

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**

**«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

**«Особенности изучения начальных сведений планиметрии на основе системы
аксиом А. Д. Александрова»**

Студент

 21.04.25
(подпись, дата)

Щеглова Кристина Денисовна
(ФИО полностью)

Руководитель

 21.04.25
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

 15.06.25
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 01.06.26 № 10)

И.о. заведующего кафедрой

 01.06.26
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отл (протокол заседания ГЭК от 25.06.26 № 11)

Секретарь ГЭК

 25.06.26
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
ГЛАВА 1 СИСТЕМА АКСИОМ А. Д. АЛЕКСАНДРОВА	7
1.1 Основные понятия.....	7
1.2 Линейные аксиомы	10
1.3 Плоскостные аксиомы	15
1.4 Аксиоматика фигуры.....	22
1.5 Треугольники, равенство треугольников	24
1.6 Параллельные отрезки и прямые.....	27
ГЛАВА 2 ОРГАНИЗАЦИЯ ИЗУЧЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ СВЕДЕНИЙ ПЛАНИМЕТРИИ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ АКСИОМ А. Д. АЛЕКСАНДРОВА.....	34
2.1 Факультативные занятия по математике в современном школьном образовании	34
2.2 Программа факультативного курса «Аксиоматический детектив: геометрия без свидетелей»	36
2.3 Конспекты занятий в рамках факультативного курса	69
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	85
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	86

ВВЕДЕНИЕ

Геометрия возникла из практики, как способ осмысления окружающего пространства и формы предметов. Ее истоки тесно связаны с практическими нуждами – измерением земель, поэтому и само слово «геометрия» означает «землемерие». Таким образом, основы геометрии, особенно геометрии на плоскости – планиметрии, берут свое начало именно из практической деятельности [10]. Поэтому, логическое обоснование геометрии должно наиболее точно отражать эту практику, хотя и в идеализированной форме.

Первые известные свидетельства геометрии относятся к древним цивилизациям Египта, где геометрия использовалась преимущественно для земледелия. В Египте разливы Нила регулярно уничтожали земельные границы, требуя точных измерений для их восстановления. Восстановлением границ занимались специальные люди – землемеры, которых можно назвать первыми геометрами. Они пользовались веревками, которые можно протянуть между двумя воткнутыми колышками в землю. Поэтому из практики измерения земель возникли фундаментальные геометрические понятия – точка и отрезок.

Обширные знания египтян о геометрии были заимствованы греками в VII–V веках до н. э. Греки называли египетских землемеров «герпедонаптами» («веревковязателями»). При этом если в Египте геометрия носила сугубо прикладной характер, то в Греции она превратилась в полноценную математическую теорию. Имена великих греческих геометров – Фалеса, Пифагора, Евклида, Архимеда и многих других – остаются известными до наших дней. Славу Евклиду принес его собирательный труд «Начала». Именно в книге «Начала» Евклид впервые применил аксиоматический метод.

На данный момент учебник по геометрии для 7 – 9 классов, который соответствует государственным образовательным стандартам, является учебник Л. С. Атанасяна [7]. В данном учебнике достаточно доступный стиль подачи материала, что облегчает восприятие основных положений и понятий

планиметрии учащимися, учебник ориентирован больше на визуальные представления. Акцент делается на развитие воображения и формирование элементарных навыков рассуждения.

Несмотря на популярность и удобство учебника Л. С. Атанасяна, существуют альтернативные взгляды на изложение и содержание учебного материала. Одним из примеров является учебник А. Д. Александрова ([1], [4]), построенный на иной концепции. Данный учебник выделяется своей направленностью на точность и систематичность изложения. Автор уделяет особое внимание строгим доказательствам и последовательному выводу всех утверждений на основе простой системы аксиом. Подобный подход призван развивать умение рассуждать логично и формировать глубокие знания по предмету.

Хотя учебник А. Д. Александрова не относится к числу современных пособий, используемых повсеместно в школах, он сохраняет свое значение как образец строгого научного метода преподавания геометрии. Система аксиом Александрова выделяется своим вниманием к деталям и ясностью структуры, обеспечивая прочную основу для глубокого понимания теории. Использование такого подхода могло бы стать полезным дополнением к стандартному курсу, давая учителям возможность развивать у школьников навыки критического мышления и умение ясно выражать свои мысли в математике. Ознакомление с системой аксиом А. Д. Александрова полезно, как и педагогам, так и ученикам, стремящимся к глубокому освоению науки. Применение элементов обеих методик способно обеспечить баланс между доступной практикой и научно обоснованной теорией, что станет залогом качественного образования в области геометрии. Все вышесказанное определяет актуальность выпускной квалификационной работы.

Объект исследования: процесс обучения системы аксиом А. Д. Александрова

Предмет исследования: особенности изучения начальных сведений планиметрии на основе системы аксиом А. Д. Александрова на факультативных занятиях.

Цель исследования заключается в разработке факультативного курса по изучению начальных сведений планиметрии, основанного на системе аксиом А. Д. Александрова.

Для реализации поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

- 1) провести анализ научной и учебно-методической литературы по тематике исследования;
- 2) рассмотреть и изложить аксиомы А. Д. Александрова и ближайшие следствия;
- 3) разработать рабочую программу факультативного курса, посвященного изучению начальных сведений планиметрии на основе системы аксиом А. Д. Александрова;
- 4) разработать конспекты двух факультативных занятий.

Практическая значимость работы заключается в возможности внедрения разработанного факультативного курса в образовательный процесс средних общеобразовательных учреждений. Предлагаемый дополнительный факультативный курс, основанный на системе аксиом А. Д. Александрова, направлен на расширение возможностей школьного обучения геометрии путем введения более точного и структурированного подхода к изложению материала, что позволит развить у учащихся способности к логическому мышлению и целостному восприятию геометрической науки. Он позволит существенно расширить рамки традиционного изучения геометрии, предоставив учителю дополнительный инструментарий для повышения качества обучения.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части (две главы), заключения и списка использованных источников.

Во введении кратко представлен исторический аспект возникновения геометрии, обоснована актуальность исследования, т. е. обосновано внедрение факультативного курса, основанного на системе аксиом А. Д. Александрова, приведены объект и предмет исследования, поставлена цель разработки факультативного курса, сформулированы конкретные задачи исследования и раскрыта практическая значимость, направленная на повышение качества обучения.

Первая глава посвящена детальному рассмотрению системы аксиом Александра Даниловича Александрова, лежащей в основе разработанного факультативного курса.

Во второй главе представлен факультативный курс «Аксиоматический детектив: геометрия без свидетелей». Глава включает пояснительную записку с обоснованием актуальности, цели, задач, планируемых результатов и структуры курса. А также даны развернутое тематическое планирование в виде детективных дел, подробное описание содержания каждого занятия и представлены конспекты двух занятий факультативного курса.

В заключении обобщены результаты исследования.

В списке использованных источников представлены 12 источников, ссылки на которые содержатся в тексте работы.

ГЛАВА 1 СИСТЕМА АКСИОМ А. Д. АЛЕКСАНДРОВА

1.1 Основные понятия

Особенностью систем аксиом Александра является ее практическое основание. Основными объектами аксиоматики планиметрии являются точки и отрезки, что соответствует практическим основаниям геометрии, где фигурируют именно отрезки, а не бесконечные прямые.

Система аксиом Александра Σ_A определяет математическую структуру:

$$S = (M_1, M_2; p_1, p_2, p_3) + \Sigma_A$$

Основными объектами являются точки и отрезки:

$M_1 = \{A, B, C \dots\}$ – множество точек

$M_2 = \{a, b, c \dots\}$ – множество отрезков

Основными отношениями являются:

p_1 – «точка служит концом отрезка»

p_2 – «точка лежит на отрезке (или, как еще говорят, лежит внутри отрезка)»

p_3 – «два отрезка равны друг другу (или, что равносильно, один отрезок равен другому)»

Точки традиционно обозначаются заглавными буквами латинского алфавита (например, A, B и др.), а отрезки – строчными буквами (например, a, b и др.). Если точка C лежит на отрезке a , то кратко пишем: C на a (рисунок 1) [5].

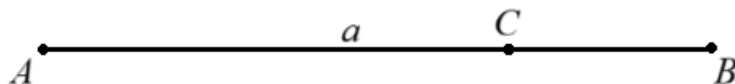


Рисунок 1

Точками отрезка считаются как точки, лежащие непосредственно на нем, так и концы отрезка. Таким образом, точка C принадлежит отрезку a (или является его точкой), если она либо лежит на самом отрезке, либо служит его концом (данное утверждение символически записывается как $C \in a$).

Пользуясь основными понятиями, определим некоторые другие начальные понятия геометрии [3].

1. Отрезок a содержится в отрезке b (в записи: $a \subset b$), если каждая точка отрезка a одновременно является точкой отрезка b (рисунок 2).

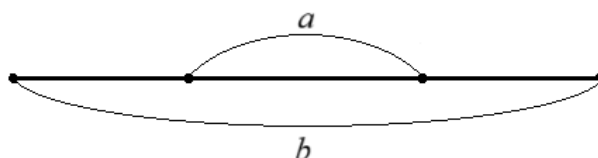


Рисунок 2

2. Отрезки a и b образуют отрезок c (в записи: $a \cup b = c$), когда оба отрезка содержатся в c , и при этом в отрезке c нет ни одной точки, которая не принадлежала бы отрезкам a и b (рисунок 3).

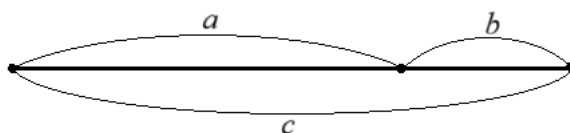


Рисунок 3

3. Отрезок a отложен вдоль отрезка b от его конца A , если отрезки a и b имеют общий конец A , и один из них содержится в другом (в записи: или $a \subset b$, или $b \subset a$). Другими словами, такие отрезки налегают один на другой (рисунок 4).

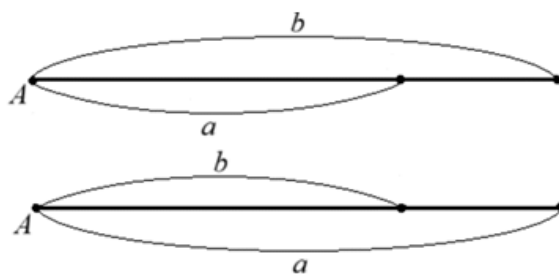


Рисунок 4

4. Два отрезка пересекаются, если у них есть единственная общая точка (рисунок 5).

