

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Методические аспекты изучения тригонометрии в школе»

Студент

Кисл 4.06.22
(подпись, дата)

Кислова Светлана Александровна
(ФИО полностью)

Руководитель

Никитина 4.06.22
(подпись, дата)

Никитина О.Г.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Журавлева 29.06.22
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 21.06.22 № 11)

Заведующий кафедрой

Пань 21.06.22
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой хор (протокол заседания ГЭК от 06.07.22 № 5)

Секретарь ГЭК

Журавлева 06.07.22
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2022

Содержание.

Введение.....	3
Глава I. Теоретические аспекты изучения основ тригонометрии в 10-11 классе.....	5
1.1 Особенности изучения раздела тригонометрии.....	5
1.1.1 Методика изучения тригонометрии в условиях реализации ФГОС.....	5
1.1.2 Анализ учебников по изучению раздела тригонометрии.....	7
1.2 Тригонометрические уравнения и методы их решения.....	10
1.3 Тригонометрические неравенства и методы их решения.....	20
Глава II. Методические особенности изучения тригонометрических уравнений и неравенств.....	28
1.1 Технологическая карта по теме «Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители».....	28
1.2 Методические особенности изучения тригонометрических уравнений и неравенств.....	39
1.3 Тригонометрические уравнения, неравенства в заданиях ЕГЭ и их анализ.....	42
Заключение.....	52
Список используемой литературы.....	54

Введение

Раздел тригонометрии очень важен в программе школьного курса. Он изучается в 10-11 классах в курсе алгебры и начал математического анализа, в зависимости от выбранного школьного учебника и программы. Материал раздела тригонометрии обладает широкими возможностями для обобщения знаний. Однако задачи по тригонометрии – одни из самых объёмных и сложных в школьной программе по математике. Тригонометрические уравнения встречаются во многих областях: при решении задач по планиметрии, стереометрии, физике и в других областях. К тому же тригонометрические уравнения встречаются в заданиях единого государственного экзамена. Отсюда можно сделать вывод, что изучению методов решения тригонометрических уравнений и неравенств должно уделяться особое внимание.

Из выше сказанного следует, что тема выпускной квалификационной работы актуальна и необходима будущему учителю математики.

Объектом исследования является процесс обучения математике в старших классах средней общеобразовательной школы.

Предметом исследования являются методические особенности изучения тригонометрии в школьном курсе математики.

Цель работы: разработка методики изучения тригонометрии в рамках школьного курса математики.

Задачи данной работы:

- 1) изучить методическую литературу по данному разделу;
- 2) рассмотреть различные методы решения тригонометрических уравнений и неравенств;
- 3) провести анализ этой темы в учебниках алгебры и начал анализа школьного курса математики 10-11 класса;
- 4) разработать конспекты уроков по данному разделу;
- 5) провести анализ использования раздела тригонометрии в заданиях ЕГЭ.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

В первой главе рассмотрены особенности изучения тригонометрии в школьном курсе математики: методика изучения тригонометрии в условиях реализации ФГОС, проведен анализ учебников по данной теме, особенности изучения тригонометрических уравнений и неравенств и методов их решения.

Во второй главе разработан конспект урока, разработаны методические особенности изучения тригонометрических уравнений и неравенств, рассмотрены и проанализированы задания по разделу тригонометрия в ЕГЭ.

Глава 1. Теоретические аспекты изучения основ тригонометрии в 10-11 классе

1.1 Особенности изучения раздела тригонометрии

1.1.1 Методика изучения тригонометрии в условиях реализации ФГОС

После введения новых федеральных государственных образовательных стандартов очень сильно изменился подход к обучению и воспитанию учащихся.

Образовательный процесс по требованиям новых образовательных стандартов сильно отличается от ранее использованных подходов. Теперь он направлен не на достижения предметных знаний и навыков, а на развитие самостоятельности обучающихся, умения анализировать и адекватно оценивать различные ситуации, развить в ребенке стремление к самообразованию, а также развить в ребенке умения самоанализа и саморазвития. Новые ФГОСы, разработанные в системно – деятельностном подходе, совмещают и теоретические знания и практические умения, но больше всего внимания уходит на практическую сторону образовательного процесса, причем, не нанося вред фундаментальным знаниям.

По новым образовательным стандартам у учащихся должны формироваться учебные универсальные действия, которые имеют в виду создание мотивации к учебе, самостоятельное определение цели, её постановка и поиск путей ее достижения, и по которым поддерживается способность учиться. До новых ФГОСов главным лицом образовательного процесса был учитель, а учащиеся являлись лишь пассивными слушателями. Однако после введения новых образовательных стандартов учащимся предоставлена возможность самим искать пути решения задач, новую информацию, а также ее освоение и хранение и в дальнейшем применение новых знаний. Преподаватель в образовательном процессе становится наблюдателем, помощником, консультантом, способным помочь, подсказать, направить в нужный момент.

Внедрение нового ФГОСа имеет свои достоинства и недостатки.

Достоинства:

- 1) проектная деятельность по каждой дисциплине с 1 класса;
- 2) применение деятельностного подхода в процессе обучения;
- 3) отсутствует авторитарный метод обучения, направляет учащихся с помощью логических вопросов на новые знания;
- 4) внеурочная деятельность;
- 5) широкое использование ИКТ.

Недостатки:

- 1) недостаточная оснащённость кабинетов;
- 2) некоторым преподавателям тяжело перестроиться от авторитарного метода обучения к системно - деятельностному подходу.[9]

По выше изложенному материалу можно сделать вывод, что новые федеральные государственные образовательные стандарты имеют массу преимуществ и их главной целью является правильно организовать учебный процесс.

1.1.2 Анализ учебников по изучению раздела тригонометрии

В настоящее время тригонометрию в школе изучают все меньше и меньше, хотя этот раздел часто применяют на всевозможных конкурсах и олимпиадах. Также тригонометрия имеет широкое применение на практике, но в школьных учебниках об этом упоминается мало. Ко всему этому в разделе очень много формул, которые дети не запоминают, так как считают, что они им не необходимы.

В связи с этим мы рассмотрим существующее состояние изучения тригонометрии в школе. Для этого проведем сравнительный анализ учебников «Алгебры» для 10 классов средней школы.

В учебнике Колмогорова А. Н. начало рассматриваемого раздела начинается с главы «Тригонометрические функции». Больше место занимают

формулы и таблицы тригонометрии, а тригонометрический круг (окружность) практически не рассматривается. Большая часть времени уделяется на тему «Тригонометрические функции числового аргумента», изучаются свойства тригонометрических функций. Изучению четности и нечетности также уделяется достаточно большое количество времени. Очень мало практических задач на эту тему.

Затем изучаются тригонометрические уравнения и неравенства. Эта тема начинается с рассматривания обратно-тригонометрических функций. Уже здесь в большей степени делается упор на тригонометрический круг при изучении неравенств. И именно в этой теме большое разнообразие практических задач.

Следующий рассматриваемый учебник – это учебник Колягина Ю.Н. В самом начале раздела понятия тригонометрической функции еще не вводится, ученики просто изучают числовые выражения и формулы тригонометрии, что позволяет подготовиться учащимся к изучению тригонометрических функций, и рассматривают простейшие уравнения.

Изучение каждой конкретной тригонометрической функции происходит с помощью графической иллюстрации. Для профильных классов навык построения графика тригонометрической функции, который можно получить при сдвиге и сжатии или растяжении вдоль координатных осей Ox и Oy , является обязательным. Решение тригонометрических неравенств и обратно-тригонометрических функций для непрофильных классов проходит лишь в ознакомительном плане.

И последний рассматриваемый нами учебник – учебник Никольского С.М. У данного автора на тригонометрические функции выделено 6 часов, в течение которого тщательно разбираются тригонометрические функции числового аргумента. Однако есть огромный минус – мало практических заданий, несмотря на то, что теория дана в полном объеме.

Практически сразу в самом начале даются обратно-тригонометрические функции, для которых рассматриваются мало простейших примеров. Много

времени уделяется на изучение тригонометрического круга. Формулы изложены максимально подробно для учеников, что помогает им понять раздел тригонометрии в целом. Приводятся все основные случаи решения уравнений, а неравенства рассматриваются для повышенного уровня сложности.

Если рассматривать в целом учебники, то получим такие выводы.

Учебник Колмогорова А.Н. и др. «Алгебра и начала анализа 10-11 класс» содержит обязательный минимум для обучения, но для учащихся 10 класса он сложен к восприятию из-за слишком сжатого изложения материала.

В этом учебнике используется сложная для понимания учеников схема изложения материала по тригонометрии – сначала изучаются все формулы раздела тригонометрии, а потом уже предлагается решать тригонометрические уравнения и неравенства. В итоге для учащихся тригонометрические преобразования и уравнения остаются почти несвязными между собой темами и формулы изучаются ради других формул.

После изучения тригонометрического раздела для учеников все также непонятны некоторые факты: что же такое обратные тригонометрические функции и как же отбирать корни.

