МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Изучение комплексных чисел в школьном курсе математики»

Студент 21.05.25 (подпись, дата) Иванцова Анастасия Дмитриевна (ФИО полностью)

Руководитель 21.05.25 (подпись, дата) Монахова О.А. (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр 28.06.25 (подпись, дата) Журавлева Е.Г. (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 2.06.25 № 11)

Заведующий кафедрой 2.06.25 (подпись, дата) Паньженский В.И. (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой 4 (хор) (протокол заседания ГЭК от 8.07.25 № 2)

Секретарь ГЭК 8.07.25 (подпись, дата) Журавлева Е.Г. (фамилия, инициалы)

Пенза 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ 5

1.1 Историческое происхождение комплексных чисел в математике 5

1.2 Роль комплексных чисел в современной математике 8

1.3 Сравнительный анализ содержания темы «Комплексные числа» в школьных учебниках 12

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА» В ШКОЛЕ 16

2.1 Особенности организации методической работы при изучении комплексных чисел 16

2.2 Разработка электронного обучающего ресурса по теме «Комплексные числа» 20

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 37

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 39

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 41

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 47

ПРИЛОЖЕНИЕ 3 48

ПРИЛОЖЕНИЕ 4 49

ВВЕДЕНИЕ

Математика — это наука, которая на протяжении веков эволюционировала благодаря неутолимому стремлению человечества постичь законы природы и разрешить задачи, казавшиеся на первый взгляд неразрешимыми. Одним из наиболее удивительных и революционных достижений в этой области стало появление комплексных чисел — математических объектов, объединяющих вещественные и мнимые компоненты. Сегодня они играют ключевую роль в алгебре, геометрии, физике, инженерии и даже квантовой механике.

Тема «Комплексные числа» занимает особое место в школьном курсе алгебры. Данная тема изучается в курсе алгебры для 10 и 11 классов. На базовом уровне предусмотрено 6 – 8 уроков, а на углублённом уровне от 10 до 12 уроков. Освоение данной темы вызывает у учащихся определённые трудности, связанные с абстрактностью материала и сложностью его понимания. Особые затруднения возникают при переходе от алгебраической формы к тригонометрической и показательной, а также при решении уравнений с комплексными корнями. В связи с этим возникает необходимость в создании электронного обучающего ресурса по теме «Комплексные числа», который за счет повышения интереса поможет устранить возникающие затруднения и сделать материал более понятным и доступным для всех учеников.

Объект исследования: комплексные числа.

Предмет исследования: методика обучения теме «Комплексные числа» в школьном курсе математики общеобразовательной школы.

Цель исследования: рассмотреть особенности методики обучения комплексным числам в школьном курсе математике и разработать ЭОР по теме «Комплексные числа».

Задачи исследования:

1. Изучить историческое происхождения и роль комплексных числе в современной математике.

2. Составить сравнительный анализ материала о комплексных числах в школьных учебниках.

3. Рассмотреть особенности методической организации обучения комплексным числам.

4. Отобрать комплект задач на тему комплексные числа.

5. Разработать электронный ресурс для обучения комплексным числам.

Для решения поставленных задач использовались следующие методы исследования: анализ психолого-педагогической, методической и математической литературы, работ по истории математического образования и истории математики, школьных программ, учебных пособий и учебников; изучение опыта работы учителей математики.

Практическая значимость исследования заключается в разработке электронного обучающего ресурса по теме «Комплексные числа», которое может быть использовано в процессе обучения математике в общеобразовательной школе.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, 2 глав, заключения, списка литературы, приложения.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1 Историческое происхождение комплексных чисел в математике

История комплексных чисел берет начало задолго до их формального появления. Уже в древности математики сталкивались с задачами, которые намечали контуры будущих открытий.

В Древней Греции квадратные уравнения были предметом активного изучения. Евклид, живший около 300 года до нашей эры, в своем знаменитом труде «Начала» систематизировал геометрические и алгебраические знания своего времени. Он рассматривал уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$, но ограничивался случаями, где дискриминант $b^2 - 4ac$ был положительным, поскольку отрицательные значения под корнем не укладывались в рамки греческой математики, ориентированной на геометрические интерпретации [18].

В Средние века эстафету приняли арабские математики. Мухаммед ибн Муса Аль-Хорезми, чья работа «Книга о сложении и вычитании» (около 825 года) заложила основы алгебры, также изучал квадратные уравнения. Он классифицировал их на три типа: $x^2 = bx$, $x^2 + bx = c$ и $x^2 + c = bx$, решая их с помощью геометрических построений.

Греческие предшественники избегали случаев с отрицательным дискриминантом. Они бы заявили, что решения нет, поскольку корень из -1 не имел смысла в его системе.

Прорыв в истории комплексных чисел произошел в эпоху Возрождения, когда итальянские математики начали решать кубические уравнения, требующие новых подходов.

Джероламо Кардано, опубликовавший в 1545 году свой труд «Ars Magna» («Великая наука»), стал одним из первых в этом направлении. Кардано

систематизировал методы решения уравнений третьей степени, разработанные ранее Сципионом дель Ферро и Никколо Тартальей. Его работа включала формулу для уравнения $x^3 + px + q = 0$, которая в некоторых случаях приводила к появлению корней из отрицательных чисел [2].

Рассмотрим пример из «Ars Magna»: уравнение $x^3 = 15x + 4$. Используя формулу Кардано, решение выражается как:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Выражение под кубическим корнем содержит $\sqrt{-121}$, что озадачило Кардано. Он называл такие величины «софическими» или «фиктивными» и относился к ним с недоверием. Тем не менее он заметил, что формальное вычисление дает x = 4, что легко проверяется: $4^3 = 64{,}15 \cdot 4 + 4 = 64$. Этот результат заставил его задуматься о природе подобных чисел, хотя он не пошел дальше их использования как промежуточного инструмента.

Рафаэль Бомбелли, опубликовавший в 1572 году книгу «Алгебра», сделал следующий шаг. Он принял существование мнимых чисел и разработал правила работы с ними. Бомбелли рассмотрел выражение $\sqrt{-1}$ как самостоятельный объект и показал, как с ним работать [18].

Он вычислил $\left(2 + \sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 6\sqrt{-1}$, продемонстрировав согласованность арифметики мнимых чисел. Его подход был революционным. Вместо того чтобы отвергать эти величины, он придал им математическую важность. Бомбелли также предложил обозначения, такие как «плюс минус единицы» для $\sqrt{-1}$.

Несмотря на эти достижения, идеи Кардано и Бомбелли не получили немедленного признания. Математическое сообщество оставалось скептическим, т.к. не считало мнимые числа полезным инструментом. Однако их работы заложили основу для дальнейшего осмысления концепции.

XVII век стал временем перехода от интуитивного использования мнимых чисел к их концептуальному осмыслению. Рене Декарт, выдающийся философ

и математик, в 1637 году опубликовал труд «Геометрия», где ввел термин «мнимые числа». Рассматривая уравнения, такие как $x^2 + 1 = 0$, он отмечал, что их решения, $x = \pm\sqrt{-1}$, не имеют вещественного смысла. Декарт писал: «Такие числа называются мнимыми, поскольку они не существуют в природе». Его скептицизм отражал общее отношение эпохи, но термин прижился и стал стандартным [1].

Одновременно Джон Валлис, английский математик, в 1673 году предложил геометрическую интерпретацию мнимых чисел. В работе «Трактат об алгебре» он предположил, что $\sqrt{-1}$ можно представить как направление, перпендикулярное вещественной оси. Например, если вещественные числа лежат на горизонтальной линии, то мнимые могут быть расположены на вертикальной. Хотя Валлис не развил эту идею до полноценной системы, его интуиция предвосхитила работы XVIII века [18].

XVIII век ознаменовался ключевым поворотом в истории комплексных чисел — их геометрической интерпретацией. В 1799 году норвежский геодезист Каспар Вессель опубликовал работу «Об аналитическом представлении направления». Он предложил рассматривать комплексное число $a + bi$ как точку с координатами (a, b) на плоскости, где a — вещественная часть, а b — мнимая. Вессель также ввел понятие модуля $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ и аргумента $\theta = \arctan(b/a)$, что позволило представлять числа в полярной форме $r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Независимо от Весселя, в 1806 году швейцарец Жан-Робер Арганд издал «Размышления», где изложил аналогичную идею. Арганд интерпретировал $a + bi$ как вектор, исходящий из начала координат, и показал, как операции сложения и умножения соответствуют геометрическим преобразованиям. Например, умножение на i эквивалентно повороту на 90 градусов против часовой стрелки. Работа Арганда получила большее признание, и его имя стало ассоциироваться с комплексной плоскостью, известной сегодня как «плоскость Арганда» [1].

XIX век стал эпохой окончательного признания комплексных чисел. Карл Фридрих Гаусс, один из величайших математиков в истории, в 1799 году представил первое строгое доказательство основной теоремы алгебры в своей докторской диссертации. Теорема утверждает, что любое многочленовое уравнение степени n имеет ровно n корней в поле комплексных чисел.

Гаусс вернулся к этой теореме несколько раз, предложив в общей сложности четыре доказательства. Его работа 1831 года также ввела термин «комплексные числа», заменивший «мнимые». Он писал: «Эти числа столь же реальны в математике, как и вещественные, и заслуживают названия комплексных из-за их составной природы» [18].

Таким образом, история комплексных чисел — это вдохновляющий пример того, как человеческая мысль преодолевает границы неизвестного. От робких шагов Кардано и Бомбелли в XVI веке, через геометрические озарения Весселя и Арганда в XVIII веке, до триумфальной формализации Гауссом в XIX веке, эти числа прошли путь от скептического неприятия до статуса незаменимого инструмента. Каждый этап их развития отражал не только математический прогресс, но и эволюцию научного мышления.

Сегодня комплексные числа не просто решают проблему отрицательных дискриминантов — они открывают новые горизонты в науке и технике.

1.2 Роль комплексных чисел в современной математике

В алгебре комплексные числа используются для решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

Например, для уравнения $x^2 - 8x + 17 = 0$:

$$D = 64 - 68 = -4, \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{-4}}{2} = 4 \pm i.$$

Школьники учатся подставлять корни в уравнение для проверки, развивая аналитические способности. Комплексные числа также упрощают разложение многочленов, например, $x^2 + 9 = (x + 3i)(x - 3i)$.

Комплексные числа помогают решать системы уравнений, которые могут иметь комплексные решения. Например, система:

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 - y^2 = -5 \end{cases}$$

может дать решения $x = 2 + i,\ y = 2 - i$. Такие задачи учат школьников работать с абстрактными понятиями и проверять результаты, что особенно полезно для олимпиад и углубленных курсов [11].

В геометрии комплексные числа интерпретируются как точки или векторы на комплексной плоскости. Сложение чисел соответствует векторному сложению по правилу параллелограмма. Умножение на число с модулем 1, например, $e^{i\pi/2} = i$, поворачивает вектор на 90° против часовой стрелки. Для числа $2 + 3i$, умножение на i дает:

$$i \cdot (2 + 3i) = 2i + 3i^2 = -3 + 2i.$$

Геометрические преобразования включают масштабирование и симметрию. Умножение на действительное число k изменяет длину вектора в k раз: для $1 + i$, умножение на 3 дает $3 + 3i$. Сопряжение $\overline{z}$ отражает точку относительно оси Re. Эти операции помогают анализировать фигуры, такие как окружности или многоугольники, мотивируя школьников к изучению математики как единой дисциплины [9].

Таблица 1 – Геометрические преобразования с комплексными числами

Преобразование	**Комплексное число**	**Эффект**
Поворот на 90°	i	Вектор поворачивается против часовой стрелки.
Поворот на 180°	-1	Вектор разворачивается.
Масштабирование	k (действительное)	Длина вектора умножается на k.
Отражение	$\overline{z}$	Отражение относительно оси Re.

В тригонометрии комплексные числа связаны с формулой Эйлера:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Это позволяет выразить тригонометрические функции:

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Такие выражения упрощают анализ гармонических функций, например, в задачах на колебания. Для $z = 1 + i$ в полярной форме $z = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$, третья степень:

$$z^3 = (1+i)^3 = (\sqrt{2})^3 e^{i3\pi/4} = 2\sqrt{2}e^{i3\pi/4}.$$

Комплексные числа помогают анализировать периодические процессы. Например, гармонические колебания описываются как $y = A\cos(\omega t) + iA\sin(\omega t)$, что упрощает моделирование волн. Такие примеры показывают связь математики с физикой и техникой, повышая интерес школьников к предмету.

Комплексные числа широко применяются в электротехнике для анализа цепей переменного тока. Напряжение и ток выражаются как $V = V_0 e^{i(\omega t + \phi)}$, где ω — угловая частота, ϕ — фазовый угол. Импеданс цепи описывается комплексным числом $Z = R + iX$, где R — сопротивление, X — реактивное сопротивление. Это упрощает расчеты в цепях с резисторами, конденсаторами и катушками индуктивности. Школьники, изучая такие примеры, понимают, как математика применяется в инженерных задачах, что делает уроки более прикладными [16].

В физике комплексные числа используются для моделирования волновых явлений. В оптике они помогают анализировать интерференцию и дифракцию света через уравнение $E = E_0 e^{i(kx - \omega t)}$. Это позволяет описывать поведение световых волн. Простые примеры, такие как звуковые колебания, можно адаптировать для школьной программы, чтобы показать междисциплинарные связи и повысить интерес к физике [11].

В информатике комплексные числа играют ключевую роль в обработке сигналов. Преобразование Фурье, основанное на $e^{i\omega t}$, разлагает сигнал на частотные компоненты, что лежит в основе сжатия аудио (MP3) и видео (JPEG).

Школьники, узнавая об этом, видят связь математики с цифровыми технологиями, такими как смартфоны, что делает уроки актуальными.

В криптографии комплексные числа применяются для генерации псевдослучайных последовательностей, необходимых для шифрования данных. Например, алгоритмы, использующие комплексные числа, создают ключи для защиты информации в интернете. Упрощенные примеры шифрования можно включить в уроки, чтобы показать школьникам роль математики в кибербезопасности [17].

В навигации комплексные числа используются в обработке сигналов GPS для точного определения местоположения. Это помогает школьникам понять, как математика работает в повседневной жизни, например, в приложениях для навигации, повышая интерес к предмету.

