

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Элементы теории чисел в олимпиадных задачах»

Студент

Носкова 20.05.24 Носкова Алина Игоревна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель

Никитина 20.05.24 Никитина О. Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Журавлева 15.06.24 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 24.05.24 № 11)

Заведующий кафедрой 24.05.24 Паньженский Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 20.06.24 № 2)

Секретарь ГЭК

Журавлева 20.06.24 Журавлева Е. Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2024

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	2-4
ГЛАВА I. ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС КАК ОДНА ИЗ ФОРМ ОРГАНИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ	5
1.1 Факультативные занятия – форма дифференцированного обучения...	5-10
1.2 Приложения теории чисел в олимпиадных задачах для школьников.....	11
1.3 Элементы теории чисел в заданиях ЕГЭ профильного уровня	28-34
ГЛАВА II. ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОРГАНИЗАЦИИ ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ 5-6 КЛАССОВ...	5
2.1 Анализ содержания рабочей программы по математике для 5-6 классов	35-37
2.2 Программа факультативного курса «Элементы теории чисел» для 6 классов	37-41
2.3 Технологическая карта факультативного занятия на тему «Деление с остатком»	42-52
2.4 Технологическая карта факультативного занятия на тему «Делимость»	52-61
2.5 Технологическая карта факультативного занятия на тему «Основная теорема арифметики»	61-71
Заключение	72-73
Список используемой литературы	74-75
Приложения	

+++++

Введение

В настоящее время образование занимает одну из ведущих ступеней в жизни людей, оно постоянно развивается, открывая все больше новых возможностей, средств для обучения и изучения. Перед школьным образованием сейчас стоит важная задача – мотивировать школьников к углубленному изучению дисциплин, чтобы в дальнейшем они смогли добиться в них высоких результатов.

Этому всему содействует проведение школьных олимпиад по различным предметам, которые в свою очередь направлены на воспитание всесторонне развитой личности, способной преодолеть любые трудности и поставленные перед ними проблемы.

Прежде чем ученик отправится на олимпиаду, учителю необходимо уделить особое внимание его предварительной подготовке. Необходимо внедрять олимпиадные задачи в структуру уроков, чтобы они были с динамическим уровнем сложности.

Для того чтобы ученики могли полноценно раскрыть свой потенциал, стоит проводить дополнительные факультативные занятия, посвященные разбору и решению различных типов олимпиадных заданий.

Элементы теории чисел уже не первый год входят в программу общего среднего образования. Школьный курс математики предполагает рассмотрение следующих тем данного раздела: понятие делимости чисел, а также их свойства, простые и составные числа, основная теорема арифметики, алгоритм Евклида, решение уравнений в целых числах и другие.

Актуальность данной темы состоит в том, что в едином государственном экзамене по математике профильного уровня содержатся задания, решение которых основывается на знании элементов теории чисел. Это задание близко по своему содержанию к олимпиадному. Оно предназначено для сильных учеников с высоким уровнем математической подготовки. Зачастую знаний, полученных в рамках школьной программы, оказывается недостаточно, чтобы

выполнить задания такого типа. Поэтому целесообразно изучение элементов теории чисел на факультативе.

Целью исследования является разработка программы факультатива по теме «Элементы теории чисел».

Объект исследования – процесс обучения математике в средней общеобразовательной школе.

Предмет исследования – методические особенности преподавания элементов теории чисел на факультативе.

Гипотеза исследования заключается в том, что создание факультативного курса по углубленному изучению темы элементов теории чисел будет способствовать устранению в расхождении уровня подготовки обучающихся в школе к единому государственному экзамену, а также стимулировать развитие познавательной и мыслительной видов деятельности учеников.

В соответствии с целью, объектом, предметом и гипотезой обозначим задачи исследования.

1. Подобрать и изучить соответствующую теоретическую и методологическую литературу.
2. Ознакомиться с исторической справкой становления и дальнейшего развития факультативных занятий.
3. Определить цели и требования, предъявляемые к факультативу по математике.
4. Рассмотреть основные теоретические основы из теории чисел.
5. Провести анализ содержания данной темы в различных школьных учебниках.
6. Рассмотреть особенности решения задач с элементами теории чисел ЕГЭ по математике.

Разработать методический материал для факультатива «Элементы теории чисел».

Для решения предложенных выше задач, поставленных в работе, были использованы следующие методы:

- анализ математической, методической литературы;
- анализ школьных программ по математике для 5-6 классов;
- обобщение и систематизация теоретических и практических знаний;
- проектирование технологических карт урока.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, включающей в себя две главы, а также заключения, списка литературы и приложения.

Основная часть состоит из двух глав. Первая глава содержит в себе теоретические аспекты основных тем по теории чисел, необходимых для решения различных олимпиадных задач и рассмотрены задания из ЕГЭ по математике профильного уровня, содержащие элементы теории чисел.

Во второй главе представлен анализ школьных программ по математике 5-6 классов по теме «Элементы теории чисел». Составлена программа факультативного курса по теме, предложены конспекты трех факультативных занятий.

В разделе приложений содержится контрольная работа по всему факультативному курсу.

ГЛАВА I. ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС, КАК ОДНА ИЗ ФОРМ ОРГАНИЗАЦИИ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ В ШКОЛЕ

1.1 Факультативные занятия – форма дифференцированного обучения

Получаемые в образовательных организациях знания играют значительную роль в формировании пути учеников, и способствует развитию их идеалов, ценностей, взглядов и убеждений. Кроме того, оно способствует всестороннему развитию личности.

Под обучением в школе понимают как получение образования, так и дальнейшую подготовку к выбору обучающимися будущей профессии, а также развитию способности к непрерывному процессу получения новых знаний и их систематизации и использовании на протяжении всей жизни.

Типовые учебные планы гарантирует непрерывность процесса изучения учебных предметов, предполагающих периодическую аттестацию (четвертную и итоговую). Существуют различные варианты совместной деятельности педагога и обучающихся: коллективная, индивидуальная, групповая. Стоит отметить, видами организации обучения может являться урок, семинар, игра, факультатив, лекция, экскурсия и т. д.

Впервые идея о необходимости включения факультативов в школьный курс обучения возникла у педагогов еще в 19 веке. Официально факультативные занятия в России были введены 10 ноября 1966 года постановлением ЦК КПСС и Совета министров СССР «О мерах дополнительного улучшения работы средней общеобразовательной школы». В данном постановлении разъяснялась, что факультатив будет стимулировать развитие способностей учащихся, а также являть средством для углубления знаний по физико-математическим и естественным наукам.

Факультативное занятие выступает в качестве эффективной формы дифференцированного обучения. Оно содействует коррекции знаний учащихся,

наращиванию интереса к изучаемому предмету, расширению уже имеющихся знаний с учетом интересов детей. Введение в школьный курс обучения факультативов по выбору является важным шагом в развитии среднего образования.

Факультативные занятия – это форма организации учебных занятий во внеурочное время, направленная на расширение, углубление и коррекцию знаний учащихся по учебным предметам в соответствии с их потребностями, запросами, способностями и склонностями, а также на активизацию познавательной деятельности. [15]

Все факультативные занятия подразделяют на четыре типа:

- факультативы, направленные на углубление программного материала;
- факультативные занятия, направленные на практическое применение знаний;
- межпредметные факультативы;
- внепрограммные курсы. [24]

К целям проведения факультативов относят:

1. Всесторонне развитие обучающихся.
2. Коррекция пробелов, возникающих у учащихся в процессе обучения.
3. Углубление знаний по конкретному предмету, подготовка к олимпиадам.
4. Развитие исследовательских способностей учащихся.
5. Подготовка к централизованному тестированию.

Рассмотрим функции факультативных занятий:

- мотивирующая. Благодаря факультативным занятиям обучающиеся получают удовлетворение в своей познавательной и творческой деятельности, что способствует повышению интереса к углубленному изучению предмета.

– предметно-повышающая. В рамках факультативных занятий ученики занимаются углубленным рассмотрением различных разделов изучаемого предмета, что в свою очередь содействует повышению успеваемости.

– общеобразовательная. Факультативные занятия предполагают создание условий для развития познавательных способностей обучающихся.

– профориентационная. Факультативные занятия дают возможность учащимся в большей степени познакомиться с изучаемым предметом, что, в свою очередь, помогает в дальнейшем выборе той учебной области, которая наиболее интересна.

Ранее было зафиксировано, что факультатив – одна из ведущих форм, осуществления дифференцированного обучения. Зачисление в такие группы осуществляется по желанию, что способствует проведению наиболее результативных занятий, так как учащиеся, выбравшие предмет, связывают свое будущее с углублением знаний. Преимуществом данного вида занятия является то, что содержание определяется самим учителем.

На данный момент методы отбора учебного материала, форм, средств факультативных занятий значительно увеличивается в связи с постоянным развитием общества. Выделяют некоторые принципы (в дальнейшем П.):

1. П. доступности. Данный принцип учитывает необходимость в удовлетворении познавательных интересов и запросов обучающихся.

2. П. учета возрастных особенностей. Принцип предполагает, что ученикам предоставляется учебный материал в соответствии с их возрастом и особенностями развития.

3. П. безотметочного обучения. Данный принцип повышает уровень интереса к изучению, так как обучающиеся не боятся ошибаться, высказывать неверные предположения, их мотивация строится не на получении оценки, а на удовлетворении внутренних потребностей.

4. П. индивидуализации. Как уже было изложено выше, факультатив обеспечивает дифференцированный подход к обучению, что дает возможность выстроить индивидуальную стратегию развития каждого ученика с учетом его самоопределения.

5. П. двойственного характера образовательного процесса. Данный принцип позволяет осуществлять реализацию нескольких стратегий обучения (базовую и профильную). Базовая стратегия предполагает кроме обучающей функции осуществление развития гармонической личности, профильная, в свою очередь, направлена на повышение уровня подготовки обучающихся к централизованному тестированию.

6. П. адаптивности педагогического процесса. Данный принцип обеспечивает осуществление процесса обучения для детей с различными способностями, учитывая их интересы и склонности к математике, физическому труду, искусству и т. д.

7. П. систематичности. Процесс обучения должен осуществляться непрерывно и иметь целостную, последовательную структуру. [15]

Появление в школьном курсе факультативных занятий стало одной из ключевых возможностей осуществления дифференцированного обучения. Поскольку они позволяют разделить материал на основной, который необходимо усвоить всем обучающимся, и дополнительный, способствующий углубленному изучению отдельных областей предмета и подготовке к участию в олимпиадах. Это разделение благоприятствует повышению уровня образования.

Целесообразно отметить, что все факультативные занятия строятся по конкретной программе. Она отличается вариативностью, которая дает возможность видоизменять содержание факультативного курса в зависимости от идеала, к которому стремятся и педагог, и ученики.

В настоящее время, учителя школы могут самостоятельно разрабатывать программы факультативных занятий и подбирать содержание учебного материала для каждого конкретного класса.

В качестве результата участия в факультативном курсе по математике могут быть приобретены следующие умения и навыки:

- умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учёбе и познавательной деятельности, развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности;
- умение самостоятельно планировать решения задач, причем и альтернативные, что способствует осознанному выбору наиболее эффективных методов;
- умение сопоставлять свои действия с планируемыми результатами;
- умение осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата;
- умение объективно проанализировать правильность решения задачи;
- умение осуществлять индивидуальную и групповую работу: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учёта интересов;
- осуществлять учебное взаимодействие, как с учителем, так и со сверстниками;
- формулировать, аргументировать и доказывать своё мнение;
- формирование и развитие компетентности в области использования информационно-коммуникационных технологий.
- понимание определяющей роли математики в развитии интеллектуальных и творческих способностей личности, в процессе образования и самообразования.

Все перечисленные умения и навыки дают возможность учащимся продемонстрировать необходимые компетенции для участия в олимпиадах и в достижении высоких результатов при прохождении ЕГЭ.

В заключении отметим, факультатив является одной из наиболее эффективных средств взаимодействия с обучающимися по осуществлению их подготовки к олимпиадам и Единому государственному экзамену по математике, а также способствует отбору одаренных детей и дальнейшей работы с ними.