Учебник Колягина Ю.Н. и др. «Алгебра и начала анализа 10 класс» схож с учебником Колмогорова А.Н.. Он также соответствует обязательному минимуму, однако более доступен пониманию учащихся. Схема изложения – тригонометрическая функция, затем тригонометрические преобразования и, наконец, тригонометрические уравнения. Таким образом, мы можем снова заметить, что выведены формулы, а простейшим уравнениям уделяется очень мало внимания. Однако, по сравнению с первым учебником, учащиеся имеют представление о том, как происходит отбор корней.

Последний учебник – это учебник Никольского С.М. и др. «Алгебра и начала анализа 10 класс». Большая часть материала в этом учебнике отводится на понятия обратных тригонометрических функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$ и $\text{arcctg} x$. Несмотря на это учащимся совсем не объясняют для чего они изучают

данные функции. Очень малое количество часов уделяется на решение тригонометрических уравнений, соответственно не уделяется достаточного внимания на простейшие тригонометрические уравнения, хотя для решения любого тригонометрического уравнения необходимы умения решать простейшие тригонометрические уравнения. Отбор корней совсем не рассматривается.

Благодаря проведенному анализу раздела тригонометрии в учебниках по математике, мы можем сделать вывод, что объем содержания большой, а количество затрачиваемого на него времени очень мало. Формально учащимся приходится больше запоминать, чем решать. Поэтому можно выделить такие проблемы при изучении раздела тригонометрии:

- 1) учащиеся перегружаются из-за сокращения часов в данном разделе, несмотря на большой объём новой информации;
- 2) у учащихся отсутствует мотивация к изучению данного раздела.

Эти проблемы, на наш взгляд можно решить следующими способами:

- 1) необходимо поддерживать мотивацию к изучению раздела тригонометрии, связывая его с другими областями жизни учащихся. К примеру, тригонометрию применяют при изучении геометрии, физики и даже в инженерии и астрономии (измерение расстояния до близких к Земле звёзд). Помимо этого тригонометрия применяется в технике навигации, теории музыки, акустике, оптике, анализе финансовых рынков, электронике, статистике, биологии и медицине. Все эти отрасли могут присутствовать в жизни учащихся, поэтому, если им рассказать об этом, их мотивация к изучению тригонометрии только укрепится;
- 2) также есть возможность укрепить их мотивацию, рассказав историю возникновения и развитие такой науки, как тригонометрия;
- 3) необходимо достаточно уделить времени на изучение тригонометрического круга (окружности) и графики функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$, чтобы добиться понимания у учащихся геометрического смысла тригонометрии. Учащимся после этого будет более понятен материал, связанный с

изучением обратных тригонометрических функций.

1.2 Тригонометрические уравнения и методы их решения

1. Метод разложения на множители.

Суть данного метода заключается в том, что бы используя все возможные алгебраические преобразования, представить левую часть уравнения в виде произведения, которое равно нулю. В нашем случае чаще всего нужно представить сумму или разность тригонометрических выражений в произведение, опираясь на знание тригонометрических формул. Основываясь на правиле: произведение равно нулю, тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю, а второй не теряет смысла, находим решение уравнения.

Пример 1. Решить уравнение: $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = 0$.

Решение. Преобразуем это уравнение, используя формулу $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$. В результате имеем

$$2 \cos \frac{3}{2}x \cos \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{7}{2}x \cos \frac{x}{2} = 0.$$

Вынесем общий множитель $\cos \frac{x}{2}$ за скобки и выполним преобразования, получим уравнение

$$2 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{5}{2}x \cos x = 0.$$

Представим полученное уравнение в виде равносильной совокупности и решим ее:

$$\begin{cases} \cos \frac{x}{2} = 0, \\ \cos \frac{5}{2}x = 0, \\ \cos x = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, x_1 = \pi + 2\pi k, \\ \frac{5}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi k, x_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi k, \\ x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x_1 = \pi + 2\pi k, x_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi k, x_3 = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение: $\cos 4x \cdot \cos 5x = \cos 6x \cdot \cos 7x$.

Решение. Преобразуя обе части уравнения, используя формулу произведения косинусов $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$, получим, что

$$\frac{1}{2}(\cos 9x + \cos x) = \frac{1}{2}(\cos 13x + \cos x) \Rightarrow \cos 9x - \cos 13x = 0.$$

Уравнение $\cos 9x - \cos 13x = 0$ равносильно $2 \sin 11x \sin 2x = 0$. Отсюда имеем:

$$1) \sin 2x = 0, x_1 = \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}; \quad 2) \sin 11x = 0, x_2 = \frac{\pi}{11}k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{11}k, k \in \mathbb{Z}$.

2. Метод введения новой переменной.

Метод введения новой переменной является универсальным методом, который применяется в показательных, логарифмических, степенных и в том числе тригонометрических уравнениях. Зачастую в уравнениях сначала нужно выполнить преобразования, после которых можно будет выполнять замену тригонометрической функции или выражения. После того, как новая переменная будет введена, на неё как правило накладывается условие. Например, если в тригонометрическом уравнении произведена замена $t = \sin x$ или $t = \cos x$, то t должно принимать значения $[-1; 1]$. После введения новой переменной тригонометрическое уравнение сводится к алгебраическому уравнению, в частном случае к квадратному уравнению.

Если уравнение имеет вид:

$$a \cos 2x + b \sin^2 x + c \cos^2 x + d \sin x + e = 0,$$

то замена $t = \sin x$ приводит его к квадратному уравнению, так как.

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x, \cos^2 x = 1 - \sin^2 x.$$

Если же вместо слагаемого $d \sin x$ будет $d \cos x$, то нужная замена будет $t = \cos x$.

Пример 1. Решить уравнение $2\cos^2 x + 14 \cos x = 3 \sin^2 x$.

Решение. Так как $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, то уравнение примет вид:

$$2 \cos^2 x + 14 \cos x - 3(1 - \cos^2 x) = 0 \text{ или } 5 \cos^2 x + 14 \cos x - 3 = 0.$$

Используя замену $\cos x = y, -1 \leq y \leq 1$, получим уравнение

$$5y^2 + 14y - 3 = 0.$$

$y_1 = \frac{1}{5}, y_2 = -3 \notin [-1; 1]$ – корни этого уравнения. Значит, $\cos x = \frac{1}{5}$, откуда находим, что $x = \pm \arccos \frac{1}{5} + 2\pi n$.

Ответ: $x = \pm \arccos \frac{1}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение $3 \cos 2x + \sin^2 x + \sin 2x = 1$.

Решение. Если $1 = \cos^2 x + \sin^2 x$ перенесем в левую часть, а затем приведем подобные слагаемые и выполним преобразования, то получим:

$$3 \sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0 \quad (\cos x \neq 0).$$

Разделив обе части этого уравнения на $\cos^2 x$, будем иметь

$$3 \operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 2 = 0.$$

Замена: $\operatorname{tg} x = t$. В результате получим квадратное уравнение $3t^2 - 2t - 2 = 0$, корнями которого $t = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$. Тогда из уравнения $\operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3}$ получим, что

$$x = \operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{1 \pm \sqrt{7}}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Метод введения новой переменной полезен при решении так называемых однородных уравнений, т.е. уравнений вида $a \sin x + b \cos x = 0$ (однородное уравнение 1-й степени), $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ (однородное уравнение 2-й степени).

3. Однородные уравнения и сводящиеся к ним.

Однородные уравнения первого и второго порядка и сводящиеся к ним.

Однородным уравнением порядка n называется уравнение вида:

$$a \sin^n x + b \sin^{n-1} x \cos x + \dots + c \sin x \cos^{n-1} x + d \cos^n x = 0,$$

в котором сумма показателей степени у $\sin x$ и $\cos x$ (степень уравнения) во всех членах уравнения одинакова. Полученное уравнение делим на

$\sin^n x \neq 0$ или $\cos^n x \neq 0$. Деление можно выполнить и при этом не произойдет потери корней, так как если предположить, что $\cos^n x = 0$, то в силу исходного уравнения и $\sin^n x = 0$. Предположение выше противоречит

основному тригонометрическому тождеству $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Отсюда следует, что любое решение уравнения данного типа удовлетворяет условию $\cos^n x \neq 0$ (или $\sin^n x \neq 0$). Поэтому можем выполнить деление обеих частей уравнения на $\cos^n x$ или $\sin^n x$. Таким образом, однородное уравнение сводится к алгебраическому уравнению относительно $t = \operatorname{tg} x$ или $t = \operatorname{ctg} x$.

Однородные уравнения 1-го порядка.

При решении уравнений вида $a \sin x + b \cos x = 0$, делим обе части уравнения на синус или косинус. Тогда уравнение будет иметь вид

$$a + b \operatorname{ctg} x = 0 \text{ или } a \operatorname{tg} x + b = 0.$$

Пример 1. Решить уравнение. $2 \sin x - 3 \cos x = 0$.

Решение. $2 \sin x - 3 \cos x = 0 | : \cos x \neq 0, 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$,

$$x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

Пример 2. Найдите корни уравнения $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2$.

Решение. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 2, \frac{1}{\operatorname{ctg} x} + \operatorname{ctg} x = 2 | \operatorname{ctg} x, \operatorname{ctg}^2 x - 2 \operatorname{ctg} x + 1 = 0$.