В аэродинамике комплексные числа моделируют потоки воздуха вокруг объектов, таких как крылья самолета, что важно для проектирования летательных аппаратов. Упрощенные модели, такие как поток вокруг цилиндра, можно адаптировать для школьных задач, чтобы вдохновить учащихся на выбор технических профессий [6].

В климатологии комплексные числа помогают моделировать колебания температуры и другие процессы, такие как сезонные изменения. Данные примеры показывают школьникам связь математики с экологией и наукой о климате, укрепляя междисциплинарный подход [17].

Таблица 2 – Применение комплексных чисел в различных областях

Область	**Применение**	**Пример**
Электротехника	Анализ цепей переменного тока	$I = I_0 e^{i(\omega t + \phi)}$
Физика	Моделирование волновых процессов	Интерференция света
Информатика	Преобразование Фурье	Сжатие MP3, JPEG
Навигация	Обработка сигналов	GPS-навигация
Аэродинамика	Моделирование потоков	Проектирование крыльев самолета

1.3 Сравнительный анализ содержания темы «Комплексные числа» в школьных учебниках

Тема «Комплексные числа» занимает особое место в школьном курсе алгебры, представляя собой раздел, который расширяет представление учащихся о числовой системе. В школьной программе эта тема изучается в старших классах (10 – 11 классы) в рамках углубленного курса алгебры.

Рассмотрим содержание данной темы в школьных учебниках и составим краткий анализ.

1. Алгебра и начала математического анализа 10 класс. Профильный уровень (Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И.). Данная тема посвящена 4 глава учебника «Комплексные числа и операции над ними». Глава содержит 2 параграфа («Комплексные числа в алгебраическом смысле» и «Тригонометрическая форма комплексных чисел»).

Материал представлен в доступной форме, с акцентом на визуализацию через комплексную плоскость. В первом параграфе учащиеся знакомятся с определением комплексных чисел и операции над ними, а также рассматривают сопряженные числа и извлечение квадратных корней из комплексных чисел. Во втором параграфе учащиеся изучают геометрическое и тригонометрическое представление комплексных чисел [3].

2. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углубленный уровень. (Мерзляк А. Г., Поляков В. М.). Комплексные числа рассматриваются в третьей главе учебника после изучения темы «Интегралы и его применение». Содержание главы «Комплексные числа» в данном учебнике:

§13. Множество комплексных чисел.

§14. Комплексная плоскость. Тригонометрическая форма комплексного числа.

§15. Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме. Корень n-й степени из комплексного числа.

§ 16. Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел.

Учебник предназначен для углубленного изучения и содержит полный охват темы. Отдельное внимание уделяется практическому применению комплексных чисел. Особое внимание уделяется тригонометрической форме и включает около 60 задач [12].

3. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Базовый и углубленный уровень. (Мордкович А. Г., Семенов П. В.). Тема «Комплексные числа» представлена в 6 главе учебника и состоит из пяти параграфов (§32-36):

§32. Комплексные числа и арифметические операции над ними.

§33. Комплексные числа и координатная плоскость.

§34.Тригонометрическая форма записи комплексного числа.

§35.Комплексные числа и квадратные уравнения.

§36. Возведение комплексного числа в степень. Извлечение кубического корня из комплексного числа.

Понятие комплексного числа вводится, как расширение привычных нам чисел. Учащимся представлена таблица с основными числовыми множествами и действиями, которые можно с ними проводить. Данная таблица помогает наглядно рассмотреть данный вопрос. Вводится понятие мнимой единицы и комплексное число. Кроме того, учащиеся рассматривают тригонометрическую форму комплексного числа. Для этого сначала рассматривается модуль и его свойства, а после записывают их в тригонометрической форме. Рассматривают вопрос об извлечении квадратного корня из комплексного числа и как решать квадратные уравнения. Учащимся представлена формула Муавра и способ нахождения корня из комплексного числа [6].

4. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Базовый и углубленный уровень. (Муравин Г. К., Муравина О. В.). Тема «Комплексные числа» в данном учебнике рассматривается в базовом и углубленном уровне. Содержание главы состоит четырех параграфов:

§21. Формула корней кубического уравнения.

Учащиеся рассматривают решение кубических уравнений.

§22. Алгебраическая форма комплексного числа.

Вводится понятие мнимой единицы и комплексного числа, а также рассматривают арифметические действия с комплексными числами.

§23. Геометрическое представление комплексного числа.

Параграф посвящён изображению комплексного числа на плоскости. Вводится понятие модуль комплексного числа.

§24. Тригонометрическая форма комплексного числа.

Учащиеся знакомиться с использованием комплексных чисел в тригонометрической форме.

Практических заданий около 40, они простые и доступные, что делает учебник подходящим для учащихся с низким уровнем подготовки. Материал данного учебника предназначен так же и для углубленного уровня, охватывает все формы комплексных чисел и включает более 60 задач [14].

5. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Базовый и углубленный уровень. (Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н., Шевкин А. В.). Материал представлен в третьей главе учебника для углубленного уровня. Содержание темы изложено в трех параграфах:

§16. Алгебраическая форма и геометрическая интерпретация комплексных чисел. Данный параграф состоит из трех частей (алгебраическая форма комплексного числа, сопряженные комплексные числа и геометрическая интерпретация комплексного числа).

§17. Тригонометрическая форма комплексных чисел. Учащиеся изучают представление тригонометрической форме. Отдельно рассматривается вопрос, посвящённый корням из комплексных чисел и их свойств.

§18. Корни многочленов. Показательная форма комплексных чисел.

Материал в данном учебнике изложен подробно и доступно для учащихся. Недостатком данного учебника является отсутствие материала о

возведении комплексного числа в степень и формуле Муавре. В конце главы приводится исторические сведения о комплексных числах [15].

На основании анализа можно выделить следующие особенности учебников. Данная тема рассматривается последовательно. Для ее изучения представлена отдельная глава учебника (2 – 5 параграфа).

Учебники для углубленного уровня предлагают наиболее полное изложение темы, включая все формы комплексных чисел и сложные задачи. Они подходят для учащихся с высоким уровнем подготовки. Однако их сложность может быть барьером для школьников с базовым или средним уровнем подготовки.

Учебники для базового уровня упрощают материал, делая его доступным для учащихся с базовым и средним уровнем подготовки.

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ ТЕМЕ «КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА» В ШКОЛЕ

2.1 Особенности организации методической работы при изучении комплексных чисел

Тема «Комплексные числа» вводится в школьный курс алгебры и начал математического анализа в 10 – 11 классах, как на базовом, так и на углубленном уровнях. Она требует от учащихся высокого уровня абстрактного мышления, так как вводит новые математические объекты – мнимую единицу i и комплексные числа, которые расширяют множество действительных чисел.

Знакомство с темой можно начать с повторения сведений об известных числовых множествах и выяснения причин, по которым было необходимо их расширение. Так операция вычитания привела к появлению отрицательных чисел, операция деления — рациональных чисел, извлечение корня — иррациональных чисел. Все эти множества входят в множество комплексных чисел, в которых выполнима операция излечения корня из любого числа. При изучении формулы корней кубического уравнения уместно будет рассказать об истории ее появления, а также об отношении к «неправильным» числам во все времена, начиная с неприязни к отрицательным числам. Интерес у учащихся также может вызвать объяснение записи мнимых чисел [8].

Важно познакомить учащихся с разными способами записи комплексных чисел и научить их переводить из одной формы в другую. При изучении сложения, умножения и сопряжения комплексных чисел можно предложить ученикам самим попробовать вывести нужные формулы, опираясь на правила сложения подобных членов и операций с многочленами.

Изучение темы «Комплексные числа» целесообразно разделить на несколько этапов, каждый из которых имеет свои методические особенности:

1. Введение в тему (мотивационный этап).

На начальном этапе учитель должен создать у учащихся мотивацию к изучению комплексных чисел, показав их значимость и необходимость. Исторические факты могут стать эффективным инструментом: рассказ о том, как итальянские математики XVI века (Кардано, Бомбелли) впервые столкнулись с необходимостью введения комплексных чисел для решения кубических уравнений, помогает учащимся понять эволюцию математических идей [9].

Проблемные вопросы, такие как «Можно ли найти число, квадрат которого равен -1?» или «Почему уравнение $x^2 + 1 = 0$ не имеет решений среди действительных чисел?», помогают учащимся определить тему занятия. Для наглядности можно использовать геометрическую интерпретацию комплексных чисел на координатной плоскости, показав, как число $a + bi$ соответствует точке (a, b).

2. Формирование базовых понятий.

На этом этапе учащиеся знакомятся с определением комплексного числа $z = a + bi$, где a – действительная часть, b – мнимая часть, а i – мнимая единица ($i^2 = -1$). Учитель объясняет алгебраическую форму записи и вводит основные операции: сложение, вычитание, умножение и деление комплексных чисел [4].

Пример задачи:

$$(3 + 2i) + (1 - 4i) = 4 - 2i, (2 + 3i) \cdot (1 + i) = -1 + 5i.$$

Важно сделать акцент внимания на правильность вычислений, т.к. учащиеся часто допускают ошибки из-за своей невнимательности к знакам, а также свойства i.

Для упрощения деления можно показать метод сопряженных чисел:

$$\frac{2+3i}{1-i} = \frac{(2+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{-1+5i}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i\,.$$

3. Изучение различных форм записи комплексных чисел.

После освоения алгебраической формы учитель переходит к тригонометрической $r(cos\theta + isin\theta)$ и показательной $(z = re^{i\theta})$ формам записи. Геометрическая интерпретация тригонометрической формы, связывающая комплексное число с точкой на координатной плоскости, помогает учащимся понять понятия модуля $(r = \sqrt{a^2 + b^2})$ и аргумента $(\theta = arctan(b/a))$. Показательная форма вводится как более компактная, особенно для операций возведения в степень или извлечения корня.

Пример: $z = 1 + i \Rightarrow r = \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}, z = \sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4} + sin\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.

4. Закрепление материала через практические задачи.

На этапе закрепления, учащиеся решают задачи, включающие применение комплексных чисел в различных контекстах. Это могут быть задачи на нахождение корней многочленов, решение уравнений вида $z^n = a + bi$ или геометрические задачи, такие как вращение точки на комплексной плоскости [11].

Пример задачи: найти все корни уравнения $z^3 = 1$.

Решение включает переход к тригонометрической форме и использование формулы Муавра: $z^3 = 1 = e^{i2k\pi},\ z = e^{i2k\pi/3},\ k = 0, 1, 2$.

5. Контроль знаний.

Итоговый контроль проводится в форме тестов, самостоятельных или контрольных работ. Тестовые задания могут включать вычислительные задачи (например, преобразование форм записи), теоретические вопросы (определение модуля и аргумента) и задачи с геометрическим смыслом.

Пример тестового задания:

Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 - i$.

Найдите $z_1 \cdot z_2$ и выразите результат в тригонометрической форме.

Для успешного освоения темы «Комплексные числа» учитель может использовать следующие методические приемы:

1. Проблемно-поисковый подход.

Постановка проблемных ситуаций, требующих введения комплексных чисел, развивает критическое мышление.

Учитель может предложить решить уравнение $x^2 + 4 = 0$ и обсудить, почему решения в действительных числах отсутствуют, а затем ввести мнимую единицу i (задача: $x^2 + 4 = 0 \Rightarrow x = \pm 2i$) [4].

2. Визуализация и геометрический подход.

Геометрическая интерпретация комплексных чисел (представление в виде векторов на координатной плоскости) облегчает понимание их свойств, таких как модуль и аргумент/ Учитель может использовать интерактивные доски, программное обеспечение (GeoGebra, Desmos) или бумажные построения для демонстрации, как операции с комплексными числами (сложение, умножение) соответствуют геометрическим преобразованиям (сдвиг, поворот, масштабирование).

3. Дифференцированный подход.

Учитывая разный уровень подготовки учащихся, учитель должен предлагать задачи разной сложности. Для базового уровня подойдут вычислительные задачи, такие как сложение и умножение комплексных чисел. Для продвинутого уровня – задачи на преобразование форм записи, решение уравнений или геометрические интерпретации [5].

Пример дифференцированных задач:

1) Базовый уровень. Найдите $(3 + 2i) - (1 + i)$.

2) Продвинутый уровень. Найдите все решения уравнения $z^4 = -16$.

4. Контекстный подход.

Учащимся становиться интереснее, когда изученный материал полезен в реальной жизни. Можно им рассказать, как применяются комплексные числа в электротехнике и компьютерной графике.

5. Игровые элементы.

Математические квесты, соревнования по решению задач способствуют повышению мотивации учащихся по данной теме.

6. Межпредметные связи.

Тема «Комплексные числа» связана с другими дисциплинами (физика, информатика, геометрия).

В таблице 3 представлены ошибки при изучении темы «Комплексные числа».

Таблица 3 – Ошибки при изучении темы «Комплексные числа»

№	Ошибка	Рекомендации
1	Неправильное применение свойств мнимой единицы. Путаница в знаках при вычислениях.	Выполнение тренировочных упражнений.
2	Преобразование форм записи. Путаница в формулах.	Сделать акцент на геометрической интерпретации, пошаговый раз задач на преобразование форм.
3	Невнимательность при делении комплексных чисел. Ошибки при умножении на сопряжение число/упрощение дроби.	Разобрать алгоритм деления, используя наглядные примеры.

2.2 Разработка электронного обучающего ресурса по теме «Комплексные числа»

В школьной программе на изучение темы «Комплексные числа» отводится 6 – 8 уроков на базовом уровне и 10 – 12 на углублённом. Учащиеся часто испытывают трудности при переходе от алгебраической формы к тригонометрической и показательной, а также при решении уравнений с комплексными корнями.

Недостаточное количество учебных часов ограничивает возможности для практического освоения материалов.

Для преодоления этих ограничений необходимо использование дополнительных ресурсов и средств:

1. Факультативные занятия или математические кружки.

2. Цифровые образовательные платформы или онлайн курсы.

3. Дополнительные методические материалы.

С учетом ограниченного количества учебных часов возникла необходимость в дополнительных образовательных материалах. Для решения данной проблемы разработаем электронный образовательный ресурс.

Электронный образовательный ресурс по теме «Комплексные числа» отличается рядом методических особенностей. В нем материал структурирован по уровням сложности, что позволяет учитывать индивидуальные особенности учащихся.