1.2 Приложения теории чисел в олимпиадных задачах для школьников

Данный параграф будет посвящен рассмотрению основных разделов из теории чисел, которые изучаются в школьном курсе математики, кроме того будут представлены примеры решения некоторых задач.

Делимость целых чисел. Простые и составные числа. Основная теорема арифметики

Опр. 1. Если для целых чисел m и n , существует целое число c такое, что, $m = n * c$ то говорят, что число m делится на число n .

В данном случае числа m и n имеют особые названия: m – делимое, n – делитель, c – частное. Число m называют кратным числу n . [10]

Сочетание « m делится n » кратко записывают в виде $m : n$.

Опр. 2. Натуральное число, делителями которого являются только единица и само это число, называют простым.

Опр. 3. Целое число, которое имеет делители кроме единицы и самого себя (более двух делителей) называют составным.

Минимальным простым числом является 2. Последующие простые числа будут нечетными. Важно отметить, 1 не является ни простым, ни составным числом.

Опр. 4. Целые числа, общим делителем которых является только 1, называют взаимно простыми.

1. Отметим свойства делимости на множестве $\mathbb{N}$ ($\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел):

1°. Если $a : c$ и $c : a$, то $a : b$.

2°. Если $a : b$ и $c : b$, то $(a \pm c) : b$.

3°. Если $a : b$ и c не делится на b , то $(a \pm c)$ не делится на c .

4°. Если $a : b_1$ и $c : b_2$, то $ac : b_1 b_2$.

5°. Если $a : b$ и $c \in \mathbb{N}$, то $ac : bc$.

6°. Если целое число a делится на взаимно простые натуральные числа m и n , то a делится на их произведение mn .

Свойство 7. Если $a : b$ и $c : b$, то для любых натуральных чисел n и k справедливо соотношение $(an + ck) : b$.

Свойство 8. Среди n последовательных чисел одно и только одно делится на n .

Пример 1. Выясните, является ли число $3148^3 - 1139^3$ составным числом.

Решение. Разложив выражение по формуле разности кубов
$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 - ab + b^2),$$

Получим, что число $3148^3 - 1139^3 = (3148 - 1139)(3148^2 - 3148 \cdot 1139 + 1139^2)$

делится на $3148 - 1139 = 2009$, причем второй сомножитель больше 1.

Следовательно, число $3148^3 - 1139^3$ будет составным.

Пример 2. Докажите, что $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{1990}$ не делится на 3.

Решение. Отметим, сумма $S = 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{2024}$ – это сумма членов геометрической прогрессии с первым членом 1, знаменателем 2 и количеством членов 2025. Их сумма:

$$S = \frac{1(2^{2025} - 1)}{(2 - 1)} = 2^{2025} - 1.$$

$$2^2 = 4 \equiv 1(\text{mod } 3) \Rightarrow 2^{2025} = 2^{2024} \cdot 2 = 4^{1012} \cdot 2 \equiv 2(\text{mod } 3).$$

Следовательно, $2^{2025} - 1 \equiv 1(\text{mod } 3)$, то есть $S = 2^{2025} - 1$ не делится на 3.

Пример 3. Даны две карточки, на каждой из них записаны четыре цифры (причем все они различны) – по одной с каждой стороны карточки. Может ли так получиться, что всякое двузначное число, получаемое в результате сложения этих карточек, будет простым? (Важно. Цифры нельзя переворачивать, т. е. получать из цифры 6 цифру 9 и наоборот.)

Решение. Рассмотрим варианты получившихся чисел.

Двузначные числа, которые будут оканчиваться 0, 2, 4, 6 и 8 будут являться четными, а значит, они делятся на 2. Числа, оканчивающиеся цифрой 5, будут кратны пяти.

Поэтому числа, оканчивающиеся этими цифрами, не будут являться простыми, поэтому писать их на карточке нет смысла.

Осталось рассмотреть варианты с цифрами 1, 3, 7, 9.

Допустим, цифры 3 и 9 записаны на разных карточках. Из них можно составить число 39, которое не является простым. Если они расположены на одной карточке, то на другой записаны цифры 1 и 7. Тогда можно сложить число $91 = 7 \cdot 13$ – составное.

Следовательно, не всякое двузначное число, составленное из карточек будет являться простым.

Отметим основное утверждение, которое является базисным для решения задач о делимости:

Теорема 1 (основная теорема арифметики). Любое натуральное число $n > 1$, можно разложить в произведение простых чисел. Это разложение единственно, с точностью до порядка следования сомножителей. [25]

Как следствие, каждое натуральное число n единственным образом представимо в виде $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_m^{k_m}$, где $p_1 < p_2 < \dots < p_m$ – простые

числа, $k_1, k_2, \dots, k_m$ - некоторые натуральные числа. Такое представление числа n называется его каноническим разложением.

Например, $7056 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7^2$.

Существует метод разложения натурального числа на множители, не требующий перебора простых множителей. Этот метод был предложен французским математиком Пьером Ферма.

Метод Ферма. Пусть $n > 3$ - нечётное натуральное число. Будем прибавлять к нему последовательно нечётные числа 1, 3, 5, 7 и т. д., пока не получим квадрат некоторого числа h : $n + 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = h^2$. Так как $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = k^2$, то $n = h^2 - k^2 = (h - k)(h + k)$.

Пример 4. Представьте разложение на простые множители число 1080.

Предложенное число 1080 не представляет собой квадрат никаких чисел.

Следовательно, будем прибавлять к числу 1080 последовательные нечётные числа до момента получения квадрата: $1080 + 1 + 3 + 5 = 1089 = 33^2$, т.е. $1080 + 3^2 = 33^2$. Тем самым $1089 = 33^2 - 3^2 = (33 - 3)(33 + 3) = 30 \cdot 36 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$.

Ответ: $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$.

Признаки делимости. Деление с остатком

Чтобы осуществить разложение на множители какое-то число нужно отыскать его делители. С этой задачей помогают справиться признаки делимости.

Пусть дано n - значное натуральное число с десятичной записью

$a = \overline{a_{n-1}a_{n-2} \dots a_1a_0} = 10^{n-1}a_{n-1} + 10^{n-2}a_{n-2} + \dots + 10a_1 + a_0$ (a_0 - цифра единиц, a_1 - цифра десятков и т.д.).

Познакомимся с некоторыми признаками делимости.

Для того чтобы натуральное число делилось на 2, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на 2.

Для того чтобы натуральное число делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра числа делилась на 5 (т.е. цифра единиц либо 0, либо 5).

Для того чтобы натуральное число делилось на 10, необходимо и достаточно, чтобы цифра единиц была 0.

Для того чтобы натуральное число a , содержащее не менее трех цифр, делилось на 4, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 4 число, образованное двумя последними цифрами числа p .

Для того чтобы натуральное число a , содержащее не менее трех цифр, делилось на 25, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 25 число, образованное двумя последними цифрами числа p .

Для того чтобы натуральное число a , содержащее не менее четырех цифр, делилось на 8, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 8 число, образованное тремя последними цифрами числа p .

Для того чтобы натуральное число a , содержащее не менее четырех цифр, делилось на 125, необходимо и достаточно, чтобы делилось на 125 число, образованное тремя последними цифрами числа p .

Для того чтобы натуральное число a , делилось на 3, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 3.

Для того чтобы натуральное число a , делилось на 9, необходимо и достаточно, чтобы сумма его цифр делилась на 9.

Для того чтобы натуральное число делилось на 11, необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма его цифр, взятых со знаком «плюс», если цифры находятся на нечетных местах (начиная с цифры единиц), и взятых со знаком «минус», если цифры находятся на четных местах, делилась на 11.

Для того чтобы натуральное число делилось на 7 (на 13), необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма чисел, образующих грани по три цифры в грани (начиная с цифры единиц), взятых со знаком «плюс» для нечетных граней и со знаком «минус» для чётных граней, делилась на 7 (на 13).

Пример 1. Аня загадала некоторое двузначное число и спросила Матвея, делится ли оно на 2, 3, ..., 9? На все эти вопросы он ответил верно, причем важно отметить, положительных и отрицательных ответов было равное количество.

Можно ли дать верный ответ хотя бы на один вопрос, при условии, что число мы не знаем? На два?

Решение.

1) Задуманное число будет четным, т. к., если бы оно не являлось таковым, то на вопросы Ани о делимости заданного числа на 2, 4, 6, 8 Матвей ответил бы «да», а на вопросы о делимости этого же числа на 3, 5, 7, 9 – «нет». Однако, число, делящееся на 3, 5 и 9 не может быть двузначным. Следовательно на первый вопрос ответ «да».

Значит, на первый вопрос учительницы можно ответить «да».

2) Рассмотрим числа 18, 40, 56.

Оформим ответы Максима в виде таблицы (плюс обозначает ответ «да», минус – «нет»).

	На 2	На 3	На 4	На 5	На 6	На 7	На 8	На 9
18	+	+	-	-	+	-	-	+
40	+	-	+	+	-	-	+	-
56	+	-	+	-	-	+	+	-

Из таблицы видно, что на все вопросы можно дать разные ответы, исключением является первый. Поэтому дать верный ответ более чем на один вопрос нельзя.

Если натуральное число a не делится на натуральное число b , то говорят, что число a делится на b с остатком.

Теорема 1 (теорема о делении с остатком). Для любой пары чисел $a \in \mathbb{Z}$ и $b \in \mathbb{N}$ существует и притом только одна пара целых чисел r и q таких, что выполняются условия $a = bq + r, 0 \leq r < b$. [11]

Пример 3. Алладин хочет попасть в пещеру с сокровищами. Но чтобы в нее открылась дверь, Алладину необходимо расставить все числа от 1 до 25 в

таблице 5×5 , которая является кодом прохода к сокровищам. Причем числа необходимо расставить таким образом, что сумма чисел любого «зигзага» (рис. 1) из 4 клеток была кратна пяти.

а) Сможет ли Алладин попасть в пещеру?

б) Поменяется ли результат, если потребовать, чтобы сумма чисел внутри любой «полоски» (рис. 2) из 4 клеток должна быть кратна 5?

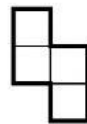
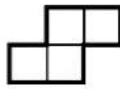
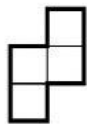
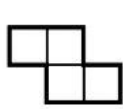


рис. 1

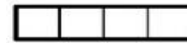


рис. 2

Решение.

Среди чисел 1-25 имеются по пять чисел, имеющих при делении на 5 следующие остатки:

Остаток 1: 1; 6; 11; 16; 21.

Остаток 2: 2; 7; 12; 17; 22.

Остаток 3: 3; 8; 13; 18; 23.

Остаток 4: 4; 9; 14; 19; 24.

Остаток 0: 5; 10; 15; 20; 25. Эти числа кратны 5.

а) Проанализируем два «зигзага», которые имеют по три общие клетки.

Обозначим расположенные в них числа a, b, c, d и a, b, c, e .

Так как суммы $a+b+c+d$ и $a+b+c+e$ кратны 5, то разность этих сумм также делится на 5. Получаем $(d-e):5$. Следовательно, разность чисел, расположенных через одно по диагонали, также будет делиться на 5, исходя из того, что данные числа имеют одинаковый остаток при делении на 5.

На схеме ниже представлены некоторые из этих чисел (соответствующие клетки).

		×		
×				×
		×		

Сначала отметим, что чисел, имеющих одинаковый остаток при делении на 5, ровно пять. Отсюда следует, еще одна клетка должны быть закрашена. Поэтому найдется хотя бы одна клетка, стоящая от нее через одну по диагонали (также закрашенная). Из это следует, что в квадрате будет закрашено минимум 6 клеток, что противоречит условию, что чисел с одинаковым остатком при делении на 5 всего пять.

Ответ: нет, Алладин не сможет попасть в пещеру.

б) Рассмотрим пример:

0		9	2	0
16		1	3	1
8		7		3
5	4	4	2	5

1				
3	2	2	3	3
0	4	4	2	0

Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

Определение 1. Наибольшим общим делителем двух целых чисел a и b называется наибольшее число, на которое a и b делятся без остатка.