Сделав замену $\operatorname{ctg} x = y$, получим квадратное уравнение

$$y^2 - 2y + 1 = 0, (y - 1)^2 = 0, y = 1.$$

Обратная замена: $\operatorname{ctg} x = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Однородные уравнения 2-го порядка.

Уравнение вида $a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0$ — однородное уравнение 2-й степени. Если в уравнении $a \neq 0$, то любое решение уравнения удовлетворяет условию $\cos x \neq 0$. Разделив обе части этого уравнения на $\cos^2 x$, получим равносильное уравнение

$$a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0.$$

Это уравнение решаем методом подстановки. Если $a = 0$ или $c = 0$, то уравнение решается методом разложения на множители.

Пример 1. Решить уравнение $\sin^2 x - 3 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 0$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим

$$tg^2 x - 3 tg x + 2 = 0.$$

После замены $tg x = t$ уравнение запишется в виде $t^2 - 3t + 2 = 0$.

$t_1 = 1, t_2 = 2$ – корни этого уравнения. Обратная замена: $tg x = 1$,
 $x = \pi/4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}; tg x = 2, \quad x = \arctg 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad \arctg 2 + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. При каких значениях переменной уравнение

$$\sin^2 x + \sin x \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) - \cos 2x = 1$$

имеет смысл?

Решение. Если преобразуем это уравнение, то получим

$$\sin^2 x - \sin x \cos x - (\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x + \sin^2 x,$$

$$\sin^2 x - \sin x \cos x - 2 \cos^2 x = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$. В результате будем иметь

$$tg^2 x - tg x - 2 = 0.$$

Произведя замену $tg x = y$, получим квадратное уравнение

$y^2 - y - 2 = 0; y_1 = -1, y_2 = 2$ – корни квадратного уравнения. Тогда

$$\begin{cases} tg x = 2 \\ tg x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \arctg 2 + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

Ответ: $\arctg 2 + \pi n; -\frac{\pi}{4} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.

4. Универсальная подстановка.

Если $x \neq \pi + 2\pi n$, то справедливы следующие тождества:

$$\cos x = \frac{1 - tg^2 \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}, \sin x = \frac{2tg \frac{x}{2}}{1 + tg^2 \frac{x}{2}}$$

Если введем новую переменную $tg \frac{x}{2} = t$, то $\sin x$ и $\cos x$ рационально выражаются через t

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}. \quad (1)$$

Подстановка $tg \frac{x}{2} = t$ называется универсальной, так как она используется при решении многих тригонометрических уравнений. Она в частности может быть использована в решении уравнений вида: $\mathcal{R}(\sin x; \cos x) = 0$, где $\mathcal{R}(\sin x; \cos x)$ – рациональное выражение относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Следует помнить, что используя универсальную подстановку нужно исключить из полученного решения числа вида $x = \pi + 2\pi n$, так как $tg x$ в этих точках не существует.

Пример 1. Решить уравнение: $3 \sin x + 4 \cos x = 5$.

Решение. Выражая $\sin x$ и $\cos x$, используя формулы (1), получим рациональное уравнение:

$$3 \frac{2t}{1+t^2} + 4 \frac{1-t^2}{1+t^2} = 5.$$

Решив его, получим $t = \frac{1}{3}$. Тогда $tg \frac{x}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 2 \arctg \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Проверкой убеждаемся, что значения $x = \pi + 2\pi n$ не удовлетворяют заданному уравнению.

Ответ: $x = 2 \arctg \frac{1}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение: $tg x + 1 = 2 \sin(\frac{3\pi}{2} + 2x)$.

Решение. Найдем ОДЗ: $\cos x \neq 0, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Выполнив преобразования правой части уравнения, получим

$$tg x + 1 = -2 \cos 2x$$

Применим универсальную подстановку $\cos 2x = \frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x}$, имеем:

$$tg x + 1 = -2 \frac{1-tg^2 x}{1+tg^2 x}.$$

Произведя замену $tg x = t$, получим рациональное уравнение

$$t + 1 = -2 \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Так как $1 + t^2 \neq 0$ для любого $t \in \mathbb{R}$, то это уравнение равносильно уравнению $(t + 1)(t^2 - 2t + 3) = 0$. Отсюда имеем:

$$\begin{cases} t + 1 = 0 \\ t^2 - 2t + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -1 \\ \text{нет корней} \end{cases} \Rightarrow t = -1.$$

Тогда $\operatorname{tg} x = -1$, $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. Метод введения вспомогательного аргумента.

Иногда при решении тригонометрических уравнений выражение вида $a \cos x + b \sin x$ бывает полезным заменить на $A \sin(x + \varphi)$, где

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \cos \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

В этом случае φ называют вспомогательным аргументом [2]. Рассмотрим данный метод на примерах.

Пример 1. Решить уравнение $8 \cos x + 15 \sin x = 17$.

Решение. Разделив обе части уравнения на $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$, получим:

$$\frac{8}{17} \cos x + \frac{15}{17} \sin x = 1.$$

Так как $\left(\frac{8}{17}\right)^2 + \left(\frac{15}{17}\right)^2 = 1$, то существует такое φ , что $\frac{8}{17} = \sin \varphi$ и $\frac{15}{17} = \cos \varphi$. Тогда

$$\begin{cases} \sin \varphi \cos x + \cos \varphi \sin x = 1, \\ \sin \varphi \cos x + \sin \varphi \cos \varphi = \sin(x + \varphi) \end{cases} \Rightarrow \sin(x + \varphi) = 1,$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n - \varphi.$$

Учитывая, что $\varphi = \arcsin \frac{8}{17}$, получаем следующие решения заданного уравнения: $x = \frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{8}{17} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение $5 \sin x - 12 \cos x + 13 \sin 3x = 0$.

Решение. Это уравнение решим так же методом введения вспомогательного угла:

$$\sqrt{5^2 + 12^2} \left(\frac{5}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \sin x - \frac{12}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \cos x \right) = -13 \sin 3x.$$

Разделив обе части уравнения на $\sqrt{5^2 + 12^2}$, получим:

$$\frac{5}{13} \sin x - \frac{12}{13} \cos x = -\sin 3x.$$

Введем вспомогательный угол φ : $\frac{5}{13} = \cos \varphi$, $\frac{12}{13} = \sin \varphi$. Тогда это уравнение примет вид

$$\sin x \cos \varphi - \cos x \sin \varphi = -\sin 3x \text{ или } \sin(x - \varphi) + \sin 3x = 0.$$

Используя формулу суммы синусов, получим следующее уравнение

$$2 \sin \left(2x - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \left(x + \frac{\varphi}{2} \right) = 0.$$

$$\begin{cases} \sin \left(2x - \frac{\varphi}{2} \right) = 0, \\ \cos \left(x + \frac{\varphi}{2} \right) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\varphi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \\ x = \frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} + \pi k. \end{cases}$$

Так как $\varphi = \arccos \frac{5}{13}$, то $x = \frac{1}{4} \arccos \frac{5}{13} + \frac{\pi n}{2}$ или $x = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \frac{5}{13} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{Ответ: } \frac{1}{4} \arccos \frac{5}{13} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \arccos \frac{5}{13} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}.$$

6. Нестандартные тригонометрические уравнения.

Не часто, но всё же встречаются уравнения, которые решаются с помощью ограниченности функций синуса и косинуса. Рассмотрим это на примере.

Пример 1. Решить уравнение: $\sin 5x - 2 \cos 2x = 3$.

Решение. Так как $\sin 5x \leq 1$, $-2 \cos 2x \leq 2$, то левая часть уравнения не превосходит 3 и равна 3, если $\begin{cases} \sin 5x = 1, \\ \cos 2x = -1. \end{cases}$

Решим получившуюся систему уравнений. Для этого решим второе уравнение, и полученные значения подставим в первое уравнение системы:

$$\cos 2x = -1, x = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

$$\text{Тогда } 5x = \frac{5\pi}{2} + 5\pi k, \sin 5x = \sin \left(\frac{5}{2}\pi + 5\pi k \right) = \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right).$$

Очевидно, что лишь при целых четных k будет $\sin 5x = 1$.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение: $\sin^8 x - \cos^5 x = 1$.

Решение. Решение этого уравнения основывается на следующем простом соображении: если $0 < a < 1$, то a^t убывает с ростом t . Отсюда следует, что

$$\sin^8 x \leq \sin^2 x, -\cos^5 x \leq \cos^2 x.$$

Сложив эти неравенства, имеем: $\sin^8 x - \cos^5 x \leq \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Значит, левая часть данного уравнения равна 1 тогда и только тогда, когда выполняются два равенства: $\sin^8 x = \sin^2 x$ и $-\cos^5 x = \cos^2 x$. Таким образом, $\sin x$ может принимать значения -1,0,1, а $\cos x$ может принимать значения -1,0.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi + 2\pi n, k, n \in \mathbb{Z}$.

1.3 Методы решения тригонометрических неравенств

1. Метод интервалов.

Рассмотрим суть этого метода на примерах.

Пример 1. Решить неравенство: $\frac{\sin 3x \cos(2x - \frac{\pi}{6})}{\sin 2x} \leq 0$.