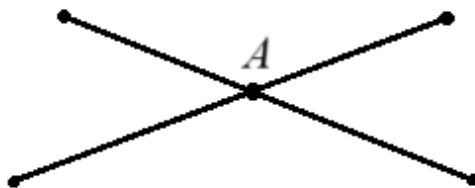


Рисунок 5

Теория излагает основания планиметрии – раздела геометрии на плоскости. Интересно, что само понятие плоскости в этой теории отдельно не вводится. Здесь плоскость воспринимается скорее, как абстрактное пространство, в пределах которого справедливы последующие аксиомы и развивается сама геометрия.

Рассмотрим аксиомы планиметрии системы аксиом А. Д. Александрова [3]. Часть ее утверждений основана на обобщенном опыте практических наблюдений. Помимо этого, в систему включены две особые аксиомы, подчеркивающие базовые свойства отрезков: каждый отрезок имеет ровно два конца, а любая точка, расположенная на нем, разделяет этот отрезок на два новых самостоятельных отрезка.

Важно подчеркнуть, что в системе аксиом понятие отрезка считается базовым и изначальным. Поэтому оно не получает отдельного определения. Вместо этого указываются лишь необходимые свойства отрезков, позволяющие эффективно строить всю последующую геометрическую теорию.

Аксиомы планиметрии объединяют в две категории: линейные и плоскостные. Первая категория включает аксиомы, в которых отсутствует прямое обращение к понятию плоскости, благодаря чему они применимы исключительно к объектам, размещенным на одной прямой. Вторая категория охватывает аксиомы, относящиеся к фигурам, выходящим за пределы одной прямой.

1.2 Линейные аксиомы

Линейные аксиомы разделяются на три важные подгруппы: аксиомы связи, аксиомы равенства и аксиому непрерывности.

Первая подгруппа (I) – аксиомы связи, посвящена отношениям типа «точка лежит на отрезке» либо «является его концом».

Первой среди них выступает аксиома существования (I_1). Она гласит следующее: существует хотя бы один отрезок; у каждого отрезка есть два и только два конца; помимо концов, отрезок содержит другие точки, лежащие на отрезке (рисунок 6).

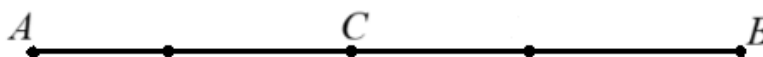


Рисунок 6

Второй является аксиома проведения отрезка (I_2). Любые две точки можно соединить единственным отрезком. Иначе говоря, для любых двух точек существует и притом единственный отрезок, концами которого они служат (рисунок 7).



Рисунок 7

Следующая аксиома – это аксиома деления отрезка (I_3). Она утверждает следующее: любая точка, лежащая на отрезке, делит его на два отрезка, т. е. если C находится на отрезке AB , то отрезки AC и BC образуют вместе отрезок AB , при этом данные отрезки не имеют общих точек кроме C (рисунок 8).



Рисунок 8

Последняя аксиома первой подгруппы – это аксиома соединения отрезков (I_4). Если точка B лежит на отрезке CD , а точка C лежит на отрезке AB , то отрезки AB и CD образуют отрезок AD (рисунок 9).



Рисунок 9

Вторая подгруппа линейных аксиом (II) – это аксиомы равенства. Она посвящена аксиомам, в которых присутствует отношение равенства отрезков.

Первой аксиомой данной подгруппы является аксиома откладывания отрезка (II_1). Она гласит, что при любых двух отрезках AB и MN существует и притом единственный отрезок AC , равный MN и налегающий на отрезок AB . Проще говоря, при любых двух отрезках AB и MN , можно отложить вдоль AB отрезок AC , равный MN , и притом только один (рисунок 10).



Рисунок 10

Второй аксиомой является аксиома сравнения (II_2). Два отрезка, равные одному и тому же отрезку, равны друг другу.

Рассмотрим сравнение двух отрезков. Пусть нам даны два отрезка: AB и MN . Чтобы сравнить их длины, выполним следующий алгоритм: от точки A отложим отрезок AC , длина которого равна длине отрезка MN . Теперь проанализируем взаимное расположение отрезков AC и AB и точек C и B . Если AC содержится в AB и точка C не совпадает с точкой B , то AB больше MN ; если AB содержится в AC и точка C не совпадает с точкой B , то AB меньше MN ; если точка C совпадает с точкой B , то отрезки AB и MN равны (рисунок 11).

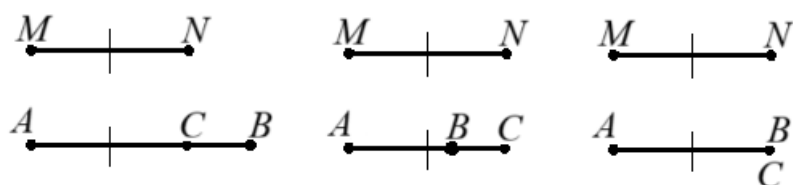


Рисунок 11

Третья аксиома – это аксиома сложения (Π_3). Если точка C лежит на отрезке AB , а точка C_1 лежит на отрезке A_1B_1 и $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, то $AB = A_1B_1$ (рисунок 12).

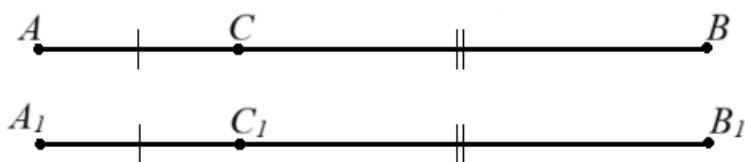


Рисунок 12

Последней в аксиомах равенства является аксиома Архимеда (Π_4). Ее суть состоит в следующем: при любых данных отрезках a и $b = AB$ существует содержащий AB отрезок AA_n , на котором расположены точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ таким образом, что все отрезки $AA_1 = A_1A_2 = \dots = A_{n-1}A_n$ равны отрезку a . Проще говоря, при любых отрезках a и b можно отложить вдоль отрезка b отрезки, равные a , столько раз, что они «покроют» b (рисунок 13).

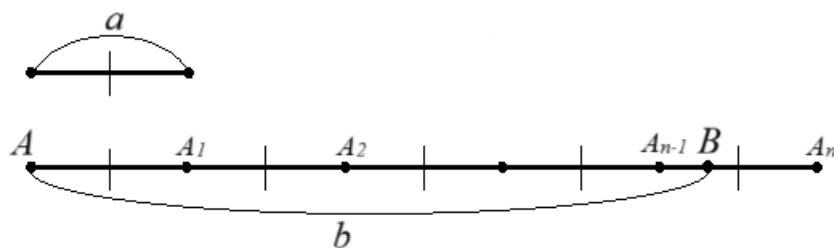


Рисунок 13

В третьей подгруппе только одна аксиома непрерывности – аксиома о вложенных отрезках (III). Если имеется бесконечная последовательность вложенных отрезков, т. е. если выполняется условие $A_1B_1 \supset A_2B_2 \supset \dots$, тогда существует точка, принадлежащая всем данным отрезкам (рисунок 14).



Рисунок 14

Данная аксиома выделяется среди прочих тем, что она не основывается непосредственно на эмпирическом опыте, поскольку касается бесконечно убывающей последовательности отрезков. Суть ее сводится к следующему: если рассмотреть бесконечную цепочку вложенных друг в друга отрезков, таких как $A_1B_1 \supset A_2B_2 \supset \dots$, то обязательно найдется точка, которая будет принадлежать каждому из этих отрезков.

Представим наглядно: на некотором отрезке последовательно выделяются все более короткие отрезки, границы которых приближаются друг к другу. Логично предположить, что если бы между этими границами не существовало общей точки, то такой отрезок нельзя было бы считать цельным и непрерывным – в нем возникал бы некий разрыв. Именно это обстоятельство и устраняет данная аксиома, гарантируя отсутствие разрывов и обеспечивая целостность отрезка.

Разберем понятия продолжения отрезка, луча и прямой. Под продолжением отрезка AB за его конец B подразумевается построение нового отрезка AC , который отличается от исходного отрезка AB и при этом содержит его. Продолжить отрезок AB за оба конца означает построить новый отрезок DC , который так же отличается от первоначального отрезка AB и содержит его внутри себя (рисунок 15).

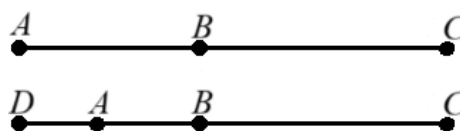


Рисунок 15

Теорема 1 (о продолжении отрезка). Каждый отрезок можно продолжить за любой из его концов на отрезок, равный любому данному.

Доказательство.

Допустим, у нас есть некоторый отрезок AB . Покажем, что его можно продолжить за точку B на любой отрезок.

Выбираем произвольно точку M , лежащую на отрезке AB . Далее строим отрезок MM_1 , равный исходному отрезку AB . Очевидно, что точка M_1 не совпадает с точкой B ($M_1 \neq B$), поскольку иначе возникло бы противоречие с аксиомой о единственности отрезка (аксиома Π_1).

Здесь возможны два варианта расположения точек:

Если $B \in MM_1$, то отрезок AM_1 единственным образом продолжает исходный отрезок AB за точку B .

Если же $M_1 \in MB$, то воспользуемся аксиомой Архимеда. Повторяя процесс откладывания отрезков длиной AB от точки M в направлении точки B ($MM_1 = AB$, $M_1M_2 = AB$, ...), мы неизбежно найдем такую точку M_n , что отрезок AM_n окажется продолжением исходного отрезка AB за точку B (рисунок 16).

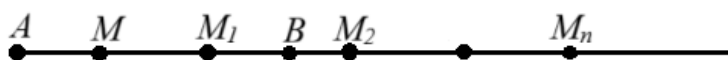


Рисунок 16

Теперь покажем, что отрезок AB можно продолжить за точку B на отрезок, равный некоторому заданному отрезку KN .

Прежде всего, продолжим отрезок AB за точку B произвольным образом, получив новый отрезок AC . Используя аксиому Π_1 вдоль отрезка BC можем отложить единственный отрезок BD , равный нашему заданному отрезку KN . Получился новый отрезок AD , состоящий из исходного отрезка AB и дополнительного отрезка BD , равного заданному отрезку KN .

Итак, мы показали, что любой отрезок можно продолжить за любой из его концов на отрезок, равный любому заданному отрезку (рисунок 17).

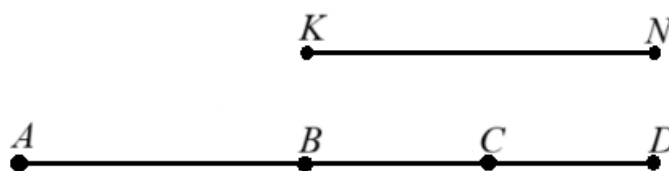


Рисунок 17

Значит, любой отрезок можно продолжить – то есть построить новый отрезок, начинающийся за одним из концов исходного и превосходящий его по длине. Неограниченно продолжать подразумевает возможность неограниченно продолжать на отрезки, которые всегда оказываются больше любого предварительно выбранного.

