

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:
«Использование свойств функций при решении задач с
параметром»

Студент

Класс 15.06.23
(подпись, дата)

Класс Наталья Викторовна
(ФИО полностью)

Руководитель

Сорокина 15.06.23
(подпись, дата)

Сорокина М.В.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Журавлева 29.06.23
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 26.06.23 № 14)

Заведующий кафедрой

Паньженский 26.06.23
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 13.07.23 № 4)

Секретарь ГЭК

Журавлева 13.07.23
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2023

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Теоретические основы изучения задач с параметрами в курсе алгебры средней школы.....	6
1.1 Понятие параметра.....	6
1.2 Виды уравнений и неравенств с параметрами и различные методы их решения	8
Глава 2. Методические основы изучения задач с параметрами и применение свойств функции при их решении.....	18
2.1 Сравнительный анализ учебников и задачников по алгебре для 7-11 классов.....	18
2.2 Анализ задач ОГЭ и ЕГЭ по теме исследования.....	27
2.3 Методика обучения решению задач с параметрами на уроках алгебры с использованием свойств функций.....	32
2.4 Технологическая карта на тему «Использование свойства ограниченности функции при решении задач с параметром».....	42
Глава 3. Методические разработки факультативного занятия по теме «Решение задач с параметрами с использованием свойств функций в процессе подготовки к ЕГЭ по математике»	47
Заключение.....	54
Список использованной литературы.....	56
Приложения.....	58

Введение

Задачи с параметрами встречаются фактически с самого начала изучения математики, когда дети начинают оперировать с буквами, как с числами. Но само выражение «задача с параметром» рассматривается в более узком смысле. Так, «задача с параметром» – это задача, в которой есть уравнение, неравенство или задача, связанная с исследованием функций, в записи которых присутствует буква, называемая в математике параметром.

Задачи с параметрами играют существенную роль в развитии логического мышления у учащихся. Уметь решать уравнения и неравенствами, содержащие параметры – важный показатель очень высокого уровня математических знаний. Важно понимать, что при решении подобных задач недостаточно знаний «зазубренных» формул, а необходимо умение анализировать, выполнять действия последовательно и системно, находить общие свойства объекта. Однако в большинстве случаев, оказывается так, что учащиеся 10-11 классов при подготовке к экзаменам не совсем имеют представление о параметрических задачах.

Тогда возникает вопрос о том, почему все-таки так происходит и каким образом это можно исправить, ведь задания с параметрами присутствуют в итоговой аттестации.

Необходимо отметить, что в курсе основной школы отсутствует определение параметра и подобным задачам отводится совсем незначительное место. Чуть подробнее эта тема изучается лишь в 11 классе.

При решении задач с параметрами используют аналитический и функциональный методы решения. Именно последнему методу посвящена данная выпускная квалификационная работа. Во ФГОС упоминается об этом методе и умении его применять: «овладение системой

функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей»[1]

В силу вышесказанного тема настоящего исследования достаточно актуальна.

Цель выпускной квалификационной работы: выявление методических особенностей применения функционального подхода в решении задач с параметрами.

Задачи исследования:

- определить понятие параметра, выделить виды уравнений с параметром;
- изучить содержание теоретического и задачного материала по данной теме в учебной литературе;
- описать особенности решения задач с параметрами с использованием свойств функции;
- разработать методические рекомендации по обучению решению задач с параметрами с использованием свойств функций;
- разработать факультативное занятие на тему «Решение задач с параметрами с использованием свойств функций в контексте подготовки к ЕГЭ по математике в 11 классе»;
- рассмотреть задачи в банке заданий ФИПИ и составить подборку задач для подготовки к ЕГЭ по заданию 17;
- разработать календарно-тематическое планирование факультативного курса для подготовки к ЕГЭ.

Объект исследования – процесс обучения решению задач, содержащих параметры, с использованием свойств функций, в курсе алгебры средней школы.

Предмет исследования –методика обучения учащихся решению задач с параметрами с использованием свойств функций.

*Гипотеза исследования:*применение разработанных рекомендаций позволит школьникам решать задачи с параметрами на более сознательной основе и применять различные методы решения.

Теоретическая значимость выпускной квалификационной работы заключается в систематизации теории решения задач с параметрами при помощи свойств функции и выявлении методических особенностей обучения по данной теме.

Практическая значимость исследования состоит в том, что методика решения задач с параметрами, в частности, с использованием свойств функции, может использоваться учителями математики. Материалы работы можно использовать при подготовке к ЕГЭ по математике. В приложении имеется сборник заданий для подготовки.

Настоящая работа имеет следующую структуру: введение, 3 главы, заключение, список использованной литературы и приложения.

Глава 1. Теоретические основы изучения задач с параметрами в курсе алгебры средней школы

1.1 Понятие параметра

Для начала определим, что собой представляют уравнения и неравенства с параметрами, которым посвящена данная выпускная квалификационная работа.

Итак, если уравнение или неравенство, кроме неизвестных содержит еще и числа, так же обозначенные буквами, то их называют параметрическими, а эти числа – параметрами.

Параметр – это независимая переменная, значение которой считают в уравнениях или неравенствах фиксированными либо берут произвольное число.

Уравнение с параметром представляет собой математическое уравнение (неравенство), у которого внешний вид и само решение зависит от значения параметра или параметров. Поэтому, чтобы решить уравнение с параметром, необходимо найти, в первую очередь, для каждого значения параметра такие значения, которые бы удовлетворяли этому уравнению или неравенству. При этом необходимо:

1. Провести исследование и определить, при каких значениях неизвестного в данном случае параметра уравнение будет иметь корни, найти их количество при разных значениях этого параметра.

2. Решить и найти такие выражения для корней уравнения, для которых необходимо указать значения параметра для каждого из них и определить, при каких значениях выражение будет определять корни.

Рассмотрим уравнение $a(x + k) = a + c$, где a, c, k, x – переменные величины. Системой допустимых значений a, c, k, x называют систему значений переменных, в которой левая и правая части уравнения принимают действительные значения

Пусть A – множество всех допустимых значений a , K – множество всех допустимых значений k , X – множество всех допустимых значений x , C – множество всех допустимых значений c . Если у каждого из множеств A, K, C, X выбрать и зафиксировать соответственно по одному значению a, c, k и подставить их в уравнение, то получим уравнение относительно x , т.е. уравнение с одним неизвестным. Переменные a, c, k , которые при решении уравнения считаются постоянными, их называют параметрами, а само уравнение называется уравнением, содержащим параметры. Параметры обозначаются первыми буквами латинского алфавита: $a, b, c, d, \dots, k, l, m, n$, а неизвестные – буквами x, y, z . Два уравнения, которые содержат одни и те же параметры, называются равносильными, если:

- а) они имеют смысл при одних и тех же значениях параметров;
- б) каждое решение первого уравнения является решением второго, и наоборот.

Придадим параметру, которое содержится в уравнении (неравенстве) некоторое значение, тогда возможны следующие случаи:

- 1) полученное уравнение (неравенство) содержит данные числа и неизвестные, т.е. параметр «пропадает»;
- 2) полученное условие, лишённое смысла.

Если параметру, содержащемуся в уравнении (неравенстве), придать некоторое значение, то возможен один из двух следующих случаев:

- 1) получится уравнение (неравенство), содержащее лишь данные числа и неизвестные (т.е. без параметров), в данном случае значение параметра считается допустимым;
- 2) получится условие, лишённое смысла, в этом случае значение параметра – недопустимое.

Таким образом, при одних значениях параметра уравнение не имеет корней, при других – имеет только один корень, при третьих – более одного корня.

Приведем следующий алгоритм, необходимый для решения уравнений или неравенств с параметром:

- 1) найти множество допустимых значений параметров;
- 2) с неизвестными членами переносим в левую часть уравнения, относительно знака «=», а с известными вправо;
- 3) привести подобные слагаемые в каждой части уравнения или неравенства;
- 4) решить уравнение или неравенство.

Возможно два случая.

1. $a \neq 0$, b – любое действительное число. Уравнение имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$

2. $a = 0, b = 0$. Уравнение принимает вид: $0 \cdot x = 0$, решениями являются все $x \in R$.

А тогда значение $b = 0$ является особым значением параметра b . Поэтому получается два случая этого параметра:

- 1 Случай. При $b \neq 0$ уравнение не имеет решений.
- 2 Случай. При $b = 0$ уравнение принимает следующий вид $0 \cdot x = 0$, решениями такого уравнения являются все $x \in R$.

1.2 Виды уравнений и неравенств с параметрами и различные способы их решения

Определение. Решить уравнение или неравенство с параметром – значит для каждого значения параметра найти множество всех решений данного уравнения или неравенства или доказать, что решений нет.

В математике существуют несколько видов уравнений и неравенств с параметрами (рисунок 1):

- линейные;

- квадратные;
- дробно-рациональные;
- иррациональные;
- тригонометрические;
- показательные;
- логарифмические;
- смешанные.



Рисунок 1

Способы решений задач с параметром:

1. Аналитический способ.

Данный способ предполагает решение задачи с помощью исследования и решение не отличается от решения задач без параметра. Так как параметр считается заданным числом, то решаем задачу по алгоритму, соответствующему типу задачи: линейному, квадратному и т.д. Однако стоит не забывать на каждом шаге про особенности типа уравнения или неравенства: наличие неизвестной в знаменателе дроби, наличие корня, смена знака неравенства, наличие модуля и т.д. В таком случае рассматриваем значение параметра в каждом отдельном случае.

Рассмотрим следующие примеры:

Пример 1. Найдите все значения параметра a при каждом из которых уравнение $\frac{9x^2 - a^2}{3x - 9 - 2a} = 0$ имеет ровно два различных решения.

Решение. Запишем в виде

$$\frac{9x^2 - a^2}{3x - 9 - 2a} = 0 \Leftrightarrow \frac{(3x - a)(3x + a)}{3x - 9 - 2a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} 3x - a = 0 \\ 3x + a = 0 \\ 3x - 9 - 2a \neq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = \frac{a}{3} \\ x = -\frac{a}{3} \\ x \neq \frac{2a + 9}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Данная система имеет два различных решения, поэтому числа $\frac{a}{3}$ и $-\frac{a}{3}$ должны быть различны и не должны равняться $\frac{2a + 9}{3}$

$$\frac{a}{3} \neq -\frac{a}{3} \Leftrightarrow a \neq 0;$$

$$\frac{a}{3} \neq \frac{2a + 9}{3} \Leftrightarrow a \neq -9;$$

$$-\frac{a}{3} \neq \frac{2a + 9}{3} \Leftrightarrow a \neq -3$$

все остальные значения подходят.

Ответ: $(-\infty; 9) \cup (-9; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; +\infty)$.

Пример 2. Найдите все значения параметра a такие, что уравнение $ax^2 - 4x + a + 3 = 0$ имеет два различных корня.

Решение. Пусть $a = 0$, тогда имеем $-4x + 3 = 0$ – один корень.