Таблица 4 – Преимущества и недостатки использования электронных образовательных ресурсов

Преимущества	**Недостатки**
Использование технических средств обучения позволяет сделать материал более наглядным.	Не все учащиеся имеют постоянный доступ к компьютерам или интернету дома.
Электронный ресурс облегчает проверку решения громоздких и сложных задач.	Остаётся потребность в традиционных формах обучения для закрепления навыков письма, решения задач «вручную» и развития математической грамотности.
Учителю такой ресурс помогает в подготовке к урокам, экономит время на объяснение сложных моментов.	Чрезмерное увлечение электронными ресурсами может снизить интерес к самостоятельному поиску решений и развитию логического мышления без технической поддержки.
Электронный ресурс предоставляет ученику возможность заниматься самостоятельно, контролировать свои знания и восполнять пробелы, если какие-либо занятия были пропущены.	Электронный ресурс не всегда может заменить живое объяснение учителя и непосредственное общение в классе.

Теоретический материал представлен вместе с наглядными иллюстрациями, схемами и примерами. В ресурс включены задания и тесты для самоконтроля.

Для разработки электронного образовательного ресурса была выбрана интегрированная среда разработки Visual Studio.

ЭОР «Комплексные числа» доступно по ссылке: https://drive.google.com/drive/folders/1uw9HAyYIqol2708JPy6YKNRUFyCftsDH?usp=sharing.

В приложении 1 представлена инструкция установки ЭОР на ПК.

Структура ЭОР «Комплексные числа»:

1. Меню программы. Данное окно предназначено для навигации в системе. Содержание ЭОР «Комплексные числа»: «Теоретические основы комплексных чисел», «Анализ задач», «Задачи для практики», «Вопросы для самоконтроля», «Итоговый тест», «Литература».

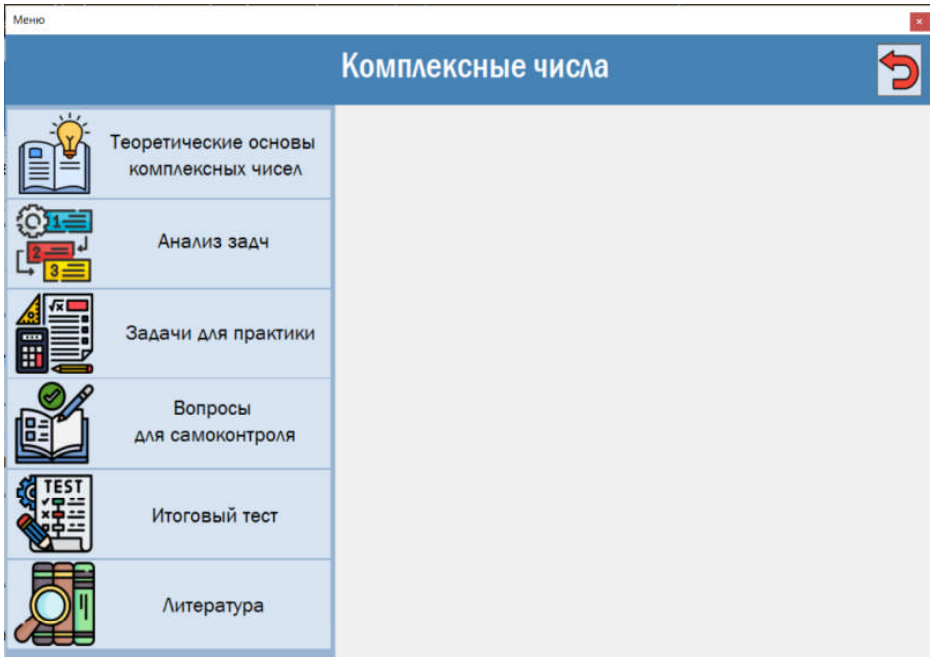


Рисунок 1 – Меню ЭОР «Комплексные числа»

Рассмотрим подробнее содержание разделов системы.

1. Раздел «Теоретические основы комплексных чисел». Данный раздел предназначен для изучения основных понятий, определений и свойств

комплексных чисел, а также для ознакомления с теоретическим материалом по данной теме. Раздел состоит из шести пунктов.

Рисунок 2 – Содержание раздела «Теоретические основы комплексных чисел»

Содержание теоретического материла открывается в отельном окне. Пользователь может познакомиться с информацией в системе или скачать на ПК. Материал для учащихся представлен в понятной форме. Основные формулы и определения выделены, доступно содержание в виде раскрывающегося списка.

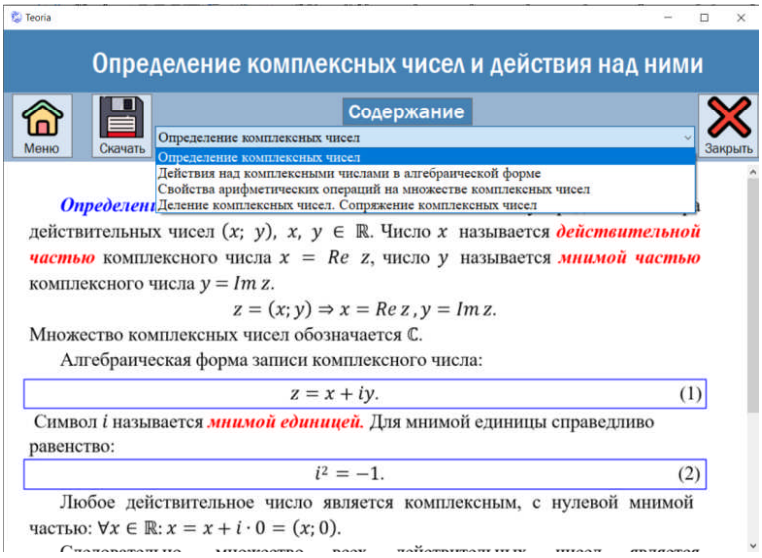


Рисунок 3 – Теоретический раздел по теме «Определение комплексных чисел и действия над ними»

Содержание раздела «Теоретические основы комплексных чисел».

1) «Определение комплексных чисел и действия над ними»:

– Определение комплексных чисел;

– Действия над комплексными числами в алгебраической форме;

– Свойства арифметических операций на множестве комплексных чисел;

– Деление комплексных чисел. Сопряжение комплексных чисел.

2) «Геометрическое представление комплексного числа».

3) «Тригонометрическая форма комплексного числа».

4) «Некоторые простейшие множества точек на комплексной плоскости».

5) «Показательная форма комплексного числа».

6) «Извлечение корня из комплексного числа».

7) «Историческая справка».

В приложении 2 предоставлен теоретический материал данного раздела.

2. Анализ задач. Для обучающегося доступен данный раздел с разбором задач по теме «Комплексные числа». Раздел состоит из трех пунктов: «Геометрическое представление комплексного числа», «Форма записи комплексного числа» и «Действия над комплексными числами».

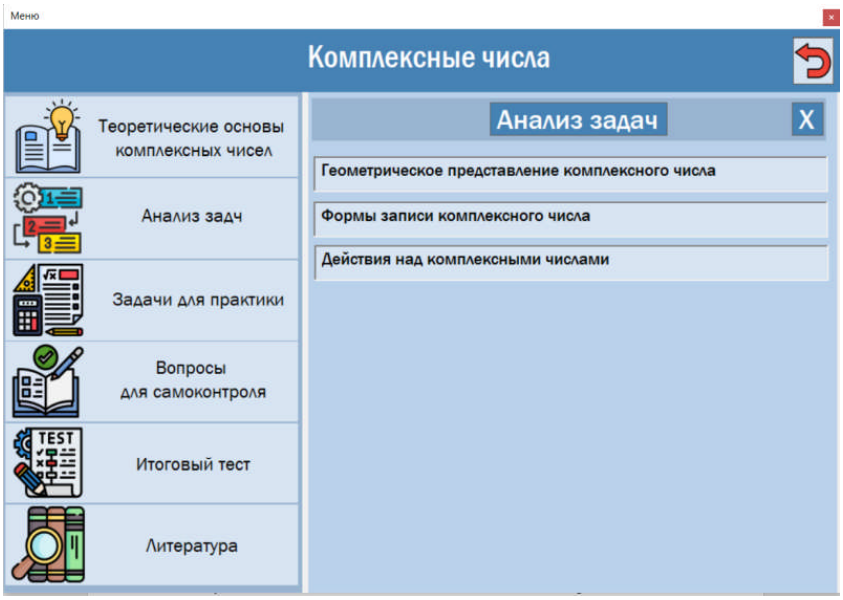


Рисунок 4 – Содержание раздела «Анализ задач»

Каждый раздел содержит подробное описание задачи. Пользователь доступен список задач. Решение задачи автоматически скрыты.

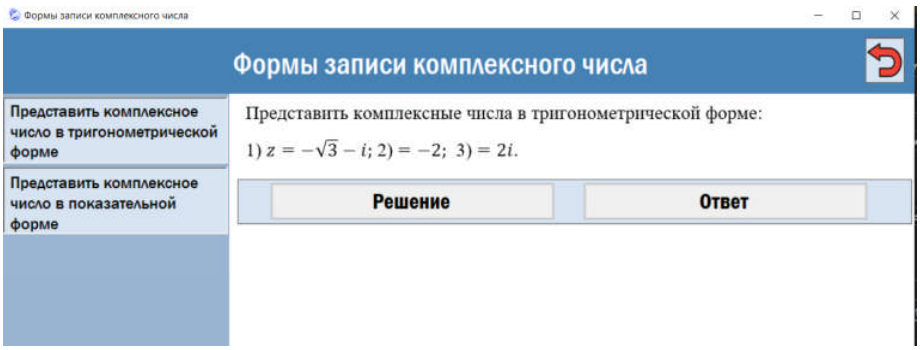


Рисунок 5 – Формы записи комплексного числа

Ученик может сам решить задачу, а потом посмотреть решение. Для этого необходимо нажать на кнопку «Решение» или «Ответ».

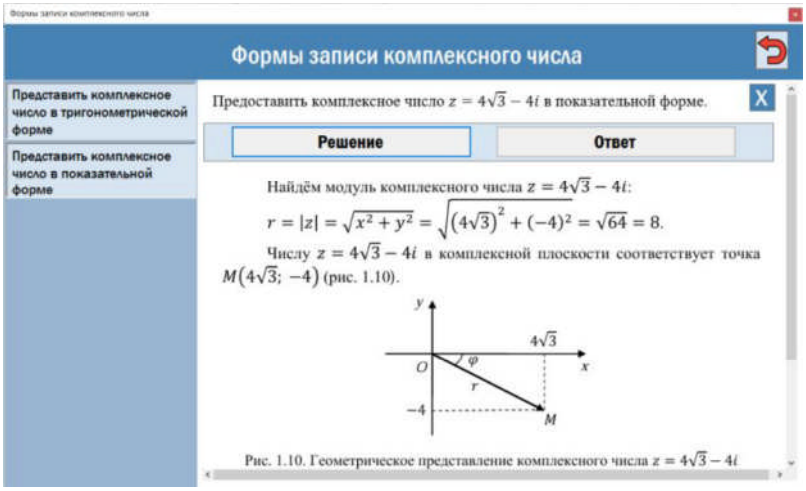


Рисунок 6 – Решение задачи «Представление комплексного числа в тригонометрической форме»

Пример 1 анализа задачи: найти сумму двух комплексных чисел $z_1 = -8 + 5i$ и $z_2 = 2 + 3i$.

Решение:

$$z_1 + z_2 = (-8 + 5i) + (2 + 3i) = (-8 + 2) + i(5 + 3) = -6 + 8i.$$

Ответ: $z_1 + z_2 = -6 + 8i$.

Пример 2 анализа задачи: представить комплексное число $z = 4\sqrt{3} - 4i$ в показательной форме.

Решение: найдем модуль комплексного числа $z = 4\sqrt{3} - 4i$:

$r = |z|\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + (-4)^2 = \sqrt{64}} = 8.$ Числу $z = 4\sqrt{3} - 4i$ соответствует точка M $(4\sqrt{3}; -4)$.

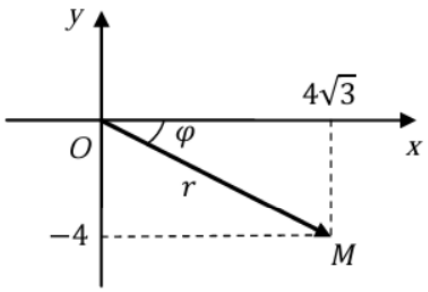


Рисунок 7 – Геометрическое представление комплексного числа

Найдем аргумент комплексного числа, учитывая, что точка M лежит в IV четверти: $\varphi = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{-4}{4\sqrt{3}} = -arctg\frac{1}{\sqrt{3}} = -arctg\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{\pi}{6}$.

Тогда показательная форма комплексного числа $z = 4\sqrt{3} - 4i$: $z = 8^{-\frac{\pi}{6}i}$.

Ответ: $z = 4\sqrt{3} - 4i$: $z = 8^{-\frac{\pi}{6}i}$.

Пример 3 анализа задачи: найти частное двух комплексных чисел $z_1 = 4 - 5i$ и $z_2 = -3 - 9i$ в алгебраической форме.

Решение:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4-5i}{-3-9i} = \frac{(4-5i)(-3+9i)}{(-3-9i)(-3+9i)} = \frac{-12+51i-45(-1)}{9-81i^2} = \frac{33+51i}{90} = \frac{11}{30} + \frac{17}{30}i.$$

Ответ: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{11}{30} + \frac{17}{30}i$.

В приложении 3 предоставлено полное содержание данного раздела.

3. Задачи для практики. Раздел предназначен для закрепления теоретических знаний по теме «Комплексные числа». Пользователю доступно три уровня сложности.

Рисунок 8 – Раздел «Задачи для практики»

Первый уровень состоит из семи пунктов: «Геометрическое представление комплексного числа», «Модуль комплексного числа», «Аргумент комплексного числа», «Тригонометрическая форма комплексного числа», «Показательная форма комплексного числа», «Сумма, разность, произведение и частное комплексных чисел в алгебраической форме», «Решение квадратных уравнений».