Решение. Функция, расположенная в левой части неравенства, имеет наименьший период, равный 2π . Найдем, где на отрезке $[0, 2\pi]$ имеют знаки отдельные множители числителя и знаменателя (рисунок 1):

$$\sin 3x = 0, x = \frac{\pi}{3}k, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5;$$

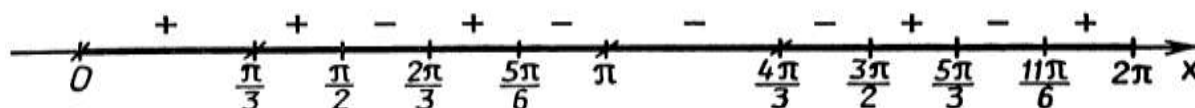


Рисунок 1 – Отрезок $[0; 2\pi]$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0, \quad x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}k, \quad k = 0, 1, 2, 3;$$

$$\sin 2x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2}k, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Внутри первого отрезка ($0 < x < \frac{\pi}{3}$) все три функции положительны. Далее расставляем знаки. Затем выписываем ответ для одного периода (включая в него те граничные значения x , для которых обращается в нуль числитель, но не равен нулю знаменатель).

$$\text{Получаем,} \quad x = \frac{\pi}{3}, \quad \frac{\pi}{2} < x \leq \frac{2\pi}{3}, \quad \frac{5}{6}\pi \leq x < \pi, \quad \pi < x < \frac{3}{2}\pi, \quad \frac{5}{3}\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi.$$

После чего окончательный ответ получаем, прибавляя $2\pi k$ к граничным значениям.

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad \frac{\pi}{2} + 2\pi k < x \leq \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad \frac{5}{6}\pi + 2\pi k \leq x < \pi + 2\pi k,$$

$$\pi + 2\pi k < x < \frac{3}{2}\pi + 2\pi k, \quad \frac{5}{3}\pi + 2\pi k \leq x \leq \frac{11}{6}\pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Иногда при решении тригонометрических неравенств могут возникать проблемы, связанные с упорядочением корней тригонометрических функций.

Пример 2. Решить неравенство:

$$(3\sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x - 2 - \sqrt{3})(2 \sin 2x - 1) \geq 0.$$

Решение. $T = 2\pi$. Корни уравнения $2 \sin 2x - 1 = 0$ легко находятся (для $0 \leq x < 2\pi$): $\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12}$.

Решим уравнение $3\sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x - 2 - \sqrt{3} = 0$.

$$3\sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin x = 2\sqrt{5} \cos(x + \varphi), \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$$

$$\left(\cos \varphi = \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}} \right).$$

Получаем уравнение $\cos(x + \varphi) = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$, откуда $x = \pm \arccos \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} - \varphi + 2\pi k$.

Пусть $\arccos \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} = a$.

Легко видеть, что $a > \varphi$. На отрезок $[0, 2\pi]$ попадают два значения $a - \varphi$ и $2\pi - a - \varphi$. Найдем $\cos(a - \varphi)$.

Поскольку $\cos a = \frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}, 0 < a < \frac{\pi}{2}, \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \sqrt{\frac{13-4\sqrt{3}}{20}} = \frac{2\sqrt{3}-1}{2\sqrt{5}}$, то $\cos(a - \varphi) = \cos a \cos \varphi + \sin a \sin \varphi = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} = \cos \frac{\pi}{12}$.

Значит, $a - \varphi = \frac{\pi}{12}, a = \frac{\pi}{12} + \varphi = \frac{\pi}{12} + \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$.

Поскольку $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} < \frac{\pi}{4}$, то $2\pi - a - \varphi = 2\pi - \left(\frac{\pi}{12} + \varphi\right) - \varphi = \frac{23}{12}\pi - 2\varphi > \frac{23}{12}\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{17}{12}\pi$. При $x = 0$ левая часть отрицательна, в точке $x = \frac{\pi}{12}$ меняют знак оба множителя, в остальных - по одному. Теперь выписываем ответ на периоде, а затем периодически его продолжаем.

Ответ: $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi k, \frac{5\pi}{12} + 2\pi k \leq x \leq \frac{13\pi}{12} + 2\pi k,$

$\frac{17\pi}{12} + 2\pi k \leq x \leq \frac{23\pi}{12} - 2\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

2. Графический метод решения тригонометрических неравенств.

На практике довольно часто оказывается полезным графический метод решения неравенств. Рассмотрим суть метода на примерах.

Пример 1. Решить неравенство: $\cos x - 3x + 1 \geq 0$.

Решение. При решении неравенств таким методом необходимо как можно более точно построить графики функций. Преобразуем данное неравенство к виду: $\cos x \geq 3x - 1$.

Построим в одной системе координат графики функций $y = \cos x$ и $y = 3x - 1$ (рисунок 2).

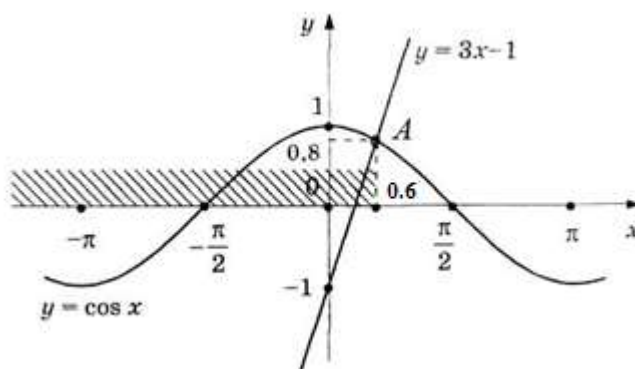


Рисунок 2 – Система координат

Графики функций пересекаются в точке А с координатами $x \approx 0.6$; $y \approx 0.8$. На промежутке $(-\infty; 0.6)$ точки графика $y = 3x - 1$ ниже точек графика $y = \cos x$. А при $x \approx 0.6$ значения функции совпадают. Поэтому $\cos x \geq 3x - 1$ при $x \leq 0.6$.

Ответ: $(-\infty; 0.6]$

Пример 2. Решить неравенство $\sin x < 2x - 1$.

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = \sin x$ и $y = 2x - 1$ (рисунок 3).

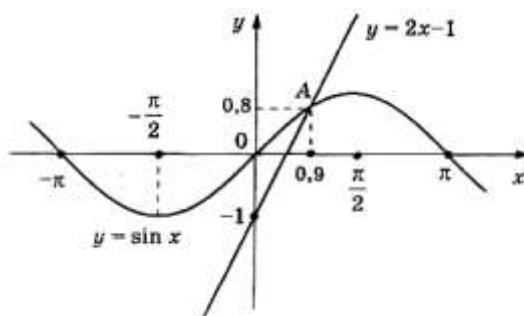


Рисунок 3 – Система координат

Графики функций пересекаются в точке $A (x \approx 0.9, y \approx 0.8)$. На промежутке $(0,9; +\infty)$ точки графика $y = 2x - 1$ выше точек графика $y = \sin x$. Значит $\sin x < 2x - 1$ при $x > 0.9$.

Ответ: $(0,9; +\infty)$.

3. Решение тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности.

В школьном курсе математике чаще всего решают неравенства, приводящиеся к виду $f(x) > a$, (или $f(x) < a$), где $f(x)$ – одна из тригонометрических функций с помощью единичной окружности или графика функции.

При решении тригонометрических неравенств используют монотонность тригонометрических функций, а также промежутки их знакопостоянства.

Важным моментом является знание:

Таблица 1 – Частные случаи решения тригонометрических уравнений

$\sin x = 0$, если $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\sin x = -1$, если $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\sin x = 1$, если $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\sin x > 0$, если $2\pi k < x < \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\sin x < 0$, если $-\pi + 2\pi k < x < 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.	$\cos x = 0$, если $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\cos x = -1$, если $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\cos x = 1$, если $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\cos x > 0$, если $2\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $\cos x < 0$, если $2\pi k + \frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
$\operatorname{tg} x > 0$, если $\pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; $\operatorname{tg} x < 0$, если $\pi k - \frac{\pi}{2} < x < \pi k, k \in \mathbb{Z}$;	

Тангенс не существует, если $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 1. Решить неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$.

Решение. На единичной окружности строим дуги AC и AC₁, синус которых равен $\frac{1}{2}$ (рисунок 4). Из рисунка видно, что данному неравенству удовлетворяют все дуги, начала которых находится в точке A, а конец – которых находится в точке дуги CBC₁ т.е. $\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$. Чтобы получить все решения данного неравенства достаточно к концам этого промежутка прибавить $2\pi k$.

Окончательный ответ: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

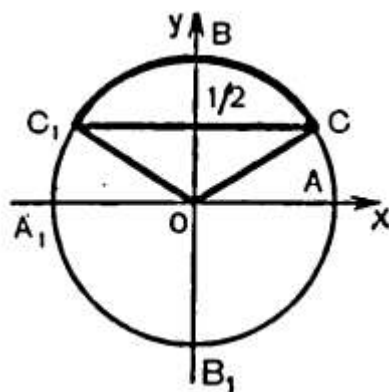


Рисунок 4 – Единичная окружность

Для решения данного неравенства можно применить графический способ. Для этого строим графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{1}{2}$ (рисунок 5).