Пусть $a \neq 0$, тогда перед нами квадратное уравнение, которое имеет два различных корня в том случае, если дискриминант положителен. Таким образом, имеем неравенство:

$$4 - a(a + 3) > 0;$$

$$a^2 + 3a - 4 < 0;$$

$$-4 < a < 1; (a \neq 0)$$

Ответ: $-4 < a < 0$; $0 < a < 1$

В заданиях подобного типа необходимо в первую очередь уметь исследовать квадратичную функцию.

Пример 3. Решите уравнение: $\frac{(a^2+1)x}{(x+1)(a+3)} - \frac{1}{a+3} = \frac{2a}{a+3} - \frac{1}{x+1}$

Решение. ОДЗ: $x \neq -1$, ОДЗ параметра: $a \neq -3$

Упростим: $a^2x + x - x - 1 = 2ax + 2a - a - 3$; $(a^2 - 2a)x = a - 2$

Решим это уравнение:

- 1) если $a = 0$, то решений нет;
- 2) если $a = 2$, то x – любое действительное число;
- 3) если $a \neq 0, a \neq 2$, то $x = \frac{1}{a}$

Учтем ОДЗ. $\frac{1}{a} = -1$, если $a = -1$.

Тогда, ответ: если $a = -3$, уравнение не определено;

если $a = 0$ или $a = -1$, то корней нет;

если $a = 2$, то x – любое действительное число, кроме -1;

если $a \neq -3, a \neq 2, a \neq 0, a \neq -1$, то $x = \frac{1}{a}$

При решении неравенств необходимо, прежде всего, понимать, какие преобразования будут равносильными, и какие нет:

1. При переносе какого-либо члена неравенства из одной части в другую знак этого члена меняем на противоположный.

2. Если делим или умножаем левую (правую) часть на положительное число, то и правую (левую) часть так же умножаем.

3. Если делим или умножаем левую (правую) часть на отрицательное число, то и правую (левую) часть так же умножаем, но при этом знак неравенства меняем на противоположный.

Разберем несколько примеров простейших неравенств с параметром.

Пример 1. Решить неравенство $(a - 2)x > a^2 - 4$ при любом значении параметра a .

1 случай: если $a = 2$, получим неравенство $0 \cdot x > 0$, которое не имеет решений, так как при делении на отрицательное число знак меняется на противоположный, то рассмотрим еще два случая:

$$2 \text{ случай: если } a > 2 \Leftrightarrow x > \frac{a^2 - 4}{a - 2} \Leftrightarrow x > a + 2;$$

$$3 \text{ случай: если } a < 2 \Leftrightarrow x < \frac{a^2 - 4}{a - 2} \Leftrightarrow x < a + 2$$

Ответ: при $a = 2$ решений нет;

при $a > 2$ $x > a + 2$;

при $a < 2$ $x < a + 2$.

Пример 2. Решить неравенство $ax^2 - 4x - 4 > 0$ при всех значениях параметра a .

Решение. 1 случай: если $a = 0$, то неравенство примет вид:

$$-4x - 4 > 0$$

$$x < -1$$

2 случай: если $a \neq 0$, то неравенство будет квадратным.

Найдем дискриминант: $D = 16 + 16a = 16(1 + a)$

Таким образом, получаем дискриминант больше нуля при $a > -1$, $D < 0$ при $a < -1$ и $D = 0$ при $a = -1$ (Рисунок 2)

Так как при $a > 0$ ветви параболы направлены вверх, а при $a < 0$ направлены вниз.

Так, рассмотрим все возможных случаи:



Рисунок 2

$$1. \quad a > 0, D > 0$$

Найдем корни:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{1+a}}{2a} = \frac{2 \pm 2\sqrt{1+a}}{a} \quad (\text{Рисунок 3})$$

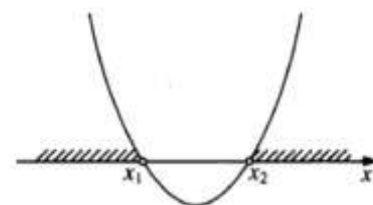
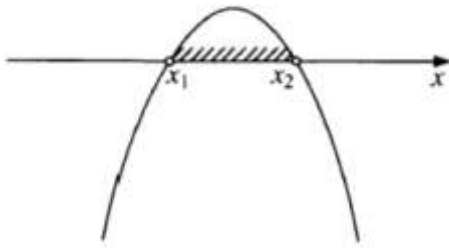


Рисунок 3

Многочлен будет положителен при условии, что

$$x \in \left(-\infty; \frac{2 - 2\sqrt{1+a}}{a}\right) \cup \left(\frac{2 + 2\sqrt{1+a}}{a}; +\infty\right)$$

2. $-1 < a < 0, D > 0$



Многочлен положителен при $x \in \left(\frac{2+2\sqrt{1+a}}{a}; \frac{2-2\sqrt{1+a}}{a}\right)$ (Рисунок 4).

Так как a отрицательно, то меньшим корнем будет $x_1 = \frac{2+2\sqrt{1+a}}{a}$.

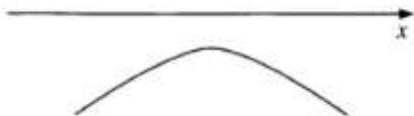
Рисунок 4

3. $a = -1, D = 0$

Решений нет, так как парабола лежит ниже оси x , на оси лежит только вершина, но это равенство не устраивает по условию задачи (Рисунок 5).



4. $a < -1, D < 0$



Решений нет, так как парабола лежит ниже оси Ox (Рисунок 6).

Рисунок 6

Ответ:

1. Если $a = 0 \Leftrightarrow x < -1$;

2. Если $a \leq -1$, то решений не имеет;

3. Если $-1 < a < 0$, $x \in (\frac{2+2\sqrt{1+a}}{a}; \frac{2-2\sqrt{1+a}}{a})$;
4. Если $a > 0$, $x \in (-\infty; \frac{2-2\sqrt{1+a}}{a}) \cup (\frac{2+2\sqrt{1+a}}{a}; \infty)$.

2. Графический способ

Графический способ решения уравнений и неравенств входит в школьный курс алгебры, поэтому так же применим и для задач с параметром. Этот способ помогает решить задачу с помощью графика и уже по графику определить влияние изменение параметра на уравнение (неравенство). Данный метод следует применять при определении количества корней уравнения или неравенства. Поэтому, главное преимущество перед аналитическим методом – наглядное изменение параметра уравнения или неравенства.

Для обычных уравнений метод заключается в следующем:

1. Рассмотрим уравнение с одной переменной $f(x) = 0$. Для того, чтобы его решить графически, необходимо построить график функции $y = f(x)$. Точки пересечения графика с осью абсцисс – решения уравнения.

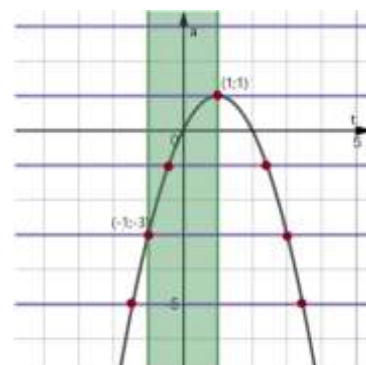
2. Рассмотрим уравнение $f(x) = g(x)$. Также построим графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Абсциссы их точек пересечения – решения уравнения.

Пример 1. Решить графическим методом уравнение $\cos^2 x - 2\cos x + a = 0$

Сделаем замену $t = \cos x$, тогда $t^2 - 2t + a = 0$, при $t \in [-1; 1]$

Построим график функции $a = 2t - t^2$ (Рисунок 7):

Точки пересечения горизонтальных прямых, параллельных оси абсцисс, соответствуют решениям. Но, так как $t \in [-1; 1]$, то будем выбирать только ту часть графика, которая



соответствует этому условию (кусочек параболы – зеленая область).

Рисунок 7

Таким образом, из рисунка видно, что a принимает значения

$a \in [-3; 1]$ и любому значению из этой области соответствует одно решение.

Решим уравнение и найдем его. Решим уравнение $t^2 - 2t + a = 0$

$$D = 4 - 4 \cdot a$$

$$t_1 = \frac{4 - \sqrt{4 - 4a}}{2}$$

$$t_2 = \frac{4 + \sqrt{4 - 4a}}{2}$$

t_2 не подходит, потому что не удовлетворяет условию.

Сделаем обратную замену:

$$\cos x = \frac{4 - \sqrt{4 - 4a}}{2};$$

$$x = \pm \arccos \frac{4 - \sqrt{4 - 4a}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Пример 2. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2 + a^2}{x - a} = 0$ будет иметь ровно два различных решения?

Дробь равна нулю только в том случае, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен, имеем:

$$\begin{cases} x^2 + a^2 - 4a = 0 \\ x - a \neq 0 \end{cases}$$

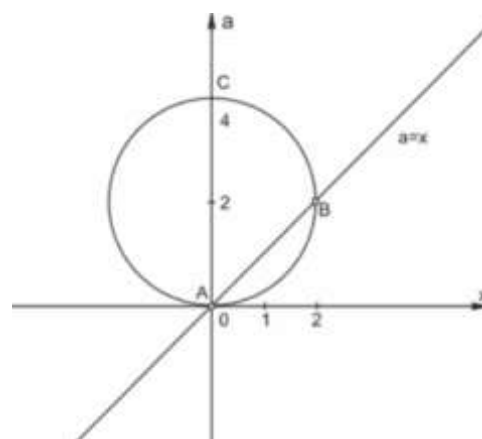
В первом уравнении систем выделим квадрат:

$$x^2 + a^2 - 4a + 4 = 4$$

$$x^2 + (a - 2)^2 = 4$$

Получили уравнение окружности, центр которой в точке $P(0; 2)$ и радиус равен 2 (Рисунок 8).

Так, уравнение $a = x$ задает прямую, проходящую через начало координат. Необходимо найти только ординаты точек, лежащих на окружности, но не лежащих на прямой



Для того, чтобы точка принадлежала окружности, необходимо, чтобы ее ордината $0 < a < 4$

Рисунок 8

Но эта точка не должна лежать на прямой $a = x$, которая пересекает окружность в точках $A(0; 0)$ и $B(2; 2)$.

Координаты этих точек найдем, подставив $a = x$ в уравнении окружности.

Точка C не подходит, так как при $a = 4$ получим единственную точку, которая лежит на окружности, и, следовательно, единственное решение уравнения.

Это значит, что $a \in (0; 2) \cup (2; 4)$

3. Метод решения относительно параметра

Данный метод заключается в том, что при решении таких задач переменные x и a считаются равноправными. То есть при решении выбирается та переменная, при которой решение аналитическим способом будет более простым.

Пример 1. Решить уравнение $x^4 - 2x^2(a + 2) - 8x + a^2 - 4 = 0$

Решение. Решить данное уравнение методом группировки или подбором корней не так уж и просто. Но, заметим, что уравнение является квадратным относительно параметра a . Поэтому в данном случае решим уравнение как квадратное, выражая параметр через неизвестную.