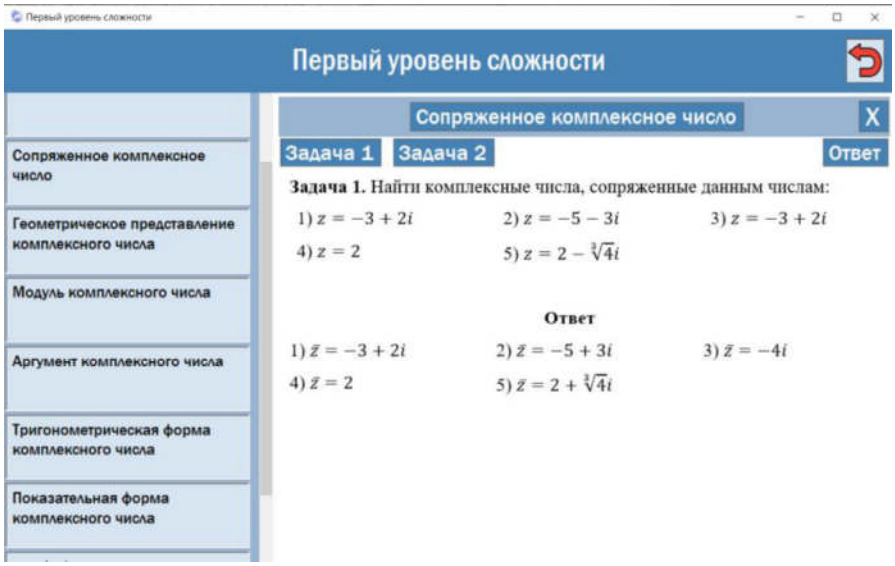


Рисунок 9 – Раздел «Задачи для практики (первый уровень сложности)

Примеры задач первого уровня сложности:

Пример 1. Найти сумму двух комплексных чисел:

$$z_1 = -8 + 5i \text{ и } z_2 = 2 + 3i.$$

Ответ: $z_1 + z_2 = -6 + 8i$.

Пример 2. Найти все значения корня из комплексных чисел:

$$1)\ \sqrt{-1};\ 2)\ \sqrt[4]{-2 + 2\sqrt{3}i}.$$

Ответ: 1) $z_1 = i, z_2 = -i$.

2) $z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}, z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Пример 3. Найти модуль комплексного числа:

1) $z = -3 + 4i$;

2) $z = 4 - 2i$;

3) $z = 3 + 5i$.

Ответ: 1) $r = 5$; 2) $r = 2\sqrt{5}$; 3)$r = \sqrt{34}$.

Пример 4. Представитель комплексные числа в показательной форме:

1) $z = 1$;

2) $z = -1 + \sqrt{3}i$;

3) $z = 3 - 3i$.

Ответ:

1) $z = e^{0i}$;

2) $z = 2e^{\frac{2\pi}{3}i}$;

3) $z = 3\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}$.

Задачи, связанные с произведением и частным комплексных чисел в тригонометрической форме, возведением комплексного числа в степень, извлечением корня из комплексного числа, решением алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел и расстоянием между точками на комплексной плоскости размещены на втором уровне сложности.

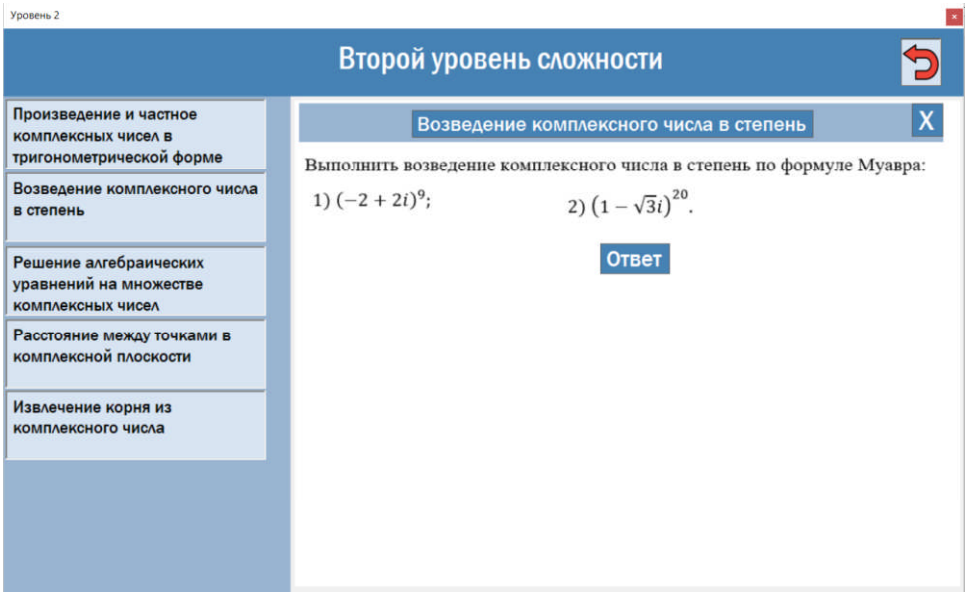


Рисунок 10 – Раздел «Задачи для практики (второй уровень сложности)

Примеры задач второго уровня сложности:

Пример 1. Найти произведение и частное двух комплексных чисел в тригонометрической форме:

1) $z_1 = -\sqrt{3} - 3i,\ z_2 = -5 + 5i$;

2) $z_1 = 2i,\ z_2 = -1 + i$;

3) $z_1 = 4,\ z_2 = \sqrt{3} - i.$

Ответ:

1) $z_1 z_2 = 10\sqrt{6}\left(cos\frac{\pi}{12} + isin\frac{\pi}{12}\right), \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{6}}{5}(cos\frac{7\pi}{12} + isin\frac{7\pi}{12}).$

2) $z_1 z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos(-\frac{3\pi}{4}) + isin(-\frac{3\pi}{4})\right), \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + isin(-\frac{\pi}{4})).$

3) $z_1 z_2 = 8\left(\cos(-\frac{\pi}{6}) + isin(-\frac{\pi}{6})\right), \frac{z_1}{z_2} = 2(\cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6}).$

Пример 2. Найти расстояния между точками:

1) $z_1 = -1 + 7i, z_2 = -5 - 3i;$

2) $z_1 = \sqrt{2} - 3i, z_2 = -1 + 4i;$

3) $z_1 = 2, z_2 = 1 - \sqrt{3}i;$

4) $z_1 = \sqrt{3} - i, z_2 = 4i.$

Ответ:

1) $d = 2\sqrt{29}$, 2) $d = 52 + 2\sqrt{2}$, 3) $d = 2$, 4) $d = 2\sqrt{7}.$

Пример 3. Решить уравнения на множестве комплексных чисел:

1) $x^6 - 1 = 0;\ 2) x^3 - 1 + i = 0.$

Ответ:

1) $x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; x_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; x_4 = -1; x_5 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2};$

$$x_6 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) $x_1 = \sqrt[6]{2}(\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + isin(-\frac{\pi}{12})); x_2 = \sqrt[6]{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + isin\frac{7\pi}{12}));$

$$x_3 = -\frac{\sqrt[12]{2}}{2} - \frac{\sqrt[12]{2}}{2}i.$$

Пример 4. Найти все значения корня из комплексных чисел:

1) $\sqrt[4]{-2}; 2)\sqrt[5]{3i}.$

Ответ: 1)$z_1 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{8}}{2};\ z_2 = -\frac{\sqrt[4]{8}}{2} + i\frac{\sqrt[4]{8}}{2}; z_3 = -\frac{\sqrt[4]{8}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{8}}{2};$

$$z_4 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} - i\frac{\sqrt[4]{8}}{2}.$$

Третий уровень сложности посвящён следующим задачам: «Действия над комплексными числами в алгебраической форме», «Действия над комплексными числами в тригонометрической форме», «Решение биквадратных уравнений на множестве комплексных чисел», «Построение областей в комплексной плоскости».

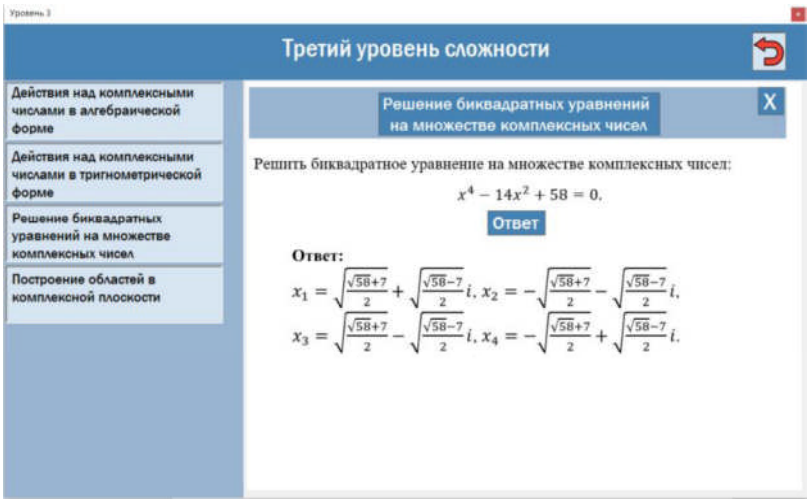


Рисунок 11 – Раздел «Задачи для практики (третий уровень сложности)

Примеры задач третьего уровня сложности:

Пример 1. Решить биквадратное уравнение на множестве комплексных чисел: $a^2 - 14a + 58 = 0.$

Ответ: $x_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{58}+7}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{58}-7}{2}}i, x_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{58}+7}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{58}-7}{2}}i,$

$x_3 = \sqrt{\frac{\sqrt{58}+7}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{58}-7}{2}}i, x_4 = -\sqrt{\frac{\sqrt{58}+7}{2}} + \sqrt{\frac{\sqrt{58}-7}{2}}i\ .$

Пример 2. Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме: $\frac{(-2\sqrt{3}+2i)^7 i^3}{(3+\sqrt{3}i)^4(-2+2i)^5}.$

Ответ: $\frac{4\sqrt{2}}{9}\left(cos\frac{11\pi}{12} + isin\frac{11\pi}{12}\right) = -0{,}608 + 0{,}163i.$

Пример 3. В комплексной плоскости построить область, заданную условиями:

$1)\ |z| \le 3, \frac{\pi}{6} \le argz \le \frac{5\pi}{6}; 2)\ |z - 2i|, Rez \ge 0.$

Ответ:

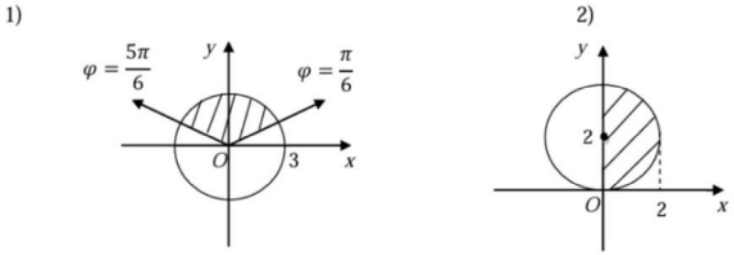


Рисунок 12 – Построенная область, заданная условиями (пример 3)

Пример 4. Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме:

$$\frac{(-7-8i)i^7}{(4-5i)(-3+i)} - \frac{4+4i}{-2-5i}.$$

Ответ: $\frac{16\,961}{11\,890} - \frac{1933}{11\,890}i = 1{,}426 - 0{,}163i.$

Ответ на задачу пользователю сразу не представлен. Учащемуся необходимо выбрать задачу, а после нажать на кнопку «Ответ».

В приложении 4 предоставлено содержание данного раздела.

4. Вопросы для самоконтроля. Пользователю доступны 11 вопросов.

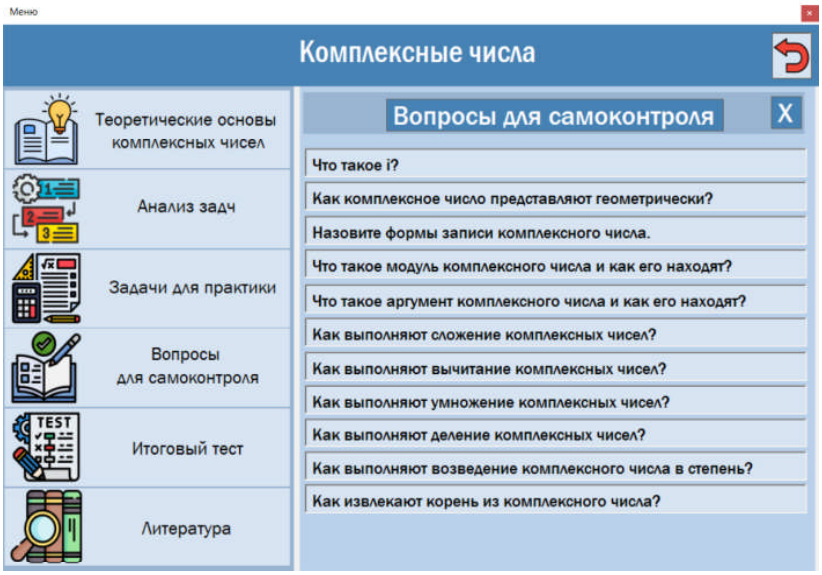


Рисунок 13 – Раздел «Вопросы для самоконтроля»

На данные вопросы обучающийся отвечает самостоятельно.

5. Итоговый тест. Для учащихся представлено два варианта итогового тестирования. Тест состоит из 20 вопрос и поделён на три уровня сложности.

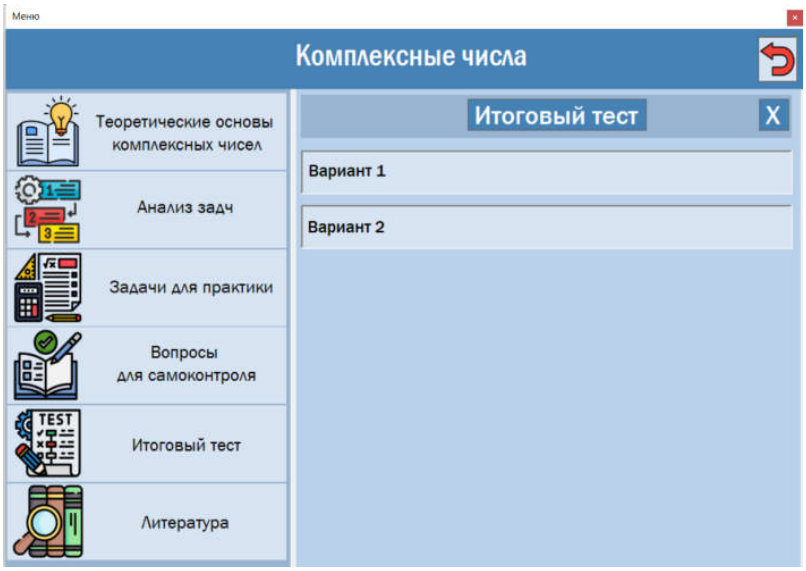


Рисунок 14 – Раздел «Итоговый тест»

После прохождения теста система автоматически проверяет результаты и предоставляет информацию о правильных и неправильных ответах. Количество попыток для прохождения теста не ограничено.

