного уровня.

Теперь предстоит проанализировать учебные пособия алгебры и начала анализа 10-11 класса различных авторов.

Так, в учебнике Мордковича А. Г. базового уровня для старших классов параграф 60 имеет название «Уравнения и неравенства с параметрами». В нем автор дает определение понятию параметр и показывает, как строится рассуждение при решении подобных параметрических задач. В учебнике профильного уровня параметр вводится при изучении арккосинуса, арксинуса, арктангенса, арккотангенса и при решении уравнений вида: cost=a, sint=a, tgx=a, ctgx=a.

Задачи с параметром в этом учебнике применяются для практического закрепления и углубления знаний по различным темам. Например, при

изучении производных они помогают отработать навык работы с понятием касательной. Особое внимание уделено задачам с параметром из раздела «Первообразная и интеграл», где на основе заданной площади фигуры необходимо найти значение параметра. В конце курса алгебры и начала анализа (11 класс) предусмотрен отдельный раздел, посвященный решению уравнений с параметром, начиная с линейных и квадратных уравнений, заканчивая тригонометрическими. Для демонстрации рассмотрим несколько примеров из задачника:

№ 30.11. Решите уравнение:

а)$\sqrt{x+2}=\sqrt{2a-x}$

б) $\sqrt{x-2a}=\sqrt{4+2a-5x}$

в)$\sqrt{5a-2x+1}=\sqrt{6x-a-7}$

№ 34.26. Решите уравнение:

а)sinx=3a-2;

б)$\cos^2 x=2a-1$

№ 34.32. При каких значениях а уравнение:

а)$x^4-8x^2+4=a$ не имеет корней?

б)$3x^4+4x^3-12x^2=a$ имеет не менее трех корней?

Таким образом, учебник Мордковича А. Г. предлагает ряд различных задач с параметром, но этого набора будет недостаточно для формирования умений и навыков, которые позволят учащимся грамотно и обоснованно представить решение задачи с параметром из КИМ ЕГЭ по математике профильного уровня.

В учебнике алгебры и начала математического анализа для 11 класса под редакцией Никольского С. М. и др., задачи, содержащие параметры, выделены в отдельный раздел, предназначенный для классов с углубленным уровнем изучения математики. В параграфе 15 рассмотрению подлежат уравнения, неравенства и системы с параметрами. Авторы вводят определение параметра и соответствующих терминов, например: «решить уравнение с параметром –

значит для каждого значения параметра найти множество всех корней данного уравнения (это множество может быть и пустым)».

Далее авторы приводят примеры решения заданий такого типа аналитическим методом, а также с помощью исследования функций, после чего обучающимся представляется довольно обширное количество упражнений для закрепления изученного материала (№15.1-15.45). Стоит отметить, что при решении как уравнений, так и их систем, о графическом методе авторы не упоминают.

№15.1. Для каждого значения *a* решите уравнение:

а) $(a-2)x=a^2-4$;

б) $(a+2)x=a^2-4$;

в) $(a+3)x=a^2-9$;

г) $(a-4)x=a^2-16$.

№15.4. Для каждого значения *a* решите уравнение:

а) $\frac{a+10}{ax+5}=2$;

б) $\frac{a-8}{ax-4}=2$;

в) $\frac{a+1}{ax+4}=1$;

г) $\frac{a-2}{ax-3}=1$.

№15.24. Для каждого значения *a* решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}(a-1)y=a+1\\ x+y=a\end{cases}$;

б) $\begin{cases}(a+1)y=a+2\\ x+y=a\end{cases}$;

в) $\begin{cases}(a-1)y=a+3\\ x+y=a\end{cases}$;

г) $\begin{cases}(a+1)y=a+4\\ x+y=a\end{cases}$.

В учебнике алгебры и начала математического анализа базового уровня Мерзляка А. Г. для учащихся 10 класса задания с параметром встречаются локально, в категории задач повышенной сложности:

№6.19. Сколько корней в зависимости от значения *a* имеет уравнение:

1) $x^{12} = a - 6$;

2) $x^{24} = a^2+7a-8$.

При рассмотрении учебника профильного уровня для учащихся 10 класса того же автора выявлено, что понятие «параметр» вводится непосредственно. Подробно рассматривается графический метод решения задач с параметрами, включая работу с системой координат, где значение параметра откладывается по оси ординат. Иными словами, автор вводит метод решения параметрических уравнений в плоскости *xOa*, осуществляя предварительную подготовку учащихся к выполнению подобных задач в рамках Единого государственного экзамена. Приведем несколько примеров:

№6.12. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от параметра *a*?

$$\left|(x+2)^2 - 3\right| = a$$

№6.17. При каких значениях параметра *a* уравнение имеет единственный корень?

$$|2|x+a| - 1| = x - 1$$

При выполнении приведенных заданий учащиеся тренируются анализировать функции, содержащие модуль, рассматривая всевозможные варианты решения при a>0, a<0 и a=0. В параграфе 32 можно встретить задания с параметром № 32.31 - 32.34, в которых содержатся тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим.

Анализ учебника по алгебре и началам математического анализа 11 класса профильного уровня того же автора показал, что Мерзляк А. Г. часто включает параметрические уравнения в различные темы. Например, в разделе «Рациональные уравнения» можно выделить сразу несколько типов задач с параметрами, исходя из классификации по формулировке условия.

№28.124. Для каждого значения *a* решите уравнение:

1) $\frac{x-4}{x-a} = 0$;

2) $\frac{x-a}{x+3} = 0$;

3) $\frac{(a-4)(x-a)}{x-3} = 0$;

4) $\frac{(x-a)(x+5)}{x-8} = 0$;

5) $\frac{(x+4)(x-2)}{x-a} = 0$;

6) $\frac{x-a}{(x-2)(x+4)} = 0$.

№28.125. При каких значениях *a* уравнение не имеет корней?

$$\frac{x+a}{x^2-1} = 0$$

№28.126. При каких значениях *a* уравнение имеет единственный корень?

$$\frac{(x-a)(x-4a)}{x+12} = 0$$

Кроме того, в данном учебнике встречаются и системы уравнений с параметром:

№28.126. При каких значениях *a* система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ x-y=a \end{cases}$$

1) имеет единственное решение;

2) имеет два решения;

3) не имеет решений?