Раскроем скобки $x^4 - 2ax^2 - 4x^2 - 8x + a^2 - 4 = 0$

Перепишем в виде: $a^2 - 2ax^2 + (x^4 - 4(x+1)^2) = 0$, откуда

$$D = (2x^2)^2 - 4(x^4 - 4(x+1)^2) = 4x^4 - 4(x^4 - 4(x^2 + 2x + 1)) =$$

$$= 4x^4 - 4(x^4 - 4x^2 - 8x - 4) = 4x^4 - 4x^4 + 16x^2 + 32x + 16 =$$

$$= 16x^2 + 32x + 16$$

$$a_{1,2} = x^2 \pm 2(x+1)$$

Таким образом, вернемся к переменной x и решим два уравнения:
 $x^2 + 2x + 2 - a = 0$, $x^2 - 2x - (2 + a) = 0$.

1) $x^2 + 2x + 2 - a = 0$,

$$D = 4 - 4(2 + a) = -4 - 4a,$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{-1-a}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1-a}$$

2) $x^2 - 2x - (2 + a) = 0$

$$D = 4 + 4(2 + a) = 12 + 4a = 4(3 + a),$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4(3+a)}}{2} = 1 \pm \sqrt{3+a}$$

ОТВЕТ: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{-1-a}$, $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{3+a}$

Глава 2. Методические основы изучения задач с параметрами и применение свойств функции при их решении

2.1 Сравнительный анализ учебников и задачников по алгебре для 7-11 классов школьного курса

Проанализируем различные учебники школьного курса по алгебре с целью выявления возможностей формирования и развития исследовательских умений, связанных с обучением решению параметрических уравнений и неравенств. Изучим, в первую очередь, учебники по алгебре основной школы – 7, 8 и 9 классов следующих авторов: Алимов Ш.А. и др., Никольский С.М. и др., Макарычев Ю.Н. и др., Мордкович А.Г. и др.

Заметим, что ни у одного из авторов тема параметров не рассматривается отдельно, более того – отсутствует даже определение «параметра» и схема решений подобных заданий. Решение таких заданий представляет наибольшую трудность у школьников. Такие задания отсутствуют в контрольных и самостоятельных рабочих, в дидактических материалах.

Наибольшее количество заданий с параметрами встречается у Мордковича А.Г., также присутствуют параметры в системах линейных неравенств. В частности, у Мордковича А.Г. и Макарычева Ю.Н. чаще всего встречаются задания с параметрами в системах квадратных уравнений. У разных авторов с 7 по 9 классы задания с параметрами различны и разнообразны. И, если обратим внимание, направлены, в основном, на исследование уравнений, на нахождение корней и т.д.

Первый раз учащиеся сталкиваются с заданиями с параметрами в 7 классе, когда решают линейные уравнения с одной переменной, а в учебнике Никольского С.М. и др. в теме «Разность квадратов».

Так, у Мордковича А.Г. и др. в домашней контрольной работе №1:

Вариант 1. №8:

При каких значениях p корнем уравнения $p(x + 4) - (5 - p) = 16$ является число 2?

У Макарычева Ю.Н. и др. в дополнительных заданиях к 3 параграфу: №238, №239, №243 и №245, некоторые из них - задания повышенной сложности.

№238 При каких значениях коэффициента уравнение $mx = 5$ имеет единственный корень? Существует ли такое значение m , при котором это уравнение не имеет корней? Имеет бесконечно много корней?

Важно выделить, что при решении задач с параметром решается не просто линейное уравнение (неравенство), а целый класс линейных уравнений (неравенств). То есть при решении таких задач учащиеся осваивают комплекс линейных уравнений данного класса, которые отличаются друг от друга по количеству и виду корней, выделяя особые значения параметра.

Так, при решении задач с параметрами, устанавливаются обобщенные представления у школьников, учащиеся учатся выделять отдельные виды из целого класса уравнений (неравенств). Таким образом, учащиеся лучше осознают решение уравнений и неравенств 1 и 2 степени, видят возможность в эффективном использовании графиков соответствующих функций.

При целенаправленной и систематической работе учителя учащиеся могут быстро освоить и научиться применять на практике графико-аналитический метод при решении задач с параметрами.

Далее учащиеся встречаются задания с параметрами, когда изучают тему: «Решение уравнений с двумя переменными». Учащиеся 7 класса в данном случае должны уметь решить линейные уравнения вида

$ax + by + c = 0$, и уметь выносить знак корня при различных a и b , определяя количество корней и вообще их наличие.

Далее в учебнике авт. С.М. Никольский и др. при изучении этой темы встречается снова только одно задание с параметрами.

№681 При каком a пара чисел $(3;-2)$ является решением уравнения

$3x - ay - 4 = 0$? б) При каком b пара чисел $(-1;-4)$ является решением уравнения $bx - 7y - 4 = 0$?

В данном рассматриваемом учебнике учащиеся знакомятся уже не просто с линейными уравнениями, но с системой двух уравнений с двумя неизвестными. Далее после этой темы задачи с параметрами уже не встречаются, только в последнем разделе можно найти похожее «Задания для повторения», именно в этом автор решает уделить большое внимание подобным заданиям.

Таким образом, приходим к выводу, что большое количество задач с параметрами имеются только в последнем в разделе задач повышенной трудности.

Рассматривая учебники таких авторов, как Алимов Ш.А. и др. в 7 классе заметим, что встречаются также задания с параметрами в теме: «Системы двух уравнений с двумя неизвестными». И найдем еще одно задание в упражнениях на повторение.

№732. Дана функция $y = kx + b$. При каких значениях k и b график функции проходит через точки $(-1;1)$ и $(2;3)$. Найдите значение k , если известно, что график функции $y = kx - 1$ проходит через точку $(-3;2)$.

Сделаем вывод из анализа учебника, что Алимов Ш.А. и др. практически не уделяет большого внимания заданиям с параметрами.

Рассматривая учебники таких авторов, как Макарычев Ю.Н. и др. задания с параметрами после темы «Линейные уравнения с двумя переменными и их системы» присутствуют только в дополнительных упражнениях к главе 4.

В процессе анализа алгебры курса 7 класса сделаем такой вывод: задания с параметрами встречаются, но внимания им уделяется мало: либо

в дополнительных заданиях, либо в заданиях повышенной трудности. Можно, с уверенностью, сказать, что это является существенным недостатком школьной программы, так как подобные задания необходимо включать для развития логического мышления школьников.

Далее продолжим рассматривать учебники 8 класса на наличие заданий с параметрами или на их отсутствие.

В первый раз учащиеся сталкиваются с подобными заданиями только после темы: «Квадратные уравнения». Учащиеся первоначально должны уметь решать уравнения вида: $ax^2 + bx + c = 0$.

У авторов Никольского С.М. и др. присутствуют задания с параметрами:

№233. а) При каких числовых значениях m существуют корни уравнения $x^2 + m = 0$?

б) При каком числовом значении k уравнение $10x^2 + 4x - k = 0$ имеет корень 0?

У авторов Алимов Ш.А. и др. заданий с параметрами небольшое количество. Например, в учебнике 8 класса автора Никольского С.М. и др.:

№442. Найти все значения a , при которых $ax^2 + 3x + 2 = 0$, где a :

а) имеет два различных корня;

б) имеет один корень;

в) не имеет корней.

Так же, как и у Никольского С.М. и др. у Алимова Ш.А. и др. при изучении функции вида $y = ax^2 + bx + c$ встречаются задания с параметрами.

№616. Найти значение k , если точка $(-1; 2)$ принадлежит параболе:

1) $y = kx^2 + 3x - 4$;

2) $y = -2x^2 + kx - 6$

У авторов Макарычев Ю.Н. и др. заданий с параметрами так же мало, как и в предыдущих учебниках.

У автора Мордковича А.Г. и др. после изучения темы: «Квадратная функция» встречаются задания с параметрами:

№22.13. Найдите значение коэффициента c и постройте график функции $y = x^2 - 6x + c$, если известно, что наименьшее значение функции равно 1.*

Можем увидеть, что в этом учебнике понятие параметра вводится в описании решения к задаче:

Пример 7. Решите уравнение $x^2 = (2p + 1)x + (p^2 + p - 2) = 0$.

Решение. Данное квадратное уравнение отличается от рассмотренных выше тем, что в роли коэффициентов выступают не конкретные числа, а только буквенные выражения. Такие уравнения называют уравнениями с буквенными коэффициентами или уравнениями с параметром. В данном случае параметр (буква) p входит в состав второго коэффициента и свободного члена уравнения».

В данной теме, при решении квадратных уравнений такой автор, как Мордкович А.Г. вводит много заданий с параметрами, при этом использует в формулировке задания само слово «параметр».

Далее в курсе алгебры 9 классы у Никольского С.М., Алимова Ш.А., Макарычева Ю.Н. и Мордковича А.Г. так же встречаются задания с параметрами.

В основном, рассматриваются квадратные уравнения и параметрические неравенств.

У авторов Никольского С.М. и др. впервые задания с параметрами встречаются в №104 после изучения темы: «Неравенства второй степени с положительным дискриминантом»:

№94. Найдём значение k , при котором неравенство:

а) $x^2 - 3x + k < 0$ верно только для $x \in (1; 2)$;

б) $-x^2 + x + k > 0$ верно только для $x \in (-2; 3)$.

Далее так же в заданиях на исследование в №104, 112, 140, 156.

Далее, как и в курсе алгебры 7 класса, много задач с параметром встречается уже в заданиях на повторение: №955-974, 1009, 1039-1041, 1088-1089.

Рассматривая учебник 7 класса такого автора, как Макарычев Ю.Н. и др. заметим, что после темы: «Квадратичная функция» впервые встречается задание с параметром в дополнительных упражнениях:

№161. При каком значении p выражение $2px - 2x - 2p - 3$ становится квадратным трехчленом, одним из корней которого является число нуль? Найдите второй корень.

Далее после темы «Уравнения с одной переменной» встречаются такие задания:

№210. При каких значениях b уравнение имеет два корня?

а) $2x^2 + 6x + b = 0$

б) $x^2 + bx + 5 = 0$

№209. При каких значениях p корень уравнения $9x = p - 2$ отрицателен?

У таких авторов, как Алимов Ш.А. и др. подобные задания встречаются только в упражнениях для повторения в квадратных параметрических уравнениях и неравенствах. Например:

№ 826. Найти все значения r , при которых уравнение

$x^2 + (4 + 2r)x + 5 + 4r = 0$ имеет:

а) равные корни;

б) корни равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку.

Далее девятиклассники встречаются с заданиями с присутствием параметров только при решении систем уравнений.

Сравним учебники 10-11 классов и посмотрим, в каких классах вводится понятие «параметр».

В учебнике алгебры 11 класса автора Никольский С.М. и др. задания с наличием параметров встречаются пунктом для классов с профильным и углубленным изучением математики. Авторы в данном учебнике дают общее представление, как решать задачи с параметром, определяют понятия уравнения с параметром, неравенства с параметром и системы неравенств с параметром.