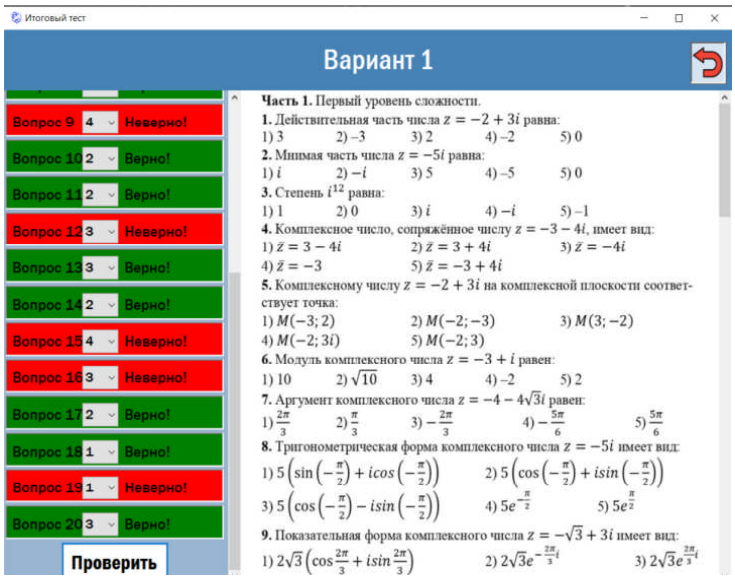


Рисунок 15 – Вариант 1 итогового тестирования

Итоговый тест по теме комплексные числа (вариант 1):

Часть 1. Первый уровень сложности.

1. Действительная часть числа $z = -2 + 3i$ равна:

1) 3. 2) –3. 3) 2. 4) –2. 5) 0.

2. Мнимая часть числа $z = -5$ равно:

1) i. 2) $-i$. 3) 5. 4) –5. 5) 0.

3. Степень i^{12}равна:

1) 1. 2) 0. 3) i. 4) $-i$. 5) –1.

4. Комплексное число, сопряженное число $z = -3 - 4i$, имеет вид:

1) $\bar{z} = 3 - 4i$. 2) $\bar{z} = 3 + 4i$. 3) $\bar{z} = -4i$. 4) $\bar{z} = -3$. 5) $\bar{z} = -3 + 4i$.

5. Комплексному число $z = -2 + 3i$ на комплексной плоскости соответствует точка:

1) M (–3;2). 2) M (–2; –3). 3) M (3; –2). 4) M (–2; –3i). 5) M (–2; 3).

6. Модуль комплексного числа $z = -3 + i$ равен:

1) 10. 2) $\sqrt{10}$. 3) 4. 4) –2. 5) 2.

7. Аргумент комплексного числа $z = -4 - 4\sqrt{3}i$ равен:

1) $\frac{2\pi}{3}$. 2) $\frac{\pi}{3}$. 3) $-\frac{2\pi}{3}$. 4) $-\frac{5\pi}{6}$. 5) $\frac{2\pi}{6}$.

8. Тригонометрическая форма комплексного числа $z = -i$ имеет вид:

1)$5\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$. 2)$5\left(\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

3)$5\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - i sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$. 4)$5^{-\frac{\pi}{2}}$. 4)$5^{\frac{\pi}{2}}$.

9. Показательная форма комплексного числа $\sqrt{3} + 3i$ имеет вид:

1)$2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i sin\frac{2\pi}{3}\right)$. 2) $2\sqrt{3e}^{-\frac{2\pi}{3}i}$. 3) $2\sqrt{3e}^{\frac{2\pi}{3}i}$.

4)$2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right) + i sin\frac{2\pi}{6}\right)$. 5) $2\sqrt{3e}^{-\frac{5\pi}{6}i}$.

10. Сумма комплексных чисел $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = -4$ равно:

1) $6 - 3i$. 2) $-2 - 3i$. 3) $2 - 7i$. 4) $-6 - 3i$. 5) $-6 + 3i$.

11. Разность комплексных чисел $z_1 = 2 + 4i$ и $z_2 = -5 - 3i$ равно:

1) $2 + 7i$. 2) $7 + 7i$. 3) $-3 + i$. 4) $7 + 4i$. 5) $-7 - 7i$.

12. Произведение комплексных чисел $z_1 = 4 - 2i$ и $z_2 = -1 + i$ равно:

1) $2 - 6i$. 2) $-6 + 6i$. 3) $2 + 6i$. 4) $-2 - 6i$. 5) $-2 + 6i$.

13. Частное комплексных чисел $z_1 = 2i$ и $z_2 = 3 - 3i$ равно:

1) $\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$. 2) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$. 3) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}i$. 4) $-3 - 5i$. 5) $-\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i$.

14. Уравнение $x^2 + 12 = 0$ на множестве комплексных чисел имеет корни:

1) корней нет. 2) $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}i.$ 3) $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}.$

4) $x_{1,2} = \pm 3\sqrt{3}i.$ 5) $x_{1,2} = \pm 3\sqrt{2}.$

Часть 2. Второй уровень сложности.

15. Степень $(1 + \sqrt{3}i)^{14}$ равна:

1) 16384. 2) $-8192 + 8192\sqrt{3}i.$ 3) $8192 + 8192\sqrt{3}i.$

4) $-1 + \sqrt{3}i.$ 5) $8192.$

16. Все значения корня $\sqrt[3]{-4}$ равны:

1) $z_1 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}}{2}, z_2 = -\sqrt[3]{4}, z_3 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} - i\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}}{2}.$

2) $z_2 = \sqrt[3]{4}.$

3) $z_1 = \sqrt[3]{4}, z_2 = -\sqrt[3]{4}.$

4) $z = -4.$

5) $z_1 = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} + i\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}}{2}, z_2 = -\sqrt[3]{4}, z_3 = -\frac{\sqrt[3]{4}}{2} - i\frac{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{3}}{2}.$

17. Уравнение $x^4 - 16 = 0$ на множестве комплексных чисел имеет корни:

1) $x = 2.$ 2) $x_{1,2} = \pm 2, x_{3,4} = \pm 2.$ 3) $x_{1,2} = \pm 2.$

4) $x_{1,2} = \pm 2.$ 5) корней нет.

18. Расстояние между точками $z_1 = 5 - 2i$ и $z_2 = -4i$

1) $\sqrt{29}.$ 2) $4.$ 3) $\sqrt{7}.$ 4) $\sqrt{21}.$ 5) $29.$

Часть 3. Третий уровень сложности

19. В комплексной плоскости условие $|z + 2 + 2i| \leq 2$ определяет область:

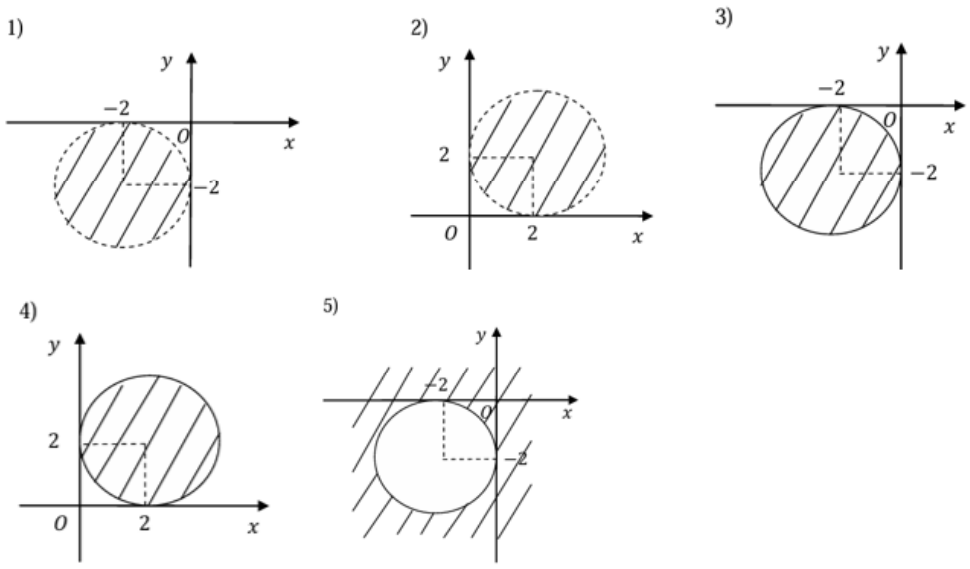


Рисунок 16 – Задание итогового теста

20. Все комплексные числа $z = x + iy, x, y \in R$, удовлетворяющие условию $z^2 + \bar{z} = 0$, имеют вид:

1) $z_1 = 0, z_2 = -1$.

2) $z_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

3) $z_1 = 0, z_2 = -1, z_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

4) таких z не существует.

5) $z_3 = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$.

Номер задания	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Номер ответа	4	4	1	5	5	2	3	2	3	2	2	5	3	2	2	1	2	1	3	3

Рисунок 17 – Ответы итогового теста (вариант 1)

6. Литература. В данном разделе представлены учебные пособия по теме «Комплексные числа» в школьном курсе математике.

Данный материал пользователь скачивает на ПК, после чего может его просмотреть.

Рисунок 18 – Раздел «Литература»

Созданное ЭОР «Комплексные числа» поможет обучающимся 10 – 11 классов упростить изучения сложной темы в школьном курсе математике. Разработанное ЭОР можно использовать на уроках математики, для самостоятельной подготовки или дистанционном обучении. Кроме обучающихся, данное приложение может использовать учитель для объяснения темы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы была поставлена цель: рассмотреть особенности методики обучения комплексным числам в школьном курсе математике и разработать ЭОР по теме «Комплексные числа».

Для достижения данной цели были определены и решены следующие задачи.

1. Изучено историческое происхождение и роль комплексных числе в современной математике.

История комплексных чисел — это вдохновляющий пример того, как человеческая мысль преодолевает границы неизвестного. От робких шагов Кардано и Бомбелли в XVI веке, через геометрические озарения Весселя и Арганда в XVIII веке, до триумфальной формализации Гауссом в XIX веке, эти числа прошли путь от скептического неприятия до статуса незаменимого инструмента. Каждый этап их развития отражал не только математический прогресс, но и эволюцию научного мышления.

2. Составлен сравнительный анализ материала о комплексных числах в школьных учебниках.

Для выполнения данной задачи были рассмотрены учебники по алгебре и началам математического анализа различных авторов, таких как С. М . Никольский, Г. К . Муравин, Н. Я . Виленкин и А. Г . Мерзляк.

Сравнительный анализ учебников показал, что учебники для углубленного уровня предлагают наиболее полное и глубокое изложение темы, включая все формы комплексных чисел и разнообразные задачи. Учебники для базового уровня делают материал доступным, но ограничивают его глубину, исключая тригонометрическую и показательную формы.

3. Рассмотрены особенности методической организации обучения комплексным числам.

Изучение темы «Комплексные числа» целесообразно разделить на пять этапов: введение в тему (мотивационный этап), формирование базовых понятий, изучение различных форм записи комплексных чисел, закрепление материала через практические задачи, контроль знаний.

4. Отобран комплект задач на тему комплексные числа.

С учетом ограниченного количества учебных часов возникла необходимость в дополнительных образовательных материалах. Для решения данной проблемы был разработан электронный образовательный ресурс для изучения комплексных чисел. Для данного ресурсы был отобран комплект задач на данную тему.

5. Разработан электронный ресурс для обучения комплексным числам.

Для выполнения данной задачи разработан ЭОР «Комплексные числа. Структура ресурса: теоретические основы комплексного числа, анализ задач, задачи для практики, вопросы для самоконтроля, итоговый тест, литература.

Цель работы достигнута, задачи решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Андронов И. К. Математика действительных и комплексных чисел. М. : Просвещение, 1975. 517 с.
2. Балк М. Б. Реальные применения мнимых чисел. Киев : Радянська школа, 1988. 255 с.
3. Виленкин Н. Я. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс (углублённый уровень). М . : Мнемозина, 2020. 312 с.
4. Волков Ю. В. Практические занятия по алгебре. Комплексные числа, многочлены. Спб. : Лань, 2023. 192 с.
5. Глазков Ю. А. Комплексные числа (9 – 11 классы). М. : Издательство «Экзамен», 2021. 200 с.
6. Горюшкин А. П. Абстрактная и компьютерная алгебра: учебное пособие для вузов. М. : Гриф УМО ВО, 2025. 691 с.
7. Дорофеева А. В. Математика: учебное пособие для вузов. М. : Гриф УМО, 2025. 422 с.
8. Жмурова И. Ю. Изучение комплексных чисел в общеобразовательной школе // Молодой ученый. 2020. № 5. С. 312–314.
9. Зива Б. Г. Комплексные числа. М. : Виктория плюс, 2022. 264 с.
10. Козырева А. В. Мотивационная основа математической подготовки обучающихся в цифровой образовательной среде ведомственной образовательной организации // KANT. 2025. № 4. С. 47
11. Ларин С. В. Числовые системы. М. : Гриф УМО ВО, 2025. 130 с.
12. Мерзляк А. Г., Поляков В. М. Математика. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс (углубленный уровень). М. : Просвещение, 2023. 480 с.
13. Мордкович А. Г. Математика. Алгебра. 10 класс (базовый и углубленный уровень. 1-2 часть). М. : Мнемозина, 2021. 420 с.

14. Муравин Г. К. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. (углублённый уровень). М. : Дрофа, 2020. 318 с.

15. Никольский С. М. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. М. : Просвещение, 2022. 464.

16. Пинчук И. А. Фасилитация процесса обучения основным фундаментальным понятиям современной алгебры // Modern European Researches. 2025. № 4. С. 72–82.