Обозначение: НОД ($a; b$) - наибольший общий делитель чисел a и b .

Для нахождения НОД двух и более чисел необходимо:

1. Разложить данные числа на простые множители;
2. Выписать все простые числа, которые одновременно входят в каждое из полученных разложений, для краткости записи одинаковые множители записывают в виде степенного выражения;
3. Каждое из выписанных простых чисел взять с наименьшим из показателей степени, с которыми оно входит в разложения данных чисел;
4. Посчитать произведение полученных степеней.

Пример 1. Найдите наибольший общий делитель чисел 8 и 156.

Разложим на простые множители числа 8 и 156:

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3, \quad 156 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13.$$

Общими простыми множителями являются $2^2 \cdot 3$.

$$\text{НОД}(8, 156) = 2^2 = 4.$$

Теорема 1. Пусть $a = bq + c, b \neq 0, a, b, c, q \in \mathbb{Z}$, тогда $(a; b) = (b; c)$.

Следствие 1. Наибольший общий делитель двух чисел совпадает с наибольшим общим делителем одного из них и остатка от деления другого числа на первое.

Следствие 2. $\text{НОД}(a; b) = \text{НОД}(a + b; b) = \text{НОД}(a - b; b)$.

Используя теорему и следствия, можно получить алгоритм Евклида, для нахождения $\text{НОД}(a; b)$.

Алгоритм Евклида.

1. Поделить a с остатком на b , т.е. $a = bq_1 + r_1$ ($0 \leq r_1 < |b|$).
Причем $(a; b) = (b; r_1)$ согласно следствию 1.

2. Поделить b с остатком на r_1 , т.е. $b = r_1q_2 + r_2$ ($0 \leq r_2 < r_1$).
Причем $(b; r_1) = (r_1; r_2)$.

3. Поделить r_1 с остатком на r_2 , т.е. $r_1 = r_2q_3 + r_3$ ($0 \leq r_3 < r_2$).
Причем $(r_1; r_2) = (r_2; r_3)$.

И т.д. (пока не получится $r_k = 0$).

Итак: $r_{k-2} = r_{k-1}q_k + 0$.

В таком случае ясно, что $(r_{k-2}; r_{k-1}) = (r_{k-1}; 0) = r_{k-1}$. Таким образом, получаем $(a; b) = (b; r_1) = (r_1; r_2) = (r_2; r_3) = \dots = (r_{k-2}; r_{k-1}) = r_{k-1}$.

Итак, наибольший общий делитель двух чисел равен последнему ненулевому остатку в цепочке «последовательных» делений в алгоритме Евклида.

Пример 2. Найдите $\text{НОД}(52394, 3642)$.

Решение. Строим последовательность Евклида для данных чисел.
Разделим 53728 на 3720 с остатком:

$$53728 = 3720 \cdot 14 + 1648;$$

$$3720 = 1648 \cdot 2 + 424;$$

$$1648 = 424 \cdot 3 + 376;$$

$$424 = 376 \cdot 1 + 48;$$

$$376 = 48 \cdot 7 + 40;$$

$$48 = 40 \cdot 1 + 8;$$

$$40 = 8 \cdot 5 + 0.$$

$$\text{НОД}(53728, 3720) = 8.$$

Определение 2. Наименьшим общим кратным двух целых чисел a и b называется наименьшее натуральное число, делящееся на эти числа.

Обозначение: НОК ($a; b$) – наименьшее общее кратное чисел a и b . [17]

Для нахождения НОК двух и более чисел необходимо:

1. Разложить данные числа на простые множители;
2. Выписать все простые числа, которые входят в каждое из полученных разложений, для краткости записи одинаковые множители записывают в виде степенного выражения;
3. Каждое из выписанных простых чисел взять с наибольшим из показателей степени, с которыми оно входит в разложения данных чисел;
4. Найти произведение полученных степеней.

Пример 3. Найдите наименьшее общее кратное чисел 8 и 156.

Разложим на простые множители числа 8 и 156:

$$8 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3, \quad 156 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 13 = 2^2 \cdot 3 \cdot 13.$$

$$\text{Таким образом, } \text{НОК}(8, 156) = 2^3 \cdot 3 \cdot 13 = 312.$$

Ответ: $\text{НОК}(8, 156) = 312$.

Если натуральные числа a и b взаимно просты, причём число a имеет m натуральных делителей, а число b имеет n натуральных делителей, то число ab имеет mn натуральных делителей.

Для произвольных натуральных чисел a и b справедлива формула $\text{НОК}(a; b) \cdot \text{НОД}(a; b) = ab$.

Пример 4. Крош разложил в ряд 1000 конфет. Сначала Крош съедал каждую девятую конфету слева, потом – каждую седьмую конфету, двигаясь вправо. После чего Ежик съел седьмую слева из оставшихся конфет, а затем каждую седьмую и девятую из них, направляясь вправо. Сколько конфет осталось?

Решение. Крош съел одну конфету, после чего их осталось $1000 - 1 = 999$. Правее девятой конфеты остается $1000 - 1 = 999$. Далее Крош есть

каждую седьмую конфету, получается $999 - 141 = 858$ конфет, а справа от уже съеденной 859 штук.

После этого конфеты начинает есть Ежик, седьмую из них, начиная слева из восьми конфет, далее каждую девятую из 859, которые остались после Кроша справа съеденной Крошем первой конфеты.

Следовательно, Ежик съел $859 : 9 = 95,44$, а именно $95 + 1 = 96$ конфет, включая первую.

Количество конфет, которые съел Крош: $141 + 1 = 142$.

Осталось всего $1000 - 142 - 96 = 752$ конфеты.

Сравнения и их свойства

Определение. Пусть m - натуральное число. Говорят, что a сравнимо с b по модулю m , если их разность $a - b$ делится на m . [21]

При этом используется запись $a \equiv b \pmod{m}$.

Например, $29 \equiv 3 \pmod{13}$, $67 \equiv -2 \pmod{23}$.

Докажем следующее предложение.

Предложение. $a \equiv b \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда a и b имеют одинаковые остатки от деления на m .

Доказательство.

Пусть a и b при делении на m дают остатки r_1 и r_2 соответственно:

$$a = mq_1 + r_1, 0 \leq r_1 < m; b = mq_2 + r_2, 0 \leq r_2 < m.$$

Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $(a - b) : m$, т.е. $(m(q_1 - q_2) + r_1 - r_2) : m$, откуда $(r_1 - r_2) : m$.

С другой стороны, поскольку $0 \leq r_1, r_2 < m$, имеем $|r_1 - r_2| < m$. Сопоставляя два последних утверждения, получаем, что $r_1 - r_2 = 0$, поэтому $r_1 = r_2$.

Обратно, при $r_1 = r_2$ справедливо $a - b = m(q_1 - q_2) : m$.

Что и требовалось доказать.

Следовательно, всякое число сравнимо по модулю m со своим остатком от деления на m .

Рассмотрим свойства сравнений:

1. $a \equiv a \pmod{m}$.
2. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $b \equiv a \pmod{m}$.
3. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.
4. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$.
5. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.
6. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $c \cdot a \equiv c \cdot b \pmod{m}$,
7. Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}, n \in \mathbb{N}$.
8. Пусть $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ – многочлен n -й степени от x с целыми коэффициентами. Тогда если $a \equiv b \pmod{m}$, то $P_n(a) \equiv P_n(b) \pmod{m}$.

Приведем примеры применения сравнений.

Пример 1. Найти остаток от деления числа $a = 31^{21} \cdot 43^9 \cdot 55^{15}$ на 3.

Решение. Числа 31, 43 и 55 не делятся на 3, следовательно, $31^{21} \equiv 43^2 \equiv 55^2 \equiv 1 \pmod{3}$, так как квадрат целого числа, которое не делится на 3, при делении на 3 дает остаток 1.

Тогда $31^{20} \equiv 43^8 \equiv 55^{14} \equiv 1 \pmod{3}$.

Осталось рассмотреть $a \equiv 31 \cdot 43 \cdot 55 \equiv 1 \cdot 1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod{3}$, т. е. искомый остаток равен 1.

Пример 2. Докажите, что выражение $a^3 - a$ делится на 3, где a – любое целое число.

Доказательство. Разложим выражение $a^3 - a$ на множители, вынесем общий множитель a за скобку. Получим: $a^3 - a = a(a^2 - 1)$, а затем применим формулу разность квадратов: $a(a^2 - 1) = a(a-1)(a+1)$.

Получили три подряд идущих числа $(a-1)a(a+1)$, одно из которых будет делиться на 3, следовательно выражение $a^3 - a$ кратно 3.

Пример 3. Докажите, что $84 + 85 + 86 + 87 + 88 + 89 + 90$ делится на 7 и на 87.

Доказательство. Суммы $87 + 90$, $85 + 89$, $86 + 88$ делятся на 87, также 87 делится на 87. Тогда всю сумму можно представить в виде выражения 7×87 . Отсюда следует, что сумма $84 + 85 + 86 + 87 + 88 + 89 + 90$ кратна 7 и 87.

Уравнения и неравенства в целых числах

Определение 1. Диофантовым уравнением первого порядка с двумя неизвестными x, y называется уравнение вида $ax + by = c$, где $a, b, c, x, y \in \mathbb{Z}$. [23]

Рассмотрим теоремы, на основании которых составим алгоритм решения уравнений в целых числах первой степени с двумя неизвестными.

Теорема 1. Если в уравнении $ax + by = c$, $\text{НОД}(a; b) = 1$, то уравнение имеет, по крайней мере, одно решение.

Теорема 2. Если в уравнении $ax + by = c$, $\text{НОД}(a; b) = d > 1$ и c не делится на d , то уравнение целых решений не имеет.

Теорема 3. Если в уравнении $ax + by = c$, $\text{НОД}(a; b) = d > 1$ и $c : d$, то оно равносильно уравнению $a_1x + b_1y = c_1$, в котором $\text{НОД}(a_1; b_1) = 1$.

Теорема 4. Если в уравнении $ax + by = c$, $\text{НОД}(a; b) = 1$, то все целые решения этого уравнения задаются формулами

$$\begin{cases} x = x_0c + bt \\ y = y_0c + at, \end{cases}$$

где x_0, y_0 – целое решение уравнения $ax + by = c$, t – любое целое число.

Перечисленные выше теоремы дают возможность составить алгоритм решения в целых числах уравнения вида $ax + by = c$:

1. Найти $\text{НОД}(a; b)$:
 - если $\text{НОД}(a; b) = d > 1$ и c не делится на d , то уравнение целых решений не имеет;
 - если $\text{НОД}(a; b) = d > 1$ и $c : d$, то

2. Разделить почленно уравнение $ax + by = c$ на d , получив при этом уравнение $a_1x + b_1y = c_1$, в котором $\text{НОД}(a_1; b_1) = 1$.

3. Найти целое решение $(x_0; y_0)$ уравнения $a_1x + b_1y = 1$ путём представления 1 как линейной комбинации чисел a и b .

4. Составить общую формулу целых решений данного уравнения

$$\begin{cases} x = x_0c + bt \\ y = y_0c + bt, \end{cases}$$

где x_0, y_0 – целое решение уравнения $ax + by = c$, t – любое целое число.

Определение 2. Диофантовым уравнением второго порядка с двумя неизвестными x и y называется уравнение вида $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = F$, где $A, B, C, D, E, F, x, y \in \mathbb{Z}$ и хотя бы одно из чисел A, B, C отлично от нуля. [23]

Рассмотрим основные методы решения диофантовых уравнений второго порядка с двумя неизвестными на конкретных примерах.

Одним из методов решения является разложение на множители. Он состоит в том, что левая часть данного уравнения каким-либо образом раскладывается на множители (чаще всего путем нахождения дискриминанта), и задача сводится к перебору конечного числа вариантов.

Рассмотрим некоторые способы решения диофантовых уравнений:

1. Метод разложения на множители.
2. Метод использования отношения делимости.
3. Метод решения относительно одной переменной, выделение целой части.
4. Метод «спуска».
5. Параметризация уравнения.
6. Метод прямого перебора.