Из рисунка видно, что прямая $y = \frac{1}{2}$ пересекает синусоиду в бесконечном числе точек.

На рисунке выделены несколько промежутков значений аргумента, удовлетворяющих данному неравенству, один из них $(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6})$. Воспользовавшись периодичностью функции $y = \sin x$, запишем окончательный ответ:

$$\frac{\pi}{6} + 2\pi k < x < \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

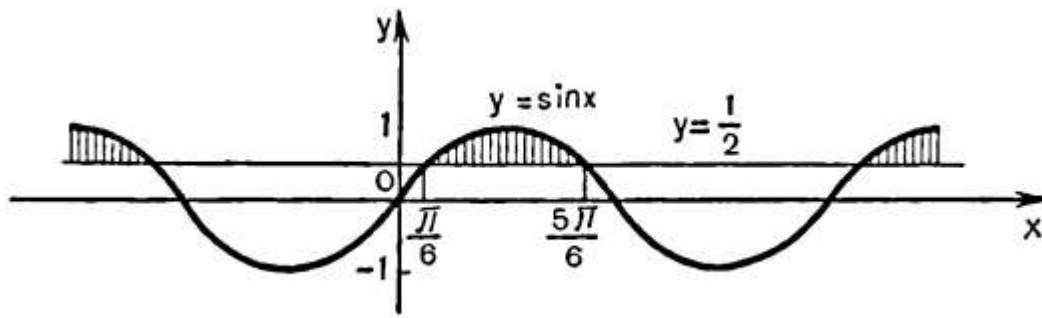


Рисунок 5 – Система координат

Рассмотрим подробно более сложное тригонометрическое неравенство, сводящееся к простейшему.

Пример 2. Решить неравенство $6 \sin^2 x - 5 \sin x + 1 \geq 0$.

Решение. Сделав замену $y = \sin x$, $y \in [-1; 1]$, получим, что

$$6y^2 - 5y + 1 \geq 0.$$

Найдем решение неравенства. Так как $y = \frac{1}{3}$ и $y = \frac{1}{2}$ корни квадратного трехчлена $6y^2 - 5y + 1$, то это неравенство равносильно неравенству

$$6(y - \frac{1}{3})(y - \frac{1}{2}) \geq 0.$$

Решая его методом интервалов, получим, что $y \leq \frac{1}{3}$ или $y \geq \frac{1}{2}$.

Возвращаясь к замене, приходим к неравенствам: $\sin x \leq \frac{1}{3}$ или $\sin x \geq \frac{1}{2}$.

Для решения неравенства $\sin x \leq \frac{1}{3}$ используем единичную окружность (рисунок 6). Исходя из рисунка, видим, что x принимает значения от $-\pi - \arcsin \frac{1}{3}$ до $\arcsin \frac{1}{3}$. Чтобы получить все решения этого неравенства, достаточно к концам указанного промежутка прибавить $2\pi k$.

Получаем $-\pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k \leq x \leq \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Для решения неравенства $\sin x \geq \frac{1}{2}$ используем также единичную окружность (рисунок 7).

Неравенству удовлетворяют значения: $\frac{\pi}{6} + 2\pi k \leq x \leq \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Решением исходного неравенства является объединение решений неравенств $\sin x \leq \frac{1}{3}, \sin x \geq \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left[2\pi k + \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \right] \cup \left[2\pi n - \pi - \arcsin \frac{1}{3}; \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi n\right], k, n \in \mathbb{Z}$.

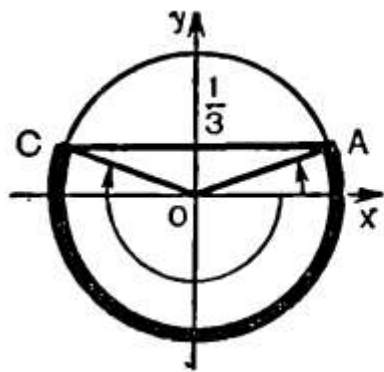


Рисунок 6 – Единичная окружность

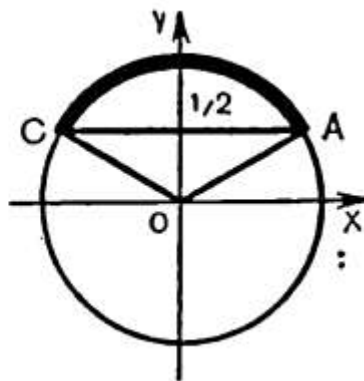


Рисунок 7 – Единичная окружность

Глава II. Методические особенности изучения тригонометрических уравнений и неравенств

§4. Технологическая карта: «Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители»

Тема: «Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители».

Цель: сформировать навыки решения тригонометрических уравнений методом разложения на множители;

Планируемые результаты:

Личностные: развитие самостоятельности, трудолюбия, организованности, навыков самоанализа и самоконтроля при оценивании результата и процесса собственной деятельности.

Метапредметные: формирование информационной, коммуникативной и учебной компетентности учащихся, умения применять имеющиеся знания при решении задач в новой учебной ситуации.

Предметные: формирование умения искать и выделять информацию, необходимую для решения тригонометрических уравнений; формирование умений решать тригонометрические уравнения методом разложения на множители.

Тип урока: урок открытия новых знаний.

Структура и ход урока:

№	Этап урока	Деятельность учителя	Деятельность учеников	УУД
1	Организационный момент.	Приветствие учащихся, организация рабочего места. Знакомство с листом оценивания	Приветствуют учителя, организуют свое рабочее место, демонстрируют готовность к уроку. Знакомятся с листом оценивания.	<i>Личностные УУД:</i> Развитие умения организовать рабочую среду. Развитие доброжелательности и эмоциональной отзывчивости. Развитие эстетического сознания.
2	Проверка домашнего задания.	На слайде представлены уравнения, также представлены ответы. Проведите соответствие правильность решенных примеров: $1.2\cos x = 1,$ Ответ: $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$ $2.\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$	Смотрят на доску, отмечают правильные ответы.	<i>Личностные УУД:</i> Формирование навыков самоконтроля и добросовестного отношения к учению, умения управлять своей познавательной деятельностью.

		<p>Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$</p> <p>3. $\sin(\pi - x) = \frac{1}{2}$,</p> <p>Ответ: $(-1)^r \frac{\pi}{6} + \pi r, r \in Z$</p> <p>4. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{3}$</p> <p>Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi l, l \in Z$</p>		
3	Актуализация опорных знаний.	<p>Решите устно уравнения:</p> <p>1) $3x - 5 = 7$, ответ: 4</p> <p>2) $x^2 - 8x + 15 = 0$, ответ: 3; 5</p> <p>3) $4x^2 - 4x + 1 = 0$, ответ: 0,5</p> <p>4) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$, ответ: $\pm 2; \pm 1$</p> <p>5) $3x^2 - 12 = 0$, ответ: ± 2.</p> <p>Упростите выражения:</p> <p>1) $(\sin \alpha - 1)(\sin \alpha + 1)$</p> <p>Ответ: $-\cos^2 \alpha$</p> <p>2) $\sin^2 \alpha - 1 + \cos^2 \alpha$</p> <p>Ответ: 0</p>	Решают устно задания, проверяют ответы с помощью слайда.	<p><i>Личностные УУД:</i></p> <p>Формирование навыков самоконтроля и самооценки, добросовестного отношения к учению, умения управлять своей познавательной деятельностью</p> <p><i>Познавательные УУД:</i></p> <p>структурирование знаний</p> <p><i>Регулятивные УУД:</i></p> <p>планирования своей деятельности, нахождения алгоритма решения,</p>

		$3)\sin^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha + \cos^2\alpha$ Ответ: 2 $4)\sqrt{1 - 2\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}$ Ответ: $ 1 - \operatorname{tg}\alpha $		проверка и оценивание конечного результата
4	Постановка темы и целей урока.	1. На слайде представлены тригонометрические уравнения, выберете, те которые вы на данном этапе урока можете решить. $\sin x \cdot \cos x = 0,25$ $8\cos 2x + 6\sin nx - 3 = 0$ $\sin x - \cos x = 0$ $\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 2\cos^2 x = 0$ $\cos^2 x + \cos x = 0$ $3\sin 2x - \sin x + 4$ Какие задания вы можете выполнить, какие нет? Почему? Какова, по-вашему мнению, тема урока?	Выбирают уравнения, говорят свои варианты ответов.	<i>Личностные УУД:</i> Воспитание целеустремленности, трудолюбия, самостоятельности <i>Познавательные УУД:</i> структурирование знаний, использование и применение полученных ранее знаний <i>Регулятивные УУД:</i> формирование умений целеполагания

		<p>Какова его цель?</p> <p>2.Сегодня на уроке нам предстоит познакомиться с новым видом тригонометрических уравнений.</p> <p>Предлагает учащимся самостоятельно назвать тему урока и сформулировать цели.</p>	<p>Формулируют тему и цели урока.</p>	
--	--	---	---------------------------------------	--