Таким образом, среди учебников 10-11 класса профильного уровня УМК Мерзляка А. Г. является наиболее подходящим для освоения и проработки темы «Уравнения с параметром».

Проведенный анализ учебной литературы показал, что задачи, содержащие параметр, представлены, в основном, в ограниченном объеме. Авторы вводят определения основных понятий лишь на этапе старшей школы, но не предлагают в явном виде систематизированных подходов к решению уравнений с параметром. Как следствие, при подготовке к государственной итоговой аттестации (ОГЭ) и единому государственному экзамену (ЕГЭ) учащиеся закономерно сталкиваются с трудностями при выполнении заданий данного типа.

2.2 Анализ КИМ ОГЭ и ЕГЭ по теме исследования

В ходе анализа контрольно-измерительных материалов ОГЭ и ЕГЭ можно установить, что задания с параметром в ОГЭ включены во вторую часть, предполагающую развернутый ответ, а именно в задание №22. Можно условно разделить задачи этого типа на два вида:

а) построение графиков функций с последующим определением значений параметра (задачи с дробно-рациональными функциями, кусочно-непрерывными функциями и функциями, содержащими модуль);

б) определение значений параметра с последующим построением графика соответствующей функции.

Алгоритм решения задач указанного типа включает следующие этапы:

1. найти область допустимых значений функции, представленной в условии задачи;

2. выполнить алгебраические преобразования, не потеряв ограничения;

3. определить вид функции и её особенности;

4. построить график с учётом выявленных ограничений, отметив выколотые точки, точки разрывов и стыка (если имеются);

5. рассмотреть взаимное расположение графика и заданной прямой;

6. сформулировать ответ в соответствии с вопросом задачи.

Проанализируем несколько примеров типовых заданий №22 ОГЭ по математике с целью выявления компетенций, которыми должны обладать учащиеся для успешного решения подобных задач.

Пример 1: постройте график функции $y = \frac{(x+1)(x^2-4)}{x^2-x-2}$. Определите, при значениях *k* прямая y=kx не имеет с графиком общих точек.

Решение.

Найдем область определения функции:

$$x^2 - x - 2 \neq 0$$

$$x_1 \neq 2;\ x_2 \neq -1$$

Преобразуем исходный вид функции с помощью разложения на множители. В числителе распишем второй множитель по формуле сокращенного умножения, а знаменатель запишем в виде разложения квадратного трехчлена на множители. Получим следующее:

$$y = \frac{(x+1)(x^2-4)}{x^2-x-2}$$

$$y = \frac{(x+1)(x-2)(x+2)}{(x+1)(x-2)}$$

$$y = x+2$$

Итак, мы получили линейную функцию, графиком которой является прямая. Отметим, что данный график можно построить путем сдвига прямой y=x на 2 единицы вверх.

Далее необходимо найти значения функции при x_1=2 и x_2=-1. Мы получим ординаты точек, которые будут выколоты на прямой, поскольку указанные значения аргумента не входят в область определения функции. Получим: y_1=4; y_2=1. Пусть т.А имеет координаты (2;4), а т.В(-1;1).

Рассмотрим возможные случаи, когда прямая y=kx не имеет с графиком общих точек.

1) проходит через точку А(2;4), вычислим *k*:

$$y = kx$$

$$4 = 2k$$

$$\mathrm{k} = 2$$

2) проходит через точку В(-1;1), вычислим *k*:

$$\mathrm{y} = \mathrm{kx}$$

$$1 = -\mathrm{k}$$

$$\mathrm{k} = -1$$

3) прямая y=kx параллельна графику функции y=x+2, следовательно, значения *k* у них совпадают, откуда k=1.

Изобразим полученную информацию на чертеже:

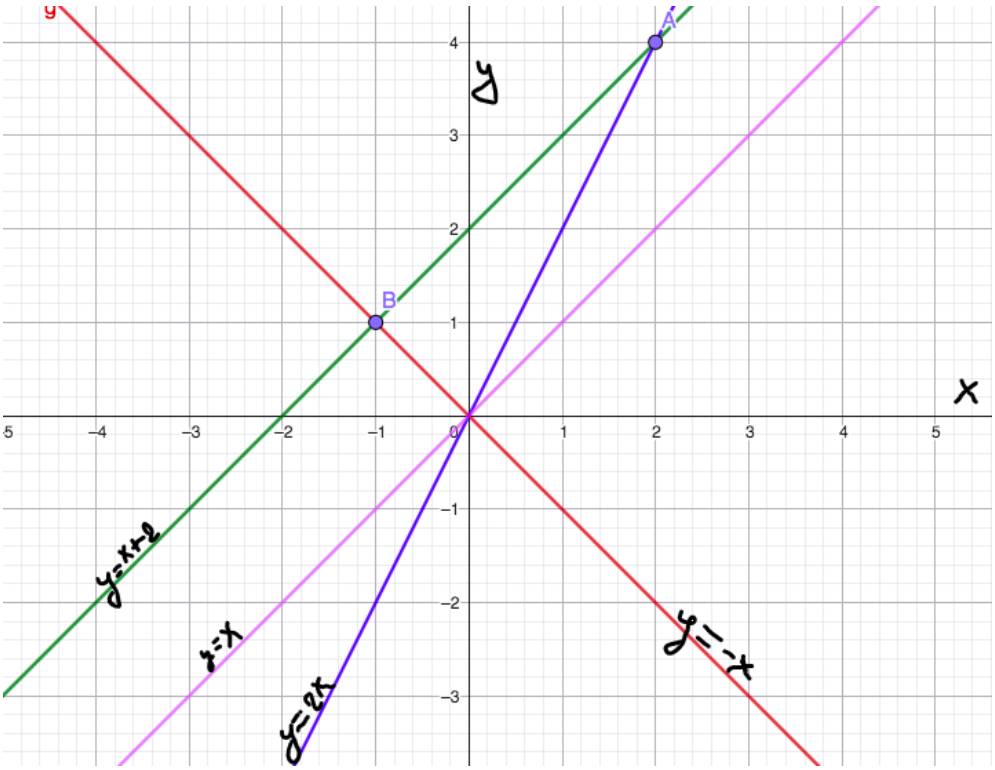


Рисунок 5 - Решение примера 1

Ответ: -1; 1; 2.