Пример 1. Решите уравнение в целых числах $x^2 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = 2$

Решение. $x^2 6xy + 8y^2 + 3x + 6y = 2 \Leftrightarrow (x + 2y)(x + 4y + 3) = 2$

Данное произведение может равняться 2 в четырех случаях. Рассмотрим каждый из них.

$$1) \quad \begin{cases} x + 2y = 2; \\ x + 4y + 3 = 1; \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2y + 2; \\ -2y + 2 + 4y + 3 = 1; \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2y + 2; \\ 2y = -4; \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2y + 2; \\ y = -2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \times (-2) + 2; \\ y = -2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 6; \\ y = -2. \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + 4y + 3 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2y + 1; \\ -2y + 1 + 4y + 3 = 2; \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2y + 1; \\ 2y = -2; \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2y + 1; \\ y = -1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \times (-1) + 1; \\ y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 3; \\ y = -1. \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} x + 2y = -2; \\ x + 4y + 3 = -1; \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2y - 2; \\ -2y - 2 + 4y + 3 = -1; \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2y - 2; \\ 2y = -2; \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0; \\ y = -1. \end{cases}$$

$$4) \quad \begin{cases} x + 2y = -1; \\ x + 4y + 3 = -2; \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2y - 1; \\ -2y - 1 + 4y + 3 = -2; \end{cases} \vee \begin{cases} x = -2y - 1; \\ 2y = -4; \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3; \\ y = -2. \end{cases}$$

Ответ: (6,-2); (3,-1); (0,-1); (3,-2).

Данное уравнение было решено методом прямого перебора. Однако стоит отметить, что не всегда удобно пользоваться этим способом, так как количество вариантов, необходимых для рассмотрения, может быть достаточно велико. В таких случаях удобнее пользоваться другими приемами решения диофантовых уравнений.

Решение некоторых текстовых задач часто сводятся к решению уравнений в целых числах. Рассмотрим подобную задачу.

Пример 2. Имеются два вида коробок, вместимость которых 130 и 160 кг. Сколько было коробок обоих видов, если вместе они вмещают 3 тонны?

Решение. Обозначим количество коробок первого типа за x , второго за y .

Составим уравнение: $130x + 160y = 3000$ или $13x + 16y = 300$.

Решим данное уравнение, используя известные признаки делимости.

Преобразуем уравнение, разложив каждое слагаемое и сумму таким образом, чтобы она была кратна 13.

Получим: $13x + 13y + 3y = 13 \cdot 23 + 1 \Leftrightarrow 3y - 1 = (23 - x - y)$.

Отсюда делаем вывод, что разность $3y - 1$ делится на 13.

Если $3y - 1 = 0$, то y не является натуральным числом.

Если $3y - 1 = 13$, то y не является натуральным числом.

Если $3y - 1 = 26$, то $y = 9, x = 12$.

Если $3y - 1 = 39$, то y не является натуральным числом.

Если $3y - 1 = 52$, то y не является натуральным числом.

Если $3y - 1 = 65$, то $y = 22$. Но $22 * 16 = 352 > 300$.

Ответ: 12 коробок первого типа и 9 второго типа.

Пример 3. Решить уравнение в целых числах $5x - 7y = 3$.

Решение. Решим данное уравнение, применив метод «спуска».

Выразим переменную, которая имеет меньший коэффициент по модулю:

$$x = \frac{7y + 3}{5} = y + \frac{2y + 3}{5}$$

Полученная дробь $\frac{2y+3}{5}$ должна быть равна целому числу.

Положим, что $\frac{2y+3}{5} = z$, где z – целое число.

Тогда $2y + 3 = 5z$.

Из данного уравнения выразим переменную, с меньшим по модулю коэффициентом, и сделаем преобразование аналогичное предыдущему уравнению: $y = \frac{5z-3}{2} = 2z - \frac{z-3}{2}$.

Полученная дробь $\frac{z-3}{2}$ должна быть равна целому числу.

Пусть $\frac{z-3}{2} = t$, где t – целое число.

Отсюда следует, что $z = 2t + 3$. Затем последовательно возвращаемся к переменным x и y .

$$y = 3(2t + 3) - t \Leftrightarrow y = 5t + 9$$

$$x = y + z \Leftrightarrow x = 5t + 9 + 2t + 3 \Leftrightarrow x = 7t + 12$$

Ответ: $x = 7t + 12, y = 5t + 9$, где $t \in \mathbb{Z}$.

Рассмотрим задачу, решение которой будет осуществлено при помощи введения параметра. Решение уравнения в целых числах данным методом

заключается в прибавлении к обеим частям уравнения неизвестного параметра, а затем решения полученного уравнения относительно одной из переменных.

Пример 4. Решите уравнение в целых числах $2x^2 - 2xy + 9x + y = 2$.

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$2x^2 - x(2y - 9) + y - 2 + a = a$$

и разложим левую часть уравнения на множители относительно переменной x .

$$D = 4y^2 - 44y + 97 - 8a$$

Если $97 - 8a = 121$, то дискриминант будет полным квадратом, $a = -3$ и

$$x = \frac{2y - 9 \pm (2y - 11)}{4}$$

Отсюда $x_1 = 0,5$, $x_2 = y - 5$. Тогда уравнение примет вид:

$$(2x - 1)(x - y + 5) = -3$$

Решение уравнений данного типа было рассмотрено в примере 1.

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} 2x - 1 = 1; \\ x - y + 5 = -3; \end{array} \right. \bigvee \left\{ \begin{array}{l} x = 1; \\ 1 - y = -9; \end{array} \right. \bigvee \left\{ \begin{array}{l} x = 1; \\ y = 9. \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} 2x - 1 = -1; \\ x - y + 5 = 3; \end{array} \right. \bigvee \left\{ \begin{array}{l} x = 0; \\ 0 - y = -2; \end{array} \right. \bigvee \left\{ \begin{array}{l} x = 0; \\ y = 2. \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} 2x - 1 = 3; \\ x - y + 5 = -1; \end{array} \right. \bigvee \left\{ \begin{array}{l} x = 2; \\ x - y = -6; \end{array} \right. \bigvee \left\{ \begin{array}{l} x = 2; \\ y = 8. \end{array} \right. \\ & \left\{ \begin{array}{l} 2y - 1 = -3; \\ x - y + 5 = 1; \end{array} \right. \bigvee \left\{ \begin{array}{l} x = -1; \\ -1 - y = -4; \end{array} \right. \bigvee \left\{ \begin{array}{l} x = -1; \\ y = 3. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Ответ: (1,9); (0,2); (2,8); (-1,3).

Пример 5. Найдите все целые z , удовлетворяющие неравенству

$$\sqrt[6]{z+1} < \sqrt[6]{6-z}.$$

Решение.

$$\begin{cases} z+1 \geq 0; \\ 6-z \geq 0; \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq z \leq 6.$$

Важно отметить, что левая часть неравенства увеличивается с ростом z , а правая при этом уменьшается.

При $z = -1$, получаем $0 < \sqrt[6]{7}$ – верно.

При $z = 0$, получаем $1 < \sqrt[6]{6}$ – верно.

При $z = 1$, получаем $\sqrt[6]{2} < \sqrt[6]{5}$ – верно.

При $z = 2$, получаем $\sqrt[6]{3} > \sqrt[6]{4}$ – верно.

При $z = 3, 4, 5, 6$ получаем неверное неравенство, следовательно, решениями они не являются.

Пример 6. Найдите все пары целых чисел $(x; y)$, удовлетворяющих системе неравенств:

Решение. Выделим полный квадрат:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166; \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$$
$$\begin{cases} (x - 9)^2 + (y + 10)^2 < 15; \\ (x - 16)^2 + (y + 6)^2 < 21; \\ x, y \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Из первого и второго неравенств получаем:

$$\begin{cases} (x - 9)^2 < 15; \\ (x - 16)^2 < 21; \end{cases} \bigvee \begin{cases} 6 \leq x \leq 12; \\ 12 \leq x \leq 20. \end{cases}$$

Следовательно, $x = 12$.

$$\begin{cases} (y + 10)^2 < 6; \\ (y + 6)^2 < 5; \end{cases} \bigvee \begin{cases} -2 \leq y + 10 \leq 2; \\ -2 \leq y + 6 \leq 2; \end{cases} \bigvee \begin{cases} -12 \leq y \leq -8; \\ -8 \leq y \leq -4. \end{cases}$$

Отсюда $y = -8$.

Ответ: $(-12, -8)$.

1.3 Элементы теории чисел в заданиях ЕГЭ профильного уровня

Рассмотрение элементов теории чисел (далее ЭТЧ) является одной из интереснейших тем математики. Данный раздел начинает изучаться в школьном курсе математики еще в 5 классе. На первых уроках происходит знакомство учеников с основными понятиями изучаемой темы.

Рассмотрение тем ЭТЧ осуществляется дискретно, т. е. постепенно в разных классах в соответствии с возрастными особенностями учеников.

Впервые задачи, связанные с ЭТЧ, были представлены в КИМах ЕГЭ по математике профильного уровня в две тысячи десятом году. Позже задания по данной теме вошли в перечень содержания итоговой аттестации по математике за курс средней школы.

Стоит отметить, что задания по ЭТЧ включены в варианты различных олимпиад, которые проводятся для старшеклассников и предоставляют льготы (дополнительные баллы) при поступлении в институт.

Разработчики КИМ Единого государственного экзамена по математике предлагают обучающимся выполнить задание номер 19, которое в своем решении содержит элементы теории чисел. За правильное решение данной задачи предусмотрено выставление четырех первичных баллов. Данное задание содержит в себе три подзадачи, пункты а, б, в соответственно.

Пункты а и б оцениваются в 1 первичный балл. В каждом из них необходимо решить задачу, включающую в себя построение примера или обоснование того, что построение такого примера невозможно. Зачастую, обучающиеся справляются с первыми двумя пунктами, учитывая, что они внимательно читают условие предложенного задания и понимают его.

Вопросы в пунктах а и б часто начинаются фразой «Можно ли». При ответе «да, можно» необходимо построить конкретный пример. Ответ «нет, нельзя» предполагает доказательство.

Пункт в оценивается двумя первичными баллами. Он немного сложнее предыдущих двух пунктов. Часто в нем требуется построение примера, обладающего в некотором смысле «экстремальными» характеристиками (например, задача на максимум или минимум выражения, принимающего дискретные значения), а также доказательство того, что именно этот пример, а не какой – то другой обладает данными характеристиками.

Типичной ошибкой, допускаемыми школьниками при решении данного задания, является то, что они не понимают вопроса задачи, то есть в каком виде

должен быть дан ответ. Решение должно содержать не только числовой ответ, но и саму цепочку рассуждений, приводящую к правильному ответу.

Рассмотрим некоторые методы решения данных задач:

1. Методы логики: анализ, синтез, выдвижение гипотез и их проверка и др.
2. Методы элементарной математики: метод математической индукции, комбинаторные, алгебраические методы.
3. Методы теории делимости: использование свойств делимости, алгоритма Евклида, сравнения по модулю, четности и т.д.

Выделим основные типы заданий, которые встречаются в номере 19 ЕГЭ по математике профильного уровня:

- делимость и ее свойства, признаки делимости;
- четность;
- десятичная запись числа;
- НОД и НОК, основная теорема арифметики;
- уравнения в целых числах;
- неравенства и оценки в задачах теории чисел;
- текстовые задачи.

Рассмотрим несколько примеров задач, встречающихся в контрольно – измерительных материалах ЕГЭ по математике за 2021 – 2023 года.

Пример 1. Дано трехзначное число B , сумма его цифр равна P .

- а) Может ли выполняться равенство $B \cdot P = 1105$?
- б) Может ли выполняться равенство $B \cdot P = 1106$?
- в) Какое наименьшее значение может принимать выражение $B \cdot P$, если предполагается, что оно больше 1503?

Решение.

- а) Если $B = 221$ и $P = 5$, то мы получаем $221 \cdot 5 = 1105$. Следовательно, равенство $B \cdot P$ выполняется.

б) Числа В и Р при делении на 3 дают одинаковые остатки.