5	Основной этап работы по теме (работа в группах)	<p>Распределите уравнения, представленные в карточке, которые вы не можете пока решить на две группы. Объясните принципы такой группы.</p> <p>Как вы считаете, какие знания могут помочь решить эти задания? (используются формулы двойного аргумента, уравнение лучше решать разложением на множители, квадратное уравнение относительно $\cos x$, заменой переменной) Обсудите в группах способы решения данных уравнений.</p> <p>(Далее, совместная выработка стратегии решения).</p>	<p>Принимают информацию.</p> <p>Записывают в рабочую тетрадь уравнения и распределяют их в две группы.</p> <p>Записывают алгоритм решения тригонометрических уравнений методом разложения на множители в рабочую тетрадь и формулы, которые применяли при</p>	<p><i>Личностные УУД:</i> Формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками и взрослыми</p> <p><i>Познавательные УУД:</i> Умение анализировать, проводить классификации, точно и грамотно выражать свои мысли, с применением математической терминологии и символики; проводить логические обоснования.</p> <p><i>Регулятивные УУД:</i> формирование умений создавать обобщение, устанавливать аналогии, классифицировать,</p>
---	---	---	---	---

		<p>Решите задания (работа с учебником стр. 190, 191).</p> <p>1. Примените разработанный алгоритм для решения уравнений, взаимопроверка.</p>	<p>решении тригонометрических уравнений.</p> <p>Называют известные им источники и методы поиска информации и знакомятся с предложенной учителем последовательность ю действий.</p> <p>Записывают решение уравнения в рабочую тетрадь.</p> <p>Сверяют свою запись с записью на доске</p>	<p>самостоятельно выбирать критерии для классификации, строить логич еские рассуждения, делать выводы;</p> <p>умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность</p>
--	--	---	---	--

6	Контроль усвоения новых знаний, закрепление материала	<p>Решите уравнения:</p> <p>Работа с учебником №23.6 (а,б), №23.10 (а,б)</p> <p>Дополнительные задания:</p> <ol style="list-style-type: none"> $\sqrt{3}\cos^2 x - \sin x \cdot \cos x = 0$ $(2\cos x + 1)(2\sin x - \sqrt{3}) = 0$ 	<p>Задания выполняются учащимися одновременно у доски и самостоятельно в тетрадях, осуществляется их самопроверка,</p>	<p><i>Личностные УУД:</i></p> <p>Воспитание целеустремленности, трудолюбия, самостоятельности</p> <p><i>Познавательные УУД:</i></p> <p>Умение самостоятельно планировать пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы</p>

			<p>пошаговое сравнение с решением у доски, выявление и корректировка возможных ошибок.</p>	<p>решения учебных и познавательных задач.</p> <p><i>Регулятивные УУД:</i></p> <p>выполняют самостоятельную работу, планируют свою деятельность, правильно оформляют свою работу, проверяют и оценивают конечный результат.</p>
7	Задание на дом	<p>Запись домашнего задания: §23, пункт 2.</p> <p>№23.6 (в, г), №23.10(в, г)</p> <p>Проанализируйте задания ЕГЭ. Для каких заданий необходимы умения</p>	Обсуждение домашнего задания	

		решать тригонометрические уравнения? Приведите два примера с решениями.		
8	Рефлексия. Подведение итогов.	<p>1. Предлагает оценить факт достижения цели урока: на все ли вопросы найдены ответы.</p> <p>2. Предлагает каждому учащемуся высказать свое мнение в виде 1 фразы.</p> <p>Отмечается успешные ответы учащихся.</p> <p>Предлагает заполнить лист самооценки.</p>	<p>1. Оценивают степень достижения цели, определяют круг новых вопросов.</p> <p>2. Выборочно высказываются, делятся друг с другом мнением.</p> <p>3. Заполняют лист самооценки</p>	<p><i>Регулятивные УУД:</i></p> <p>самостоятельный учет выделенных ориентиров действия в новом учебном материале;</p> <p><i>Коммуникативные УУД:</i></p> <p>формулирование и аргументация своего мнения и позиции в коммуникации.</p>

§5. Методические особенности изучения тригонометрических уравнений и неравенств

При изучении тригонометрических уравнений и неравенств, необходимо уделять большое внимание умению применять тождественные преобразования. Поэтому здесь важны задачи и системы вопросов, связанные с распознаванием применимости того или иного тождества, возможностью приведения уравнения к определенному виду. В частности очень полезны задания, которые предполагают описание плана решения уравнения или неравенства. Также необходимо помнить, что при решении тригонометрических уравнений или неравенств, как и при решении иррациональных уравнений или неравенств, некоторые тождественные преобразования меняют область определения. К таким преобразованиям относят:

$$tg(\alpha + \beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha \cdot tg\beta}; \sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}; \cos\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}; 1 = tg\alpha \cdot ctg\alpha.$$

Если преобразовывать левую часть в правую, то можем потерять корни. Если же, наоборот, из правой части делать левую, то могут появиться посторонние корни.

Если сравнивать тригонометрические уравнения с иррациональными, показательными или с логарифмическими, то здесь больше простейших уравнений. В тригонометрии их 3, а в остальных по одному. К простейшим относятся: $\sin\alpha = a$, $\cos\alpha = a$ и $tg\alpha = a$ ($ctg\alpha = a$).

При решении таких уравнений требуются знания обратных тригонометрических функций для рассмотрения общих формул решения и знания множества частных случаев. К примеру, для уравнения $\cos\alpha = a$ общей формулой нахождения корней является формула $\alpha = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in Z$, частные случаи: $a = -1, \alpha = 2\pi k$; $a = 0, \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$; $a = 1, \alpha = \pi + 2\pi k$.

Что касается неравенств, то особое внимание следует уделить методике обучения решению простейших тригонометрических неравенств, поскольку любое тригонометрическое неравенство сводится к решению простейших. К таким можно отнести неравенства вида $\cos \alpha > a, \cos \alpha \geq a, \cos \alpha < a, \cos \alpha \leq a$, где $|a| < 1$. Основную идею решения простейших тригонометрических неравенств желательно вводить с помощью графиков синуса, косинуса, тангенса и котангенса. И только после этого начать решать тригонометрические неравенства на окружности.

Заметной особенностью изучения простейших тригонометрических уравнений и неравенств является широкое использование графиков. Наглядность на графике помогает при недостаточной уверенности владения обучающимися пользоваться обратными тригонометрическими функциями, которые, в основном, используются только здесь.

§5. Тригонометрические уравнения, неравенства в заданиях ЕГЭ и их анализ

В заданиях ЕГЭ профильного уровня 2021 года модель задачи 12 (ранее задачи 13) не подвергалась ни каким изменениям по сравнению с прошлым годом. Там всё так же дается тригонометрическое уравнение, которое нужно решить, и вторым пунктом произвести отбор корней из данного промежутка или интервала.

Для того что бы решить задачу 12 нужно: уметь решать квадратные уравнения; иметь вычислительные навыки работы с числовыми иррациональными выражениями; знание области значения тригонометрических функций; знание основных тригонометрических формул; владение хотя бы одним из способов отбора корней тригонометрического уравнения из указанного промежутка либо с помощью единичной окружности, либо посредством решения двойного неравенства, либо перебором, с помощью единичной окружности.

Пример. Решить уравнение а) $6 \cos^2 x + 5\sqrt{2} \sin x + 2 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Задача максимально оценивается двумя баллами при верном решении и полном обосновании двух пунктов;

Один балл можно получить в случае если решен один из пунктов задания или при полном решении задания, но при неправильном ответе, который получен по причине вычислительной ошибки.

И 0 баллов ставится во всех остальных случаях.

Можно выделить типичные ошибки учащихся при решении данного типа задания:

1. неточности в формулах корней тригонометрических уравнений;
2. использование формулы корней для функции $y = \sin x$ к $y = \cos x$ и наоборот.

Эти ошибки приводят к тому что, при правильном решении ответ получается неверным.

Например, при решении уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ учащиеся приводят неверное решение $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$, ошибочно используя формулу для корней относительно косинуса;

Неверное решение $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$ вместо верного решения $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$.

Так же распространенной ошибкой является неверное вычисление значения обратной тригонометрической функции: либо неверные значения аркфункций, либо неверное преобразование аркфункций относительно аргумента. Эти ошибки так же приводили к неверному ответу и, следовательно, пункт задачи не был выполнен.

К примеру при решении $\sin x = -\frac{1}{2}$ учащиеся допускали распространенную ошибку: $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ считали равным $-\frac{\pi}{3}$, а не $-\frac{\pi}{6}$.

$\arccos(-a) = \arccos a$ вместо верного ответа $\arccos(-a) = \pi - \arccos a$.

К распространенной ошибке в задании 12 так же можно отнести, то что дети часто теряют корни при переходе от решения простейшего тригонометрического уравнения в общем виде к частному виду.

Например записав верное решение $x = (-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

уравнения $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, упрощая выражение в правой части равенства, учащиеся допускают ошибку: например, записывая $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Так же при решении тригонометрических уравнений при делении на $g(x)$ или при решении уравнения с помощью универсальной подстановки ребята теряют корни, т.к. область определения сужается, и тем самым ответ неверный.

Бывает то, что получаются лишние (посторонние) корни. Это происходит тогда, когда уравнение возводят в четную степень, или при умножении на $g(x)$ (когда избавляются от знаменателя). Происходит расширение области определения.