Именно таким образом определяется луч (также называемый полупрямой): это неограниченное продолжение отрезка AB за его конец B , обозначаемый символом $[AB)$. Соответственно, если отрезок AB продлевается неограниченно за оба своих конца, то образуется прямая.

1.3 Плоскостные аксиомы

Плоскостные аксиомы занимают особое место в системе аксиом планиметрии, предложенной академиком А. Д. Александровым. Всего таких аксиом три, и они получают условные обозначения IV_1 , IV_2 , IV_3 соответственно.

Главное отличие плоскостных аксиом от ранее рассмотренных линейных заключается в предмете их рассмотрения. Если линейные аксиомы ограничиваются изучением объектов, расположенных на одной прямой (таких как точки и отрезки), то плоскостные аксиомы выходят за рамки одномерного пространства и исследуют фигуры, которые невозможно уместить на одной прямой. Речь идет о фигурах, существующих в полном смысле на плоскости, обладающих большей степенью свободы размещения и взаимодействия.

Для удобства анализа и дальнейших выводов вводятся важные понятия, касающиеся относительного расположения точек относительно заданного отрезка a . Рассмотрим эти определения:

1. Одностороннее расположение точек. Точки A и B , а также точки C и D , называются лежащими с одной стороны от отрезка a , если отрезки AB и CD не пересекают ни сам отрезок a , ни любой другой, который содержит отрезок a .

2. Разностороннее расположение точек. Точки P и Q называются лежащими по разные стороны от отрезка a , если отрезок PQ обязательно пересекает либо сам отрезок a , либо какой-либо другой отрезок, содержащий a (рисунок 18).

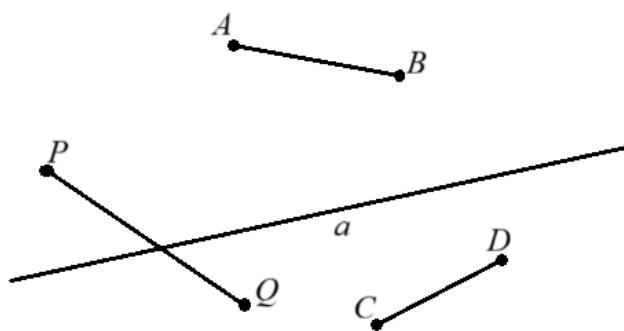


Рисунок 18

Первая плоскостная аксиома известна как аксиома деления плоскости (IV_1). Эта аксиома играет важную роль в понимании устройства евклидова пространства и помогает разобраться, как расположены объекты относительно друг друга.

Она утверждает, что по отношению к каждому данному отрезку a все точки, не лежащие ни на каком отрезке, содержащем a , делятся на два класса. Первый класс объединяет точки, расположенные с одной стороны от отрезка a . Второй класс включает точки, находящиеся с противоположных сторон от отрезка a . Кроме того, аксиома гарантирует, что в каждом классе есть точки (рисунок 19).

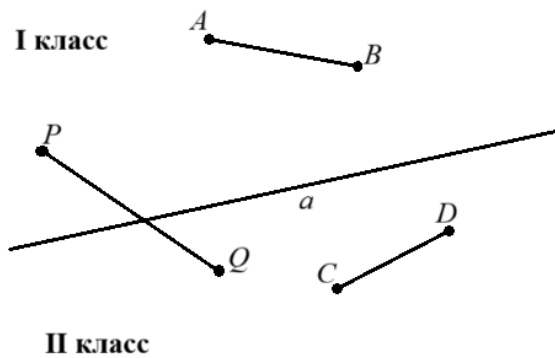


Рисунок 19

Говоря о точках, расположенных «с данной стороны от отрезка a », подразумеваем, что эти точки принадлежат одному из двух возможных классов, возникающих при рассмотрении множества всех точек, не лежащих ни на самом отрезке a , ни на каких-либо других, содержащих a . Класс однозначно задается выбором какой-либо одной точки из этого множества.

Другими словами, выражение «с данной стороны от отрезка a » приобретает точный смысл, когда мы фиксируем какую-либо конкретную точку, не лежащую на a или любом другом отрезке, содержащем a . Именно эта точка и определяет соответствующую сторону. Благодаря этому становятся осмысленными операции, такие как откладывание угла по заданную сторону от какого-либо отрезка.

В рамках аксиоматического подхода Александрова угол определяется следующим образом:

Угол представляет собой упорядоченную пару отрезков, имеющих общий конец. Данные отрезки именуются сторонами угла, а их общий конец — вершиной угла.

Однако в аксиоматике Александрова угол рассматривается с точностью до возможности свободного удлинения или укорочения сторон. Это означает, что вместо исходных отрезков можно брать любые другие отрезки, налегающие на исходные и имеющие ту же самую вершину. Такие альтернативные пары отрезков тоже будут представлять один и тот же угол. Такой подход позволяет

абстрагироваться от конкретных размеров сторон угла и сосредоточиться исключительно на его структуре и взаиморасположении элементов.

Альтернативно угол можно представить как пару лучей, исходящих из одной точки (общего начала), где лучи выступают в качестве сторон угла, а их общее начало – вершиной.

Существуют три возможные конфигурации взаимного расположения двух отрезков, имеющих общий конец (рисунок 20):

1. Оба отрезка располагаются полностью по одну сторону от другого отрезка (кроме общей вершины). Такая конфигурация формирует так называемый настоящий угол.

2. Один отрезок является непосредственным продолжением другого, образуя вместе единую неразрывную линию, соприкасающуюся исключительно в общей вершине. Данная ситуация определяет развернутый угол.

3. Отрезки накладываются друг на друга, находясь на одной прямой, этот случай определяет нулевой угол, который в дальнейшем исключим. Следовательно, термин «угол» всегда будет означать либо настоящий, либо развернутый угол.

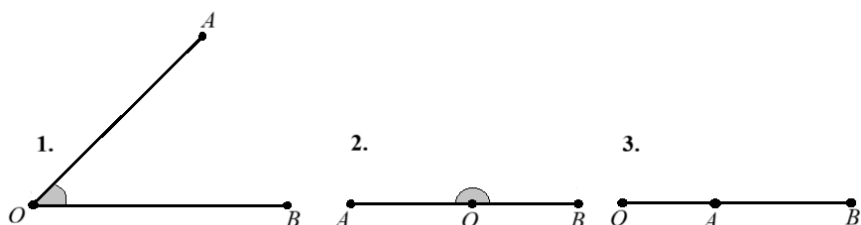


Рисунок 20

Угол обозначается либо вершиной, либо сторонами: $\angle O$ – угол с вершиной O , $\angle ab$ – угол со сторонами a , b (когда же отрезки обозначаются концами, то угол со сторонами OA и OB обозначают $\angle AOB$ или $\angle BOA$).

Если отрезок a является стороной, а его конец A – вершиной настоящего угла, то говорят, что угол отложен от отрезка a именно от его конца A . Сам угол

считается отложенным по ту сторону от отрезка a , где лежит его вторая сторона (естественно, за исключением самой вершины A).

Для определения равенства углов можно воспользоваться понятием поперечины и соответствующим ему определением. Поперечина угла – это отрезок, чьи концы располагаются на сторонах данного угла. Поперечины двух углов называются соответственными, если расстояния от вершин этих углов до концов поперечин равны между собой (т.е. поперечины AB и A_1B_1 углов O , O_1 называются соответственными, если $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$) (рисунок 21).

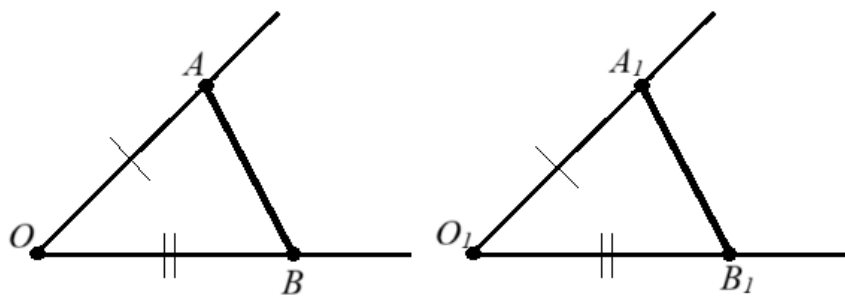


Рисунок 21

Два угла называются равными, если существуют такие соответственные поперечины, которые также равны друг другу (рисунок 22).

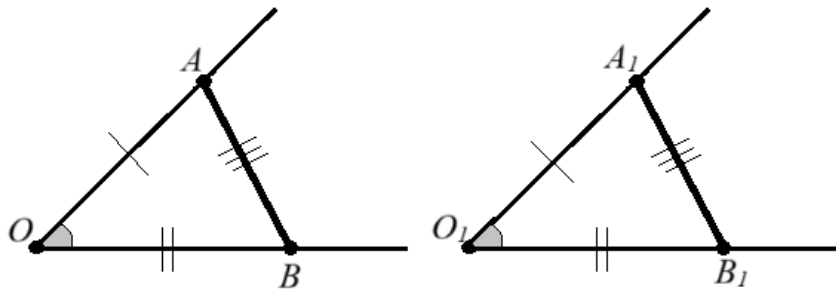


Рисунок 22

Причем выбор конкретной пары поперечин не влияет на установление равенства углов. Достаточно проверить равенство любых двух соответственных поперечин, чтобы подтвердить равенство самих углов.

Таким образом, при сравнении углов O и O_1 , выбрав на сторонах первого угла произвольную поперечину AB , можно уверенно говорить, что равенство этих углов O и O_1 подтверждено с использованием данной поперечины AB .

Второй плоскостной аксиомой является аксиома откладывания угла (IV_2). Данная аксиома утверждает, что от любого отрезка по данную сторону от него, от данного его конца можно отложить угол, равный данному (настоящему) углу. Причем выполнение этой операции возможно с применением любой поперечины, и независимо от выбора поперечины, полученный угол всегда будет оставаться одним и тем же.

Более детально это можно объяснить следующим образом:

Предположим, у нас имеется некоторый угол MON и отрезок O_1N_1 . Мы вправе выбрать любые две точки A и B на сторонах угла MON . Тогда можем сделать следующее: проводим отрезок O_1M_1 таким образом, чтобы он находился с данной стороны от O_1N_1 . При этом выбираем точки A_1 на отрезке O_1N_1 и B_1 на отрезке O_1M_1 так, чтобы выполнялись условия равенства расстояний: $O_1A_1 = OA$, $O_1B_1 = OB$. В результате отрезок A_1B_1 будет иметь ту же длину, что и исходный отрезок AB ($A_1B_1 = AB$). Важным условием является то, что угол $M_1O_1N_1$ останется неизменным (в соответствии с принятым определением угла) вне зависимости от того, какие конкретные точки A и B изначально выбраны на сторонах исходного угла MON (рисунок 23).