Если остаток равен 0, то выражение $B \cdot P$ при делении на 3 также даст остаток 0.

Если остаток 1 или 2, то выражение $B \cdot P$ даст остаток 1. Отсюда следует, что выражение $B \cdot P$ не может равняться 1106.

в) Разложим число 1504 на простые множители.

$$1504 = 47 \cdot 2^5$$

Если $B \cdot P = 1504$, то В делится на 47 (т.к. $P < 47$). Выписав делители числа 1504, кратные 47 получим: 188, 376, 752, которые не подходят.

Рассмотрим далее:

Число 1505 при делении на 3 дает остаток 2. В пункте б) выяснили, что данные числа не удовлетворяют условию.

Число 1506 делится на 3, но не делится на 9, такого не может быть, т.к. В и Р оба делятся на 3 или оба не делятся.

Число $1507 = 137 \cdot 11$. Оно подходит.

Ответ: а) да, б) нет, в) 1507.

Пример 2. Даны три различных числа. Второе число равно сумме цифр первого, третье – сумме цифр второго числа.

а) Может ли получиться сумма этих чисел равной 420?

б) Может ли получиться сумма этих чисел равной 419?

в) Сколько можно найти троек чисел, в которых: 1-ое число будет трехзначным, а последнее 5?

Решение.

а) Может. Рассмотрим число 398. $398 + 20 + 2 = 420$.

б) Пусть первое число имеет вид: $z_1 = 100m + 10n + k$.

Второе: $z_2 = m + n + k = 10q + p$. Получаем $p = m + n + k - 10q$.

Третье число будет равным $z_3 = q - p$.

Найдем сумму данных трех чисел:

$$z_1 + z_2 + z_3 = 100m + 10n + k + 10q + p + q - p.$$

Замена: $p = m + n + k - 10q$.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 + z_3 &= 100m + 10n + k + 10q + p + q + p \\ &= 100m + 10n + k + 10q + m + n + k - 10q + q + m + n + k \\ &\quad - 10q = 102m + 12n + 3k - 9q \end{aligned}$$

Числа 102, 12, 3, -9 делятся на 3 следовательно и вся сумма должна делиться на 3.

в) Так как число трехзначное, то сумма его цифр больше или равна 27, поэтому она должна быть равна 14 или 23, т.е. нам будут подходить все трехзначные числа, которые при делении на 9 дают остаток 5, но необходимо исключить числа, сумма цифр которых равна 5.

Данные числа равны $11 \cdot 9 + 5 = 104, 12 \cdot 9 + 5 = 113, \dots, 110 \cdot 9 + 5 = 995$.

Получается, что мы имеем $110 - 11 + 1 = 100$ чисел, дающих нужный нам остаток. Теперь необходимо исключить числа, сумма цифр которых равна 5.

Набор цифр 5,0,0 составляет одно такое число.

Набор цифр 4,1,0 составляет четыре таких числа.

Набор цифр 3,2,0 составляет четыре таких числа.

Набор цифр 3,1,1 составляет три таких числа.

Набор цифр 2,2,1 составляет три таких числа.

Мы рассмотрели все возможные комбинации цифр, которые в сумме дают 5, других не существует.

Получили $100 - 1 - 4 - 4 - 3 - 3 = 85$ чисел.

Ответ: а) да, б) нет, в) 85.

Пример 3. Последние несколько лет московские синоптики фиксировали температуру в январе. Среднее арифметическое значение их исследований равно -5, среднее арифметическое всех положительных температур в эти годы равно 6, а отрицательных -12. Всего сделано записей меньше 30, но больше 18.

а) Сколько лет проводили измерения московские синоптики?

б) Какие значения температур преобладали в январе положительные или отрицательные?

в) Найдите наибольшее количество отрицательных значений, которое возможно.

Решение.

а) Обозначим за m – количество лет, когда средняя температура за январь была положительной, за n – количество лет, когда средняя температура за январь была отрицательной, за k – количество лет, когда средняя температура за январь была 0.

P – среднее арифметическое за все года.

$$P = -5(m + n + k)$$

$$P_+ = 6m$$

$$P_- = -12n$$

$$P_0 = 0$$

$$P = P_+ + P_- + P_0$$

$$-5(m + n + k) = 6m - 12n$$

$$-5(m + n + k) = -6(2n - m)$$

$$(m + n + k) : 6, \text{ т. к. } m, n, k - \text{натуральные числа.}$$

Из условия следует, что количество измеряемых лет находится в промежутке от 18 до 30. Число кратное 6 из заданного промежутка – 24.

$$\text{б) } 5(m + n + k) = 6(2n - m)$$

$$5m + 5n + 5k = 12n - 6m$$

$$11m - 7n + 5k = 0$$

$$7n = 11m + 5k$$

$$k \geq 0 \rightarrow 7n - 11m \geq 0 \rightarrow n > m.$$

Следовательно, количество лет со средней отрицательной температурой в январе больше, чем с положительной.

$$\text{в) } m + n + k = 24$$

$$5 \cdot 24 = 6(2n - m)$$

$$120 = 12n - 6m$$

$$20 = 2n - m \rightarrow m = 2n - 20$$

$$m + n \leq 24$$

$$3n \leq 44$$

$$n \leq 14\frac{2}{3}$$

Максимальное количество лет с отрицательным средним месячным значением температур равно 14.

Ответ: а) 24, б) отрицательное, в) 14.

ГЛАВА II. ПРАКТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОРГАНИЗАЦИИ ФАКУЛЬТАТИВА ПО МАТЕМАТИКЕ ДЛЯ 5-6 КЛАССОВ

2.1 Анализ содержания рабочей программы по математике для 5-6 классов

Анализ школьных рабочих программ по математике даст некоторые представления об особенностях изучения элементов теории чисел.

Весь курс обучения математике в 5 классе делится на четыре раздела.

1. Натуральные числа и ноль.
2. Наглядная геометрия.
3. Дроби.
4. Решение текстовых задач.

Таблица 1 - Тематическое планирование по математике для 5 класса

№	Наименование разделов и тем программы	Всего	Контрольные работы	Практические работы
1	Натуральные числа. Действия с натуральными числами	43	4	0
2	Наглядная геометрия. Линии на плоскости	12	1	2
3	Обыкновенные дроби	48	5	0
4	Наглядная геометрия. Многоугольники	10	1	2
5	Десятичные дроби	38	3	0
6	Наглядная геометрия. Тела и фигуры	9	1	1
7	Повторение и обобщение	10	1	0

Выделим темы, в рамках которых происходит знакомство обучающихся с элементами теории чисел.

При изучении раздела «Натуральные числа и ноль» представлена тема «Деление с остатком». Данную операцию рекомендовано вводить после

рассмотрения текстовой задачи, после чего целесообразно вводить понятий неполного частного и остатка.

Кроме того, элементы теории чисел также представлены в теме «Делимость натуральных чисел». В ней рассматриваются свойства и признаки делимости натуральных чисел. Каждое свойство делимости чисел подтверждается примером. В параграфе «Признаки делимости» рассматриваются признаки делимости на 10, на 5, на 2, на 3 и на 9. В теме «Делители натурального числа» вводятся понятия делитель и простой делитель.

Курс обучения математике в 6 классе также поделен на несколько разделов.

1. Натуральные числа.
2. Дроби.
3. Положительные и отрицательные числа.
4. Буквенные выражения.
5. Решение текстовых задач.
6. Наглядная геометрия.

Таблица 2 - Тематическое планирование по математике для 6 класса

№	Наименование разделов и тем программы	Всего	Контрольные работы	Практические работы
1	Натуральные числа	30	3	0
2	Наглядная геометрия. Прямые на плоскости	7	1	0
3	Дроби	32	3	1
4	Наглядная геометрия. Симметрия	6	0	1
5	Выражения с буквами	6	1	0
6	Наглядная геометрия. Фигуры на плоскости	14	1	1
7	Положительные и отрицательные числа	40	3	0
8	Представление данных	6	0	1
9	Наглядная геометрия. Фигуры в пространстве	9	1	1
10	Повторение	20	1	0

Впервые обучающиеся 6 класса встречаются с элементами теории чисел при изучении темы «Делимость натуральных чисел». Учащиеся вспоминают, как не выполняя деления, определить, делится ли данное натуральное число нацело на: 2, 3, 5, 9 и 10. Далее происходит знакомство с простыми и составными числами, изучается операция разложения натуральных чисел на простые числа и знакомятся с понятиями наибольшего общего делителя (НОД) и наименьшего общего кратного (НОК) нескольких натуральных чисел. Вводятся правила нахождения НОД и НОК нескольких чисел.

В теме «Делится или не делится?» затрагиваются признаки делимости на 4, 6, 7, 8, 11 и 15, что в дальнейшем способствует решению задач высокого уровня: олимпиадные, некоторые задачи из ЕГЭ.

2.2 Программа факультативного курса «Элементы теории чисел» для

6 классов

Пояснительная записка

Программа «Элементы теории чисел» составлена для учащихся 6 классов. В ее рассмотрение входит углубленное изучение элементов теории чисел, которые выходят за рамки школьной программы. Задания, связанные с элементами теории чисел, встречаются на математических олимпиадах.

Умение решать различные задачи по теории чисел необходимо каждому ученику, желающему в дальнейшем успешно сдать единый государственный экзамен по математике профильного уровня.

Познавательный материал программы позволит учащимся не только сформировать умения и навыки решения задач по теории чисел, но и поможет систематизировать, расширить и углубить знания, связанные с материалом школьного курса по теории чисел.

Наряду с обеспечением прочного и сознательного освоения школьниками комплексом математических знаний и умений данная программа факультатива по математике предусматривает формирование устойчивого интереса к

предмету, выявление и формирование математических и исследовательских способностей.

Цель: углубленно изучить элементы теории чисел, содержащиеся в школьном курсе алгебры.

В процессе изучения данного курса реализуются следующие задачи:

- знакомство с идеей расширения понятия числа;
- практическое применение делимости чисел;
- освоение нестандартных приемов решения олимпиадных задач по теории чисел;
- развитие интереса школьников к математике;
- формирование самостоятельного приобретения знаний и умений.

Возраст детей: программа ориентирована на детей среднего школьного возраста (12 – 13 лет). В группу набираются все желающие дети, независимо от степени их подготовки.

Форма обучения – очная.

Формы проведения занятий – аудиторные.

Режим занятий: занятия по программе проводятся 1 раз в неделю по 2 часа.

Формы организации занятий:

- Лекция;
- Практическое занятие;
- Практикум;
- Самостоятельная подготовка учащихся.

Ожидаемые результаты

Личностные и метапредметные:

- умение ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи, понимать смысл поставленной задачи;
- ориентироваться в предметной области;

- принимать участие в обсуждении учебных проблем, поставленных задач;
- использовать полученные знания, умения, навыки для выполнения самостоятельной работы.

Предметные:

В результате изучения данной программы «Элементы теории чисел» учащиеся должны знать:

- математическую символику;
- классификацию задач делимости;
- степень сложности задач по теории чисел;
- круг использования полученных знаний.

Должны уметь:

- строить логические схемы и алгоритмы решения сложных задач;
- анализировать и группировать задачи по темам;
- использовать приобретенные знания и умения на практике.