В алгебре 11 класса Колягина Ю.М. и др. можем увидеть уравнения и неравенства, содержащие две переменные и параметр. Впервые такие задания появляются в шестой главе «Уравнения и неравенства с двумя переменными». Здесь разбираются подробно примеры таких заданий в общем виде.

У авторов Никольский С.М. и др. в курсе алгебры 11 класса также рассматриваются задания с параметрами. И встречаются подобные задания уже в первых пунктах.

№1.51. При каких значениях b и c функция $y = x^2 + bx + c$ принимает отрицательные значения только при $x \in (-4; -2)$?

Рассмотрим вторую главу, пункт 15 «Уравнения, неравенства и системы с параметром», здесь рассматриваются только задания с параметром.

Таким образом, пункт первый называется «Уравнения с параметром» и здесь вводят определение параметра и соответствующих терминов, например, таких как:

«Решить уравнение с параметром – значит для каждого значения параметра найти множество всех корней данного уравнения (это множество может быть и пустым)».

Принцип решения подобных уравнений таков: необходимо разбить на участки области изменения параметра и найти такие, чтобы при изменении параметра на каждом из них уравнение, которое получается можно решить одним и тем же методом. А для каждого такого участка в отдельности находить корни уравнения. И ответ задачи состоит из списка участков изменения параметра и с указанием для каждого участка списка корней.

Как замечает автор, сложность в решении подобных задач заключается в том, что если меняется параметр, то меняются и коэффициенты, и другие характеристики, связанные с параметром. Особенность подобных уравнений в том, что единый способ решения отсутствует, поэтому приходится применять различные методы и использовать разные подходы в решении конкретного задания.

№15.1. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

а) $(a - 2)x = a^2 - 4$

б) $(a + 2)x = a^2 - 4$

в) $(a + 3)x = a^2 - 9$

г) $(a - 4)x = a^2 - 16$

Далее, заметим, что в пункте 2 рассматривается решение неравенств с параметром и дается соответствующее определение:

Решить неравенство с параметром – значит для каждого значения параметра найти множество всех решений данного неравенства (это множество может быть и пустым). Автор отмечает, что руководствоваться необходимо теми же соображениями, что и при решении уравнений с параметром.

15.10. Для каждого значения параметра a решите неравенство:

а) $(a - 1)x > a^2 - 1$

б) $(a + 2)x > a^2 - 4$

$$в) (a + 3)x \geq a^2 - 9$$

$$з) (a - 4)x \leq a^2 - 16$$

А в пункте 3 рассматриваются системы уравнений с параметром.

Подробно рассматривают примеры, также имеются задания для самостоятельной работы обучающихся. В пункте 4 присутствуют задания, где необходимо найти все значения параметра, при каждом из которых будет выполняться необходимое условие. В этом учебнике подробно разбирают 6 примеров и 16 задач с различными условиями.

Например,

№15.30. При каких значениях параметра:

а) $a \neq -3$ уравнение $2\sin 2x = \frac{a-1}{a+3}$ не имеет корней;

б) $a \neq 2$ уравнение $3\cos x = \frac{a+5}{a-2}$ не имеет корней?

В курсе алгебры 10-11 класса у таких авторов, как Мордкович А.Г., Семенов П.В. впервые параметр встречается при изучении $\arcsin$, $\arccos$, $\arctg$, arcctg . Предлагается решение тригонометрических уравнений с параметром в общем виде и разбираются частные случаи, в зависимости от значений параметра.

Далее при изучении глав «Производная функции», «Первообразная и интеграл» также есть задания с параметром. В конце изучения курса алгебры и начала анализа в 11 классе выделен параграф для решения уравнений, содержащих параметр. В данном параграфе объясняется, что такое параметр на простейших уравнениях, рассматриваются линейные и квадратные уравнения. Пункт начинается с определения уравнения с параметром. Далее рассматривается задание, в котором надо решить относительно одной переменной уравнения и неравенство. В уравнение рассматриваются случаи обращения коэффициента в нуль, а при решении неравенства необходимо еще учесть знак коэффициента при переменной. Рассматривается решение квадратного и иррационального уравнения с

параметром. При решении уравнений используется графический метод представления результатов измерений. Система задач во второй части учебного пособия рассматриваются линейные, квадратные, логарифмические, иррациональные, показательные, тригонометрические уравнения и неравенства.

Также в упражнениях повышенной трудности приведены системы уравнений с параметром.

В курсе алгебры 11 класса Колягина Ю.М. и др. задания с параметрами рассматриваются в параграфе «Уравнения и неравенства с двумя переменными, содержащие параметры».

В курсе алгебры 10-11 классов у авторов Колмогоров А.Н. и др. отсутствует отдельный параграф или пункт с определением параметра. Задания присутствуют лишь в повторении и в малом количестве.

2.2 Анализ КИМ ОГЭ и ЕГЭ по теме исследования

При анализе контрольно-измерительных материалов ОГЭ и ЕГЭ выявили, что задания с параметром присутствуют в ОГЭ во второй части с развернутым ответом в задании №20 и №22. Здесь встречаются:

1. квадратные уравнения с параметром;
2. задания, требующие построить график и найти значения параметра;
3. задания, требующие найти значения параметра, а затем построить график функции

В задании №20 иногда встречаются задания с параметром такого типа:

Пример 1. Один из корней уравнения $5x^2 - 2x + 3p = 0$ равен 1. Найдите второй корень.

Решение. Разделим каждый член уравнения на 5, чтобы избавиться от коэффициента перед x^2 . Получим: $x^2 - \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}p = 0$.

Далее воспользуемся теоремой Виета: $x_1 + x_2 = \frac{2}{5}$, тогда

$$x_2 = \frac{2}{5} - x_1 = \frac{2}{5} - 1 = -\frac{3}{5} = -0,6$$

Ответ: 0,6.

Заметим, что среди данных заданий отсутствуют задания по теме исследования. В большинстве случаев, это задания, где указан один корень и надо найти другой.

Задание №22 подразумевает собой уже работу с функциями. В данных заданиях необходимо найти значение параметра при наличии определённых условий.

Пример 2. Постройте график функции $y = -2 - \frac{x^4 - x^3}{x^2 - x}$ и определите, при каких значениях t прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки.

Решение. Упростим выражение $y = -2 - \frac{x^3(x-1)}{x(x-1)} = -2 - x^2$, где $x \neq 0, x \neq 1$. Получили уравнение квадратичной функции и построение сводится к построению параболы, ветви которой направлены вниз и выколоты точки $(0; -2)$ и $(1; -3)$.

Построим график (рисунок 9).

Из полученного выше графика видно, что прямая $y = t$ имеет с графиком ровно две общие точки, которые принадлежат промежутку $(-\infty; -3) \cup -3; -2)$

Ответ: $(-\infty; -3) \cup -3; -2)$.

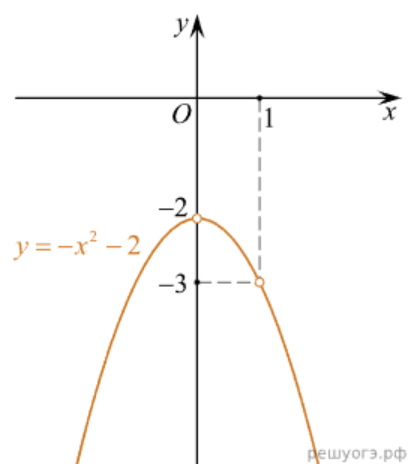


Рисунок 9

Пример 3. При каких значениях p вершины парабол $y = -x^2 + 2px + 3$ и $y = x^2 - 6px + p$ расположены по разные стороны от оси Ox ?

Решение. Формула для нахождения первой координаты $x_b = -\frac{b}{2a}$. Вторую координату можем найти, подставив первую в уравнение.

Итак, вершины парабол будут находиться по разные стороны от оси Ox , если координаты их вершин будут иметь противоположные знаки. А два сомножителя будут иметь разные знаки, если их произведение отрицательно. Таким образом:

$$(-p^2 + 2p^2 + 3)(9p^2 - 18p^2 + p) < 0 \Leftrightarrow (p^2 + 3)(-9p^2 + p) < 0$$

Разделим на первый множитель, так как он всегда положителен:

$$-9p \left(p - \frac{1}{9} \right) < 0 \Leftrightarrow p \left(p - \frac{1}{9} \right) > 0$$

Произведение двух сомножителей будет положительным, если эти множители имеют одинаковые знаки (Рисунок 10).

Так, получаем: $p < 0, p > \frac{1}{9}$



Рисунок 10

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (\frac{1}{9}; +\infty)$

Таким образом, проанализировав соответствующие задачи в основном государственном экзамене, можно сделать вывод, что учителю на уроках и в период подготовки к экзамену необходимо вырабатывать у учащихся такие умения, как:

1) выполнение преобразования алгебраических выражений (решение линейных уравнений, приведение подобных, сокращение дробей, нахождение области допустимых значений);

2) решение квадратных уравнений, неравенств и их систем (нахождение координат вершины параболы, применение теоремы Виета, разложение многочленов на множители);

3) построение графиков элементарных функций и их чтение;

4) исследование математической модели уравнения при задачах на отыскание количества корней.

В базовом уровне ЕГЭ задачи с параметром отсутствуют. Поэтому перейдем к профильному уровню ЕГЭ по математике.

Задаче с параметром посвящено все задание №17.

Задание №17 – это уравнение, неравенство или их системы с параметром.

Задачи можно разделить на следующие темы в соответствии со способом решения:

1. Алгебраические методы решения;
2. Функциональные методы решения;
3. Функционально-графические методы решения (координатные плоскости Oxy , Ox , Oy);
4. Геометрические методы решения (уравнения прямой, параболы, гиперболы, окружности, параллелограмма и формула расстояния между точками);
5. Решение задач различными способами.

Остановимся на классификации задач, решаемых функциональным методом:

1. Первый тип задач – это задачи, в которых непосредственно требуется исследовать свойства функции в зависимости от значений параметра a , принимающего допустимые числовые значения.

2. Второй тип задач – задачи, в которых формулировки свойств функции в точке или на промежутке позволяют рассматривать параметр не только в формуле, но и при задании области существования функции.

3. Третий тип задач – задачи, связанные с постановкой дополнительных условий на свойства функции.

4. В четвертом типе задач решение опирается на определение свойства функции. Обычно такие задачи сводятся к более простым и для решения используются аналитический или функционально-графический методы.

Пример 1. Найти все значения параметра a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (y^2 - 2xy + 2x^2 - xy)\sqrt{6 - x^2 - x} = 0 \\ y = ax - a + 2 \end{cases} \text{ имеет ровно три решения.}$$

Решение. Преобразуем первое уравнение системы:

$$(y - 2x)(y - x)\sqrt{6 - x^2 - x} = 0$$

Построим множество решений этого уравнения, оно будет состоять из частей двух прямых $y - 2x = 0$ и $y - x = 0$, при условии: $6 - x^2 - x \geq 0$ и $x = -3, x = 2$ (две вертикальные прямые). Множество решений изображено на рисунке красным цветом (рисунок 11).