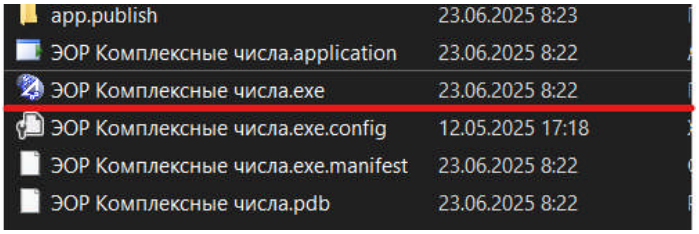
17. Рахимов А. А. Теоретические аспекты применения системы компьютерного моделирования Maple в процессе преподавания математики студентам технических вузов // Вестник Российского университета дружбы народов. 2025. № 4. С. 58–75.

18. Синкевич Г. И. История геометрических представлений комплексных чисел // История науки и техники. 2017. № 4. С. 15–30.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ИНСТРУКЦИЯ ЭОР «Комплексные числа»

1. Запустить ЭОР «Комплексные числа». Разархивировать скачанный файл. Открыть файл «ЭОР Комплексные числа.exe».

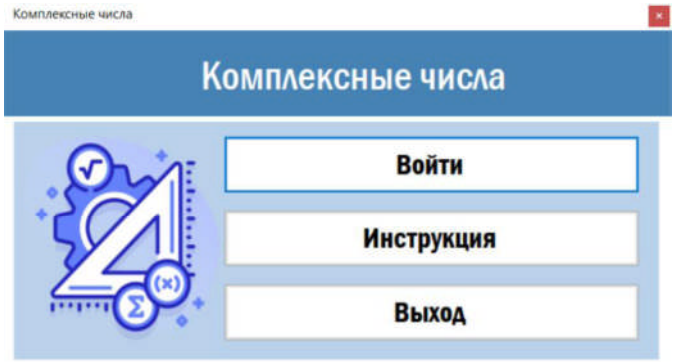


2. На экране появилось приветственное окно. В центре окна размещены три кнопки:

1) Кнопка «Войти» предназначена для начала работы с ЭОР «Комплексные числа».

2) Кнопка «Инструкция» открывает руководство по использованию приложения.

3) Кнопка «Выход» — закрывает приложение.



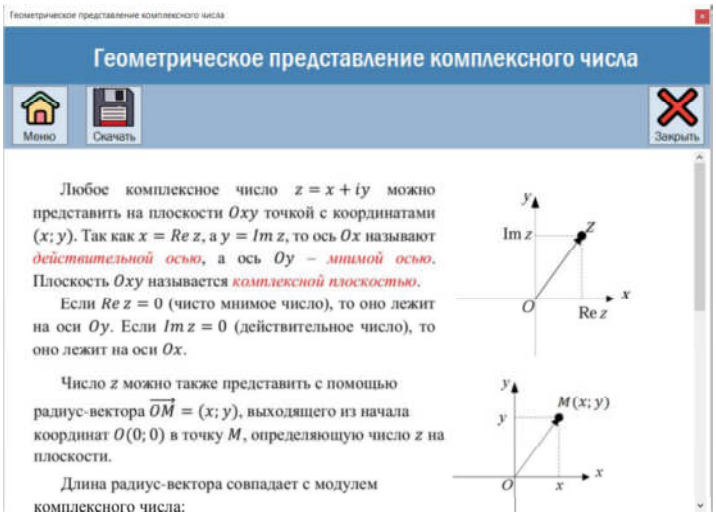
3. При нажатии на кнопку «Войти» открывается окно «Меню». Данное окно предназначено для навигации в электронном образовательном ресурсе «Комплексные числа». В меню представлено шесть основных разделов.

4. Навигация в меню. Для того, чтобы открыть раздел необходимо нажать на него правой кнопкой мыши.

Чтобы перейти в другой раздел, сначала нужно нажать на кнопку с изображением крестика, чтобы закрыть текущий раздел. Затем следует выбрать нужный раздел и кликнуть по нему правой кнопкой мыши. Навигация по всем разделам меню осуществляется таким же образом. Кнопка в виде стрелочки назад, возвращает пользователя в приветственное окно.

5. Разделы ЭОР «Комплексные числа»:

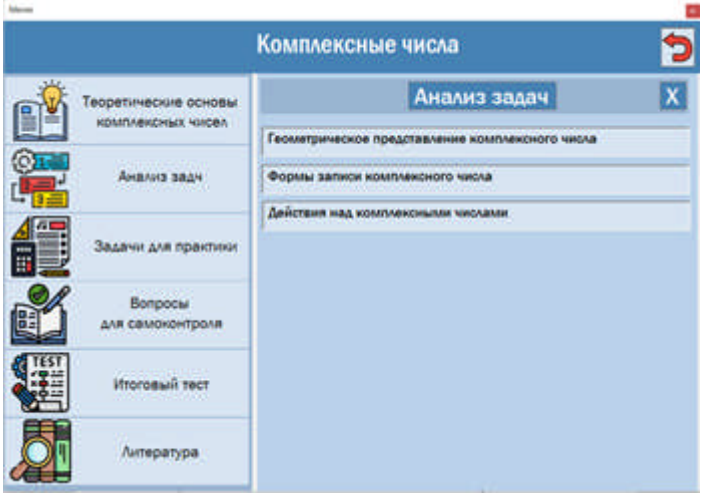
1) «Теоретические основы комплексных чисел». Данный раздел предназначен для изучения основных понятий, определений и свойств комплексных чисел, а также для ознакомления с теоретическим материалом по данной теме. Раздел состоит из шести пунктов.



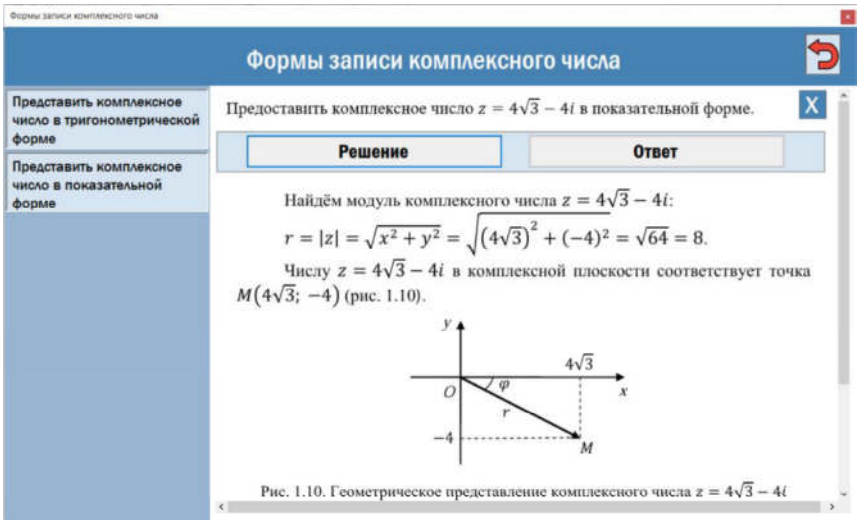
При переходе по данным пунктам пользователю доступна теоретическая информация. Доступны три кнопки:

1. Кнопка «Меню» предназначена для перехода обратно в меню
2. Кнопка «Сохранить». Данная кнопка используется для скачивания теоретического материала в формате .pdf.
3. Кнопка «Закрыть» закрывает ЭОР «Комплексные числа».

2). Раздел «Анализ задач». Для пользователя доступен данный раздел с разбором задач по теме «Комплексные числа». Раздел состоит из трех пунктов.



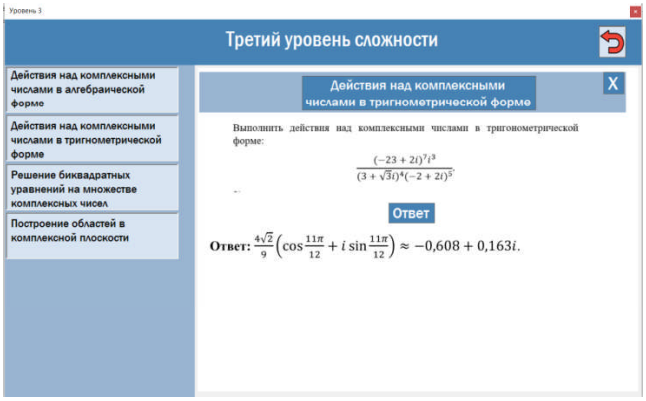
Каждый раздел содержит подробное описание задачи. Пользователь доступен список задач. Решение задачи автоматически скрыты.



Для того, чтобы раскрыть решение задачи необходимо нажать на кнопку «Решение». Кнопка «Ответ» раскрывает правильный ответ. Навигация в данном окне работает аналогичным образом как в окне «Меню». Кнопка в виде стрелочки возвращает пользователя в меню.

3). Раздел «Задачи для практики». Данный предназначен для закрепления теоретических знаний по теме «Комплексные числа». Пользователю доступно три уровня сложности.

Навигация в разделе осуществляется так же, как и в меню. Кнопка «Ответ» предназначена для отображения правильного решения задачи, чтобы пользователь мог проверить свой результат.

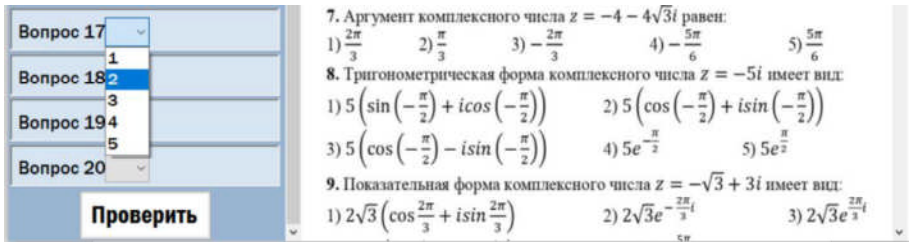


4). Раздел «Вопросы для самоконтроля». Пользователю доступны 11 вопросов.

5). Раздел «Итоговый тест». Для пользователя представлено два варианта итогового тестирования. Тест состоит из 20 вопрос и поделен на три уровня сложности.

Пользователь выбирает нужный вариант ответа из раскрывающегося списка, расположенного рядом с номером вопроса. Для

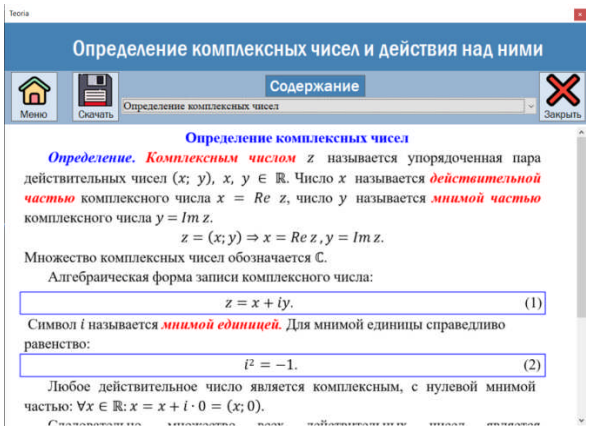
того, чтобы проверить необходимо нажать на кнопку «Проверить». Тест можно проходить неограниченное количество.

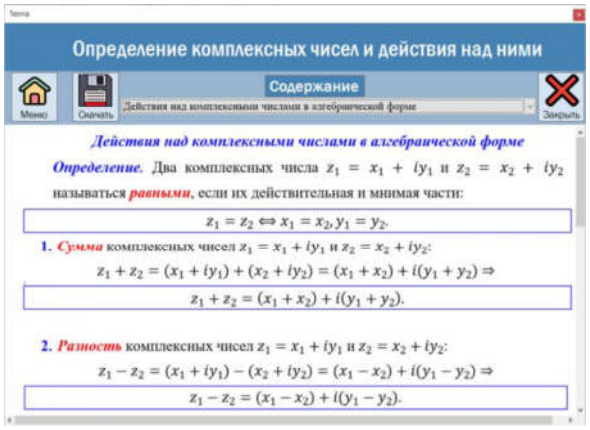


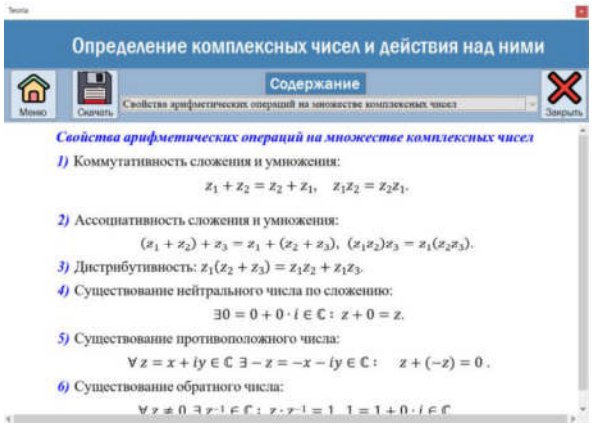
6). Раздел «Литература». В данном разделе представлены учебные пособия по теме «Комплексные числа» в школьном курсе математике. Материал можно скачать. Для этого необходимо нажать на материал правой кнопкой мыши.