Образовательные результаты изучения данного курса могут быть выявлены в рамках следующих форм контроля:

- текущий контроль (устный опрос и т.п.);
- тематический (промежуточный) контроль;
- обобщающий (итоговый) контроль. (Приложение 1)

Таблица 3 - Учебно – тематический план

№ п/п	Наименование разделов и тем	Всего часов	Количество часов	
			Лекции	Практикум
1	Простые и составные числа	4	1	3
2	Свойства делимости	4	1	3
3	Теоремы о делимости	4	1	1
4	Признаки делимости	4	2	2
5	Теорема о делении с	4	1	3

	остатком			
6	Алгоритм Евклида	2	1	1
7	Основная теорема арифметики	2	1	1
8	Обобщение и систематизация изученного материала	4	0	4
12	Итоговое тестирование по курсу	2		
	Итого	30	11	17

Таблица 4 - Содержание тем курса «Элементы теории чисел»

№ п/п	Наименование разделов и тем	Содержание разделов и тем
1	Простые числа	Простые и составные числа
2	Свойства делимости	Понятие делимости. Свойства делимости
3	Теоремы о делимости	Теоремы о делимости и следствия
4	Признаки делимости	Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 13, 25 (доказательство)
5	Теорема о делении с остатком	Понятие о делении с остатком. Теорема о делении с остатком
6	Алгоритм Евклида	Наибольший общий делитель. Наименьшее общее кратное. Алгоритм Евклида
7	Основная теорема арифметики	Основная теорема арифметики

Учебно-методический комплекс

1. Математика 5 класс 1 часть : учебн. для общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. М.: Просвещение, 2023. 173 с.
2. Математика 5 класс 1 часть : учебн. для общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. М.: Просвещение, 2023. 179 с.
3. Математика 6 класс 1 часть : учебн. для общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. М.: Мнемозина, 2019. 168 с.
4. Математика 6 класс 2 часть : учебн. для общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. М.: Мнемозина, 2019. 176 с.
5. Математика класс 1 часть : учебн. для общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. М.: Мнемозина, 2019. 168 с.
6. Рабочая программа по математике 5 класс.
7. Рабочая программа по математике 6 класс.
8. Яковлев И. В. Олимпиадная математика 6-7 классы : учебное пособие. М.: МЦНМО, 2019, 105 с.

2.3 Технологическая карта факультативного занятия на тему «Деление с остатком»

Тема	Деление с остатком
Цель занятия	Усвоение знаний в их системе, умение самостоятельно применять полученные знания, умения и навыки, осуществлять их перенос в новые условия.
Задачи занятия	Образовательные: – актуализировать у обучающихся знания о делении с остатком; – познакомить учащихся с теоремой о делении с остатком; – отработать навыки решения задач повышенной сложности с использованием теоремы о делении с остатком. Развивающие: – развитие познавательной деятельности учащихся; – развитие умения анализировать; – Развитие математического кругозора. Воспитательные: – формирование у обучающихся навыки организации самостоятельной работы; – развитие познавательного интереса учащихся к предмету.
Тип занятия	Комбинированное
Планируемые результаты	Предметные: – овладение учащимися основными понятиями; – умение работать с математическим текстом; грамотно использовать математическую терминологию и символику. Метапредметные: Личностные УУД: – развитие логического мышления; – формировать умение самоконтроля;

	– необходимость приобретения новых знаний. Регулятивные УУД: – понимать учебную задачу урока; – осуществлять решение учебной задачи под руководством учителя; – оценивать степень и способы достижения цели учебной ситуации, контролировать свои действия в процессе выполнения. Коммуникативные УУД: – Умение работать в паре, группе; – умение обосновывать свою точку зрения; – умение слушать собеседника. Познавательные УУД: – ориентироваться в своей системе знаний; – осуществлять анализ объектов; – преобразовывать информацию из одной формы в другую: составлять ответы на вопросы.
Организация пространства	Кабинет, доска, листы с заданиями.
Ресурсы	1. Математика 6 класс / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбург. – М.: Мнемозина, 2019. – 168 с. 2. Олимпиадная математика. 6-7 классы / И. В. Яковлев. – М.: МЦНМО, 2019. –105 с.

Структура и ход занятия

№	Этап занятия	Задачи этапа	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Формируемые УУД
1	Организационный момент	Включение учащихся в	Приветствует учащихся. Проверяет	Приветствуют учителя. Записывают тему урока	Личностные: – самоорганизация;

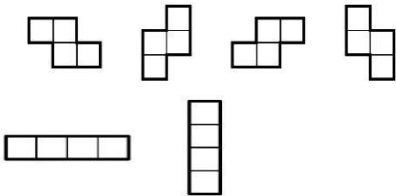
		учебную деятельность .	подготовленность учащихся к учебному занятию. Организует фронтальную беседу о теме, целях и плане урока.	в тетрадь.	– мотивация к познанию нового. Регулятивные: – организация своей учебной деятельности; – целеполагание. Коммуникативные: – умение слушать и вступать в диалог. Познавательные: – осознанное и произвольное построение речевого высказывания.
2	Этап актуализации	Актуализация опорных знаний и способов действий.	Фронтальный опрос. - Ответьте, пожалуйста, на следующие вопросы: 1. Сформулируйте основные свойства делимости. 2. Какое число называется делителем натурального числа a? 3. Какое число называют кратным натуральному числу a? 4. Назовите все делители	Учащиеся отвечают на поставленные вопросы.	Личностные: – самоопределение. Регулятивные: – целеполагание; – выявление затруднений в индивидуальной деятельности каждого учащегося. Коммуникативные: – умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли; – умение слушать и

			числа 56. 5. Назовите все двузначные числа кратные числу 17.		вступать в диалог. Познавательные: – поиск и выделение необходимой информации.
3	Ведение нового материала	Обеспечение мотивации учения детьми, принятие ими целей урока.	- Темой нашего задания будет «Деление с остатком». С ней вы уже знакомы с 5 класса. Давайте с вами вспомнит, что значит разделить число a на число b с остатком? - Давайте, запишем определение в тетрадь. - Как называется число q? - А как называется число r? - Как именуются числа a и b? - Ребята, а как вы думаете остаток может быть отрицательным числом? Почему? - Да, остаток не может быть отрицательным	Дети формулируют определение. Записывают определение в тетрадь: Определение. Пусть a и $b \neq 0$ - два целых числа. Разделить число a на число b с остатком – это значит найти такие числа q и r, что будут выполнены следующие условия: $1) a = bq + r; 2) 0 \leq r < b .$ Неполным частным. Остатком от деления a на b. Делимым и делителем.	Личностные: – оценивание усваиваемого материала. Регулятивные: – контроль и оценка процесса и результатов деятельности. Коммуникативные: – умение слушать и вступать в диалог. Познавательные: – структурирование собственных знаний.

		числом. Кроме того, он не может быть больше или равен b. - Итак, давайте сформулируем следующее утверждение: При делении на b все целые числа дают ровно b различных остатков. - Ребята, является ли запись $51 = (-7) \cdot (-7) - 2$ записью деления с остатком числа 51 на -7? - А почему данная запись не является записью деления с остатком числа 1998 на -11? - Подумайте как верно записать деление с остатком числа 51 на -7? - Ребят, а как вы думаете всегда ли можно разделить a на b с остатком? - И будут ли числа q и r	Учащиеся выдвигают свои предположения. Учащиеся записывают данное утверждение в себе тетрадь. Нет, не является. Так как число -2 не может служить остатком. $51 = (-7) \cdot (-8) + 5$ Учащиеся формулируют свои предположения.	
--	--	---	--	--

			определены однозначно? - На самом деле ответы на эти вопросы положительны. Эти ответы дает одна из важнейших теорем, теорема о делении с остатком. Теорема о делении с остатком. Для любых целых чисел a и $b \neq 0$ можно разделить с остатком число a на число b, т.е. представить число a в виде $a = bq + r$, где $q, r \in \mathbb{Z}$ и $0 \leq r < b$, причем такое представление единственное. - А теперь докажем теорему. (Учитель доказывает данную теорему на доске)	Записывают формулировку теоремы в тетрадь. Учащиеся записывают доказательство теоремы за учителем.	
4	Первичное закрепление	Применение полученных знаний в процессе	- Вот теперь мы с вами повторили и изучили весь необходимый теоретический материал,		Личностные: – самоопределение; – смыслообразование. Регулятивные:

		работы.	а значит можем переходить к решению задач, представленных на листочках. 1. Найдите наименьшее натуральное число, Кратное 7, которое при делении на 8 дает остаток 8. 2. Необходимо найти минимальное пятизначное число, причем все цифры в его записи различны и при делении его на 91 получается остаток 4. 3. Определите, какой остаток будет иметь выражение $4^{18}+5^{17}$ при делении на 3. 3. Алладин хочет попасть в пещеру с сокровищами. Но чтобы в нее открылась дверь, Алладину необходимо расставить все числа от 1 до 25 в таблице 5×5,	Один из учащихся решает задачи на доске, остальные ведут запись в тетрадях.	– планирование своей деятельности для решения поставленной задачи; – контроль и коррекция полученного результата; – саморегуляция. Коммуникативные: – умение слушать и вступать в диалог; – участие в коллективном обсуждении проблем. Познавательные: – умение структуризировать знания; – выбор наиболее эффективных способов решения задач.
--	--	---------	---	--	--

			которая является кодом прохода к сокровищам. Причем числа необходимо расставить таким образом, что сумма чисел любого «зигзага» (рис.1) из 4 клеток была кратна пяти. а) Сможет ли Алладин попасть в пещеру? б) Поменяется ли результат, если потребовать, чтобы сумма чисел внутри любой «полоски» (рис. 2) из 4 клеток должна быть кратна 5?  4. У очень жадного царя есть 5 шкатулок с драгоценными камнями: в первой шкатулке 1001		
--	--	--	---	--	--

			драгоценный камень, а во второй - 2002, в третьей - 3003, в четвертой - 4004, в пятой - 5005. Ежедневно царь выбирает 4 шкатулки, берет из них по одному камню и откладывает в оставшуюся шкатулку. Через какое-то время в первой шкатулке ни осталось ни одного драгоценного камня, а еще в одной шкатулке было 2019 камней. К какой? 5. Учитель обсуждает с учащимися план решения каждой задачи. Сопровождает ученика при решении задачи у доски. В случае затруднения у отвечающего, осуществляется		
--	--	--	---	--	--

			фронтальная беседа со всем классом по поиску решения задания.		
5	Информация о домашнем задании	Обеспечение понимания детьми цели, содержания и способов выполнения домашнего задания.	-Дома вам необходимо, выучить определение и формулировку теоремы о делении с остатком, а также решите предложенные задания. 1. Выполните деление с остатком: А) $598:37$; Б) $5697:264$; В) $267459:2637$; Г) $2975:14$. 2. Докажите, что квадрат любого нечетного числа при делении на 8 дает 1. 3. Найдите олимпиадную задачу по теме занятия, подготовьте ее презентацию решения. Учитель кратко поясняет решение домашнего задания.	Ученики записывают домашнее задание, задают вопросы по его выполнению.	Личностные: – нравственно-этическая ориентация. Регулятивные: – оценка промежуточных результатов; – саморегуляция.
6	Рефлексия	Дать	Учитель подводит итоги	Учащиеся отвечают на	Личностные:

		качественную оценку работы класса и отдельных учеников.	работы в классе.	вопросы, задают вопросы, если они есть, анализируют свою работу на уроке.	– смыслообразование. Регулятивные: – оценка осознания уровня и качества усвоения; – контроль.
--	--	---	------------------	---	--

2.4 Технологическая карта факультативного занятия на тему «Делимость»

Тема	Делимость
Цель занятия	Совершенствовать умения применять признаки делимости при решении задач повышенной сложности.
Задачи	Образовательные: – вспомнить ранее изученные признаки делимости; – отработать навыки решения задач повышенной сложности; Развивающие: – развивать умения правильно оперировать полученными знаниями, логически мыслить; – формировать коммуникативную компетенцию учащихся; – развивать грамотную математическую речь. Воспитательные: – воспитывать аккуратность и ответственность; – воспитывать культуру математических записей.
Тип урока	Комбинированный
Планируемые результаты	Предметные: – делать правильный выбор признака, необходимого для решения задания; – применять признаки делимости для решения некоторых текстовых задач; Метапредметные:

	Личностные УУД: – формировать способность к самооценке на основе критерия успешной учебной деятельности; – формировать ответственность за общее дело. Регулятивные УУД: – оценивать правильность выполнения действий; – планировать свои действия в соответствии с заданной задачей; – вносить необходимые коррективы в действие после его завершения на основе его оценки и учета характера сделанных ошибок. Коммуникативные УУД: – уметь оформлять свои мысли в устной форме; – слушать и понимать речь других; – уметь выражать свои мысли точно, полно и четко. Познавательные УУД: – уметь отличать новое от уже известного; – уметь осознанно и произвольно строить речевое высказывание; – строить логическую цепочку рассуждений.
Организация пространства	Учебный кабинет, доска, раздаточный материал (задания).
Ресурсы	2. Математика 6 класс / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбург. – М.: Мнемозина, 2019. – 168 с. 2. Олимпиадная математика. 6-7 классы / И. В. Яковлев. – М.: МЦНМО, 2019. – 105 с.