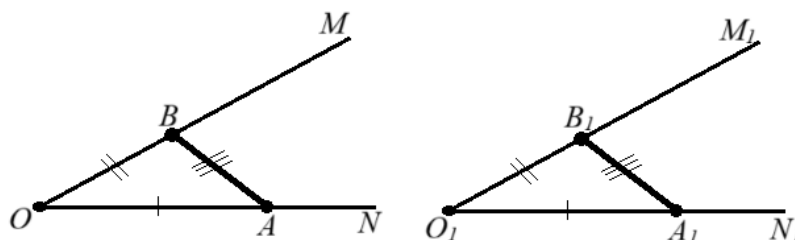


Рисунок 23

Два угла называются смежными, если у них одна сторона общая, а другие образуют вместе один отрезок, на налегая друг на друга (рисунок 24).

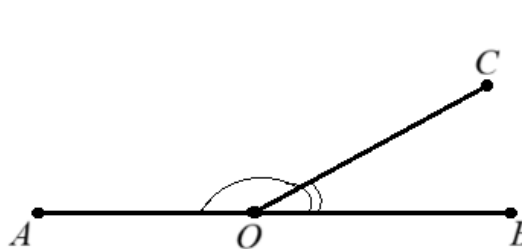


Рисунок 24

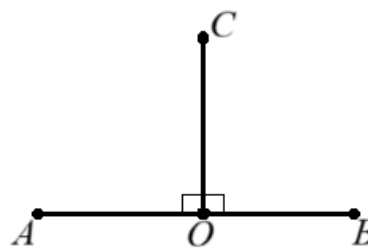


Рисунок 25

Угол, равный своему смежному, называется прямым (рисунок 25).

Третья плоскостная аксиома – это аксиома параллельных отрезков (IV_3). Она формулируется следующим образом: если отрезки AC , BD равны и идут в одну сторону от отрезка AB под прямым углом, то $CD = AB$ (рисунок 26).

Эта аксиома играет значительную роль в формировании представлений о параллельности и симметричности геометрических фигур.

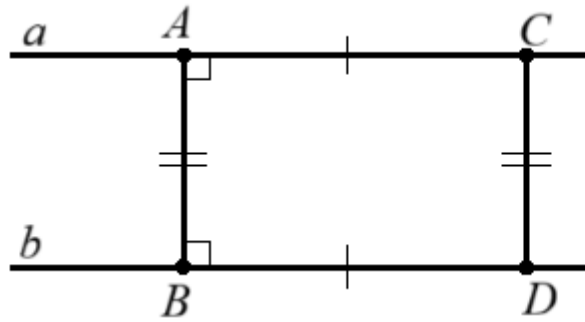


Рисунок 26

Классификация аксиом планиметрии на линейные и плоскостные имеет большое значение для построения геометрической теории. Использование исключительно линейных аксиом позволяет обосновать измерение отрезков, дать точное определение прямой и ввести на ней координаты, тем самым обеспечив взаимосвязь между геометрическим и числовым представлением прямой. Совместное применение линейных и плоскостных аксиом дает возможность построить планиметрию, прежде всего необходимую для установления критериев равенства треугольников. Однако, если ориентироваться на практический смысл аксиом, их можно классифицировать иначе – на пять групп [3].

I. Аксиомы структуры. В них идет речь о строении отрезков и плоскости.

- 1) Аксиома существования (I_1).
- 2) Аксиома деления отрезка (I_3).
- 3) Аксиома соединения отрезков (I_4).
- 4) Аксиома деления плоскости (IV_1).

II. Аксиомы построения. Они описывают возможность основных построений.

- 1) Аксиома проведения отрезка (I_2).
- 2) Аксиома откладывания отрезка (II_1).
- 3) Аксиома откладывания угла (IV_2).

III. Аксиомы измерения. Вместе с аксиомой откладывания отрезка, на них основано измерение отрезков.

- 1) Аксиома сравнения (II_2).
- 2) Аксиома сложения (II_3).
- 3) Аксиома Архимеда (II_4).

Группы IV и V содержат по одной аксиоме каждая:

IV. Аксиома параллельных отрезков (IV_3).

V. Аксиома непрерывности (III). Эта аксиома относится к аксиомам структуры, т. к. говорит о строении – о непрерывности прямой, но выделяется тем, что в ней говорится о бесконечной последовательности отрезков.

1.4 Аксиоматика фигуры

Фигуры в геометрии представляют собой не только комбинации отрезков, но и более сложные формы, такие как окружности и др. Именно поэтому при построении геометрии на основании аксиом неизбежно возникает потребность в четком определении понятия «фигура».

Одним из возможных подходов является следующее утверждение. Фигурой считается то, что обладает свойствами, которые указаны дальше в аксиомах.

Основными объектами выступают точки и фигуры. Основным отношением между ними служит принадлежность точки фигуре (принадлежность точки A фигуре F записывается как $A \in F$).

Аксиомы фигуры определяют общие принципы формирования и идентификации геометрических объектов, называемых фигурами. Ниже представлены три ключевых аксиомы, определяющие сущность и свойства фигур в рамках системы.

Первая аксиома (V_1) заключается в том, что фигура определяется совокупностью принадлежащих ей точек. Если имеются две фигуры F_1 и F_2 такие, что каждая точка, принадлежащая одной из них, принадлежит также другой, и наоборот, то F_1 и F_2 – одна и та же фигура.

Вторая аксиома (V_2) устанавливает следующее: точка сама по себе является фигурой. Она принадлежит себе, и никакие другие точки ей не принадлежат.

Третья аксиома (V_3) гласит, что для любого условия, налагаемого на точки и проверяемого (в принципе) для каждой точки – выполняется оно для нее или нет – существует фигура, содержащая все точки с данным условием и никакие другие.

Предполагается, что условия, сформулированные в аксиоме V_3 , выражаются через основные понятия принятой аксиоматики геометрии. К примеру, отрезок является фигурой вследствие того, что согласно аксиоме I_2 он определяется принадлежащими ему точками – концами отрезка (т. е. выполнение аксиомы V_1), а утверждение о том, что точка принадлежит данному отрезку считается проверяемым (т. е. выполнение аксиомы V_3), так как относится к числу основных в данной аксиоматике.

Пояснение аксиом фигуры:

Первая аксиома отражает наше представление о фигуре и служит отправной точкой для оценки совпадения или отличия фигур, задаваемых разными способами. Проверка принадлежности точек одной фигуры другой и наоборот позволяет выявить их сходство или различие.

Вторая аксиома практически дословно повторяет знаменитое евклидово определение точки из «Начала»: точка есть то, что не имеет частей.

По содержанию третья аксиома полностью согласуется с понятием геометрического места точек, вследствие чего ее целесообразно назвать «аксиомой геометрического места». В рамках элементарной геометрии ее можно сформулировать следующим образом: для любого условия, предъявляемого к точкам, существует единственная фигура, состоящая исключительно из точек, удовлетворяющих этому условию.

Само условие считается элементарным, если оно выражается средствами аксиоматики и допускает проверку для каждой точки за конечное число операций. Каждая операция предполагает либо установление базовых отношений, либо проведение разрешенного аксиомами построения.

Элементарной геометрия – это геометрия, изучающая фигуры, которые определяются элементарными условиями.

В рамках элементарной геометрии действует принцип: для любого элементарного условия, применяемого к точкам, существует определенная фигура, содержащая исключительно те точки, которые удовлетворяют указанному условию [2].

1.5 Треугольники, равенство треугольников

Треугольник – это фигура, состоящая из трех отрезков, имеющих попарно общие концы, не содержащиеся в одном отрезке. Традиционно выделяют элементы треугольника: его стороны (три отрезка), вершины и углы, образующиеся при пересечении соседних сторон. Равенство треугольников определяется стандартным образом: сравниваются длины соответствующих сторон и величины соответствующих углов.

Поскольку вершины треугольника не лежат на одном отрезке, все его углы являются настоящими, а каждая его сторона автоматически становится естественной поперечиной для противоположного угла.

Два треугольника называются равными, если между их вершинами можно установить взаимно однозначное соответствие так, соответствующие стороны и соответствующие углы равны. Обозначение $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ свидетельствует о том, что вершины A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 соответствуют друг другу и выполнены равенства $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ (рисунок 27).

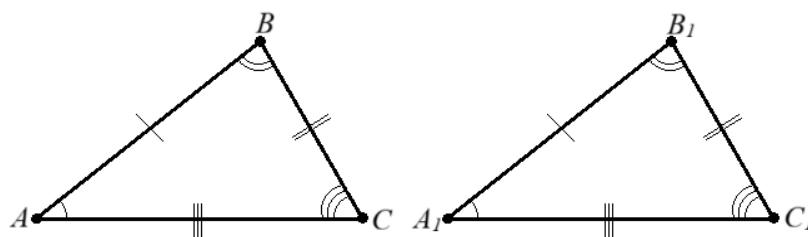


Рисунок 27

Выполняются три классические теоремы о равенстве треугольников, только устанавливаются они в иной последовательности: первым рассматривается признак по трем сторонам, вторым – по двум сторонам и углу между ними, третьим – по стороне и прилежащим углам.

Теорема 2 (I признак равенства треугольников). Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны (рисунок 28).

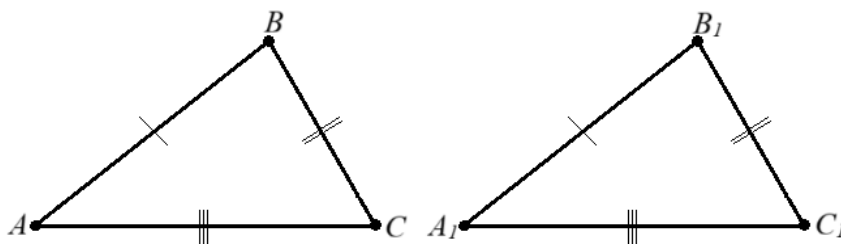


Рисунок 28

Доказательство.

1. Пусть у $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ равны стороны: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$.
2. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1 \Rightarrow BC$ и B_1C_1 – соответственные поперечины для $\angle A$ и $\angle A_1$. По условию $BC = B_1C_1 \Rightarrow \angle A = \angle A_1$.

3. $BA = B_1A_1, BC = B_1C_1 \Rightarrow AC$ и A_1C_1 – соответственные поперечины для $\angle B$ и $\angle B_1$. По условию $AC = A_1C_1 \Rightarrow \angle B = \angle B_1$.

4. $CA = C_1A_1, CB = C_1B_1 \Rightarrow AB$ и A_1B_1 – соответственные поперечины для $\angle C$ и $\angle C_1$. По условию $AB = A_1B_1 \Rightarrow \angle C = \angle C_1$.