Пример 2: постройте график функции $y=|x^2+4x-5|$. Какое наибольшее число общих точек график данной функции может иметь с прямой, параллельной оси абсцисс?

Решение.

Воспользуемся методом выделения полного квадрата с целью анализа сдвигов и растяжения графика функции. Так, получим:

$$y = x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 9.$$

Таким образом получаем, что графиком представленной функции является парабола со сдвигом на 2 единицы влево и на 9 единиц вверх.

Чтобы получить график функции $y=|x^2+4x-5|$ из графика функции $y=x^2+4x-5$, заметим, что необходимо оставить без изменения его части, лежащие на оси абсцисс или выше, а части графика, лежащие ниже оси абсцисс, отразить относительно нее. Изобразим полученный график на рисунке:

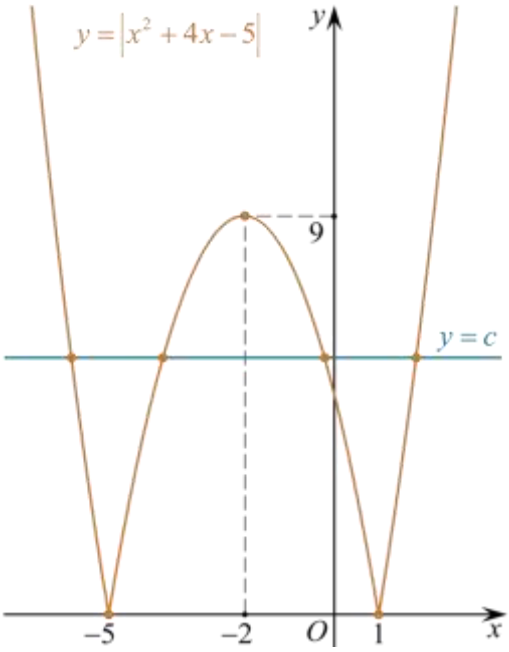


Рисунок 6 - Решение примера 2

Из построения можно сделать вывод, что параллельная оси абсцисс прямая может иметь с графиком не более четырех общих точек.

Ответ: 4.

Исходя из анализа типовых заданий основного государственного экзамена, становится очевидным, что в процессе обучения и целенаправленной подготовки к аттестации следует уделять особое внимание формированию у обучающихся следующих умений:

- владение навыками преобразования алгебраических выражений;

- построение графиков элементарных функций, нахождение области определения и области значений функции, а также понимание влияния коэффициентов на сдвиги и расположение графика;

- анализ количества решений при заданных условиях;

- решение квадратных уравнений (нахождение координат вершины параболы, применение теоремы Виета, разложение квадратного трехчлена на множители), а также систем уравнений.

Далее необходимо проанализировать КИМ ЕГЭ. Отмечу, что в ЕГЭ по математике базового уровня задачи с параметром не представлены. В то время как в ЕГЭ по математике профильного уровня подобным заданиям отводится

целый блок №18. Задача №18 оценивается в 4 первичных балла, которые имеют весомое значение при переводе в тестовые.

Задачи можно разделить на следующие темы в соответствии со способом решения:

1) алгебраические методы решения;

2) функциональные методы решения;

3) функционально-графические методы решения (координатные плоскости x*Oy, xOa*);

4) геометрические методы решения (уравнения прямой, параболы, гиперболы, окружности, параллелограмма и формула расстояния между точками);

5) решение задач различными способами.

Стоит отметить, что в основном решение задачи №18 осуществляется аналитически, но поскольку исследование нацелено именно на графический метод решения уравнений с параметром, рассмотрим задачи, решение которых осуществляется с помощью него.

Пример 3: найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $x^3+4x^2-ax+6=0$ имеет единственный корень на отрезке $[-2; 2]$.

Данное задание является многокомпонентным с точки зрения решения, поскольку оно охватывает не только непосредственное построение графика, но и анализ поведения функции при определенных значениях производной.

Пример 4: при каких значениях параметра *a* уравнение $\frac{x^2-2x-4a+a^2}{x^2-a}=0$ имеет ровно 2 различных решения?

Решение. Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель $\neq 0$. Составим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - 2x - 4a + a^2 = 0 \\ x^2 - a \neq 0 \end{cases}$$

Выделим полные квадраты относительно *x* и *a*:

$$x^2 - 2x + 1 - 1 + a^2 - 4a + 4 - 4 = 0$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (a^2 - 4a + 4) = 5$$

$$(x - 1)^2 + (a - 2)^2 = 5$$

Получим следующую систему:

$$\begin{cases} (x - 1)^2 + (a - 2)^2 = 5 \\ x^2 \neq a \end{cases}$$

Первое уравнение задает окружность с центром (1; 2) и R=√5. Построим график этой функции в системе координат *xOa* и параболу, все точки которой не будут являться решением уравнения.

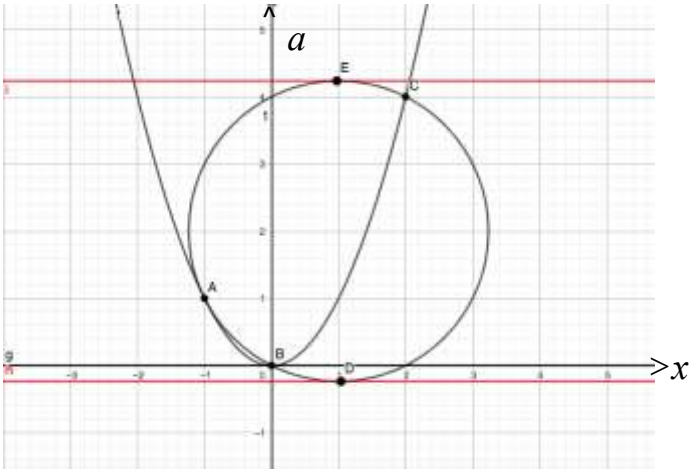


Рисунок 7 - Решение примера 4

Из построения можно заметить, что точки пересечения параболы и окружности имеют следующие координаты: A(-1; 1), B(0; 0), C(2; 4). Это означает, что корни числителя и знаменателя совпадают, поэтому их исключают из решения: $a \neq 4$, $a \neq 1$, $a \neq 0$. Решениями уравнения будут точки пересечения окружности и прямой, параллельной оси *Ox*.