Структура и ход занятия

№	Этап занятия	Задачи этапа	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Формируемые УУД
---	--------------	--------------	----------------------	-----------------------	-----------------

1	Организационный момент	Включение учащихся в учебную деятельность на личностно значимом уровне.	Учитель приветствует учащихся. Проверяет готовность класса к занятию.	Приветствуют учителя. Записывают тему факультатива в тетрадь.	Личностные: – самоорганизация; – мотивация к познанию нового. Регулятивные: – организация своей учебной деятельности. Коммуникативные: – планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками. Познавательные: – уметь ориентироваться в своей системе знаний; – уметь добывать новые знания.
2	Актуализация опорных знаний и умений	Готовность мышления и осознание потребности к построению нового способа действия.	- Сегодня на занятии мы продолжим работу с признаками делимости чисел. - Какие признаки были рассмотрены нами на предыдущем занятии? Делится ли число 8925875 на 3; 568742 на	Учащиеся отвечают на поставленные вопросы.	Личностные: – самоопределение. Регулятивные: – контроль и оценка процесса и результатов деятельности. Коммуникативные: – организовывать и планировать учебное сотрудничество с

			стоят по 4 рубля, а голубые по 9. Увидев цены, Надя подумала, что, покупая шарики сегодня, она сэкономила бы 49 рублей. Права ли она?	Один из учеников решает задачу на доске с помощью учителя. Остальные учащиеся пытаются самостоятельно решить данные задачи.	
4	Изучение нового материала	Построение и фиксация нового знания.	Помимо признаков делимости на 2, 3, 5, 9, 10 существуют еще несколько. Сегодня мы с вами их изучим. Для этого выпишите все делители предложенных чисел: 64, 342, 344, 180, 737, 1364. А затем попробуйте разделить их на группы. Итак, у нас получились группы: 1) 64, 344 - делятся на 4. 2) 180, 342 - делятся на 6. 3) 737, 1364 - делятся на 11. Давайте попробуем	Учащиеся отвечают на вопросы учителя. Ученики разбивают числа на группы, пытаются сформулировать признаки делимости.	Личностные: – самоопределение. Регулятивные: – планирование своей деятельности для решения поставленной задачи и контроль полученных результатов. Коммуникативные: – взаимодействовать с учителем во время фронтальной работы; – выслушивать различные мнения своих сверстников. Познавательные: – формирование интереса к данной теме;

			выявить закономерность. Что общего у этих пар чисел? Как мы сможем сказать, что число делится на 4, 6 или 11, не производя вычислений? Хорошо, давайте запишем ваши утверждения в виде правил. Число делится на 4, если сумма удвоенной цифры в разряде его десятков и цифры в разряде единиц, делится на 4. (для двузначных чисел) Число кратно 4, если две его последние цифры образуют число, которое делится на 4. Число кратно 6, если оно делится и на 2, и на 3. Число делится на 11, если модуль разности сумм четных и нечетных разрядов равен нулю или делится на 11.	Ученики оформляют правила в тетрадь.	– структурирование собственных знаний.
--	--	--	--	---	---

	Закрепление нового материала		-Теперь давайте с вами выполним несколько заданий, используя все известные нам признаки делимости. 1. К заданному числу 2023 добавили слева и справа по одной цифре. Получилось число, которое делится на 27. Запишите все возможные такие числа. 2. Всего в классе учатся 28 детей. На 23 февраля каждая девочка дарит каждому мальчику один карандаш - красный, синий или зеленый. Сколько подарили синих карандашей, если их в четыре раза больше зеленых, но в 3 раза меньше красных? 3. Произведением пятизначного числа и 8 является куб	Учащиеся решают самостоятельно пример.	Личностные: – самоопределение. Регулятивные: – планирование своей деятельности для решения поставленной задачи. Познавательные: – умение структурировать знания; – выбор наиболее эффективных способов решения задач.

			натурального числа. Необходимо найти самое малое такое пятизначное число. 4. На конкурс приехали от 50 до 70 детей. На вечере встреч ребятам была предложена игра, если ты знаешь человека, о даришь ему звездочку, если не знакомы - кружок. Миша выяснил, что каждый мальчик получил по 3 круга и 8 звездочек, а девочке - 2 звездочки, 9 кружочков. Также он заметил, что всего кружочков и звездочек подарили одинаковое количество. Сколько всего детей приехали на конкурс?		
5	Информация о домашнем задании	Обеспечение понимания детьми цели, содержания и способов	Домашнее задание: 1. Требуется доказать, что сумма шестизначных чисел, в записи десятков которых нет цифр 9 и 0,	Записывают домашнее задание, задают вопросы по его выполнению.	Личностные: – нравственно-этическая ориентация. Регулятивные: – оценка промежуточных

		выполнения домашнего задания.	равняется 37. 2. Если число представляется в виде суммы двух последних целых чисел, а также в виде суммы трех последовательных чисел, то мы будем называть его замечательным. Андрей перемножил пять натуральных чисел, причем различных. Полученный ответ - замечательное число. Необходимо доказать, что один из множителей являлся замечательным числом. Учитель дает комментарий по выполнению домашнего задания.		результатов; – саморегуляция.
6	Рефлексия	Дать качественную оценку работы класса и	Учитель подводит итоги работы на занятие.	Ученики отвечают на вопросы, задают вопросы, если они есть, анализируют свою работу на уроке.	Регулятивные: – оценивание собственной деятельности на уроке. Коммуникативные:

		отдельных учеников.			– умение анализировать собственные успехи, неудачи, определять пути коррекции. Познавательные: – рефлексия.
--	--	---------------------	--	--	---

2.5 Технологическая карта факультативного занятия на тему «Основная теорема арифметики»

Тема	Основная теорема арифметики
Цель занятия	Развитие интеллектуальных и творческих способностей учащихся в процессе решения нестандартных задач.
Задачи	Образовательные: – совершенствовать навыки решения нестандартных задач; – формировать умения применять теоретические знания к решению задач повышенного уровня. Развивающие: – расширять кругозор учащихся, повышать мотивацию к изучению предмета; – формировать потребность в решении нестандартных задач в целях подготовки к решению олимпиадных задач и получения дальнейшего образования; – развивать математическую речь, умение слушать, делать логические выводы. Воспитательные: – воспитывать уважение к чужому мнению; – воспитывать культуру математических записей; – показать значимость знаний, возможность их применения на практике.

Тип занятия	Обобщения и систематизации знаний и умений
Планируемые результаты	Предметные: – совершенствовать знания по элементам теории чисел при решении текстовых задач; Метапредметные: Личностные УУД: – формирование учебно-познавательной мотивации; – адекватное понимание причин успехов или неудач учебной деятельности; – формирование навыков сотрудничества с учителем и сверстниками. Регулятивные УУД: – контроль, коррекция, осуществление самоконтроля по результату и способу действия; – планирование учебного сотрудничества. Коммуникативные УУД: – умение слушать собеседника; – умение формулировать и аргументировать свое мнение и позиции в коммуникации; – осуществлять взаимоконтроль и взаимопомощь. Познавательные УУД: – умение находить и использовать в тексте нужную информацию; – умение преобразовывать информацию; – строить логичное рассуждение; – анализировать и обобщать изученную информацию.
Организация пространства	Учебный кабинет, доска, раздаточный материал (задания).
Ресурсы	1. Математика 6 класс / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбург. – М.: Мнемозина, 2019. – 168 с. 2. Олимпиадная математика. 6-7 классы / И. В. Яковлев. – М.: МЦНМО, 2019. – 105 с.

Структура и ход занятия

№	Этап занятия	Задачи этапа	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Формируемые УУД
1	Организационный момент	Включение учащихся в учебную деятельность.	Приветствует учащихся. Проверяет подготовленность учащихся к учебному занятию. Организует фронтальную беседу о теме, целях и плане урока.	Приветствуют учителя. Записывают тему урока в тетрадь.	Личностные: – самооценка и готовность к уроку. Регулятивные: – организация своей деятельности; – целеполагание. Коммуникативные: – планировать учебное сотрудничество с преподавателем и со сверстниками.
2	Актуализация знаний	Актуализация опорных знаний и умений.	- Сегодня на занятие мы с вами будем решать задания по теме «Основная теорема арифметики». Но для начала давайте повторим основные моменты. Фронтальный опрос. 1. Что называется разложением на простые множители?	. Учащиеся отвечают на	Личностные: – умение осознавать значимость своих знаний. Регулятивные: – умение обнаружить и сформулировать учебную проблему; – целеполагание.

			2.Какие числа называются простыми, а какие составными?? 3.Сформулируйте основную теорему арифметики? 4. Воспользуясь основной теоремой арифметики, разложите число 7056 на простые множители. $7056 = 2^4 * 3^2 * 7^2$	поставленные вопросы, выполняют задание.	Коммуникативные: – умение с достаточно полнотой и точностью выражать свои мысли. Познавательные: – умение ориентироваться в своей системе знаний, умение преобразовывать информацию, – умение анализировать.
3	Обобщение и систематизация знаний	Активизировать знание теоретических вопросов по данной теме.	- Нестандартные и олимпиадные задачи на самом деле не всегда являются сложными. Давайте попробуем решить вместе одну задачу при помощи основной теоремы арифметики. Задача. Проводятся соревнования по троеборью, всего соревнуются 6 девушек. В		Личностные: – самоопределение. Регулятивные: – оценка осознание уровня и качества усвоения; – целеполагание. Коммуникативные: – умение с достаточной полнотой и точностью выражать свои мысли.

			каждой дисциплине разыгрываются места с 1 по шестое (совмещенных мест нет). Финальный результат каждой участницы складывается из произведения занятых мест. После подведения итогов соревнований результаты оказались следующими: Маша - 5, Даша - 12, Настя - 24, Катя - 54, Таня - 64, Света - 75. Один ученик вызывается к доске, совместно с классом и с помощью педагога происходит поиск пути решения задачи и оформление ее решения. С какой девочки мы начнем рассуждения? (Маша). Почему? Хорошо. У Маши произведение всех занятых мест равно 5.		Познавательные: – формирование интереса к данной теме.
--	--	--	--	--	---

			Какой вывод мы можем сделать? Она была лидером в двух дисциплинах, а в третьей заняла пятое место. Что теперь нам необходимо сделать с результатами остальных девочек, чтобы мы могли определить их призовые места? (разложить и результаты на простые множители). Начнем со Светы: $75 = 3 \cdot 5 \cdot 5$. Отсюда мы можем сделать вывод, что она заняла два пятых места и в одной дисциплине стала призером третьей степени. Результаты Тани: $64 = 4 \cdot 4 \cdot 4$, следовательно она в каждой дисциплине заняла четвертые места. Катя: $54 = 3^2 \cdot 6$. Значит она заняла два третьих места и одно	Учащиеся предлагают методы решения задачи учителю. Записывают решение задачи, задают по ходу решения задачи вопросы.	
--	--	--	---	--	--

			шестое. Остались неопределены несколько мест (в первой дисциплине - это 1 и 2 места, во второй - 2 и 6, а в третьей - 2 и 6). Но из условия задачи следует, что Даша стала обладателем 1, 2 и 6 мест, Настя - два 2 и оно 8. Поэтому в первой дисциплине Даша стала победительницей, а Настя стала второй. Отлично, у нас с вами получилось справиться с этой задачей.		
4	Применение знаний при решении практически х задач	Установление правильности и осознанности усвоения	- Ребята, а сейчас я предлагаю вам задания для самостоятельного решения. Учитель контролирует	Учащиеся по очереди решают данные задачи у доски с помощью учителя, если она необходима.	Личностные: – положительное отношение к проделанной работе.