Трудность вызывают задания, в решении которых получаются иррациональные корни.

Например, получив после замены тригонометрического уравнения уравнение $-6t^2 + 5\sqrt{2}t + 8 = 0$, многие учащиеся останавливаются и бросают задание не выполненным. Если все же ребятам удавалось найти дискриминант $D = 242$, они не провели преобразование $\sqrt{242} = 11\sqrt{2}$ и получили громоздкие корни $t_{1,2} = \frac{-5\sqrt{2} \pm \sqrt{242}}{-12}$, в следствии чего приводило решение в тупик.

Задание 13 ЕГЭ по математике профильный уровень 2021г.

а) Решите уравнение $9 \cdot 81^{\cos x} - 28 \cdot 9^{\cos x} + 3 = 0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ненулевые баллы за это задание получили около 48% участников экзамена 2021 года; максимальный балл-около 38%. Основной проблемой выполнения первого пункта оказалось неумение вводить новую переменную

(ошибка в свойствах степеней), незнание формул решения простейшего тригонометрического уравнения. При выполнении второго пункта участники экзамена демонстрировали небрежность при отборе корней с помощью тригонометрической окружности или неумение отбирать корни.

Приведем несколько примеров задания 12 с решением.

Задание 13. Тренировочная работа. Математика 36 вар..Профильный уровень.Ященко 2021.

а) Решить уравнение $(64^{\sin x})^{\cos x} = 8^{\sin x}$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку

$$\left[-\frac{3\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right].$$

Решение.

а) $(8^{2 \sin x})^{\cos x} = 8^{\sin x} \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = \sin x \Leftrightarrow \sin x (2 \cos x - 1) = 0.$

Отсюда следует, что $\sin x = 0$ или $2 \cos x = 1$. $x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ - решения уравнений.

б) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$n = 0, x = \frac{\pi}{3};$

$n = 1, x = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{13\pi}{3};$

$n = 2, x = \frac{\pi}{3} + 4\pi = \frac{25\pi}{3};$

$n = -1, x = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3}.$

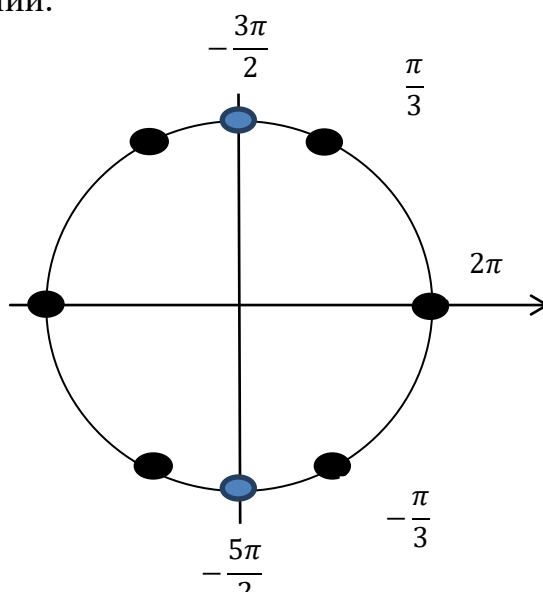


Рисунок 8 – Единичная окружность

$$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

$$n = -1, x = \frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{5\pi}{3};$$

$$n = -2, x = \frac{\pi}{3} - 4\pi = -\frac{11\pi}{3}.$$

$$x = \pi n$$

$$n = -1, x = -\pi; n = -2, x = -2\pi.$$

Ответ: а) $\pi n, n \in Z$; $\pm \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$. б) $-\frac{7\pi}{3}; -\frac{5\pi}{3}; -2\pi$.

Задание 12. Демоверсия ЕГЭ по математике 2021. Профильный.

а) Решите уравнение $\cos x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Решение.

$$\text{а) } \cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x,$$

$$2\sin^2 x - \sin x = 0,$$

$$\sin x (2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin x = 0 \quad \text{или} \quad \sin x = \frac{1}{2}.$$

$$x = \pi n, n \in Z \quad \text{или}$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$$

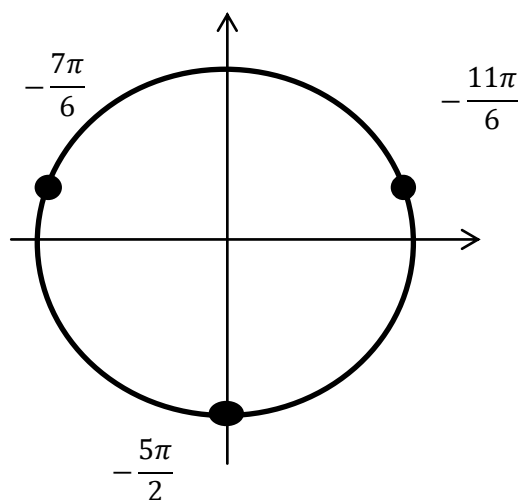


Рисунок 9 – Единичная окружность

б) С помощью единичной окружности отберем корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right]$.

Получаем: $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$.

Ответ: а) $\pi n, n \in \mathbb{Z}; (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. б) $-2\pi; -\frac{11\pi}{6}; -\frac{7\pi}{6}$.

К заданиям повышенного уровня относятся задания второй части 17 и 18 с развернутым ответом (ранее 18 и 19 задания). Максимальный балл (4 балла) получает около 1% участников экзамена 2017 года. Эти задания предусмотрены для конкурсного отбора в вузы с повышенными требованиями к математической подготовке абитуриентов. Для успешного выполнения задания 18 необходим, кроме прочных математических знаний, также высокий уровень математической культуры, которая формируется в течение периода обучения по программе профильного уровня.

Задание 18 проверяло умение решать уравнения и неравенства. Ненулевые баллы за выполнение этого задания получило около 3,5% участников экзамена в 2021 году. Одной из главных проблем в решении этого задания оказалось использование графического метода решения, который как показали работы участников экзамена, недостаточно сформирован при обучении математике – без объяснений и обоснований на координатной плоскости отмечаются какие-то графики, какие-то множества, и считается множество значений параметра (иногда совпадающее с искомым).

Много было таких заданий, в которых на координатной плоскости обозначено, в том числе верно, много объектов, а ответа на поставленный вопрос так и не последовало.

Задача максимально оценивается четырьмя баллами при верном решении и полном обосновании. Три балла оценивается, если с помощью верного рассуждения получены все значения параметра a , но ответ содержит лишнее

значение. Два балла можно получить, если с помощью верного рассуждения получены все решения уравнения. Один балл ставится в случае, если задача сведена к исследованию возможного значения корней уравнения.

Рассмотрим несколько заданий этого типа.

17. ЕГЭ 2021 тренировочная работа.

Найдите все значения x , каждое из которых является решением уравнения

$$\frac{5a\sqrt{3}\sin 4x + (\sqrt{3}-5a)\cos 4x}{6\sin 4x - \sqrt{3}\cos 4x} = 1 \text{ при любом значении } a \text{ из отрезка } [-3\sqrt{2}; 1].$$

Решение. Искомые значения x должны быть среди решений данного уравнения при $a=0$, то есть среди решений уравнения

$$\frac{\sqrt{3}\cos 4x}{6\sin 4x - \sqrt{3}\cos 4x} = 1;$$

Дробь равна 1 тогда, когда и числитель и знаменатель равны между собой. Уравнение примет вид: $\sqrt{3}\cos 4x = 6\sin 4x - \sqrt{3}\cos 4x$. Решив это уравнение, получим $x = \frac{\pi}{24} + \frac{m\pi}{4}, m \in \mathbb{Z}$.

Пусть некоторое $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ - решение данного уравнения. Тогда равенство $\frac{5a\frac{\sqrt{3}}{2} + (\sqrt{3}-5a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{6\cdot\frac{1}{2} - \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$ при всех a из отрезка $[-3\sqrt{2}; 1]$ выполняется.

Следовательно, все значения $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условию задачи.

Пусть некоторое $x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ решение данного уравнения. Тогда равенство $\frac{-5a\frac{\sqrt{3}}{2} - (\sqrt{3}-5a)\frac{\sqrt{3}}{2}}{-6\cdot\frac{1}{2} + \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$ при всех a из отрезка $[-3\sqrt{2}; 1]$ выполняется.

Следовательно, все значения $x = \frac{7\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

17. При каких значениях параметра a уравнение $\cos x = x^2 + a$ имеет единственное решение.

Решение. Слева и справа в данном уравнении стоят функции разных типов. Слева функция тригонометрическая. Справа - алгебраическая, степенная.

Так как в уравнении присутствуют функции разных типов, то аналитически уравнение не решается. Решаем методом оценки с помощью графиков.

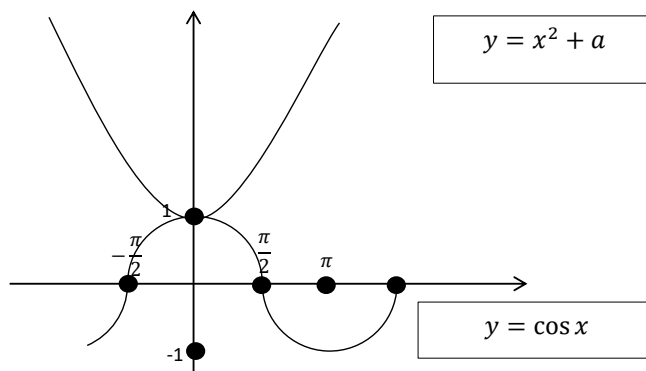


Рисунок 10 – Система координат

Графиком функции $y = \cos x$ является кривая косинусоида.