Пример 5: найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых система уравнений имеет ровно 2 различных решения

$$\begin{cases} (x^2 - 5x + 3 - y)\sqrt{x - y + 3} = 0 \\ y = 3x + a \end{cases}$$

Анализ заданий формата ЕГЭ наглядно демонстрирует, что грамотное и последовательно решение уравнений с параметром требует владения большим объемом знаний, связанных с навыками построения графиков функций, нахождением их области определения, анализом точек пересечения и т.д. Без

достаточной предварительной подготовки получить максимальные 4 первичных балла - невозможно, поэтому обучение школьников следует организовать таким образом, чтобы рассмотреть основные виды графических приемов на уроке, а в качестве домашнего задания предоставить задачи-прототипы, которые позволят отработать полученные навыки и закрепить пройденный материал в процессе индивидуальной работы.

2.3 Методика обучения решению задач с параметрами графическим методом в курсе алгебры старшей школы

Решение уравнений с параметром представляют для учащихся сложность, поэтому важно начинать подготовку с актуализации знаний. Этап актуализации знаний крайне важен, поскольку он создает основу для понимания более сложного материала. Вместо простого повторения правил, этап должен быть направлен на активное восстановление и объединение ранее полученных знаний в целостную систему. Так, организуется повторение определений основных понятий раздела «Функция»: *зависимая и независимая переменная, область определения функции, область допустимых значений*. Стоит отметить, что на момент обучения в старшей школе у учащихся должны быть сформированы следующие умения:

- владеть навыками исследования функций – определять четность, нечетность, периодичность, ограниченность, монотонность, а также находить точки экстремума;
- определять вид функции по уравнению, которым она задается, выделять свойства линейной, квадратичной, дробно-рациональной функции и др. и строить их графики;
- владеть навыками геометрических преобразований графиков функций: растяжение и сжатие, сдвиги по осям абсцисс и ординат, симметричные отображения относительно координатных осей, преобразования с модулем.

Второй этап изучения графического метода предполагает введение понятий «параметр», «уравнение с параметром», «решить задачу с параметром». На данном этапе необходимо представить несколько заданий для подготовки к рассмотрению более трудоемких задач. Построение графиков при решении задач этого блока осуществляется в координатной плоскости *xOy,* в ходе рассмотрения которого можно осуществить переход к решению задач в координатной плоскости *xOa* с последующим составлением алгоритма.

Заключительным этапом изучения функционально-графического метода является практическая часть - разбираются прототипы уравнений с параметрами из открытого банка ФИПИ Единого государственного экзамена.

Конспект учебного занятия 1

Предмет: алгебра и начала математического анализа

Класс: 11

Тип урока: введение нового материала и первичное закрепление знаний

Тема: «Решение уравнений с параметром графическим методом на плоскости *xOa*»

Цели:

1) предметные: познакомить учащихся с основными понятиями изучаемой темы; сформировать умение решать уравнения с параметром, используя построение графиков в координатной плоскости *xOa* и научить выстраивать рассуждение в зависимости от вопроса задачи; развивать навык переноса алгоритма решения уравнений из координатной плоскости *xOy* в плоскость *xOa;*

2) метапредметные: способствовать развитию критического мышления обучающихся; развивать навыки организации учебной деятельности в процессе урока;

3) личностные: способствовать формированию исследовательских умений и навыков, проявлению интереса к изучаемой теме; развить мотивацию к

совершенствованию своих знания и применению полученных умений и навыков.

Основные понятия: параметр, решение уравнения с параметром, зависимая и независимая переменная, координатная плоскость, область определения, область допустимых значений, точки пересечения, точки разрыва, корень уравнения.

Оборудование: меловая доска, раздаточный материал (карточки).

Ход урока

1) организационный этап (2 мин.)

Приветствие обучающихся, проверка подготовленности к учебному занятию, организация внимания детей. Акцент на актуальности темы учебного занятия и ее прямой связи с задачами Единого государственного экзамена.

2) актуализация знаний (8 мин.)

На данном этапе с помощью фронтального опроса осуществляется проверка понимания изученных ранее тем, связанных с преобразованием и чтением графиков функций и решением уравнений в координатной плоскости *xOy.* В качестве примера можно привести следующие вопросы:

- что называется областью определения и областью значений функции?

- что означает «решить уравнение с параметром?»

- какие способы решения параметрических уравнений вам известны?

- в какой плоскости осуществлялось построение графиков функций при рассмотрении задач №22 в рамках Основного государственного экзамена?

- какой алгоритм решения можно сформулировать при решении уравнений с параметром в плоскости *xOy*?

- можно ли осуществить решение задачи с параметром в другой плоскости, и если да, то в какой?

3) формулирование проблемы и планирование деятельности (2 мин.)

На этом этапе реализуется постановка проблемы, связанная с поиском алгоритма решения уравнений с параметром в координатной плоскости *xOa*. Записывается тема урока.

4) открытие нового знания (13 мин.)

Рассматривается суть метода: параметр a становится равноправной координатной осью (обычно вертикальной, абсцисса — x, ордината — a), после чего учитель совместно с обучающимися выводит алгоритм решения уравнений в рамках данного метода. Рассмотрим ниже пример вводного задания, а также один из вариантов формулировки алгоритма.

Пример 1 (задание для подготовки): при каких значения параметра a уравнение $\sqrt{x+a} = x$ имеет ровно 2 различных решения?