Второе уравнение системы задает на плоскости прямую, которая проходит через точку $(1; 2)$. Несколько таких прямых изображено на рисунке синим цветом. И, ясно, что ровно три решения системы будет только тогда, когда синяя прямая проходит между положением 1 (включая его) и положением 2 (так же входит).

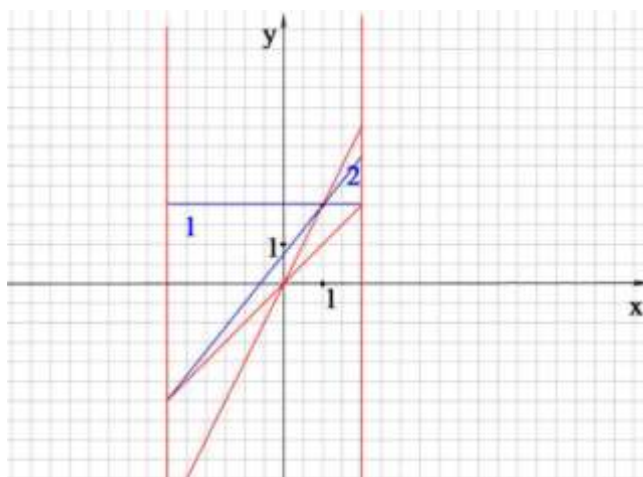


Рисунок 11

И найдем значение параметра a прямой $y = ax - a + 2$ для положений 1 и 2.

Ответ: $a \in [0; 1,25]$

Пример 2. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$64x^6 + 4x^2 = (3x + a)^3 + (3x + a)$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(t) = t^3 + t$. Эта функция является монотонно возрастающей, так как представляет собой сумму двух возрастающих функций. Таким образом, уравнение $f(4x^2) = f(3x + a)$ равносильно уравнению $4x^2 = 3x + a$. Данное уравнение имеет больше одного корня в случаях, когда дискриминант этого уравнения положителен, то есть, когда $9 = 16a > 0, a > -\frac{9}{16}$.

Ответ: $a > -\frac{9}{16}$.

Пример 3. Найдите все значения параметра a такие, что уравнение

$$\frac{(x - a)(x - 2a - 3)}{x - 1} = 0$$

имеет ровно один корень.

Решение. Корни числителя: $x_1 = a, x_2 = 2a - 3$ различны, если $a \neq 3$. Определим, когда они не удовлетворяют ОДЗ: $x_1 = 1$, если $a = 1$; $x_2 = 1$, если $a = 2$.

Ответ: $a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = 3$.

2.3 Методика обучения решению задач с параметрами на уроках алгебры с использованием свойств функций

Рассмотрим методику обучения решению задач с параметрами с применением свойств функций.

Приведем классификацию задач, которые решаются функциональным методом:

1. Задачи, в условиях которых необходимо непосредственное исследование свойств функции $y = f(x, a)$ в зависимости от параметра.

2. Задачи, которые связаны с постановкой дополнительных условий на свойства функции.

3. Задачи, в которых формулировки свойств функций позволяют рассматривать параметр не только в формуле, но и при задании области существования заданной функции.

4. Задачи, решение которых опирается на определение свойства функции (непрерывность, экстремум, промежутки знакопостоянства и т.д.)

Чаще всего используют следующие свойства функций: монотонность, четность, область определения и значений, периодичность.

1. Использование области определения

При решении любого уравнения или неравенства в первую очередь рассматривают область определения функций, входящих в них. В таких заданиях область определения всегда ограничена, поэтому на последнем этапе решения выполняют отбор корней, либо область определения может быть ограничена настолько, что представляет собой несколько значений переменной.

Пример 1. Найти значения параметра a , при которых неравенство

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{\frac{2-x}{x+4}} \geq ax + 2 - \sqrt{\frac{x+1}{5-x}} \text{ имеет решение.}$$

Решение. $\sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{\frac{2-x}{x+4}} + \sqrt{\frac{x+1}{5-x}} \geq ax + 2.$

Зададим функцию: $g(x) = ax + 2,$

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{\frac{2-x}{x+4}} + \sqrt{\frac{x+1}{5-x}}$$

Область определения $g(x)$ – любое действительное число, а область определения $f(x)$ описывается следующей системой:

$$\begin{cases} (x-2)(x-1) \geq 0, \\ \frac{2-x}{x+4} \geq 0, \\ \frac{x+1}{5-x} \geq 0, \end{cases} \begin{cases} x \in (\infty; -1] \cup [2; \infty), \\ x \in (-4; 2], \\ x \in [-1; 5), \end{cases} \quad D(f) = \{-1; 2\}$$

Таким образом, данное неравенство имеет смысл только при двух значениях переменной и поэтому это неравенство будет иметь решение, если хотя бы одно из этих значений будет являться решением.

$$\begin{cases} 1 \geq -a + 2, \\ 0 \geq 2a + 2 - 1, \end{cases} \begin{cases} a \geq 1, \\ a \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$.

2. Использование монотонности

Монотонная функция – это строго убывающая или возрастающая функция на заданном промежутке.

Строго возрастающая функция – это функция, у которой большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то есть чем больше x , тем больше y (Рисунок 12).

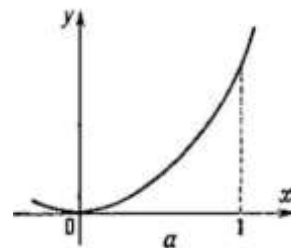


Рисунок 12

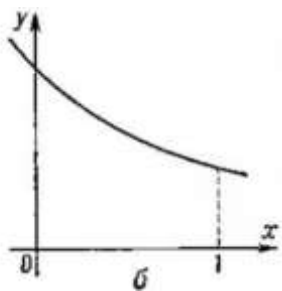


Рисунок 13

Строго убывающая функция – это функция, у которой большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, то есть чем больше x , тем меньше y (Рисунок 13).

В некоторых случаях знание ОДЗ позволяет доказать, что неравенство не имеет решений, а иногда позволяет найти решения неравенства непосредственно подстановкой чисел из области допустимых значений.

Пример 1. Найдите все значения a , при каждом из которых неравенство $|x^2 - 4x + a| \leq 10$ выполняется для всех $x \in [a; a + 5]$

Решение. Рассмотрим функцию

$f(x) = x^2 - 4x + a = (x - 2)^2 + a - 4$. Данная функция возрастает на промежутке $[2; +\infty)$ и убывает на промежутке $(-\infty; 2]$.

Исходное неравенство имеет вид $|f(x)| \leq 10$, следовательно график функции на отрезке $[a; a + 5]$ должен находиться в пределах горизонтальной полосы: $-10 \leq f(x) \leq 10$.

$[a; a + 5]$ не должен лежать на участке монотонности функции $f(x)$, в противном случае, приращение этой функции на отрезке длины 5 будет не меньше 25 и ее график не поместится в полосу ширины 20. Таким образом, $a < 2 < a + 5$, откуда $-3 < a < 2$.

Наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; a + 5]$ достигается при $x = a$ либо при $x = a + 5$.

Наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; a + 5]$ достигается при $x = 2$.

$$\text{Получили систему: } \begin{cases} -3 < a < 2 \\ f(a) \leq 10 \\ f(a + 5) \leq 10 \\ f(2) \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < a < 2 \\ (a - 2)^2 + a - 4 \leq 10 \\ (a + 3)^2 + a - 4 \leq 10 \\ a - 4 \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$-3 < a < 2 \quad a^2 - 3a - 10 \leq 0 \quad a^2 + 7a - 5 \leq 0 \quad a \geq -6 \Leftrightarrow$$

$$-3 < a < 2 \quad -2 \leq a \leq 5 \quad -7 - 6 \leq a \leq -7 + 6 \quad a \geq -6$$

$$\text{откуда } -2 \leq a \leq \frac{-7 + \sqrt{69}}{2}$$

$$\text{Ответ: } -2 \leq a \leq \frac{-7 + \sqrt{69}}{2}.$$

Однако при решении неравенств иногда можно не находить ОДЗ, а решить неравенство переходом к равносильной ему системе неравенств, в которой одно из неравенств не будет иметь решения, либо знание решения помогает решить систему неравенств.

3. Применение ограниченности области значений.

Данное свойство так же используется при решении задач с параметром. Часто по условию задачи не всегда понятно, можно ли использовать область значений функции.

Пример 1. Найти значение параметра a , при которых неравенство

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{\frac{2-x}{x+4}} \geq ax + 2 - \sqrt{\frac{x+1}{5-x}} \text{ имеет решение?}$$

Решение:

$$\sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{\frac{2-x}{x+4}} + \sqrt{\frac{x+1}{5-x}} \geq ax + 2$$

Зададим функции:

$$g(x) = ax + 2, f(x) = \sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{\frac{2-x}{x+4}} + \sqrt{\frac{x+1}{5-x}}$$

Область определения $g(x)$ – любое действительное число.

Область определения описывается следующей системой:

$$\begin{cases} (x-2)(x-1) \geq 0 \\ \frac{2-x}{x+4} \geq 0 \\ \frac{x+1}{5-x} \geq 0 \end{cases}, \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [2; \infty) \\ x \in (-4; 2] \\ x \in [-1; 5) \end{cases}$$

$$D(f) = \{-1; 2\}$$

Следовательно, данное неравенство будет иметь смысл только при двух значениях переменной. И неравенство будет иметь решение, если хотя одно из этих значений является решением:

$$\begin{cases} 1 \geq -a + 2 \\ 0 \geq 2a + 2 - 1 \end{cases} \begin{cases} a \geq 1 \\ a \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ответ: $a \in (-\infty; -\frac{1}{2}] \cup [1; +\infty)$.

Такое свойство функций, как ограниченность, можно использовать в различных заданиях, однако часто в условии задачи отсутствуют прямые подсказки, что нужно использовать именно это свойство. Но такая необходимость все же возникает в процессе решения. Рассмотрим задачу:

Пример 2. При каких значениях a найдутся такие b , что числа $4 + 25^b$; a ; 5^{-b} будут являться членами геометрической прогрессии?

Решение: По свойству членов геометрической прогрессии:

$$a^2 = \frac{5^{2b} + 4}{5^b}$$

Пусть $5^b = t$, где $t > 0$.

Рассмотрим функцию $f(t) = \frac{t^2 + 4}{t}$ с областью определения $(0; \infty)$.

Исследуем с помощью производной и найдем область значений функции при условии $t > 0$.

И найдутся такие b , что $a^2 = \frac{5^{2b} + 4}{5^b} \geq 4$. Отсюда $|a| \geq 2$.

Ответ: $a \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

Существует еще тип таких задач, у которых область значений функций помогает найти замену, далеко не очевидную.

Пример 3. При каких a неравенство $\sqrt{1 - x^2} > a - x$ имеет решения?

Решение: В данном неравенстве $|x| \leq 1$. Пусть $x = \cos a$, $a \in [0; \pi]$, тогда $\sqrt{1 - \cos^2 a} > a - \cos a$ или $|\sin a| < a - \cos a$.