Т. о. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Теорема 3 (II признак равенства треугольников). Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны (рисунок 29).

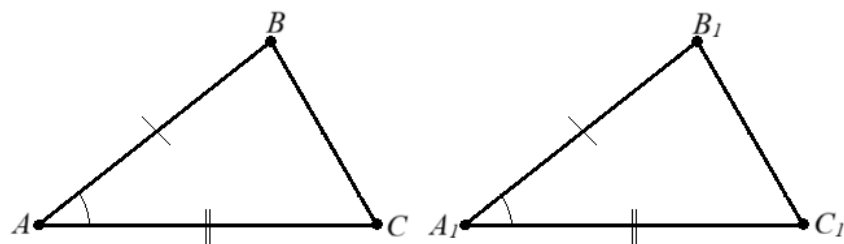


Рисунок 29

Доказательство.

1. Пусть у $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ равны: $AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, \angle A = \angle A_1$.

2. $AB = A_1B_1, AC = A_1C_1 \Rightarrow BC$ и B_1C_1 – соответственные поперечины для $\angle A$ и $\angle A_1$. По условию $\angle A = \angle A_1 \Rightarrow BC = B_1C_1$.

3. $AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, BC = B_1C_1$, то по I признаку $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

Теорема 4 (III признак равенства треугольников). Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны (рисунок 30).

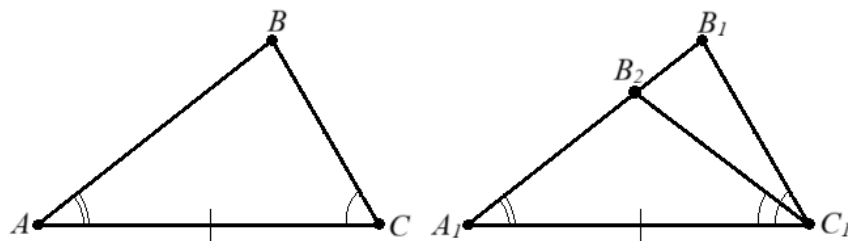


Рисунок 30

Доказательство.

1. Пусть у $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ равны: $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle C = \angle C_1$.
2. Предположим, что $AB \neq A_1B_1$. Отложим $A_1B_2 = AB$.
3. $AB = A_1B_2$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, то по II признаку $\triangle ABC = \triangle A_1B_2C_1 \Rightarrow \angle ACB = \angle A_1C_1B_2$, а так как $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$, то $\angle A_1C_1B_2 = \angle A_1C_1B_1$ – противоречие с IV_2 . Значит, $AB = A_1B_1$.
4. $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, то по II признаку $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$.

1.6 Параллельные отрезки и прямые

В соответствии с аксиомой IV_3 «о параллельных отрезках», когда равные отрезки AC и BD отложены от концов заданного отрезка AB перпендикулярно ему и в одну сторону, они считаются параллельными. Данная аксиома указывает, что в этом случае $CD = AB$ (рисунок 31).

Лемма 1. Параллельные отрезки AC и BD перпендикулярны также отрезку CD (рисунок 31).

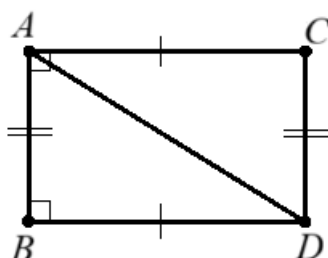


Рисунок 31

Доказательство.

1. Проведя отрезок AD , получим два треугольника $\triangle ABD$ и $\triangle ACD$.
2. $AC = BD$ (по условию), $AB = CD$ (по аксиоме), AD – общая сторона $\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACD$ по I признаку $\Rightarrow \angle B = \angle C$.
3. Т. к. $\angle B$ – прямой, то $\angle C$ – прямой, т. е. $AC \perp CD$. Аналогично получим $BD \perp CD$.

Длины отрезков AC и BD могут быть произвольными. Следовательно, для любых точек M и N , лежащих на данных отрезках или их продолжениях и находящихся на одинаковом расстоянии от точек A и B , выполняются условия: $MN = AB$, $MN \perp AM$, $MN \perp BN$. Аналогичное утверждение справедливо при продолжении отрезков за точки A и B на другую сторону от AB (рисунок 32).

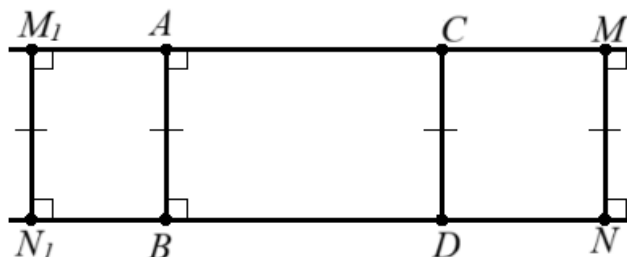


Рисунок 32

Прямые, не имеющие общих точек, называются параллельными.

Рассмотрим две прямые, перпендикулярные одному отрезку в его концах. Через любую точку каждой из этих прямых проходит их общий перпендикуляр – отрезок, одновременно перпендикулярный обеим прямым. Примечательно, что все такие отрезки (перпендикуляры) равны друг другу.

Прямые, которые проходят на постоянном расстоянии друг от друга, параллельны. обратное утверждение также справедливо – это вытекает из следующей «основной теоремы о параллельных прямых».

Теорема 5 (основная теорема о параллельных прямых). Через любую точку, не лежащую на данной прямой, проходит прямая на постоянном расстоянии от данной прямой – параллельная ей, и притом только одна.

Доказательство.

1. Допустим, у нас есть прямая a и некоторая точка A , не лежащая на этой прямой.
2. Проведем из точки A перпендикуляр AB к прямой a ($AB \perp a$). Затем через точку A проведем прямую b , перпендикулярную отрезку AB ($b \perp AB$). Так как прямые a и b обе перпендикулярны общему отрезку AB , они не пересекаются. Следовательно, прямые a и b параллельны.

3. Теперь предположим, что существует некоторая другая прямая b' , проходящая через точку A . Она пересекает прямую b в точке A . Рассмотрим луч c , исходящий из точки A и находящийся по ту же сторону от прямой b , где расположена прямая a (рисунок 33). Надо доказать, что луч c обязательно пересечет прямую a , т. е. любая прямая, проходящая через заданную точку A и отличная от прямой b , пересечет прямую a .

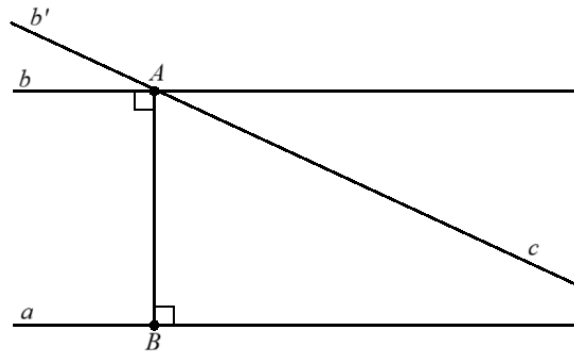


Рисунок 33

4. Возьмем на луче c точку C_1 , опустив перпендикуляры на b и AB ($C_1B_1 \perp b$, $C_1A_1 \perp AB$), получим прямоугольник с диагональю AC_1 на луче c (рисунок 34). Отложим отрезок $AC_2 = 2AC_1$, т. е. $C_1C_2 = AC_1$. Докажем, что C_2 лежит на AC_1 . Проведем перпендикуляры $C_2B_2 \perp b$, $C_2A_2 \perp AB$. Проведем так же перпендикуляры: $C_1D_1 \perp C_2B_2$ и $C_1D_2 \perp C_2A_2$. Рассмотрим $\triangle AA_1C_1$ и $\triangle C_1D_2C_2$: $AA_1 = C_1D_2$, $A_1C_1 = D_2C_2 \Rightarrow \triangle AA_1C_1 = \triangle C_1D_2C_2$. $\angle AA_1C_1 = \angle C_1D_2C_2 = d$, их сумма равна $2d$. То есть $\angle AC_1C_2 = 2d = 180^\circ$ (развернутый). Значит, точки лежат на одной прямой.

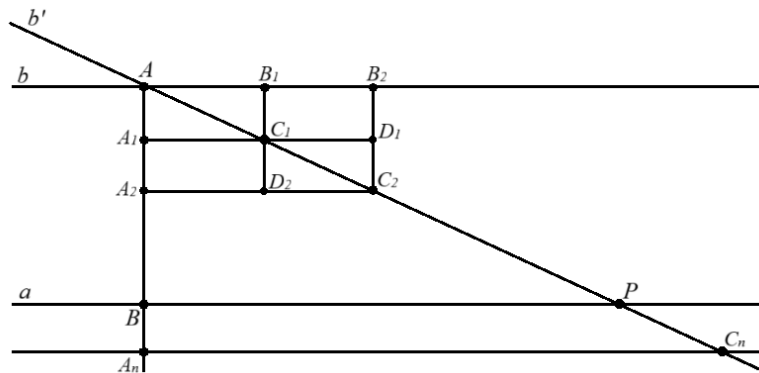


Рисунок 34

5. Продолжая эту процедуру, по аксиоме Архимеда получим точку A_n , лежащую на AB за конец B . Точки A и A_n лежат с разных сторон от прямой a . Соответственно на луче с получим точку C_n , т. к. $A_n C_n \parallel a$, то A_n и C_n лежат с одной стороны от прямой a . Поэтому, прямая AC_n пересекает прямую a в точке P , т. е. $b' \cap a = P$. Т. е. любая прямая, проходящая через точку A и отличная от прямой b , пересекается с прямой a .

Таким образом, b является единственной прямой, параллельной данной прямой a .

Доказанное утверждение позволяет заключить, что аксиома параллельных прямых логически вытекает из аксиомы параллельных отрезков. Вместе с тем справедливо и обратное утверждение: аксиома параллельных отрезков также может быть выведена из аксиомы параллельных прямых.

Предположим, что аксиома параллельных прямых выполняется. Покажем, что в этом случае будет справедлива и аксиома параллельных отрезков.

1. Рассмотрим два равных отрезка AC и BD , которые перпендикулярны отрезку AB и расположены с одной стороны относительно AB . Исходя из аксиомы параллельных отрезков, требуется доказать, что $AB = CD$.

2. Прямые AC и BD перпендикулярны одной и той же прямой AB , следовательно, они параллельными между собой. Проведем через точку C прямую, параллельную AB (рисунок 35). Эта новая прямая пересечет прямую BD в некоторой точке K (иначе возникла бы ситуация, при которой через C проходила бы, кроме AC , вторая прямая, параллельная BD).