Решение. Для того, чтобы построить график указанной функции на плоскости *xOa*, необходимо выразить переменную a через x. Возведем в квадрат обе части уравнения и с учетом ОДЗ осуществим переход к равносильной системе:

$$\begin{cases} x + a = x^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = x^2 - x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Итак, мы получили квадратичную функцию, графиком которой является парабола. Отметим, что ее ветви направлены вверх, а также вычислим координаты вершины:

$$x_0 = \frac{-b}{2a};\ x_0 = \frac{1}{2};\ y_0 = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

Схематично изобразим график на чертеже.

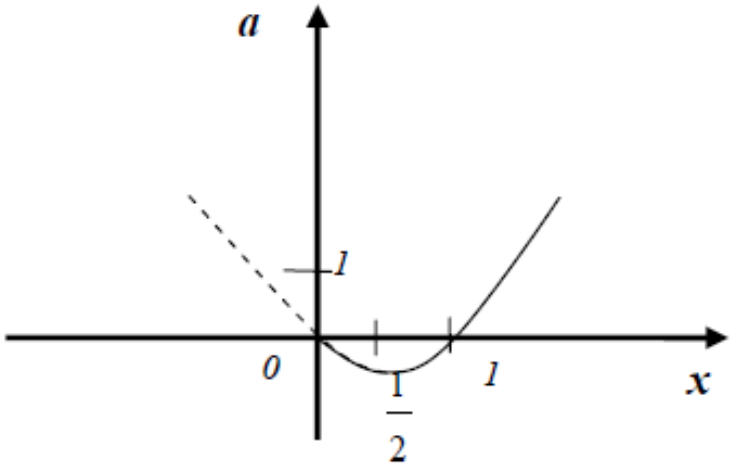


Рисунок 2.3.1 - Решение вводной задачи

По построению: уравнение будет иметь ровно 2 различных решения при a∈ (-0,25; 0].

Алгоритм решения уравнений с параметром на плоскости *xOa*

1. Привести уравнение к виду a = f(x):

-выразить параметр *a* через переменную *x*, учитывая ОДЗ исходного уравнения (знаменатели, подкоренные выражения, логарифмы, условия возведения в квадрат и т.д.);

-если выразить в явном виде невозможно, то допустимо оставить уравнение в виде F(x,a)=0.

2. Построить график функции a = f(x) на плоскости *xOa:*

- ось абсцисс — *x*, ось ординат — *a*;

- проанализировать область определения, непрерывность, монотонность, экстремумы, асимптоты, точки разрыва (если имеются).

3. Проанализировать пересечения горизонтальной прямой *a=const* с графиком функции:

- каждая точка пересечения (x_0, a_0) задаёт решение уравнения, равное x_0 при данном $a_{0;}$

- количество решений при фиксированном *a* равно числу точек пересечения;

- рассмотрение особых случаев: касание (кратный корень), прохождение через точку разрыва, анализ вертикальных асимптот.

4. Сформулировать ответ в зависимости от вопроса задачи.

5) первичное закрепление знаний (13 мин.)

На этом этапе можно предложить учащимся выполнить задание из открытого банка ФИПИ. Важно плавно переходить от простого к сложному, чтобы обучающиеся грамотно освоили суть метода.

Пример 2 (Решу.ЕГЭ)**:** найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение имеет ровно два различных корня.

$$\frac{9x^2 - a^2}{x^2 + 8x + 16 - a^2} = 0$$

Решение. Для начала разложим числитель на множители с помощью формулы сокращенного умножения, а также выполним преобразования в знаменателе дроби:

$$\frac{(3x - a)(3x + a)}{(x + 4)^2 - a^2} = 0$$

$$\frac{(3x - a)(3x + a)}{(x + 4 - a)(x + 4 + a)} = 0$$

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю. Запишем равносильную систему и затем выразим *a* из полученных уравнений:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x - a = 0 \\ 3x + a = 0 \end{array}\right. \\ x + 4 - a \neq 0 \\ x + 4 + a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 3x \\ a = -3x \end{array}\right. \\ a \neq x + 4 \\ a \neq -x - 4 \end{cases}$$

Построим графики функций на плоскости *xOa,* изобразив прямые a=x+4 и a=x-4 пунктирными линиями. Учтем также, что точки пересечения указанных прямых с прямыми a=3x и a=-3x будут выколоты.

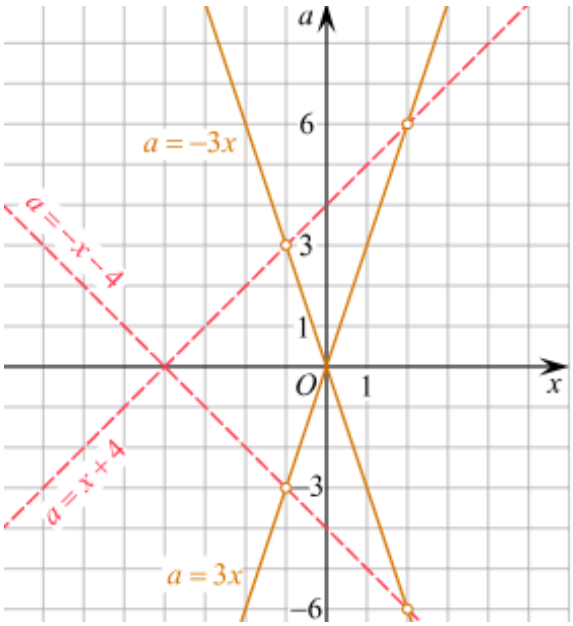


Рисунок 8 - Решение примера 2

Проанализируем графическую иллюстрацию. С учетом ОДЗ исключаются точки (2; -6), (-1; -3), (2; 6), (-1; 3). Точка с координатами (0; 0) не удовлетворяет условию задачи, поскольку в ней уравнение будет иметь один корень.

Следовательно, при $a \in (-\infty;-6) \cup (-6;-3) \cup (-3;0) \cup (0;3) \cup (3;6) \cup (6;+\infty)$ уравнение будет иметь ровно 2 различных решения.

6) рефлексия (2 мин.)