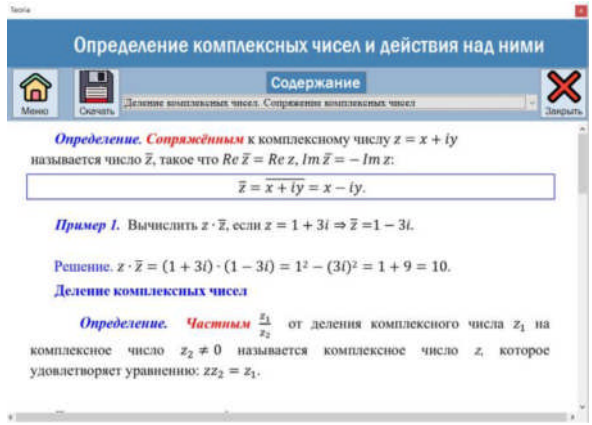
ПРИЛОЖЕНИЕ 2

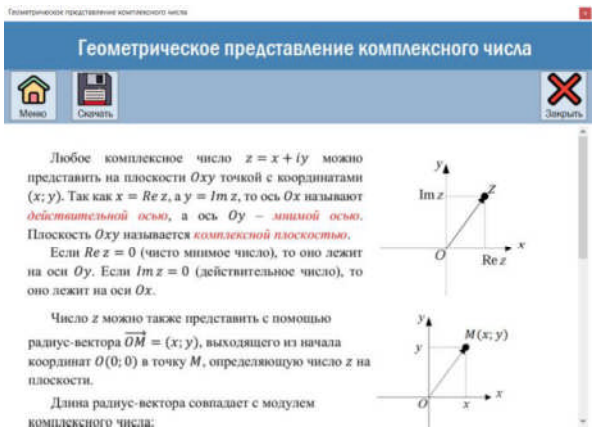
Содержание раздела «Теоретические основы комплексных чисел»

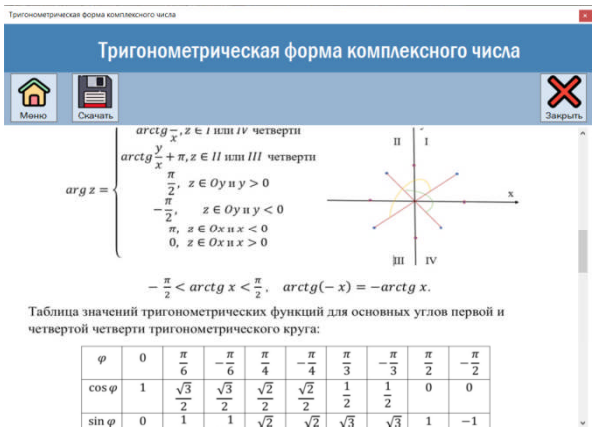




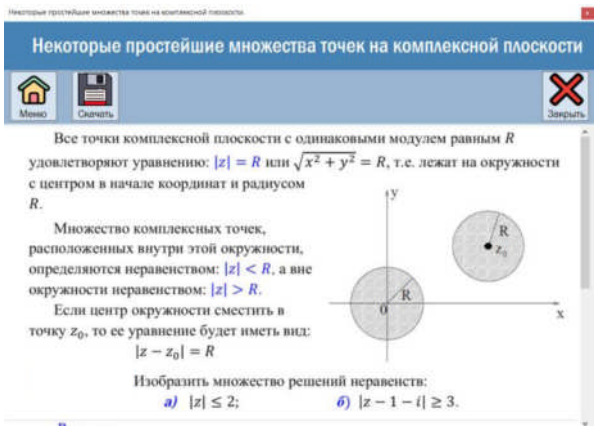


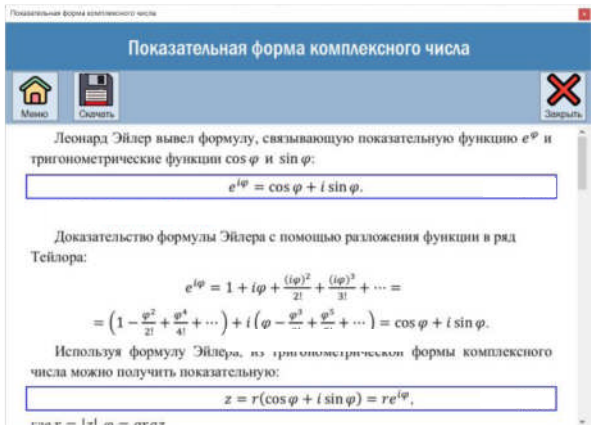






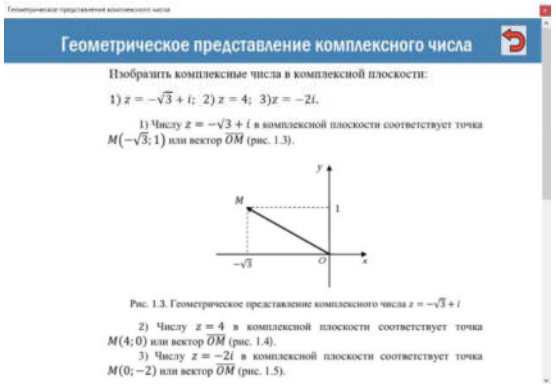
φ	0	π/6	−π/6	π/4	−π/4	π/3	−π/3	π/2	−π/2
cos φ	1	√3/2	√3/2	√2/2	√2/2	1/2	1/2	0	0
sin φ	0	1	1	√2	√2	√3	√3	1	−1

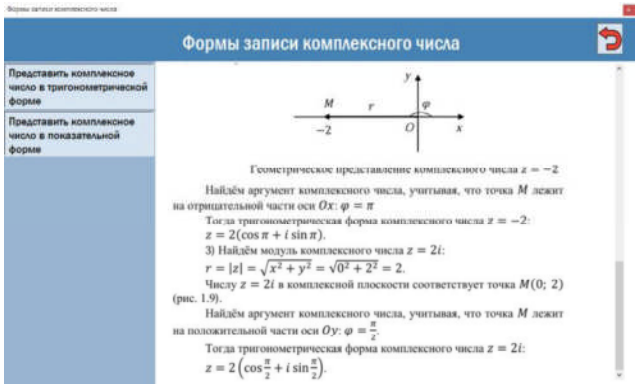


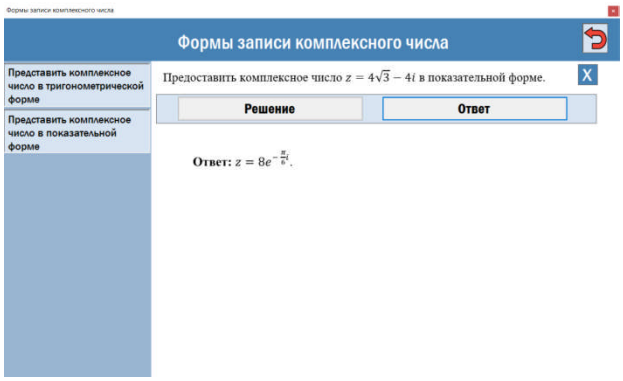


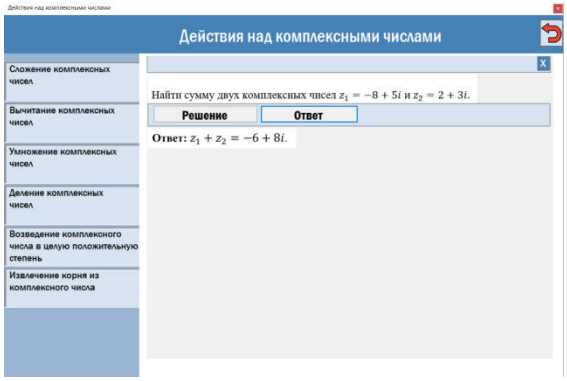
ПРИЛОЖЕНИЕ 3

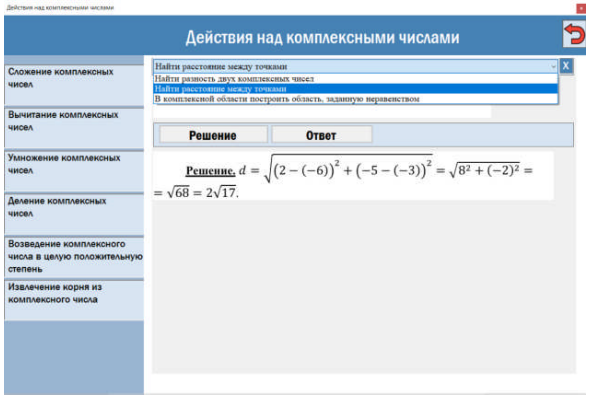
Содержание раздела «Анализ задач»

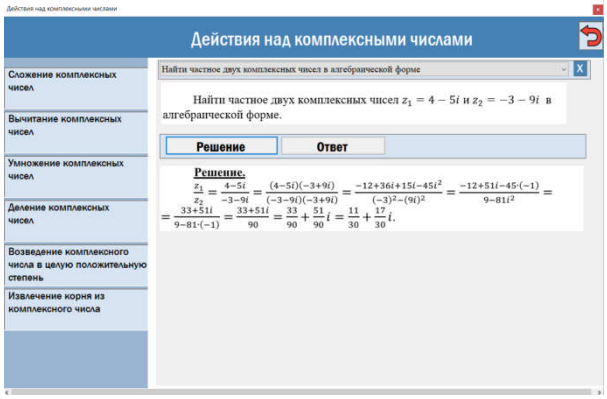


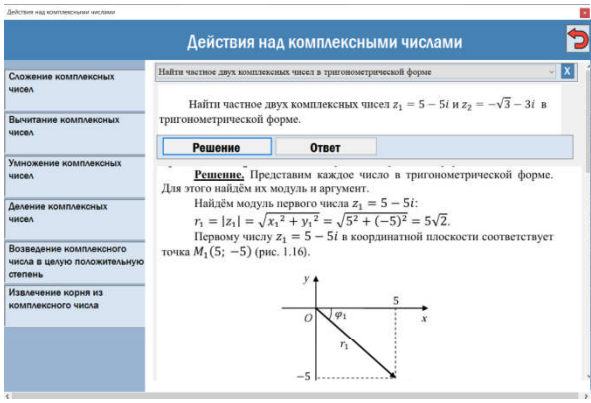


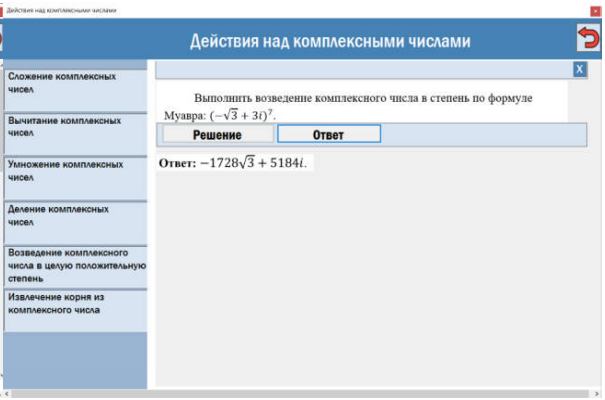






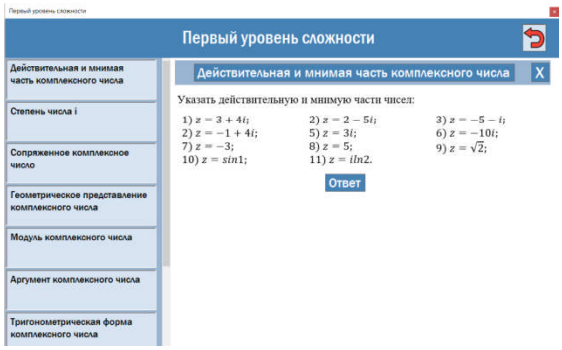


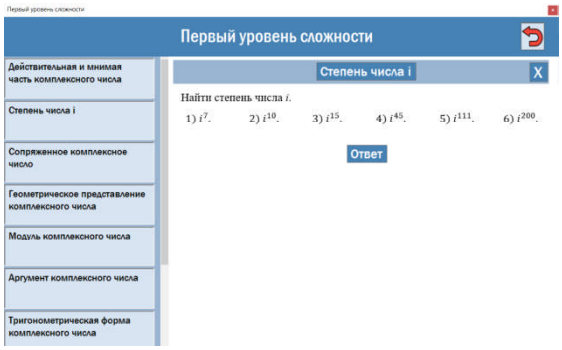


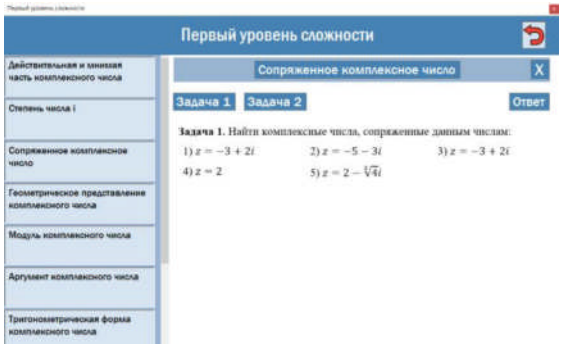


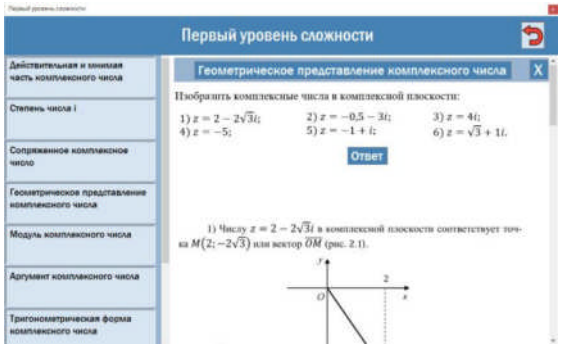
ПРИЛОЖЕНИЕ 4

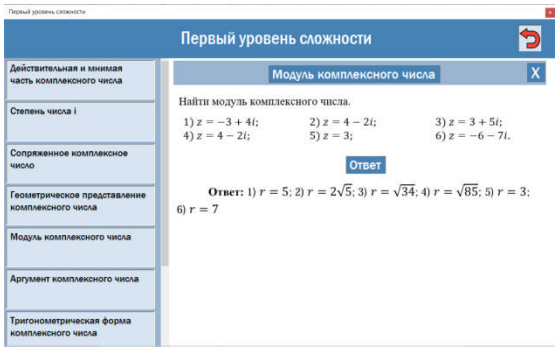
Содержание раздела «Задачи для практики»