Графиком функции $y = x^2 + a$ парабола, ветви которой направлены вверх. Так как функция задается через параметр, то расположение параболы меняется по оси y вверх и вниз.

При $a=1$ уравнение $\cos x = x^2 + a$ имеет единственное решение.

17. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$ имеет ровно восемь различных решений.

Решение. $\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$

$\cos t = 1, t = 2\pi n$, значит, $\sqrt{a^2 - x^2} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Графиком функции $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ является полуокружность с $R = |a|$, а графиком функции $y = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$ является прямая. Построим на координатной прямой эти графики так, что бы получить восемь точек пересечения.

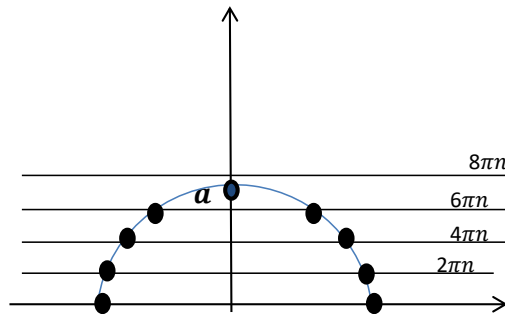


Рисунок 11 – Система координат

Значит, если $6\pi n \leq a \leq 8\pi n$, то уравнение $\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$ имеет восемь различных решений.

Заключение

Итак, можно сделать следующие выводы: раздел тригонометрии в школьном курсе неотъемлемый элемент экзамена по математике. При решении задач на тему «Тригонометрические уравнения и неравенства» требуется использование различных методов, проверяется умение грамотно проводить преобразования.

Для успешного решения уравнений и неравенств необходимо знать универсальные правила и методы решения тригонометрических уравнений, формулы корней простейших тригонометрических уравнений, значения тригонометрических функций для основных углов и значения обратных тригонометрических функций.

Изучение тригонометрических уравнений и неравенств позволяет учащимся овладеть конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, развития умственных способностей, умений извлекать учебную информацию на основе сопоставленного анализа графиков. Это необходимо для решения заданий ЕГЭ, которые содержат тригонометрические уравнения, неравенства, а так же комбинированные уравнения.

Трудности у учеников могут возникнуть при нахождении ОДЗ в тригонометрических уравнениях и неравенствах, в определении метода решения, в отборе корней.

В выпускной квалификационной работе рассмотрены методы решения тригонометрических уравнений, неравенств, причем как специфические, характерные только для тригонометрических уравнений и неравенств, так и общие функциональные методы решения уравнений, применительно к тригонометрическим уравнениям и неравенствам.

В школьном курсе на изучение раздела тригонометрии уделяется мало времени, в учебниках показаны не все методы решения.

Выпускная квалификационная работа по теме «Тригонометрические уравнения, неравенства» может быть использована в работе с учащимися на уроках и факультативных занятиях.

Список используемой литературы

1. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и углубленный уровни / Алимов А.Ш. [и др.] . М.: Просвещение, 2016. 385 с.
2. Алгебра и начала математического анализа 10 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профильный уровни / Колягин Ю. М. [и др.] . М.: Мнемозина, 2009. 368 с.
3. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс учебник базовый и профильный уровни / Никольский С.М. [и др.] . М.: Просвещение, 2009. 436 с.
4. Гусев В. А., Мордкович А. Г. Справочные материалы. М.: Просвещение, 1990. 416 с.
5. Колмогоров А.Н. Алгебра и начала математического анализа 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений. М.: Просвещение, 2008. 384 с.
6. Литвиненко В.Н., Мордкович А.Г. Практикум по элементарной математике. Алгебра. Тригонометрия : учеб. пособие. М.: Просвещение, 1995. 352 с.
7. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа 10-11 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый уровень. М.: Просвещение, 2013. 353 с.
8. Тригонометрия. 10 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Макарычев Ю.Н. [и др.] . М.: Просвещение, 2012. 61 с.
9. ФГОС – что такое? Требования образовательного стандарта. URL : <http://fb.ru/article/226194/fgos---chto-takoe-trebovaniya-obrazovatel'nogo-standarta> (дата обращения: 12.02.2022).
10. Ященко И.В., Высоцкий И.Р, Коновалов Е.А. ЕГЭ 2021 математика профильный уровень 36 вариантов: сборник типовых тренировочных вариантов; под ред. Ященко И.В. М.: Национальное образование, 2021. 256 с.

11. Яценко И.В., Семенов А.В., Высоцкий И.Р. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2021 года по математике // Педагогические измерения. 2021. №4. С. 23-43.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
« 05 » 10 20 21 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Кисловой Светланы Александровны

Тема работы «Методические аспекты изучения тригонометрии в школе»

Утверждена приказом по Университету от «27» декабря 2021 г. № 1057/о.

Срок сдачи студентом законченной работы « 4 » июня 20 22 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Анализ научной и учебно-методической литературы по теме исследования.	Октябрь - ноябрь 2021	выполнено
2.	Изложение методов решения тригонометрических уравнений.	Декабрь 2021	выполнено
3.	Изложение методов решения тригонометрических неравенств.	Январь 2022	выполнено
4.	Разработка технологической карты урока на тему: «Решение тригонометрических уравнений методом разложения на множители».	Февраль 2022	выполнено
5.	Анализ заданий из ЕГЭ, связанные с разделом тригонометрии.	Март – апрель 2022	выполнено
6.	Оформление текста работы.	Май – июнь 2022	выполнено
7.	Подготовка презентации и выступления.	Июнь 2022	выполнено

Дата выдачи задания « 5 » 10 2021 г.

Руководитель Никитина Никитина О.Г.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

Кислова Кислова С.А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Кисловой Светланы Александровны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Кислова Светлана Александровна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Методические аспекты изучения тригонометрии в школе», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


ПОДПИСЬ
12.06.22
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 12.06.22
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР 
ПОДПИСЬ О.Г. Никитина

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Методические аспекты изучения тригонометрии в школе»

студентки 4 курса Кисловой Светланы Александровны
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
профиля «Математика»

Руководитель ВКР Никитина Ольга Геннадьевна



Отчет о проверке на заимствования №1



Автор: Кислова Светлана Александровна
Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна
Организация: Пензенский государственный университет
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - <http://online.antiplagiat.ru>

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 67
Начало загрузки: 12.06.2022 20:09:34
Длительность загрузки: 00:00:16
Имя исходного файла: ВКР Кислова.docx
Название документа: ВКР Кислова
Размер текста: 48 кБ
Тип документа: Выпускная квалификационная работа
Символов в тексте: 49151
Слов в тексте: 6516
Число предложений: 350

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 12.06.2022 20:09:50
Длительность проверки: 00:00:58
Комментарий: не указано
Поиск с учетом редактирования: да
Модули поиска: Цитирование, eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ, Диссертации НББ, Сводная коллекция РГБ, ИПС Адилет, Библиография, Перефразирование по eLIBRARY.RU, Сводная коллекция ЭБС, Интернет Плюс, Медицина, Издательство Wiley, СМБ России и СНГ, Модуль поиска "ТГУ"



ЗАИМСТВОВАНИЯ
43,92%

САМОЦИТИРОВАНИЯ
0%

ЦИТИРОВАНИЯ
0,58%

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
55,94%

12.06.2022

ДД.ММ.ГГГГ.

ПОДПИСЬ

О.Г. Никитина

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методические аспекты изучения тригонометрии в школе»
студентки Кисловой Светланы Александровны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование,
профиль подготовки «Математика», гр. 18ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Кисловой Светланы Александровны посвящена методическим аспектам изучения тригонометрии в школе.

Учебный материал, связанный с тригонометрией, один из самых сложных для учащихся в школьной программе по математике. Вместе с тем, тригонометрические уравнения встречаются во многих областях: при решении задач по планиметрии, стереометрии, физике и в других областях.

Цель работы состоит в выявлении методических особенностей обучения учащихся тригонометрии в курсе школьной математики.

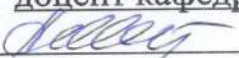
Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, заключения и списка литературы.

Основная часть состоит из двух глав. В первой главе рассмотрены особенности изучения тригонометрии в школьном курсе математики: методика изучения тригонометрии в условиях реализации ФГОС, проведен анализ учебников по данной теме, рассмотрены особенности изучения тригонометрических уравнений и неравенств и методов их решения.

Во второй главе разработана технологическая карта урока, разработаны методические особенности изучения тригонометрических уравнений и неравенств, рассмотрены и проанализированы задания по разделу тригонометрия в ЕГЭ.

Работа Кисловой С.А. является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован автором при работе в школе.

Выпускная квалификационная работа Кисловой Светланы Александровны заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель ВКР доцент кафедры «Математическое образование»,
к.ф.-м.н.  Никитина Ольга Геннадьевна