		учебного материала.	процесс решения задач у доски. Замените в задании символы цифрами так, чтобы произведение получившихся десятичных дробей было натуральным числом. Но ноль в записи использовать нельзя, а остальные цифры могут повторяться. $*, *.\bullet*, *.\bullet*, *=*$. Анжелика выбрала какое-то натуральное число и увеличила его в пять раз. Полученный результат также увеличила в 5 раз и т.д. Может ли получиться так, что на каком-то этапе у Анжелики будут получаться числа, запись которых будет содержать цифру 5 в своей десятичной записи. Перемножив пять целых чисел, причем различных,		Регулятивные: – саморегуляция; – планирование своей деятельности для решения поставленной задачи. Коммуникативные: – умение слушать и вступать в диалог. Познавательные: – выбор наиболее эффективных способов решения задач.
--	--	---------------------	---	--	---

			получили результат 2022. Какому числу может быть равна их сумма? Число 2021 является составным. Необходимо доказать, что если между первой и второй парой чисел записать какое-либо число 8, то число также останется составным.		
5	Информация о домашнем задании	Обеспечение понимания детьми цели, содержания и способов выполнения домашнего задания.	Учитель задает дозированное домашнее задание. Выпишите все пары простых чисел x, y, для которых справедливо: $x^y - y^x + 3 = 2^x$ – Подберите задачу по теме «Основная теорема арифметики» и подготовьте презентацию ее решения.	Записывают домашнее задание, задают вопросы по его выполнению.	Личностные: – нравственно-этическая ориентация. Регулятивные: – оценка промежуточных результатов; – саморегуляция.
6	Рефлексия	Дать качественную оценку работы класса и отдельных	Организует самооценку учениками деятельности на уроке. Фиксируется степень соответствия поставленной цели и	Оценивают свое эмоциональное состояние и свою деятельность на уроке	Личностные: – осознание учащимися практической и личностной значимости

		учеников.	результатов деятельности		результатов каждого этапа урока, – умение оценить себя, – видеть свои ошибки. Регулятивные: – умение делать выводы.
--	--	-----------	--------------------------	--	--

Заключение

В данной выпускной квалификационной работе рассмотрены особенности обучения элементов теории чисел на факультативе по математике.

В первой главе сформулированы основные требования, предъявляемые к факультативным занятиям, и методические рекомендации по проведению факультатива по математике. Кроме того, приведены теоретические аспекты основных тем по теории чисел и рассмотрены задания на элементы теории чисел в ЕГЭ.

На основе теоретического исследования данных тем, можно сделать выводы:

1. Факультативные занятия - это важная часть учебного процесса в школе, необходимая для того, чтобы ученики смогли раскрыть свой потенциал.
2. Факультативные занятия позволяют создавать условия для дифференцированного обучения, что способствует эффективному развитию математических способностей у учащихся на основе учета их индивидуальных особенностей.
3. Содержание программ факультативов по математике позволяет углубить изучение школьного курса и ознакомить учащихся с приложениями математики.
4. Рассмотрев примеры решения олимпиадных задач по элементам теории чисел, можно заключить, что на самом деле они не являются сложными, а требуют хорошего осмысления условия, обнаружения закономерностей и их обоснования.

В практической части работы был проведен анализ школьных программ по математике. В соответствии с ним, можно сделать вывод, что часов на изучение материала по теории чисел недостаточно в школьной программе и его изучению нужно уделить больше времени. В связи с этим

была разработана программа факультатива по математике по теме «Элементы теории чисел» для шестых классов. Составлены технологические карты трех занятий по факультативному курсу.

Таким образом, задачи данного исследования решены в полной мере, цель достигнута.

В заключении отметим, что данная программа и методические разработки занятий помогут мне в организации и проведении занятий факультативного курса по теме «Элементы теории чисел».

Список используемой литературы

1. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев [и др.]; под ред. С. А. Теляковского. – М.: Просвещение, 2017. 256 с.
2. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. организаций / Ю. Н. Макарычев [и др.]. – М.: Просвещение, 2019. 301 с.
3. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев [и др.]; под ред. С. А. Теляковского. – 21-е изд. - М.: Просвещение, 2019. 271 с.
4. Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями: учебное пособие / Н. Д. Золотарёва [и др.]; под ред. М. В. Федотова. – М.: Издательство Московского университета, 2011. 538 с.
5. Алфутова Н. Б., Устинова А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ: учебно-методическое пособие. М.: МЦНМО, 2018. 256 с.
6. Аменицкий Н. Н., Сахаров И. П. Забавная арифметика: учебно-методическое пособие. М.: Наука, 2016. 384 с.
7. Бухштаб А. А. Теория чисел: учебник / А. А. Бухштаб. – 3-е изд. – М.: Лань, 2008. 384 с.
8. Виноградов И. М. Основы теории чисел: учебник / И. М. Виноградов. – 11-е изд. – М.: Лань, 2009. 176 с.
9. Деза Е. И. Сборник задач по теории чисел (112 задач с подробными решениями): учебное пособие / Е. И. Деза, Л. В. Котова. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2012. – 224 с.
10. Дерезин С. В. Математика. Подготовка к ЕГЭ: задание 21 профильного уровня. Задачи и решения: учебно-методическое пособие / С. В. Дерезин, Е. Г. Коннова; под ред. Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2015. 80 с.
11. Малова, И. Е. Теория и методика обучения математике в средней школе: учебное пособие / И. Е. Малова [и др.]. – М.: ВЛАДОС, 2013. 445 с.

12. Математика. Подготовка к ЕГЭ-2022. Профильный уровень. 40 тренировочных вариантов по демоверсии на 2022 год: учебно-методическое пособие / Под редакцией Ф. Ф. Лысенко, С. Ю. Кулабухова. – Ростов-на-Дону: Легион, 2021. – 352 с.
13. Математика 5 класс 1 часть : учебн. для общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. М.: Просвещение, 2023. 173 с.
14. Математика 5 класс 1 часть : учебн. для общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. М.: Просвещение, 2023. 179 с.
15. Математика 6 класс 1 часть : учебн. для общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. М.: Мнемозина, 2019. 168 с.
16. Математика 6 класс 2 часть : учебн. для общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. М.: Мнемозина, 2019. 176 с.
17. Математика класс 1 часть : учебн. для общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин [и др.] ; под ред. Н. Я. Виленкина. М.: Мнемозина, 2019. 168 с.
18. Рабочая программа по математике 5 класс.
19. Рабочая программа по математике 6 класс.
20. Сластенин В. А. Педагогика: учебное пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Сластенин, И. Ф. Исаев, Е. Н. Шиянов; под ред. В. А. Сластенина. – М.: Издательский центр «Академия», 2007. – 576 с.
21. Шаповалов А. В. Вертикальная математика для всех. Готовимся к задаче С6 ЕГЭ с 6 класса / А. В. Шаповалов, И.В. Яценко. – М.: МЦНМО, 2014. – 128с.
22. Яковлев И. В. Олимпиадная математика 6-7 классы : учебное пособие. М.: МЦНМО, 2019, 105 с.

Приложения

Итоговая работа по теме «Элементы теории чисел» Приложение 1

1. Из натурального числа вычли сумму его цифр, из полученного числа снова вычли сумму его (полученного числа) цифр и т. д. После одиннадцати таких вычитаний получился нуль. С какого числа начинали?
2. Является ли простым число 1111112111111 ?
3. Охотник рассказал приятелю, что видел в лесу волка с метровым хвостом. Тот рассказал другому приятелю, что в лесу видели волка с двухметровым хвостом. Передавая новость дальше, простые люди увеличивали длину хвоста вдвое, а творческие — втрое. В результате по телевизору сообщили о волке с хвостом длиной 864 метра. Сколько простых и сколько творческих людей «отрастили» волку хвост?
4. Назовём натуральные числа a и b друзьями, если их произведение является точным квадратом. Докажите, что если a — друг b , то a — друг $\text{НОД}(a, b)$.
5. В финале комбинированного чемпионата мира по скалолазанию шесть спортсменок соревнуются в трёх дисциплинах. В каждой из них они распределяют между собой места с первого по шестое (дележей мест не бывает). Окончательный результат каждой спортсменки — произведение трёх занятых мест. Финальные результаты оказались такими: Янья — 5, Сол — 12, Джессика — 24, Акийо — 54, Михо — 64, Петра — 75. Как распределились места в первой дисциплине, если известно, что у Яньи она самая слабая из трех?

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»

Утверждаю: зав. кафедрой
«21» 09 2023 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Носковой Алины Игоревны
(ФИО полностью)

Тема работы «Элементы теории чисел в олимпиадных задачах»

Утверждена приказом по Университету от «26 09» 2023 г. № 094/9/0

Срок сдачи студентом законченной работы «20» 05 2024 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Анализ научной и учебно-методической литературы по теме исследования	Сентябрь, октябрь 2023	выполнено
2.	Изучение основных положений теории уравнений в целых числах	Ноябрь 2023	выполнено
3.	Определение методических особенностей проектирования элективного курса	Декабрь 2023	выполнено
4.	Разработка элективного курса по уравнениям в целых числах для старших классов	Январь, февраль 2024	выполнено
5.	Составление конспектов занятий для элективного курса	Март 2024	выполнено
6.	Оформление библиографического списка	Апрель 2024	выполнено
7.	Оформление работы, подготовка презентации и выступления	Май, июнь 2024	выполнено

Дата выдачи задания «21» 09 2023 г.
 Руководитель Никитина О. Г. Никитина О. Г.
 (подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению
Носкова А. И. Носкова А. И.
 (подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского государственного
университета А.Д. Гулякову

студента (ки) 4 курса ФФМЕН очной
формы обучения

Носковой Алины Игоревны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Носкова Алина Игоревна,

Ф.И.О. студента

студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки

44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Элементы теории чисел в олимпиадных задачах», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета

«Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

подпись

16.05.2024

ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку

16.05.2024

ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР

подпись

О. Г. Никитина

И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Элементы теории чисел в олимпиадных задачах»

студентки 4 курса Носковой Алины Игоревны

направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля «Математика»

Руководитель ВКР Никитина Ольга Геннадьевна



Отчет предоставлен сервисом
«Антиплагиат» - <http://online.antiplagiat.ru>



Отчет о проверке

Автор: Носкова Алина Игоревна

Название документа: ВКР Алина Носкова

Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна

Организация: Пензенский государственный университет

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения /
Цитирования
35.45%

Самодитирование
63.67%

Оригинальность
0.88%

Итого / Среднее
0%

«Совпадения», «Цитирования», «Самодитирование», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

30.05.2024

ДД.ММ.ГГГГ:

подпись

О. Г. Никитина

И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Элементы теории чисел в олимпиадных задачах»
студентки Носковой Алины Игоревны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 20ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Носковой Алины Игоревны посвящена вопросам обучения школьников элементам теории чисел.

Актуальность данной темы состоит в том, что умение решать задания с элементами теории чисел позволяет оценить настоящие знания ученика, а не его навыки решения однотипных задач. Кроме того, задачи с элементами теории чисел включены в задания ЕГЭ, что говорит о необходимости научиться выполнять задания данного типа сильными учениками. Вместе с тем в школьной программе выделяется не достаточно учебных часов на изучение элементов теории чисел. Поэтому целесообразно дополнительное изучение элементов теории чисел на факультативе.

Цель работы состоит в разработке программы факультатива по теме «Элементы теории чисел».

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, включающей в себя две главы, а также заключения, списка литературы и приложения.

Основная часть состоит из двух глав. В первой главе приведены теоретические сведения из основных тем по теории чисел, необходимые для решения различных олимпиадных задач, и рассмотрены задания из ЕГЭ по математике профильного уровня, содержащие элементы теории чисел.

Во второй главе представлен анализ школьных программ по математике 5-6 классов по теме «Элементы теории чисел». Составлена программа факультативного курса по теме, предложены конспекты трех факультативных занятий этого курса.

В приложении содержится контрольная работа по всему факультативному курсу.

Работа Носковой А.И. является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован автором при работе в школе.

Выпускная квалификационная работа Носковой Алины Игоревны заслуживает оценки «отлично».

Руководитель ВКР доцент кафедры «Математическое образование»,
к.ф.-м.н. Никитина Ольга Геннадьевна