3. Так как CK и AB , AC и BK – попарно параллельные прямые, то $ABKC$ является параллелограммом. При этом данный параллелограмм является прямоугольником, т. к. углы A и B прямые. Из свойства параллелограмма, согласно которому противоположные стороны равны, следует, что $BK = AC$. Учитывая, что изначально задано равенство $BD = AC$, а отрезки BD и AC лежат

с одной стороны от AB , так же как стороны параллелограмма BK и AC , отрезки BD , BK принадлежат одной прямой, то точка K совпадает с точкой D . Кроме того, $CK = AB \Rightarrow CD = AB$.

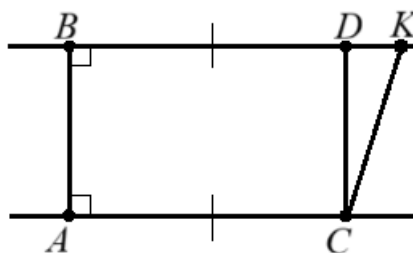


Рисунок 35

Поэтому, аксиома параллельности отрезков эквивалентна аксиоме параллельных прямых.

В рамках элементарной геометрии параллельные прямые не являются принципиально необходимыми. После того как аксиома параллельных прямых применена в первый раз, в последующих рассуждениях о параллельности речь фактически идет об отрезках. С принятием аксиомы параллельных отрезков необходимость в понятии прямой практически исчезает, за исключением ситуаций, когда это может сделать формулировки более краткими. Основные результаты, которые обычно выводят из аксиомы параллельных прямых, можно получить и на основе аксиомы параллельных отрезков. Одним из наиболее значимых выводов, получаемых таким способом, является теорема о сумме углов треугольника.

Лемма 2. Сумма углов прямоугольного треугольника равна двум прямым углам, $2d$ (рисунок 36).

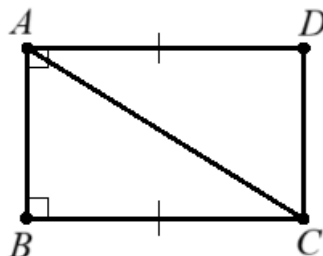


Рисунок 36

Доказательство.

1. Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle ABC$, в котором $\angle B$ является прямым ($\angle B = d$).

2. Проведем дополнительный отрезок AD как в аксиоме IV_3 (аксиоме параллельных отрезков), таким образом, чтобы угол $\angle A$ также стал прямым ($\angle A = d$), а $AD = BC$.

3. Тогда по аксиоме IV_3 $AB = DC$, так что $\triangle ABC = \triangle CDA$ и $\angle BCA = \angle DAC$. Из этого следует, что сумма углов в $\triangle ABC$ будет $\angle B + \angle BAC + \angle BCA = \angle A + \angle BAC + \angle DAC = 2d$, что и требовалось доказать.

Лемма 3. У каждого треугольника по крайней мере два угла острые.

Доказательство.

1. Рассмотрим треугольник $\triangle ABC$.

2. Пусть $\angle B$ – прямой. Тогда из леммы 2 следует, что $\angle A$ и $\angle C$ острые.

3. Пусть $\angle B$ – тупой. Проведем из точки A перпендикуляр AN к прямой CH (рисунок 37). В результате получим прямоугольный треугольник $\triangle ANC$. Из леммы 2 следует, что в $\triangle ANC$ углы при вершинах A и C острые. Отсюда следует, что и в исходном $\triangle ABC$ углы при вершинах A и C острые, что и требовалось доказать.

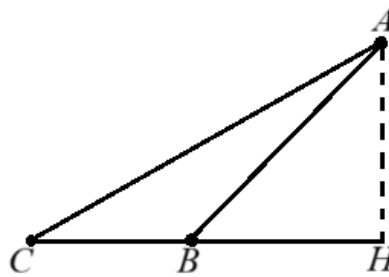


Рисунок 37

Лемма 4. Если в $\triangle ABC$ углы A и C острые, то основание H высоты BH лежит на AC (рисунок 38).

Доказательство.

1. Предположим, что точка H лежит вне AC .

2. Тогда получился бы прямоугольный треугольник с тупым углом, а по лемме 2 это невозможно $\Rightarrow$ предположение не верно и точка H лежит на AC .

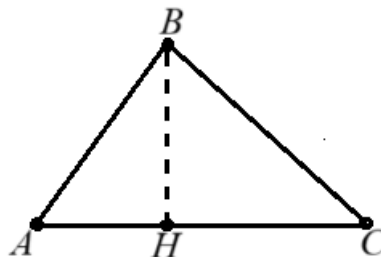


Рисунок 38

Теорема 6. Сумма углов треугольника равна двум прямым углам, $2d$.

Доказательство.

1. Пусть в $\triangle ABC$ углы A и C острые.
2. Опустим высоту BH на сторону AC .
3. Получим два прямоугольных треугольника: $\triangle AHB$ и $\triangle BHC$ (рисунок 38).
4. По лемме 1 сумма их углов равна $4d$: $\angle A + \angle ABH + \angle AHB + \angle BHC + \angle HBC + \angle C = 4d$.
5. Тогда сумма углов данного треугольника $\triangle ABC$ равна разности суммы углов двух прямоугольных треугольников и двух прямых углов при точке H .
6. Следовательно, $\angle A + \angle B + \angle C = 2d$, что и требовалось доказать.

ГЛАВА 2 ОРГАНИЗАЦИЯ ИЗУЧЕНИЯ НАЧАЛЬНЫХ СВЕДЕНИЙ ПЛАНИМЕТРИИ НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ АКСИОМ А. Д. АЛЕКСАНДРОВА

2.1 Факультативные занятия по математике в современном школьном образовании

Факультативные занятия представляют собой организационную форму учебного процесса, направленную на углубленную реализацию образовательных потребностей и возможностей обучающихся посредством развития их личных способностей и интересов в рамках общей образовательной подготовки. Одной из ключевых задач такой деятельности является формирование устойчивых мотиваций к освоению учебных дисциплин, в частности пробуждение первоначального интереса к изучению математики.

Факультативы направлены на стимулирование глубокого интереса учащихся к изучению математики, способствуют формированию широкого кругозора и развитию математического мышления. Они также играют важную роль в воспитании мировоззренческих позиций и формировании значимых личностных качеств благодаря применению методов углубленного изучения предмета.

Организация факультативных занятий по математике требует особого подхода, направленного на создание атмосферы, способствующей пробуждению естественного любопытства учащихся. Такая атмосфера предполагает открытость, доверие и взаимное уважение между учителем и учениками, где каждый школьник чувствует себя комфортно, высказывая собственные мысли и задавая интересующие вопросы без страха ошибиться.

Продолжительность факультативного обучения может составлять различный период времени – от одного учебного полугодия до нескольких лет

обучения. При организации длительных курсов важно отметить, что учебные программы каждого года обучения разрабатываются независимо друг от друга.

Работа учащихся по освоению факультативных курсов подлежит исключительно качественной оценке, поскольку традиционное выставление отметок по итогам факультативов не практикуется. Ключевыми показателями эффективности выступают динамика развития познавательных интересов обучающихся, формирование у них любознательности, смекалки и интуитивных способностей.

Современные факультативные занятия по математике проводятся в разнообразных организационных формах. Среди наиболее распространенных методов выделяются лекции учителем, раскрывающие ключевые темы занятий, а также семинары и дискуссионные обсуждения, вовлекающие учащихся в активный диалог, лабораторные работы. Работать можно индивидуально и парами, последний способ является более эффективным, так как тимбилдинг необходим для поддержания взаимоотношений между учащимися [11]. Важное место занимают практические занятия, посвященные решению математических задач различной степени сложности. Развитие самостоятельности и творческих возможностей учащихся обеспечивается благодаря практической направленности факультативных занятий, предусматривающей работу с нестандартными видами задач. Учащиеся погружаются в решение исследовательских задач, упражнений повышенного уровня сложности, а также задач, содержащих неполную или избыточную информацию. Такой подход стимулирует критическое мышление, инициативу и креативность, формируя у ребят способность самостоятельно находить оригинальные пути решения проблем.

Также интерактивные подходы играют важную роль в поддержании устойчивого интереса учащихся к изучению математики на факультативных занятиях. Интерактивные технологии обучения математики – это совокупность методов, форм и средств обучения, направленных на эффективное достижение

поставленных целей путем вовлечения учащихся в активное сотрудничество в решении учебных задач [12]. Использование игровых методик, среди которых особенно популярны математические квесты, логические загадки и интеллектуальные конкурсы, повышают мотивацию учащихся, пробуждают любознательность и совершенствуют навыки оперативного нахождения оптимальных решений даже в непростых ситуациях.

На данный момент факультативные занятия в рамках общеобразовательной школы выступают неотъемлемой составляющей общего учебного и воспитательного процесса. Практический опыт внедрения факультативов подтверждает их высокую эффективность благодаря тому, что именно они содействуют решению ключевой образовательной задачи – формированию гармонично развитой личности с учетом ее индивидуальных склонностей и предпочтений.

2.2 Программа факультативного курса «Аксиоматический детектив: геометрия без свидетелей»

1. Пояснительная записка.

В школе преподавание геометрии в 7 классе традиционно сталкивается с методологическим противоречием. С одной стороны, геометрия позиционируется как первый в жизни школьника пример дедуктивной научной теории, где каждое утверждение должно быть строго обосновано. С другой стороны, начальное изложение часто строится на наглядности, неявных допущениях и смешении аксиом с бытовыми представлениями. Ученик оказывается перед выбором: либо механически запоминать цепочки теорем, либо интуитивно догадываться о свойствах фигур, не видя их логической связи. В результате формируется разрыв между «жизненной геометрией» (чертежи, измерения, интуиция) и «школьной геометрией» (доказательства, формулировки, символы). Этот разрыв становится причиной снижения

познавательного интереса и, что важнее, утраты главной образовательной цели – формирования теоретического мышления.

Аксиоматическая система, предложенная академиком А. Д. Александровым, представляет собой уникальную попытку преодолеть указанное противоречие. В отличие от формально-гильбертовского подхода, который требует высокой степени абстракции и развитого логического аппарата уже на старте, система Александрова исходит из понятий, имеющих прямой чувственный опыт. Аксиомы здесь не постулируются как нечто данное свыше, а предстают как результат обобщения простейших пространственных наблюдений, доступных каждому. Это позволяет выстроить геометрию не как набор правил, а как естественное продолжение способности человека ориентироваться в пространстве.

Предлагаемый факультативный курс призван реализовать этот подход в условиях, когда время основного урока ограничено. Факультатив становится площадкой, где можно позволить себе «роскошь» медленного, вдумчивого выведения геометрических фактов из минимального наглядного основания, акцентируя внимание не на количестве решенных задач, а на качестве понимания логической структуры науки.