В данном неравенстве $\sin a \geq 0$, так что можно записать:

$$a < \sin a + \cos a$$

Это неравенство имеет решения, если a меньше наибольшего значения выражения. Так как $a \in [0; \pi]$, то наибольшее значение $a + \frac{\pi}{4}$.
Значит исходное неравенство имеет решение при $a < \sqrt{2}$.

Ответ: $a \in (-\infty; \sqrt{2})$.

4. Использование области изменения функции.

Пусть дано неравенство $f(x) \leq \varphi(x)$, где $f(x)$ и

$\varphi(x)$ – элементарные функции, определенные на множествах X_1 и X_2 , причем $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$.

Обозначим области изменения этих функций соответственно через Y_1 и Y_2 . Если промежуток $[x_1; x_2]$ является решением неравенства, то для любого x из этого промежутка будет выполняться числовое неравенство $f(a) \leq \varphi(a)$, где $f(a)$ – значение функции $f(x)$ при $x = a$, а

$\varphi(a)$ – значение функции $\varphi(x)$ при $x = a$.

Следовательно, если неравенство имеет решение, то области значений функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ имеют общие элементы ($Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$). Если же таких общих элементов множества Y_1 и Y_2 не содержат, то неравенство решений не имеет.

Существует ряд заданий, в которых область значений функции помогает найти далеко не очевидную замену.

Пример 1. При каких a неравенство $\sqrt{1 - x^2} > a - x$ имеет решения?

Решение: В данном неравенстве $x \leq 1$.

Пусть $x = \cos a$, $a \in [0; \pi]$, тогда $\sqrt{1 - \cos^2 a} > a - \cos a$ или

$$|\sin a| < a - \cos a$$

В данном неравенстве $\sin a \geq 0$, поэтому можно записать

$a < \sin a + \cos a$. Отсюда $a < \sqrt{2} \sin(a + \frac{\pi}{4})$.

Это неравенство имеет решения только при условии, что a меньше наибольшего значения выражения $\sqrt{2} \sin(a + \frac{\pi}{4})$.

Т.к. $a \in [0; \pi]$, то наибольшее значение $\sqrt{2} \sin(a + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$.

Следовательно, исходное неравенство имеет решение при $a < \sqrt{2}$.

Ответ: $a \in (-\infty; \sqrt{2})$

5. Использование свойств четности или нечетности, периодичности функций

Для начала дадим основные определения четности, нечетности и периодичности функций.

Определение 1. Функция $f(x)$ на своей области определения называется четной, если выполняются условия:

- 1) область определения симметрична относительно нуля;
- 2) для всех x из области определения имеет место равенство

$$f(-x) = f(x)$$

Определение 2. Функция $f(x)$ на своей области определения нечетна, если выполняются следующие условия:

- 1) область определения симметрична относительно нуля;
- 2) для всех x из области определения имеет место равенство

$$f(-x) = -f(x)$$

Определение 3. Положительное число T называется периодом функции $f(x)$, если для любого числа x из области определения этой функции числа $x - T$ и $x + T$ также принадлежат области определения этой функции, и при этом выполняется условие $f(x - T) = f(x + T) = f(x)$.

Определение 4. Функция, которая имеет период T , называется периодической.

Пример 1. Найдите все значения a , при которых уравнение

$$\sqrt{x^4 + (a - 5)^4} = |x + a - 5| + |x - a + 5|$$

имеет единственное решение.

Решение.

1. Перенесем все слагаемые влево:

$$\sqrt{x^4 + (a - 5)^2} - |x + a - 5| - |x - a + 5|$$

Проверим, является ли данная функция четной.

Для этого найдем значение функции в точке $-x$:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2 + (a - 5)^2} - |-x + a - 5| - |-x - a + 5|$$

$$\sqrt{x^4 + (a - 5)^4} - |x - a + 5| - |x + a - 5| = f(x)$$

Если $(-x)^4 = x^4$ и $|-x| = x$ то, функция является четной, значит единственным решением уравнения является $x = 0$.

2. Подставим $x = 0$ в уравнение и решим относительно параметра:

$$\sqrt{(a - 5)^4 - |a - 5| - |a - 5|} = 0$$

Обозначим $t = |a - 5|$, получим уравнение:

$$t^2 - 2t = 0, \text{ отсюда } t_1 = 0 \text{ и } t_2 = 2$$

$$|a - 5| = 0; |a - 5| = 2$$

$$a = 5; a = 7; a = 3,$$

Таким образом, получили три значения параметра, при которых один из корней исходного уравнения равен нулю.

Найдем, при каком значении параметра этот корень единственный.

3. Для этого рассмотрим три случая.

1. $a = 5$:

$$\sqrt{x^4} - |x| - |x| = 0,$$

$x^2 - 2|x| = 0$. Отсюда $|x| = 0$ или $|x| = 2$ – больше одного корня.

2. $a = 7$:

$$\sqrt{x^4 + (7 - 5)^4 - |x + 7 - 5| - |x - 7 + 5|} = 0,$$

$$\sqrt{x^4 + 16 - |x + 2| - |x - 2|} = 0$$

1. Характеристика этапов урока:

Этап урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся	Формируемые универсальные учебные действия
Мотивация к учебной деятельности	<p>Создать благоприятный психологический настрой на работу. Приветствие, проверка подготовленности к учебному занятию, организация внимания детей:</p> <p>«Сегодня мы попробуем научиться применению новых методов. Начнем же, настроившись на обязательный успех. В экзаменационном и тестовом материале довольно часто встречаются уравнения и неравенства, которые требуют «нестандартного» подхода. Ранее мы научились решать уравнения и неравенства с параметрами с помощью области определения и области значения функции. Давайте вспомним, какие еще есть свойства у функций и можно ли их применять для решения подобных задач?»</p>	Настраиваются на работу на уроке, включаются в деловой ритм	<p>Регулятивные: развитие мотивов учебной деятельности.</p> <p>Познавательные: уметь находить ответы на вопрос.</p> <p>Логические: анализ с целью выделения существенных признаков.</p> <p>Коммуникативные: сотрудничество со сверстниками</p>
Этап актуализации знаний	<p>Давайте вспомним важные утверждения об ограниченности функции:</p> <p>1. Какая функция называется монотонной?</p>		Коммуникативные: уметь оформлять свои мысли в устной форме с достаточной полнотой и точностью

	<p>2. Какая функция называется монотонно возрастающей и монотонно убывающей?</p> <p>3. Что значит выражение «функция строго убывает» или «строго возрастает»?</p> <p>Решим несколько задач с использованием этих утверждений:</p> <p>Пример 1. <i>Найти все значения a, для каждого из которых уравнение имеет хотя бы один корень:</i> $27a^6 + (3a - 4x)^3 + 3x^2 + 3a = 4x$</p> <p>Решение: Перепишем уравнение с таким виде: $27x^6 + 3x^2 = (4x - 3a)^3 + (4x - 3a)$.</p> <p>Заметим, что слева и справа уравнения представляют собой некоторые функции $f(t) = t^3 + t$.</p> <p>Левая часть этого равенства – это $f(a)$, где $a = 3x^2$, а правая часть – $f(b)$, где $b = 4x - 3a$. Так как $f(a) = f(b)$, то по свойству монотонности имеем: $a = b$ и $3x^2 = 4x - 3a$. А это квадратное уравнение будет иметь хотя одно решение, если дискриминант будет равен нулю или больше нуля, то есть</p>		<p>мысли (диалог)</p> <p>Познавательные: общеучебные.</p> <p>Логические: анализ, синтез, обобщение</p>
--	--	--	--

	<p>неотрицательный. Таким образом, достаточно решить неравенство $4 - 9a \geq 0$, и из него следует, что $a \leq \frac{4}{9}$.</p> <p>Ответ: $a \leq \frac{4}{9}$</p>		
Изучение нового материала	<p>Давайте решим задание алгебраическим методом:</p> <p><i>При каких значениях параметра a система уравнений имеет хотя бы одно решение. Укажите эти решения для каждого найденного a.</i></p> $a + y^2 = 4\cos 2x$ $\sqrt{y} + z^2 = a$ $(a - 2)^2 = z^2 - 2z + \sin 4x + 4$ <p>Как видим, не все задания решаются алгебраическим методом.</p> <p>Итак, Как, можно решить уравнение, используя свойство ограниченности функции?</p> <p>После того, как большинство групп Закончили небольшую дискуссию, приступаем к обсуждению метода решения. В процессе обсуждения учащимися составляется план решения:</p> <p>1) Рассматривают функции $f(x)$ и $g(x)$, стоящие в левой и правой частях уравнения;</p>	<p>Учащиеся сталкиваются с проблемой в решении алгебраическим методом.</p> <p>Учащиеся делятся на группы и приступают к обсуждению методов решения.</p>	<p>Личностные: инициативное сотрудничество в поиске и сборе информации; уметь проговаривать последовательность действий, высказывать свое предположение.</p> <p>Регулятивные:</p> <p>уметь формулировать промежуточную задачу, определять последовательность промежуточных целей с учетом конечного результата; планирование, прогнозирование, поиск и выделение необходимой информации.</p>

	<p>2) Находят область значений каждой функции, рассматривают ограниченность функций.</p> <p>3) Ставят перед собой вопрос и отвечают на него: вопрос «Когда возможно равенство $f(x) = g(x)$»</p> <p>4) Определяют, какое число является корнем уравнения.</p> <p>И решим предыдущее задание с применением свойства ограниченности функции?</p>		
Контроль	<p>Решить задания на доске и самостоятельно:</p> <p>1. Найдите наибольшее значение параметра , при котором следующее неравенство имеет хотя бы одно решение:</p> $\sqrt{a^5}(8x - x^2 - 16) + \frac{\sqrt{a}}{8x - x^2 - 16} \geq -\frac{2}{3}a \cos\pi x $ <p>2. Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $4^{49x^2-70x+26} = \cos 14\pi x - 81a^2 - 72a - 13$ имеет решения. Найдите эти решения</p>		
Рефлексия	<p>Подведение итогов урока.</p> <p>Оценка работы групп учителем.</p> <p>Рефлексия.</p> <p>Домашнее задание: Инструктирует по</p>	<p>Обсуждают результаты, отвечают на вопросы.</p> <p>Проводят самоанализ</p>	<p>Личностные: умение осуществлять самооценку на основе критерия успешности учебной</p>

	<p>выполнению домашнего задания.</p> <p>https://math-ege.sdamgia.ru/test?id=54315967&nt=True&pub=False</p>	<p>деятельности.</p> <p>Формулируют выводы.</p> <p>Выбирают задание из предложенных учителем с учётом индивидуальных возможностей.</p>	<p>деятельности.</p> <p>Регулятивные: умение оценивать правильность выполнения действия на уроке.</p>
--	---	--	--

Глава 3. Факультативный курс на тему «Решение задач с параметрами с использованием свойств функций в контексте подготовки к ЕГЭ по математике»

Пояснительная записка

Приоритетная задача модернизации российского образования заключается в обеспечении нового качества школьного образования, которое соответствовало бы постоянно меняющейся системе общественных отношений и ценностей.