На заключительном этапе урока проводится небольшой опрос, связанный с пониманием изучаемой темы. Для обучающихся старшей школы можно использовать технику «Три М» (три момента). Ученикам предлагается выделить три момента урока, которые им запомнились лучше всего, а после чего предложить одно действие, которое повысило бы их продуктивность на следующем занятии.

Более интересным вариантом рефлексии может стать «лестница успеха», где ученики с помощью стикеров или магнитиков ставят себя на определённую ступеньку в зависимости от уровня понимания материала. Это наглядно продемонстрирует уровень понимания на этапе введения нового материала и поможет учителю грамотно выстроить траекторию дальнейшей работы с темой.

Домашнее задание

№1. Сколько корней имеет уравнение $|x^2-1|=a$ в зависимости от параметра *a*? (рассмотреть случаи при a>0, a=0, a<0)

№2. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение имеет ровно 2 различных решения:

$$\frac{x^2+4x-a}{15x^2-8ax+a^2}=0$$

№3*. При всех *a* определить число решений уравнения:

$$x^3-6x^2+9x-a-1=0$$

Конспект учебного занятия 2

Предмет: алгебра и начала математического анализа

Класс: 11

Тип урока: комплексное применение знаний

Тема: «Решение уравнений с параметром графическим методом на плоскости *xOa*»

Цели:

1) предметные: способствовать формированию понятийного аппарата изучаемой темы; развивать умение решать уравнения с параметром, используя построение графиков в координатной плоскости *xOa* и научить выстраивать рассуждение в зависимости от вопроса задачи;

2) метапредметные: развивать способности учащихся к анализу условия задачи, выделению ключевых данных, обобщению и структурированию информации, аргументации своей точки зрения; развивать навыки организации учебной деятельности в процессе урока, осуществлять самоконтроль и коррекцию деятельности;

3) личностные: способствовать формированию познавательного интереса и мотивации к обучению; развивать критическое мышление; формировать коммуникативные навыки и способность к самостоятельной деятельности; воспитывать ответственное отношение к учебному труду.

Основные понятия: параметр, решение уравнения с параметром, зависимая и независимая переменная, координатная плоскость, область определения, область допустимых значений, точки пересечения, точки разрыва, корень уравнения.

Оборудование: меловая доска, раздаточный материал (карточки).

Ход урока

1) организационный этап (1 мин.)

Приветствие обучающихся, организация внимания детей и проверка подготовленности к учебному занятию.

2) актуализация знаний (7 мин.)

На данном этапе проводится проверка домашнего задания. Учащиеся задают вопросы по выполнению задач, идет обсуждение плана решения совместно с учителем.

Для непосредственной актуализации знаний можно провести фронтальный опрос, акцентируя внимание на основных понятиях темы, изучаемой на предыдущем уроке.

Другой вариант - предложить учащимся несколько упражнений, направленных на выражение переменной a при рассмотрении функций различного вида, а также на восстановление алгоритма решения уравнений с параметром с помощью плоскости xOa. Примеры таких упражнений можно найти в приложениях.

3) планирование деятельности (2 мин.)

На этом этапе учитель совместно с обучающимися формулирует цели и задачи урока, которые включают в себя отработку навыка построения графических образов функций на плоскости xOa, формирование умения анализировать графики, исходя из вопроса задачи и накладываемых ограничений, а также решение более трудоемких задач из открытого банка ФИПИ ЕГЭ.

4) практическое применение знаний (25 мин.)

Учащиеся выполняют предложенные учителем упражнения в тетрадях и у доски, начиная с решения прототипа задачи, рассмотренной в ходе предыдущего урока.

№1. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение имеет ровно 2 различных корня:

$$\frac{2a - x^2 - 3x}{x + a^2} = 0$$

На этом уроке можно ввести уравнения, содержащие логарифмы, но предварительно следует актуализировать знания по теме - вспомнить вид графика логарифмической функции и обсудить ОДЗ. При решении логарифмических уравнений необходимо отдельно учитывать ограничения для основания и аргумента, а затем находить их пересечение.

№2. Найдите все значения *a,* при каждом из которых уравнение имеет хотя бы один корень, принадлежащий промежутку (-1; 2]:

$$\log_{x+1}(x + 5 - a) = 2.$$

Условие этой задачи отличается от всех рассмотренных ранее тем, что искомые значения параметра должны находиться на определенном промежутке. Кроме того, обучающиеся могут столкнуться с трудностями при переходе к равносильной системе с учетом всех ограничений, а также при выражении переменной *a,* поскольку она входит в состав подлогарифмического выражения. Приведем также пример прототипа.

№3. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение имеет единственное решение на промежутке $(-\frac{4}{3}; 2]$:

$$\log_{3x-4}(a + 9x + 5) = -1$$

5) рефлексия (5 мин.)

В конце урока следует опросить учащихся о трудностях, которые остались неразрешенными при изучении темы.

Домашнее задание

№1. Найдите все значения параметра *a,* при каждом из которых уравнение имеет ровно 3 различных решения:

$$x^2 - 8x = 2|x - a| - 16$$

№2. Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение имеет ровно 2 различных решения:

$$\frac{x^2 - 4x + a}{x^2 - 6ax + 5a^2} = 0$$

№3. Найдите все значения параметра *a*, для каждого из которых уравнение имеет хотя бы 1 корень, принадлежащий промежутку (-1; 1]:

$$\log_{1-x}(a - x + 2) = 2$$

В приложении 1 представлена система упражнений, позволяющая детально проработать графический метод решения уравнений с параметром на плоскости *xOa*. Она содержит различные типы уравнений, взятые из открытого банка заданий ФИПИ ЕГЭ по профильной математике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнения с параметром имеют огромный потенциал при развитии логического и критического мышления учащихся. Графический метод решения параметрических уравнений является наиболее доступным в освоении, поскольку на его примере раскрывается принцип наглядности обучения, что остается немаловажным в процессе изучения математики.

Предложенная методика обучения, включающая подготовительный, основной и закрепительный этапы, обеспечивает системное освоение графического метода. На каждом этапе последовательно формируются навыки построения графиков и анализа их особенностей в зависимости от параметра. Такая структура позволяет учащимся осознанно выявлять закономерности и уверенно решать уравнения с параметром. Реализация графического метода способствует не только усвоению математических знаний, но и формированию компетенций, актуальных для дальнейшей профессиональной деятельности.