Данный факультативный курс превращает изучение аксиом в интеллектуальное приключение. Новизна предлагаемого курса заключается в трех аспектах. Во-первых, это сюжетная организация материала в жанре «аксиоматического детектива», где каждое занятие – это эпизод расследования. Данный подход позволяет удерживать познавательную мотивацию на протяжении всего курса и исключает шаблонность. Во-вторых, в отличие от традиционного линейного перечисления аксиом, факультатив использует нелинейное, проблемно-ориентированное введение аксиом. Каждая аксиома предъявляется не по порядку, а в момент возникновения логической необходимости, что имитирует естественный процесс научного поиска и не встречается в типовых программах. В-третьих, в ряде занятий сознательно

вводится запрет на необоснованную наглядность, а также используется технология «следственного протокола» (фиксация каждого шага рассуждения с обязательной ссылкой на конкретную аксиому), что эффективно формирует дедуктивное мышление.

Главной целью факультативного курса является не столько расширить формальные геометрические знания семиклассников, сколько сформировать у них представление о геометрии как о целостной дедуктивной системе, где каждое утверждение логически выводится из небольшого числа исходных аксиом, и тем самым заложить основы логического мышления.

Для достижения этой цели необходимо решить следующие задачи:

- 1) познакомить учащихся с системой аксиом А. Д. Александрова.
- 2) показать, что любая научная теория начинается с неопределяемых понятий и аксиом, которые не доказываются.
- 3) научить учащихся прослеживать цепочки умозаключений от аксиом к теоремам.
- 4) формировать навыки аргументированной речи, умение строить доказательства, способность видеть неочевидные следствия из исходных положений.
- 5) воспитать у учащихся такие личностные качества, как активность, творчество, усердие, чувство ответственности и стремление к познанию, а также содействовать развитию способностей к самостоятельному обучению и приобретению знаний.

2. Адресат и объем курса.

Курс рассчитан на учащихся 7 классов, не имеющих предварительной углубленной подготовки по математике, но проявляющих интерес к логике и структуре научного знания.

Общая трудоемкость курса – 32 часа (2 часа в неделю в течение полугодия). Такой объем достаточен для того, чтобы последовательно

развернуть логическую структуру начальной планиметрии, не перегружая учащихся избыточным количеством теорем.

3. Тематическое планирование факультативного курса.

В соответствии с заявленной сюжетной концепцией «аксиоматического детектива» тематическое планирование факультативного курса построено не по традиционному принципу последовательного изучения аксиом, а по проблемно-эпизодическому принципу. Каждый блок занятий («дело») объединяет несколько аксиом вокруг одной логической загадки, что позволяет учащимся не запоминать абстрактные формулировки, а открывать их как необходимые инструменты для разрешения конкретной неопределенности. В таблице 1 ниже указаны номера и названия занятий, распределение часов, вводимые аксиомы, понятия или теоремы и форма деятельности, характерная для детективного жанра. Аксиомы из разных групп могут вводиться в одном деле, если того требует сюжет расследования, что отражает реальную логику научного поиска.

Таблица 1 – Тематическое планирование факультативного курса «Аксиоматический детектив: геометрия без свидетелей»

№	Тема	Часы	Что изучают	Деятельность учащихся
1.	Вводное занятие	1 ч.	История геометрии, понятия определения, аксиомы, теоремы и следствия	Задание «Протокол следователя»
Дело №1. Исчезновение середины (3 ч.)				

Продолжение таблицы 1.

1.1	Что такое отрезок, если не верить глазам?	1 ч.	I_1 (аксиома существования), I_2 (аксиома проведения отрезка)	Задания «Протокол существования», «Протокол проведения», «Фоторобот отрезка» и «Алиби отрезка»
1.2	Точка-преступник: как она делит отрезок?	1 ч.	I_3 (аксиома деления отрезка)	Ролевая игра «Алиби точки C », задание «Протокол допроса»
1.3	Операция «Склейка»	1 ч.	I_4 (аксиома соединения отрезков)	Конструктор «Соедини улики», задание «Протокол склейки»
Дело №2. Фальшивые метры (6 ч.)				
2.1	Транзитивность. Как не запутаться в показаниях?	1 ч.	Π_2 (аксиома сравнения)	Эксперимент «Три веревки», задание «Протокол сравнения»
2.2	Откладывание отрезка – преступление или необходимость?	1 ч.	Π_1 (аксиома откладывания отрезка)	Задания «Преступный замысел» и «Протокол откладывания»
2.3	Операция «Пазл». Как из частей сложить целое?	1 ч.	Π_3 (аксиома сложения)	Расследование двух отрезков со свидетелями, задание «Протокол сложения»

Продолжение таблицы 1.

2.4	Сколько шагов до финиша?	1 ч.	Π_4 (аксиома Архимеда)	Лабораторная работа «Шагомер», задание «Допрос бесконечности»
2.5	Где прячется общая точка?	1 ч.	Π_3 (аксиома непрерывности)	Игра «Матрешка-детектив», задание «Алиби»
2.6	Продолжение следует: как из отрезка вырастают луч и прямая?	1 ч.	Луч и прямая, теорема о продолжении отрезка	Задания «Фоторобот прямой и луча» и «Протокол продолжения»
Дело №3. Плоскость. Две стороны одной тайны (5 ч.)				
3.1	Как отличить одну сторону от другой?	1 ч.	Π_1 (аксиома деления плоскости)	Задание «Тайный агент», игра «Двойной агент», задание «Протокол сторон»
3.2	Окружность и круг. Тайна равноудаленных точек	1 ч.	Окружность, круг и их элементы	Задания «Протокол окружности и круга» и «Восстановление личности»
3.3	Рождение угла. Когда два луча встречаются?	1 ч.	Угол и его виды	Игра «Живые лучи», игра «Луч-детектив», задание «Протокол угла»

Продолжение таблицы 1.

3.4	Фальшивый угол или настоящий?	1 ч.	IV_2 (аксиома откладывания угла)	Операция «Клон», игра «Испорченный чертеж», задания «Детектор подделок» и «Протокол откладывания угла»
3.5	Смежные и вертикальные углы: перекрестный допрос	1 ч.	Смежные и вертикальные углы, перпендикуляр	Игра «Алиби угла», задание «Построй перпендикуляр», игра «Криминалистическая дуэль», задание «Протокол перекрестного допроса»
Дело №4. Треугольное досье. Улики, признаки, тайные агенты (7 ч.)				
4.1	Треугольники. Первые улики	1 ч.	Треугольник, его элементы и виды, равенство треугольников	Конструктор «Треугольник из палочек», задание «Протокол треугольника», игра «Опознание в толпе»
4.2	Три стороны – неоспоримая улика	1 ч.	Первый признак равенства треугольников	Следственный эксперимент, задания «Тройное алиби» и «Протокол первого признака»

Продолжение таблицы 1.

4.3	Две стороны и угол – поймать с поличным	1 ч.	Второй признак равенства треугольников	Операция «Засада», игра «Опознание по фотороботу», задание «Протокол второго признака»
4.4	Третий признак – операция «Противоречие»	1 ч.	Третий признак равенства треугольников	Игра «Ложный след», задание «Протокол третьего признака»
4.5	Серединный перпендикуляр: невидимый страж отрезка	1 ч.	Серединный перпендикуляр отрезка	Задания «Протокол серединного перпендикуляра» и «Карточка стража»
4.6	Три агента одного треугольника (биссектриса, высота, медиана)	1 ч.	Биссектриса, высота и медиана треугольника	Задания «Протокол трех агентов» и «Досье агентов», эксперименты «Восстановление по уликам» и «Точка встречи высот»

Продолжение таблицы 1.

4.7	Равнобедренный треугольник и тайна его углов	1 ч.	Равнобедренный треугольник, его свойства и признак	Задания «Найди равнобедренных» и «Протокол равнобедренного треугольника»
Дело №5. Параллельный мир (6 ч.)				
5.1	Операция «Равные перпендикуляры»	1 ч.	IV_3 (аксиома параллельных отрезков), понятие параллельных прямых и параллельных отрезков	Задание «Протокол аксиомы IV_3 », игра «Тайна равных перпендикуляров»
5.2	Поимка единственной параллельной	1 ч.	Основная теорема о параллельных прямых, признак параллельности двух прямых	Задание «Протокол параллельных»
5.3	Операция «Секущая»	1 ч.	Углы, образованные пересечением двух прямых третьей, признаки параллельности	Задания «Протокол секущей – часть 1», «Детектор углов» и «Детектор параллельности»

Продолжение таблицы 1.

5.4	Операция «Секущая 2.0»	1 ч.	Свойства параллельных прямых	Задания «Протокол секущей – часть 2» и «Алиби параллельных»
5.5	Прямоугольный треугольник под следствием	1 ч.	Лемма о сумме углов прямоугольного треугольника и о двух острых углах, признаки равенства прямоугольных треугольников	Игра «Блиц- опрос: следы аксиомы IV_3 », задания «Протокол прямоугольного треугольника» и «Восстанови улику»
5.6	Сумма углов треугольника: разгадка вековой тайны	1 ч.	Теорема о сумме углов треугольника, понятие внешнего угла, теорема о внешнем угле треугольника	Игра «Блиц- опрос: свойства параллельных», задания «Протокол углов треугольника» и «Найди пропавший угол»
Дело №6. Вердикт детектива: от аксиом к комиксу (4 ч.)				
6.1	Круглый стол «Чему нас научила аксиоматика?»	1 ч.	—	Рефлексия

Продолжение таблицы 1.

6.2	Создание «Аксиоматического комикса»	2 ч.	–	Групповой проект
6.3	Защита комиксов	1 ч.	–	Презентация комиксов

4. *Основное содержание.*

1. Вводное занятие (1 час)

В начале занятия учитель сообщает, что весь факультативный курс построен по мотивам детектива. Ученикам предстоит выступать в роли сыщиков (допрашивать аксиомы, проверять алиби фигур, раскрывать геометрические преступления). Данное вводное занятие является знакомством с «Уставом детективного агентства», то есть правилами, по которым работает любая наука. Учащимся предлагается отправиться в Древнюю Грецию, чтобы понять на каких законах держится геометрия. Учитель раздает каждому «Протокол следователя», куда ученики по ходу занятия будут записывать ключевые понятия. Далее учитель рассказывает, как появилась геометрия, что такое определение, аксиома, теорема и следствия. Учащиеся записывают определения в протокол. Учитель подводит итог, что теперь детективы знают, что геометрия строится на аксиомах, определениях и теоремах. Со следующего занятия начинаются настоящие расследования.

Дело №1. Исчезновение середины (3 часа)

Суть первого блока заключается в том, чтобы через детективную интригу ввести первые четыре аксиомы связи и сформировать строгое понятие отрезка, его границ и внутренних точек, полностью отказавшись от интуитивной «сплошной линии».