В контрольно-измерительных материалах Единого государственного экзамена существуют задания, связанные с параметрами. Но так, как эта тема мало изучается в среднем школьном курсе математики, возникает потребность в введении факультативного курса «Решение задач с параметрами с использованием свойств функций в контексте подготовки к ЕГЭ по математике» с целью формирования у учащихся компетентностного подхода к решению подобных задач.

Данная образовательная программа рассчитана на 18 часов на одно полугодие и разработана для выпускников средней школы. Поэтому в данном курсе учитывается возраст обучающихся, уровень математического развития и образовательный запрос.

Актуальность заключается в том, ЕГЭ по математике входит в список обязательных предметов для получения среднего общего образования, а ЕГЭ по математике профильного уровня необходимо сдавать для поступления в соответствующие профильные высшие учебные заведения. Задачи с параметрами присутствуют в задании 17. В школьном курсе такие задания разбросаны по разным годам обучения и отсутствует методика их решений, поэтому целесообразно проводить с выпускниками дополнительные занятия.

Цель курса заключается в знакомстве обучающихся с методами решения уравнений и неравенств с параметрами, именно с применением свойств функций, и научить применять полученные знания на практике при решении достаточного количества стандартных и нестандартных задач из задания 17 ЕГЭ.

Задачи курса:

- расширить знания у обучающихся о параметре и методах решений заданий с ними с применением свойств функций;
- сформировать математический стиль мышления на основе индивидуальных особенностей;
- ликвидировать пробелы в знаниях;
- развить интерес и положительную мотивацию изучения математики.

Требования к уровню освоения учебного курса:

- знать понятие параметра и основных свойств функций;
- общие методы решений заданий с параметром;
- уметь решать уравнения и неравенства с параметрами, применяя функциональный подход;
- владеть приемами самопроверки и самоконтроля при решении задач с параметрами.

Методические рекомендации.

Данный факультативный курс дает примерный объем знаний, умений и навыков, которым должны овладеть школьники. Ученики должны уметь решать задания и с повышенным уровнем сложности и свободно использовать знания, полученные на данном курсе.

Одна из основных целей данного курса – ориентационная, то есть помочь ученикам осознавать свои возможности и степень значимости своего интереса к математике.

Для реализации целей и задач данного курса используются такие формы занятий, как лекции, практикумы по решению задач и самостоятельные работы. Занятие носят исследовательский характер.

Итоговый контроль целесообразно провести в форме зачетной работы.

Планируемые результаты освоения учебного предмета, курса

Личностные результаты:

- сформированность целостного мировоззрения;
- умение ясно, четко и последовательно излагать свои мысли;
- навыки сотрудничества со сверстниками;
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию;
- умение контролировать учебную деятельность и способность к рефлексии.

Метапредметные результаты:

- умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности;
- умение выбрать наиболее эффективные способы решения;
- сформированность учебной и общепользовательской компетентности в области использования информационно-коммуникационных технологий (ИКТ-компетентности);
- владение навыками познавательной рефлексии (осознание совершаемых действий и мыслительных процессов), их результатов, новых познавательных задач и средств их достижения.

Предметные результаты:

- владение основными понятиями по данной теме;
- умение пользоваться основными математическими формулами;

- знать основные свойства функций и применять их для исследования уравнений и неравенств;
- умение решать линейные, квадратные, показательные и тригонометрические уравнения и неравенства;
- умение строить графики, описывать их свойства;
- умение применять изученные в ходе курса понятия, результаты и методы при решении задач, в том числе задач, не сводящихся к непосредственному применению известных ранее алгоритмов.

В рамках факультативного курса разработано тематическое планирование, приведенное в форме таблицы 1.

Таблица 1– Тематическое планирование

№	Тема	Часы	Форма занятий
1	Первоначальные сведения – основные понятия	1	Беседа
2	Алгебраические методы решений задач с параметром	3	Лекция с элементами беседы
			Лекция с элементами практики
			Лекция с элементами практики
3	Функциональный метод решения. Применение области определения функции	2	Лекция с элементами практики
			Практика
4	Функциональные методы решения: использование	2	Лекция с элементами практики

	ограниченности функции. Метод оценки		Практика
5	Функциональные методы решения: четность и нечетность функции	2	Лекция с элементами практики
			Практика
6	Функциональные методы решения: монотонность функции	2	Лекция с элементами практики
			Практика
7	Функционально-графические методы решения: Формула расстояния между точками. Уравнения: прямой; параболы; гиперболы; окружности; параллелограмма	2	Интерактивная лекция
			Практика
8	Решение задач с параметром разными способами	2	Практика
			Практика
9	Зачет	2	Практика
			Практика
Итого		1 8	

Краткое содержание курса

1. Первоначальные сведения (1 ч)

Определение параметра. Виды уравнений и неравенств, содержащих параметр. Основные методы решений задач с параметрами. Решение простейших задач.

2. Алгебраические методы решений задач с параметром (3 ч)

Решение линейных и квадратных уравнений и неравенств с параметром. Геометрическая интерпретация. Исследование полученного в результате ответа.

3. Функциональный метод решения. Применение области определения функции (2 ч)

Область значений функции. Область определения функции.

4. Функциональные методы решения: использование ограниченности функции. Метод оценки (2 ч)

Понятие ограниченности функции. Экстремумы функции.

5. Функциональные методы решения: четность и нечетность функции (2 ч)

Понятие четности и нечетности функции.

6. Функциональные методы решения: монотонность функции (2 ч)

Монотонность функции. Координаты вершины параболы.

7. Функционально-графические методы решения: Формула расстояния между точками. Уравнения: прямой; параболы; гиперболы; окружности; параллелограмма (2 ч)

Использование свойств различных функций при решении заданий с параметром. Специфика решений функционально-графическим способом. Преимущества и недостатки функционально-графического способа.

8. Решение задач с параметром разными способами (2 ч)

Использование различных свойств функций при решении задач с параметром. Умение проводить анализ задачи, находить алгоритм решения

9. Зачет (2 ч)

Перечень учебно – методического обеспечения для учителя

1. Алгебра и начала математического анализа 10-11 классы Под редакцией Ш. А. Алимов. «Просвещение» 2017г
2. ЕГЭ Математика Типовые экзаменационные варианты И. В. Ященко.А. Л. Семенова.
3. Интернет ресурсы:

<http://www.fipi.ru/>

<http://решуегэ.рф>

4. Приложение 1 «Сборник задач для подготовки к ЕГЭ профильного уровня по заданию 17»

Заключение

Проанализировав школьные учебники, Интернет-ресурсы для подготовки к экзаменам после курса основной и средней школы, приходим к выводу, что изучение параметров в школьном курсе является поверхностным. Это является существенным недостатком.

Поэтому необходимо в школах проводить дополнительные занятия по данной теме, например, элективные курсы или факультативы.

Применение таких свойств функций, как монотонность, четность или нечетность, периодичность, ограниченность и др., значительно упрощает решение заданий.

Сформулируем основные выводы по результатам данной работы:

1. Определено понятие параметра, уравнения с параметром; выделены виды уравнений и неравенств с параметром и способы их решения.

2. Рассмотрено содержание теоретического и задачного материала школьного курса 7-11 классов, проведен сравнительный анализ учебников таких авторов, как Алимов Ш.А. и др., Никольский С.М. и др., Макарычев Ю.Н. и др., Мордкович А.Г. и др.. На основании этого можно сделать вывод, что ни у одного из авторов нет выделенного раздела по параметрам, почти ни у кого нет точного определения параметра, изучается лишь поверхностно. Задачи с параметром присутствуют лишь в конце некоторых глав или в дополнительных задачах в конце учебника.

3. Проанализированы контрольно-измерительные материалы ОГЭ и ЕГЭ на наличие задач с параметром. В ОГЭ встречается задача с параметром №20 и в номере №22, где уже могут использоваться свойства функций. В базовом уровне ЕГЭ по математике подобные задания отсутствуют. А в профильном уровне есть задание №17, которое посвящено полностью параметрам. Большинство задач можно решить с

помощью функционального метода. Выделены основные типы задач с параметром в ОГЭ и ЕГЭ профильного уровня.

4. Представлены методические рекомендации по обучению детей решению задач с параметрами с использованием свойств функций. Составлена технологическая карта на тему «Использование свойства ограниченности функции при решении задач с параметром» для 10 класса.

5. Разработан факультативный курс на тему «Решение задач с параметрами с использованием свойств функций в контексте подготовки к ЕГЭ по математике». Данный курс может быть использован учителями математики в период подготовки выпускников к сдаче экзамена. В приложении присутствует сборник задач для подготовки к заданию №17 ЕГЭ.

Список использованной литературы

1. Алгебра. 7 кл : учебник для общеобразовательных учреждений / Ш.А.Алимов [и др.]. М. : Просвещение, 2011. 226 с.
2. Алгебра. 8 кл : учебник для общеобразовательных учреждений / Ш.А.Алимов [и др.]. М. : Просвещение, 2015. 258 с.
3. Алгебра. 9 кл : учебник для общеобразовательных учреждений / Ш.А.Алимов [и др.]. М. : Просвещение, 2015. 289 с.
4. Алгебра и начала математического анализа 11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. М. Колягин [и др.]М. : Просвещение, 2016. 384 с.
5. Алгебра. 7 кл : учебник для общеобразовательных учреждений /Ю. Н. Макарычев [и др.]. М. : Просвещение, 2022. 112 с.
6. Алгебра. 8 кл : учебник для общеобразовательных учреждений /Ю. Н. Макарычев [и др.]. М. : Просвещение, 2018. 287 с.
7. Алгебра. 9 кл : учебник для общеобразовательных учреждений /Ю. Н. Макарычев [и др.]. М. : Просвещение, 2021. 288 с.
8. Башмаков М. И. Уравнения и неравенства. 2-е изд., перераб. М.: Наука, 1976. 96 с.
9. Мерзляк А.Г. Алгебраический тренажер. М.: А.С.К., 1997. 320 с.
10. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра и начала математического анализа, 10 – 11 класс. Часть 1.М. : Просвещение, 2009. 402 с.
11. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра. 7кл. Задачник. М.: Просвещение, 2013. 271 с.
12. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра. 7кл. Учебник. М.: Просвещение, 2013. 175 с.
13. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра. 8 кл. Учебник. М.: Просвещение, 2010. 215 с.

14. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра. 8 кл. Задачник. М.: Просвещение, 2013. 272 с.
15. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра. 9 кл. Задачник. М. : Просвещение, 2015. 223 с.
16. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра. 9 кл. Задачник. М.: Просвещение, 2015. 224 с.
17. Никольский С. М., Решетников Н. Н., Потапов М. К. Алгебра. 7 кл. М. : Просвещение, 2014. 287 с.
18. Никольский С. М., Решетников Н. Н., Потапов М. К. Алгебра. 8 кл. М. : Просвещение, 2019. 304 с.
19. Никольский С. М., Решетников Н. Н., Потапов М. К. Алгебра. 9 кл. М. : Просвещение, 2023. 336 с.
20. Никольский С. М., Решетников Н. Н., Потапов М. К. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб.для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни.М. : Просвещение, 2010, 464 с.
21. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ОГЭ». URL: <https://math-oge.sdangia.ru>. Заглавие с экрана (дата обращения: 14.04.2023)
22. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ». URL: <https://math-ege.sdangia.ru>. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.04.2023)

Приложение 1

«Сборник задач для подготовки к ЕГЭ профильного уровня по заданию 17»

1. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy + 4x - 7y + 12)\sqrt{x+5}}{\sqrt{5-x}} = 0 \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

2. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy + 5x - 4y - 5)\sqrt{x+3}}{\sqrt{7-x}} = 0 \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения

3. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy - 9y + 5x + 20)\sqrt{x+5}}{\sqrt{7-y}} = 0 \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

4. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy - 7y + 4x + 12)\sqrt{x+4}}{\sqrt{7-y}} = 0 \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

5. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy - 4y + 2x + 4)\sqrt{x+4}}{\sqrt{5-y}} = 0 \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет единственное решение.

6. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 2x - 2y - 2 = |x^2 + y^2 - 1| \\ y = a(x - 1) \end{cases}$$

имеет более двух решений.

7. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 9 \\ y = |x - a| + 1 \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

8. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (x - 3)^2 + (y - 6)^2 = 25 \\ y = |x - a| + 1 \end{cases}$$

Имеет ровно три различных решения.

9. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y = \sqrt{5 + 4x - x^2} + 2, \\ y = \sqrt{9 - a^2 + 2ax - x^2} + a \end{cases}$$

имеет единственное решение.

10. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy + 3x - y - 6)\sqrt{x} + 2}{\sqrt{6-x}} = 0 \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных значения.

11. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 5x + y^2 - y - |x - 5y + 5| = 52 \\ y - 2 = a(x - 5) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

12. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 8x + y^2 + 4y + 15 = 4|2x - y - 10| \\ x + 2y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

13. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 + 2a + 2$ на множестве $|x| \geq 1$ не меньше 6.

14. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $|2x^2 - 3x - 2| = a - 2x^2 - 8x$ либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

15. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $a|x - 3| = \frac{5}{x+2}$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет ровно два корня.

16. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\left|\frac{5}{x} - 3\right| = ax - 2$ на промежутке $(0; +\infty)$ имеет более двух корней.

17. Найдите все положительные значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} (|x| - 6)^2 + (y - 12)^2 = 4 \\ (x + 1)^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

18. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + 20x + y^2 - 20y + 75 = |x^2 + y^2 - 25| \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более одного корня.

19. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 1| + 2x - x^2 = |y^2 - 1| + 2y - y^2 \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

20. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + |x^2 - 2x| = y^2 + |y^2 - 2y| \\ x + y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

21. Найдите все значения a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} y^2 - x - 2 = |x^2 - x - 2| \\ x - y = a \end{cases}$$

имеет более двух решений.

22. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a + 2$ на множестве $1 \leq |x| \leq 3$ не меньше 6.

23. Найдите все значения a , при каждом из которых наименьшее значение функции $f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 + 2a + 2$ на множестве $1 \leq |x| \leq 3$ не меньше 6.

24. Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} 2a \leq x \\ 6x > x^2 + a^2 \\ x + a \leq 6 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[4; 5]$.

25. Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} a(x - 1) \geq 4, \\ 2\sqrt{x - 2} \geq a, \\ 3x < a + 14 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[4; 5]$.

26. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$ имеет ровно три различных корня.

27. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x-2a}{x+2} + \frac{x-1}{x-a} = 1 \text{ имеет ровно один корень.}$$

28. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2^x - a} + \frac{a-1}{\sqrt{2^x - a}} = 1$$

имеет два различных корня.

29. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{3x^2 + 2ax + 1} = x^2 + ax + 1$$

имеет ровно три различных корня.

30. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3 + x^2 - 9a^2x - 2x + a}{x^3 - 9a^2x} = 1$$

имеет ровно один корень.

31. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2^x - a = \sqrt{4^x - a}$$

имеет единственный корень.

32. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{xy^2 - xy - 5y + 5}{\sqrt{5-y}} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

33. Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2 \\ \sqrt{x-1} > a \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$

34.Найдите все значения a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} x \leq 2a + 6 \\ 6x \geq x^2 + a^2 \\ x + a > 0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[1; 2]$

35.Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2 - 3x} \cdot \ln(16x^2 - a^2) = \sqrt{2 - 3x} \cdot \ln(4x + a)$$

имеет ровно один корень.

36.Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{4x - 1} \cdot \ln(x^2 - 2x + 2 - a^2) = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$

37.Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$(5x - 2) \cdot \ln(x + a) = (5x - 2) \cdot \ln(2x - a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$

38.Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\ln(4x - 1) \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 6a - a^2} = 0$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 3]$

39.Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x + 2a} \cdot \ln(x - a) = (x - 1) \cdot \ln(x - a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$

40.Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{2x - 1} \cdot \ln(4x - 2) = \sqrt{2x - 1} \cdot \ln(5x + a)$$

имеет ровно один корень на отрезке $[0; 1]$

41. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{7x-4} \cdot \ln(x^2 - 8x + 17 - a^2) = 0$$

имеет на отрезке $[0; 4]$ ровно один корень.

42. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} (xy^2 - 3xy - 3y + 9)\sqrt{3-x} = 0 \\ y = ax \end{cases}$$

имеет ровно три различных решения.

43. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$a^2 + ax - 2x^2 - 6a - 3x + 9|x| = 0$$

имеет меньше четырёх различных корней.

44. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy + 3x - y - 6)\sqrt{x+2}}{\sqrt{6-x}} = 0 \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

45. Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \frac{(y^2 - xy + 4x - 7y + 12)\sqrt{x+5}}{\sqrt{5-x}} = 0 \\ x + y - a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: заочная

Утверждаю: зав. кафедрой
«20» 09 2022 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Класс Натальи Викторовны
(ФИО полностью)

Тема работы «Использование свойств функций при решении задач с параметром»

Утверждена приказом по Университету от «28.09» 2022 г. № 809/0

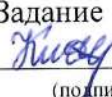
Срок сдачи студентом законченной работы «15» 06 2023 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение методической литературы	Октябрь 2022	выполнено
2.	Изучение необходимых свойств функций	Ноябрь 2022	выполнено
3.	Изучение классификации уравнений и неравенств с параметрами	Декабрь 2022	выполнено
4	Подбор задач на применение ограниченности функций	Январь-Февраль 2023	выполнено
5	Подбор задач на применение монотонности, области определения	Март 2023	выполнено
6	Разработка календарно-тематического планирования факультатива	Апрель 2023	выполнено
7	Оформление текста работы	Май 2023	выполнено
8	Подготовка презентации и выступления	Июнь 2023	выполнено

Дата выдачи задания «20» 09 2022 г.

Руководитель  (подпись) Броккина М.В. (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению  (подпись) Броккина М.В. (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студента (ки) 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения
Класс Наталья Викторовны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Класс Наталья Викторовна, студент(ка) 5 курса заочной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Использование свойств функций при решении задач с параметром» выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

Класс
подпись
23.06.2023
дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 23.06.2023
дд.мм.гггг

Руководитель ВКР  М.В. Сорокина
подпись И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ»
выпускной квалификационной работы на тему:
«Использование свойств функций при решении задач с параметром»
студентки 5 курса Класс Наталья Викторовны
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование,
профиль подготовки «Математика»

Руководитель ВКР *Сорокина М.В.*

Отчет о проверке на заимствования №1



Автор: Класс Наталья Викторовна
Проверяющий: Сорокина Марина Валерьевна
Организация: Пензенский государственный университет
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - <http://pnt.ru/antiplagiat.ru>

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 75
Начало загрузки: 23.06.2023 16:51:05
Длительность загрузки: 00:00:09
Имя исходного файла: ВКР Класс -
Использование свойств функций при
решении задач с параметром.docx
Название документа: ВКР Класс -
Использование свойств функций при
решении задач с параметром
Размер текста: 62 кБ
Символов в тексте: 63579
Слов в тексте: 8616
Число предложений: 502

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 23.06.2023 16:51:15
Длительность проверки: 00:01:39
Корректировка от 23.06.2023 17:11:21
Комментарии: [Автосохраненная версия]
Поиск с учетом редактирования: да
Проверенные разделы: содержание с. 1, основная часть с. 2-57
Модули поиска: ИПС Адилет, Библиография, Сводная коллекция ЗБС, Интернет
Плюс*, Сводная коллекция РГБ, Цитирование, Переводные заимствования (RuEn),
Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu), Переводные заимствования
по Интернету (EnRu), eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ: аналитика, СПС ГАРАНТ:
нормативно-правовая документация, Медицина, Диссертации НББ, Коллекция
НБУ, Перефразирования по eLIBRARY.RU, Перефразирования по Интернету,
Перефразирования по Интернету (EN), Патенты СССР, РФ, СНГ, Модуль поиска
"ПГУ", СМИ России и СНГ, Шаблонные фразы, Кольцо вузов, Издательство Wiley,
Переводные заимствования



СОВПАДЕНИЯ
38.75%

САМОЦИТИРОВАНИЯ
0%

ЦИТИРОВАНИЯ
0%

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
61.25%

23.06.2023

Сорокина М.В.

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Использование свойств функций при решении задач с
параметром»
студентки Класс Натальи Викторовны
факультета физико-математических и естественных наук направления
подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль подготовки
«Математика», гр. 183ФПМ51

Задачи с параметром традиционно присутствуют в едином государственном экзамене по математике профильного уровня и вызывают трудности. Выпускная квалификационная работа Класс Н.В. посвящена анализу методических особенностей использованию различных свойств функций при решении задач с параметром.

Работа состоит из трех глав. Первая глава носит теоретический характер. В ней рассмотрены некоторые виды уравнений и неравенств с параметром и методы их решений. Во второй главе рассмотрены методические особенности изучения данной темы. А именно: проведен сравнительный анализ учебников и задачников по алгебре для 7-11 классов, анализ задач ОГЭ и ЕГЭ по теме исследования. Рассмотрены возможности применения некоторых свойств функций при решении задач с параметром, приведены примеры решения задач. Технологическая карта на тему «Использование свойства ограниченности функции при решении задач с параметром». В третьей главе приводятся методические разработки факультативного курса по теме «Решение задач с параметрами с использованием свойств функций в процессе подготовки к ЕГЭ по математике»

Работа Класс Н.В. является самостоятельным исследованием. Текст работы, список литературы, доклад и презентация оформлены в соответствии с требованиями, предъявляемыми к выпускным квалификационным работам. Некоторые фрагменты работы могут быть использованы в процессе работы учителя математики.

Выпускная квалификационная работа заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель ВКР,
доцент кафедры «МО»,
к.ф.м.н., доцент



М.В. Сорокина