Поскольку задачам с параметрами в рамках школьного курса алгебры уделяется крайне мало внимания, разработанная система упражнений, применимая в ходе изучения либо повторения данного материала должна оказать положительное влияние на глубокое и осмысленное усвоение темы школьниками 9 класса. К тому же, приведенные задания формата ОГЭ вновь напоминают об актуальности детального рассмотрения графического метода решения уравнений с параметром.

Таким образом, методические приемы, разработанные в результате данного исследования отвечают современным требованиям к образованию, ориентированным на развитие практических навыков и аналитических способностей.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра. 7 кл. : учеб. / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского 16-е изд., стер. М. : Просвещение, 2024. 255 с.
2. Алгебра. 8 кл. : учеб. / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского 17-е изд., стер. М. : Просвещение, 2024. 319 с.
3. Алгебра. 9 кл. : учеб. / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского 15-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2023. 255 с.
4. Власова А. П., Евсеева Н. В. Задачи с параметрами на ЕГЭ // Научный альманах. 2016. С. 223–228. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=26476361 (дата обращения: 15.12.2025).
5. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике. М. : АСТ : Астрель, 2008. 509 с.
6. Высоцкий В. С. Задачи с параметром при подготовке к ЕГЭ. М. : Научный мир, 2011. 316 с.
7. Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г. Алгебра. 9 кл. : дополнительные главы к школьному курсу и классам с углублённым изучением математики / Ю. Н. Макарычев, ; под ред. Г. В. Дорофеева. 2-е изд. М. : Просвещение, 1998. 207 с.
8. Мерзляк А. Г. Алгебра. 7 кл. : учебник. М. : Вентана-Граф, 2023. 272 с.
9. Мерзляк А. Г. Алгебра. 8 кл. : учебник. М. : Вентана-Граф, 2022. 259 с.
10. Мерзляк А. Г. Алгебра. 9 кл. : учебник. Базовый уровень. М. : Вентана-Граф, 2022. 321 с.
11. Мерзляк А. Г., Номировский Д. А. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл. : учебник. Базовый уровень. М. : Вентана-Граф, 2019. 367 с.
12. Мерзляк А. Г., Номировский Д. А. Алгебра и начала математического анализа. 11 кл. : учебник. Базовый уровень. М. : Вентана-Граф, 2019. 285 с.

13. Мерзляк А. Г., Номировский Д. А., Поляков В. М. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл. : учебник. Углублённый уровень. М. : Вентана-Граф, 2019. 477 с.
14. Мерзляк А. Г., Номировский Д. А., Поляков В. М. Алгебра и начала математического анализа. 11 кл. : учебник. Углублённый уровень. М. : Вентана-Граф, 2019. 415 с.
15. Мерзляк А. Г., Поляков В. М. Алгебра. 9 кл. : учебник. Углублённый уровень. М. : Вентана-Граф, 2022. 401 с.
16. Мордкович А. Г., Семёнов П. В. Алгебра. 7 кл. : задачник. М. : Просвещение, 2019. 271 с.
17. Мордкович А. Г., Семёнов П. В. Алгебра. 7 кл. : учебник. М. : Просвещение, 2019. 175 с.
18. Мордкович А. Г., Семёнов П. В. Алгебра. 8 кл. : задачник. М. : Просвещение, 2019. 215 с.
19. Мордкович А. Г., Семёнов П. В. Алгебра. 8 кл. : учебник. М. : Просвещение, 2019. 272 с.
20. Мордкович А. Г., Семёнов П. В. Алгебра. 9 кл. : задачник. М. : Просвещение, 2019. 223 с.
21. Мордкович А. Г., Семёнов П. В. Алгебра. 9 кл. : учебник. М. : Просвещение, 2019. 224 с.
22. Мордкович А. Г., Семёнов П. В. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 кл. М. : Просвещение, 2009. 402 с.
23. Никольский С. М., Решетников Н. Н., Потапов М. К. Алгебра. 7 кл. М. : Просвещение, 2014. 287 с.
24. Никольский С. М., Решетников Н. Н., Потапов М. К. Алгебра. 8 кл. М. : Просвещение, 2019. 304 с.
25. Никольский С. М., Решетников Н. Н., Потапов М. К. Алгебра. 9 кл. М. : Просвещение, 2023. 336 с.

26. Никольский С. М., Решетников Н. Н., Потапов М. К. Алгебра и начала математического анализа. 11 кл. : учебник : базовый и профильный уровни. М. : Просвещение, 2010. 464 с.
27. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ». URL: https://math-ege.sdamgia.ru. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.12.2025).
28. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ОГЭ». URL: https://math-oge.sdamgia.ru. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.12.2025).
29. Прокофьев А. А. Задачи с параметрами. М. : МИЭТ, 2004. 258 с.
30. Шестаков С. А. ЕГЭ 2022. Математика. Задачи с параметром. Задача 17 (профильный уровень) / под ред. И. В. Ященко. М. : МЦНМО, 2022. 288 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Система упражнений по теме:

«Графический метод решения уравнений с параметром на плоскости *xOa*»