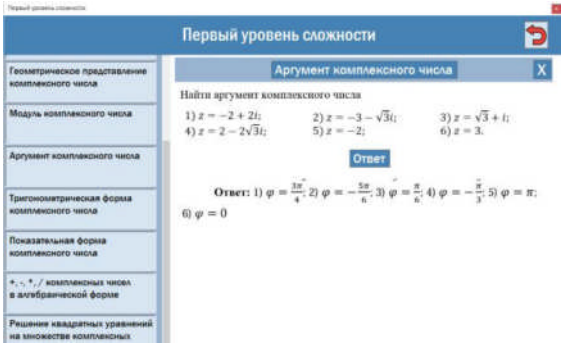


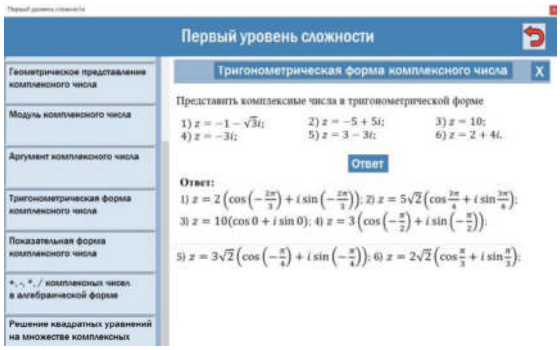


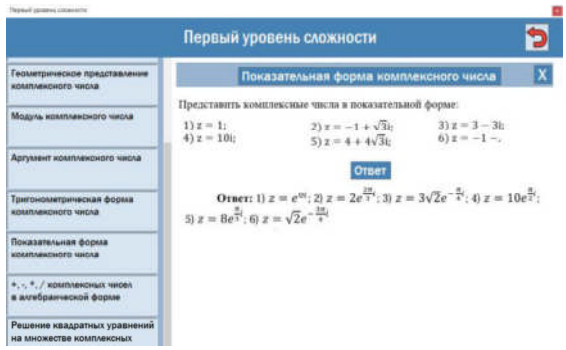


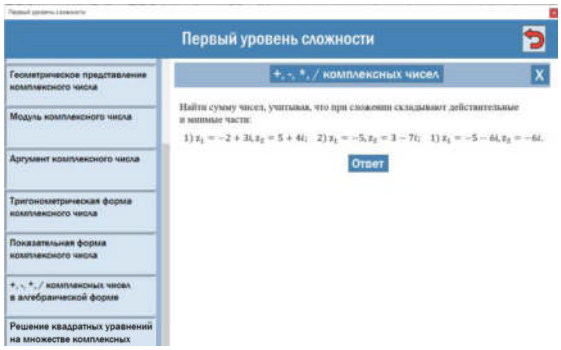


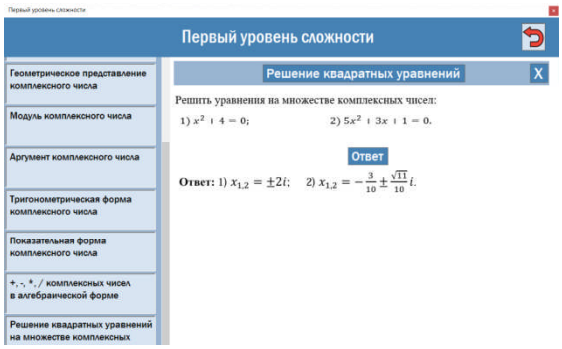


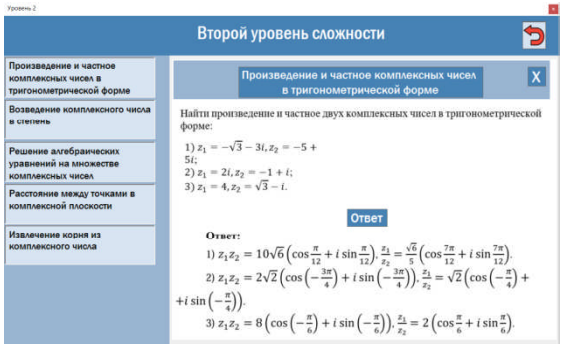


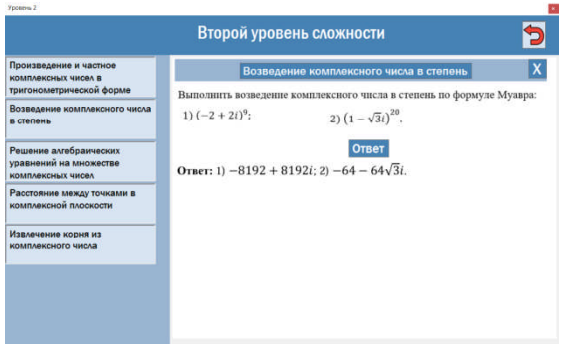


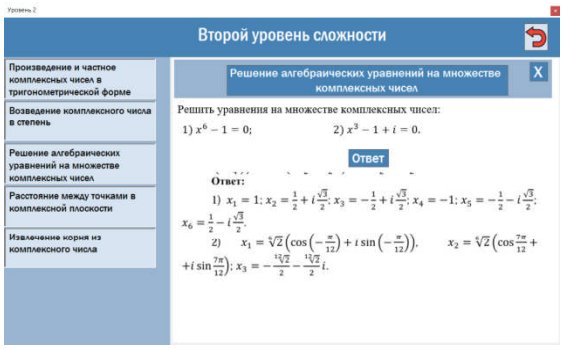


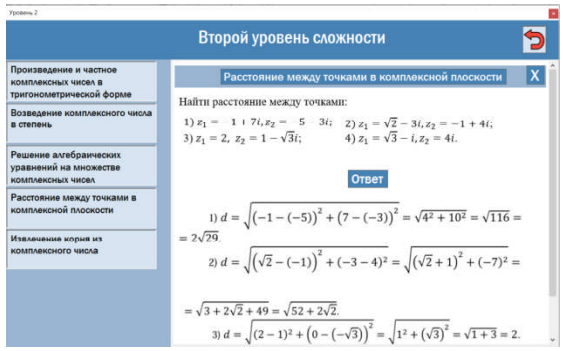

Первый уровень сложности
Геометрическое представление комплексного числа
Модуль комплексного числа
Аргумент комплексного числа
Тригонометрическая форма комплексного числа
Показательная форма комплексного числа
+, -, *, / комплексных чисел в алгебраической форме
Решение квадратных уравнений на множестве комплексных
+, -, *, / комплексных чисел
Найти сумму чисел, учитывая, что при сложении складывают действительные и мнимые части:
Ответ

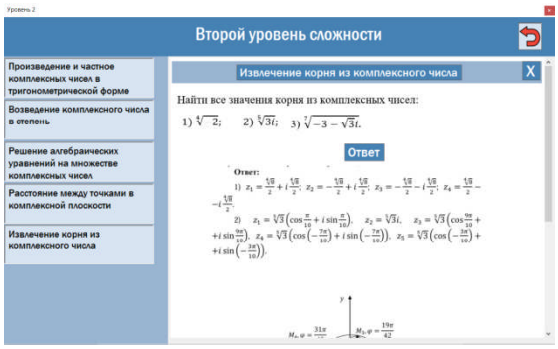

Первый уровень сложности
Геометрическое представление комплексного числа
Модуль комплексного числа
Аргумент комплексного числа
Тригонометрическая форма комплексного числа
Показательная форма комплексного числа
+, -, *, / комплексных чисел в алгебраической форме
Решение квадратных уравнений на множестве комплексных
Решение квадратных уравнений
Решить уравнения на множестве комплексных чисел:
Ответ
Ответ:

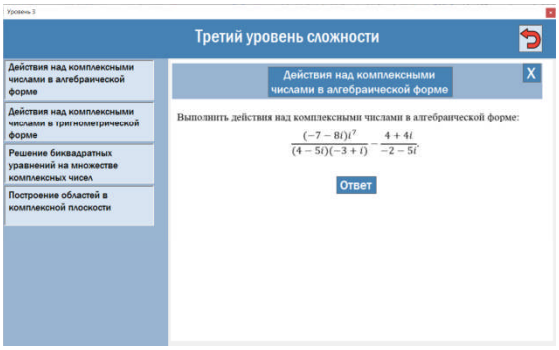

Второй уровень сложности
Произведение и частное комплексных чисел в тригонометрической форме
Возведение комплексного числа в степень
Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел
Расстояние между точками в комплексной плоскости
Извлечение корня из комплексного числа
Произведение и частное комплексных чисел в тригонометрической форме
Найти произведение и частное двух комплексных чисел в тригонометрической форме:
Ответ
Ответ:

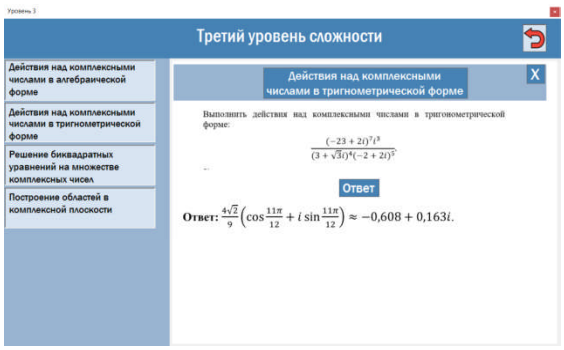

Второй уровень сложности
Произведение и частное комплексных чисел в тригонометрической форме
Возведение комплексного числа в степень
Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел
Расстояние между точками в комплексной плоскости
Извлечение корня из комплексного числа
Возведение комплексного числа в степень
Выполнить возведение комплексного числа в степень по формуле Муавра:
Ответ
Ответ:


Второй уровень сложности
Произведение и частное комплексных чисел в тригонометрической форме
Возведение комплексного числа в степень
Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел
Расстояние между точками в комплексной плоскости
Извлечение корня из комплексного числа
Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел
Решить уравнения на множестве комплексных чисел:
Ответ
Ответ:


Второй уровень сложности
Произведение и частное комплексных чисел в тригонометрической форме
Возведение комплексного числа в степень
Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел
Расстояние между точками в комплексной плоскости
Извлечение корня из комплексного числа
Расстояние между точками в комплексной плоскости
Найти расстояние между точками:
Ответ


Второй уровень сложности
Произведение и частное комплексных чисел в тригонометрической форме
Возведение комплексного числа в степень
Решение алгебраических уравнений на множестве комплексных чисел
Расстояние между точками в комплексной плоскости
Извлечение корня из комплексного числа
Извлечение корня из комплексного числа
Найти все значения корня из комплексных чисел:
Ответ
Ответ:


Третий уровень сложности
Действия над комплексными числами в алгебраической форме
Действия над комплексными числами в тригонометрической форме
Решение биквадратных уравнений на множестве комплексных чисел
Построение областей в комплексной плоскости
Действия над комплексными числами в алгебраической форме
Выполнить действия над комплексными числами в алгебраической форме:
Ответ


Третий уровень сложности
Действия над комплексными числами в алгебраической форме
Действия над комплексными числами в тригонометрической форме
Решение биквадратных уравнений на множестве комплексных чисел
Построение областей в комплексной плоскости
Действия над комплексными числами в тригонометрической форме
Выполнить действия над комплексными числами в тригонометрической форме:
Ответ
Ответ:

Третий уровень сложности
Действия над комплексными числами в алгебраической форме
Действия над комплексными числами в тригонометрической форме
Решение биквадратных уравнений на множестве комплексных чисел
Построение областей в комплексной плоскости
Решение биквадратных уравнений на множестве комплексных чисел
Решить биквадратное уравнение на множестве комплексных чисел:
$x^4 - 14x^2 + 58 = 0.$
Ответ
Ответ:

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: заочная

Утверждаю: зав. кафедрой
«20» 10 2024 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Иванцовой Анастасии Дмитриевны
(ФИО полностью)

Тема работы «Изучение комплексных чисел в школьном курсе математики»

Утверждена приказом по Университету от «25.12» 2024 г. № 1351/0

Срок сдачи студентом законченной работы «21» мая 2025 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Теоретические основы изучения темы «Комплексные числа» в школьном курсе математики.	Октябрь – ноябрь 2024 г.	Выполнено
2.	Историческое происхождение комплексных чисел в математике.	Ноябрь – декабрь 2024 г.	Выполнено
3.	Роль комплексных чисел в современной математике.	Январь 2025 г.	Выполнено
4.	Сравнительный анализ содержания темы «Комплексные числа» в школьных учебниках.	Февраль 2025 г.	Выполнено
5.	Методические аспекты обучения теме «Комплексные числа» в школе.	Февраль – март 2025 г.	Выполнено
6.	Особенности организации методической работы при изучении комплексных чисел	Апрель 2025 г.	Выполнено
7.	Разработка электронного обучающего ресурса по теме «Комплексные числа»	Май 2025 г.	Выполнено
8.	Оформление библиографического списка	Май – Июнь 2025 г.	Выполнено
9.	Подготовка презентации и выступления	Июнь 2025 г.	Выполнено

Дата выдачи задания «28» 10 2024 г.

Руководитель _____ Монахова О.А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению
_____ Иванцова А.Д.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студента (ки) 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения
Иванцовой Анастасии Дмитриевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Иванцова Анастасия Дмитриевна, студентка 5 курса заочной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Изучение комплексных чисел в школьном курсе математики», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

Иванцова
подпись
28.05.25
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 28.05.25
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР М.О. О.А. Монахова
подпись И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Изучение комплексных чисел в школьном курсе математики».
студентки 5 курса Иванцовой Анастасии Дмитриевны
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
профиля «Математика»
Руководитель ВКР Монахова О.А.

АНТИПЛАГИАТ
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАИМСТВОВАНИЙ

Отчет предоставлен сервисом
«Антиплагиат» - http://pnzgu.antiplagiat.ru

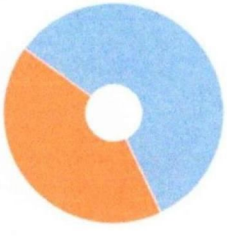
Отчет о проверке

Автор: Иванцова Анастасия Дмитриевна

Название документа: Изучение комплексных чисел в школьном курсе математики

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения: 41,62%
Оригинальность: 58,38%
Цитирования: 0%
Самоцитирования: 0%

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

28.05.2025 — дд.мм.гггг.
подпись
О.А. Монахова — И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Комплексные числа в школьном курсе математики»
студентки Иванцовой Анастасии Дмитриевны
факультета физико-математических и естественных наук направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 20ЗФПМ1

Тема «Комплексные числа» считается традиционно одной из сложных и абстрактных тем курса алгебры. Целью представленной работы было рассмотрение методики обучения комплексным числам в школьном курсе математики.

В рамках представленной работы представлен исторический обзор развития понятия комплексное число, а также были рассмотрены методические аспекты изучения комплексных чисел в школьном курсе математики, разработан электронный образовательный ресурс для изучения темы «Комплексные числа».

Электронный образовательный ресурс включает теоретический материал по всем темам, задачный материал, разделенный на уровни сложности: базовый, средний и повышенный.

Работа Иванцовой А.Д. заслуживает оценки «отлично» и может быть использована в учебном процессе учителем при подготовке обучающихся.

Руководитель ВКР:
Монахова Оксана Александровна,
кафедра «Математическое образование»
Педагогического института
им. В.Г. Белинского, ПГУ, доцент,
доцент, кандидат физико-математических наук _____