№1. При каких значениях параметра *a* уравнение имеет ровно 2 различных решения:

$$\frac{x^2 - 2x + a^2 - 4a}{x^2 - a} = 0$$

№2. Найдите все значения параметра *a,* при каждом из которых уравнение имеет ровно 2 различных решения:

$$\frac{x^2 - 4x + a}{5x^2 - 6ax + a^2} = 0$$

№3. Найдите все значения параметра *a,* при каждом из которых уравнение имеет ровно 2 различных корня:

$$x^2 + a^2 - 2x - 6a = |6x - 2a|$$

№4. Найдите все значения параметра *a,* при каждом из которых уравнение имеет больше двух различных корней:

$$x^2 + a^2 + 7x - 17a = |17x + 7a|$$

№5. Найдите все значения параметра *a,* при каждом из которых уравнение имеет больше двух различных корней:

$$x^2 + a^2 - 2x + 14a = |14x + 2a|$$

№6. Найдите все значения параметра *a,* при которых уравнение имеет ровно 3 решения:

$$x^2 + a^2 - 2x + 14a = |14x + 2a|$$

№7. Найдите все значения параметра *a,* при которых уравнение имеет ровно 3 решения:

$$(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0$$

№8. Найдите все значения параметра *a,* при которых уравнение имеет ровно 2 решения:

$$x^2 - 4x - 2|x - a| + 2 + a = 0$$

№9. Найдите все значения параметра *a,* при которых уравнение имеет ровно 2 решения:

$$x^2 + 4x - 2|x - a| + 2 - a = 0$$

№10. Найдите все значения параметра *a,* при каждом из которых уравнение имеет единственное решение:

$$x^3 + ax^2 + 13x - 6 = 0$$

№11. Найдите все значения параметра *a,* при каждом из которых уравнение имеет единственное решение:

$$\frac{x^2 - (3a - 1)x + 2a^2 - 2}{x^2 - 3x - 4} = 0$$

№12. Найдите все значения параметра *a,* при каждом из которых уравнение имеет ровно 1 корень на отрезке [4;8]:

$$\frac{(x - a - 7)(x + a - 2)}{\sqrt{10x - x^2 - a^2}} = 0$$

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«12» 09 2025 г.
Паньженский В.И.

Задание

по ВКР студента Гусевой Анастасии Павловны
(ФИО полностью)

Тема работы «Графический метод решения задач с параметром»

Утверждена приказом по университету от «25.09» 20___ г. № 1103/0

Срок сдачи студентом законченной работы «17» 05 2026 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение и анализ литературы по теме исследования	Ноябрь 2025 г.	Выполнено
2.	Изучение и систематизация основных типов уравнений с параметром и методов их решения	Декабрь 2025 г.	Выполнено
3.	Анализ школьных учебников, заданий ОГЭ и ЕГЭ с параметром	Январь-февраль 2026 г.	Выполнено
4.	Разработка двух конспектов уроков и системы упражнений	Март-апрель 2026 г.	Выполнено
5.	Оформление библиографического списка	Май 2026 г.	Выполнено
6.	Оформление работы, подготовка презентации и выступления	Июнь 2026 г.	Выполнено

Дата выдачи задания «11» 09 2026 г.

Руководитель _____ Никитина О.Г.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

_____ Гусева А.П.
(подпись) (Ф.И.О.)

И.о. ректора Пензенского
государственного университета
Васину С.М.
студента (ки) 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Гусевой Анастасии Павловны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Гусева Анастасия Павловна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Графический метод решения задач с параметром», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен (на) с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

подпись
14.05.2026
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 14.05.2026
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР подпись О.Г.Никитина И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ»
выпускной квалификационной работы на тему: «Графический метод решения задач с параметром»
студентки 4 курса Гусевой Анастасии Павловны
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика»
Руководитель ВКР Никитина Ольга Геннадьевна

АНТИПЛАГИАТ
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАИМСТВОВАНИЙ

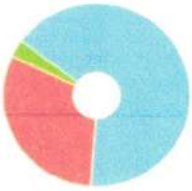
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - http://pnzgu.antiplagiat.ru

Отчет о проверке

Автор: Гусева Анастасия Павловна
Название документа: Графический метод решения задач с параметром

Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна
Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения: 31,46%
Оригинальность: 65,51%
Ин.контент: 0%
Цитирования: 3,03%
Самоцитирования: 0%

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

Проверено: 96,8% текста документа, исключено из проверки: 3,2% текста документа. Разделы и элементы, отключенные пользователем: Титульный лист, Содержание, Библиография, Таблицы

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- **Самоцитирования** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» – это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- **Цитирования** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы; библиография; фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- **Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- **Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- **Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 136
Тип документа: Выпускная квалификационная работа
Дата проверки: 15.05.2026 11:47:53
Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 48
Символов в тексте: 61561
Слов в тексте: 8227
Число предложений: 656

15.05.2026 — дд.мм.гггг.
подпись
Никитина О.Г. — И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Графический метод решения задач с параметром»
студентки Гусевой Анастасии Павловны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 22ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Гусевой Анастасии Павловны посвящена вопросам графического решения задач с параметром.

Актуальность темы исследования обусловлена тем, что выполнение заданий с параметром традиционно вызывает трудности у большинства учащихся. Трудности при изучении уравнений с параметром связаны с несколькими причинами. Во-первых, учащимся нужно одновременно работать с переменной и с параметром, понимая различие между ними. Во-вторых, решение часто зависит от разбиения на случаи, что требует развитой культуры математического рассуждения. В-третьих, в базовом школьном курсе тема обычно не изучается как самостоятельная содержательная линия: отдельные задания встречаются при рассмотрении различных разделов алгебры, но не всегда объединяются в систему. Одним из путей преодоления этих трудностей является использование графического метода. Он позволяет не только получить ответ, но и увидеть, почему при определенных значениях параметра уравнение имеет одно количество решений, а при других — другое. Для учащихся старшей школы такая наглядность особенно важна, поскольку она позволяет связать алгебраические преобразования с геометрическим смыслом задачи.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, заключения, списка использованных источников и приложений.

Основная часть состоит из двух глав. Первая глава содержит теоретические основы изучения графического метода решения уравнений с параметром в школьном курсе: рассматривается определение параметра, различные типы уравнений с параметром, а также графический метод решения уравнений, который на данный момент является наиболее удобным для анализа функций. Во второй главе приводятся различные практические аспекты преподавания темы: представлена методика изучения графического метода решения уравнений с параметром, технологическая карта факультативного занятия и система упражнений, которая позволит грамотно и последовательно сформировать необходимые умения и навыки по данной теме.

Работа Гусевой А. П. является самостоятельным исследованием. Практическая значимость заключается в возможности использования полученных результатов при работе в школе.

Выпускная квалификационная работа Гусевой Анастасии Павловны заслуживает оценки «отлично».

Руководитель ВКР Никитина Ольга Геннадьевна, доцент кафедры «Математическое образование», к.ф.-м.н. _____