1.1. Что такое отрезок, если не верить глазам?

Учащиеся изучают аксиому существования (I_1) и аксиому проведения отрезка (I_2).

Занятие начинается с детективной легенды, которая гласит, что на чистом листе остались две нечеткие точки, а соединявший их отрезок исчез. Чтобы разобраться, что такое отрезок на самом деле (ведь глазам верить нельзя), юные сыщики допрашивают двух свидетелей – аксиомы I_1 и I_2 . Каждый получает карточки («Протокол существования» и «Протокол проведения») с пропущенными формулировками аксиом и заполняют их, выбирая правильные ответы. Затем приступают к главному заданию «Фоторобот отрезка», учащимся предъявляется лист с размытыми двумя точками, нужно восстановить отрезок, отметить три внутренние точки на нем и объяснить почему можно нарисовать только один отрезок между двумя точками. После этого каждая пара получает конверт с карточками (уликами), где написаны утверждения, часть из которых истинна, а часть ложна. Нужно отобрать те, что следуют из аксиом, и приклеить их на общий бланк «Алиби отрезка». В конце занятия учитель подводит итог, что отрезок – это не картинка, а объект, который обязан существовать.

1.2. Точка-преступник: как она делит отрезок?

В центре расследования аксиома деления отрезка (I_3).

Учитель объявляет, что появилась подозрительная точка C , которая якобы «разрезала» отрезок AB на две части. Чтобы проверить ее алиби, проводится ролевая игра – один ученик назначается «точкой C » и встает между двумя другими (A и B), держащими веревку. Точка C «разрезает» веревку на две части. Класс проверяет, могут ли эти части пересечься еще где-то и убеждаются, что пересечение только в точке C . Затем «точка C » получает карточку алиби, где должна письменно ответить, почему она не может создать других пересечений, а другие заполняют «Протокол допроса», где записывают формулировку аксиомы, чертят отрезок с точкой на нем и подписывают получившиеся два отрезка. В качестве проверки улики ученикам выдается чертеж с несколькими отрезками и точками, нужно обвести те точки, которые

действительно лежат на отрезке. В итоге выясняется, что точка C не преступник, а «законный делитель».

1.3. Операция «Склейка»

Это занятие посвящено аксиоме соединения отрезков (I_4).

Конструктор «Соедини улики» подразумевает, что каждая пара получает конверт с несколькими бумажными полосками-отрезками разной длины. На некоторых полосках отмечены точки (концы). Ученикам нужно собрать из двух полосок один длинный отрезок, но только если конец одной совпадает с началом другой, и точка совпадения лежит между. Полоски, не подходящие под данное условия, откладываются как «бракованные улики». Успешно склеенные пары ученики соединяют бумажным скотчем и подписывают получившийся отрезок. Далее учащиеся записывают «Протокол склейки» (бланк, где нужно записать что дано и что утверждает аксиома). В качестве задания на усвоение ученикам выдаются несколько чертежей, им надо определить, в каких случаях можно применить аксиому I_4 , а в каких нет.

Дело №2. Фальшивые метры (6 часов)

Второй блок знакомит учащихся с аксиомами равенства и аксиомой о вложенных отрезках. Задания в данном блоке строятся как судебные заседания, лабораторные опыты и разоблачение поддельных чертежей. Тем самым закладывая основы геометрии без скучного заучивания.

2.1. Транзитивность. Как не запутаться в показаниях?

Учащиеся знакомятся с аксиомой сравнения (Π_2).

Чтобы школьникам осознать, что аксиома сравнения – это не очевидное свойство, а строгая аксиома, принимаемая без доказательства, им предлагается провести эксперимент с тремя веревочками разного цвета. Каждая пара получает три отрезка (веревки), обозначенные буквами a , b и c . Сначала они убеждаются, что a точно совпадает по длине с b (накладывая их друг на друга), а b , в свою очередь, совпадает с c . Затем возникает вопрос: обязательно ли a и c будут равны? Ученики пытаются привести контрпример (например, сдвинуть

веревки так, чтобы при сохранении равенств $a = b$ и $b = c$ вдруг получилось, что $a \neq c$). Быстро выясняется, что это невозможно. Для закрепления каждый заполняет короткий «Протокол сравнения», где своими словами формулирует аксиому и приводит житейский пример. В завершении учащимся выдаются листы с начерченными отрезками, они находят пары равных, измеряя их линейкой, и выстраивают цепочки равенств, каждый раз проговаривая, какая аксиома позволяет сделать следующий шаг.

2.2. Откладывание отрезка – преступление или необходимость?

В рамках второго занятия дела №2 школьники знакомятся с аксиомой откладывания отрезка (Π_1).

Занятие начинается с легенды, которая гласит, что в детективное агентство поступает дело. На месте преступления нашли два отрезка (длинный и короткий). Свидетель утверждает, что преступник скопировал длину короткого отрезка внутрь длинного, создав фальшивую улику. Защита отрицает возможность такого копирования, детективам предстоит проверить. Далее учитель раздает каждой паре два бумажных отрезка AB , MN и дает задание на отрезке AB отметить точку C так, чтобы $AC = MN$. После выполнения учитель спрашивает, может ли быть другая точка на том же отрезке с тем же расстоянием. Формулируется аксиома. На усвоение учитель предлагает задание «Преступный замысел», в котором каждая пара получает лист с тремя показаниями свидетелей (три разными чертежами, на каждом из которых изображен отрезок AB и отмечена точка C). Рядом указано, какой отрезок MN якобы откладывался. Но только в одном случае откладывание выполнено верно, в двух других подделка. Задача состоит в том, чтобы определить какой чертеж верный, а какие фальшивые, и письменно объяснить, какая аксиома нарушена. После анализа каждый заполняет «Протокол откладывания», в котором записывает аксиому, делает чертеж и из прошлого задания объясняет ошибки в фальшивых чертежах.

2.3. Операция «Пазл». Как из частей сложить целое?

На данном занятии ученики изучают аксиому сложения (Π_3).

Школьники расследуют дело о двух подозрительных отрезках AB и A_1B_1 . Прямых доказательств их равенства нет, но у каждого есть «свидетель» – точка C на AB и точка C_1 на A_1B_1 , которые делят отрезки на две части. Учитель предлагает учащимся улики, на которых написано, что $AC = A_1C_1$ и $CB = C_1B_1$ и «Протоколы осмотра», где нарисованы два отрезка с отмеченными точками C и C_1 . Ученики должны измерить линейкой (или циркулем) длины AC и A_1C_1 , CB и C_1B_1 (они оказываются равными). Учитель задает главный вопрос: если все кусочки обоих отрезков попарно равны, то что можно сказать о целых отрезках? Класс приходит к выводу, что AB и A_1B_1 тоже должны быть равны, приводят примеры из жизни (например, это как собрать два пазла из одинаковых деталей). Затем каждый заполняет «Протокол сложения», где нужно заполнить пропуски. Для закрепления раздаются бумажные полоски, разрезанные на части. Нужно собрать из частей два «подозрительных» отрезка и убедиться, что они равны. В конце обсуждается, почему нельзя сомневаться в равенстве, ведь аксиома – это надежный «детектор лжи», который не подводит.

2.4. Сколько шагов до финиша?

Данное занятие посвящено изучению аксиомы Архимеда (Π_4).

Учитель предъявляет учащимся два отрезка, один из которых длинный (назовем его «дистанция») и другой короткий («шаг»). Учитель вводит детективную версию: некто утверждает, что коротким шагом можно измерять дистанцию бесконечно долго, никогда не достигая конца. Классу предлагается проверить эту версию экспериментально. Каждая пара получает две бумажные полоски разной длины и карандаш. Задание – откладывать короткий отрезок вдоль длинного, каждый раз фиксируя новую точку и считая количество откладываний. Учащиеся быстро замечают, что после конечного числа шагов длинный отрезок оказывается полностью покрыт, а последний шаг даже выходит за его пределы. Никакой бесконечности нет. Учитель объявляет, что это не случайность, а аксиома Архимеда и просит учеников попробовать ее

сформулировать. Учитель просит каждого записать в бланк «Шагомер» аксиому и результат своего эксперимента, то есть длины их отрезков и количество шагов. Затем ученики обсуждают, что произошло бы, если бы аксиома Архимеда не выполнялась. На закрепление учитель раздает карточки «Допрос бесконечности», где приведены три утверждения. Ученики должны отметить верно каждое из них или нет, и кратко объяснить почему, ссылаясь на аксиому Архимеда.

2.5. Где прячется общая точка?

Занятие посвящено рассмотрению аксиомы о вложенных отрезках (III).

Учитель приносит в класс деревянную матрешку и указывает, что каждая кукла прячется внутри следующей, самая маленькая есть, ее додумывать не нужно. И приводит по аналогии с бесконечной последовательностью вложенных отрезков и спрашивает, останется ли у них общая точка. Класс делится на группы, и начинается игра «Матрешка-детектив», в которой каждая группа получает конверт, в котором лежат полоски бумаги с изображенными на них отрезками, от большого к все меньшим. Учащимся нужно разложить полоски так, чтобы каждая следующая лежала внутри предыдущей, и попытаться найти точку, которая принадлежит всем. После того как группы справляются, учитель вводит аксиому непрерывности. Затем группы получают карточки «Алиби», на каждой из которых записано несколько показаний вымышленных свидетелей. Ученики должны проверить, не противоречат ли показания аксиоме, и вынести вердикт: правда или ложь.

2.6. Продолжение следует: как из отрезка вырастают луч и прямая?

Это занятие посвящено теореме о продолжении отрезка и введению понятий луча и прямой.

Учитель предлагает задание, в котором на листе нарисован отрезок и требуется получить точку, которая находится за одним из концов отрезка. Ученики выдвигают идею продолжить отрезок, отложив от конца еще один отрезок, равный какому-либо образцу (по аксиоме Π_1). Каждый ученик

получает такой образец и откладывает от исходного отрезка и получает новую точку – так возникает новый отрезок. Выясняется, что процесс можно повторять неограниченно (по аксиоме Архимеда). Так вводится понятие луча, а потом и понятие прямой, продолжая за оба конца. Для закрепления выполняется задание «Фоторобот прямой и луча», где на чертеже с отрезком ученики строят луч и прямую, затем сравнивают их. В конце заполняется «Протокол продолжения», где нужно записать определения и как построить луч и прямую, и какие аксиомы для этого используются.

Дело №3. Плоскость. Две стороны одной тайны (5 часов)

В этом деле учащиеся впервые выходят в двумерное пространство. В ходе расследования детективы осваивают аксиомы деления плоскости и откладывания угла, а также знакомятся с понятиями окружности и ее элементов, угла, смежного и вертикального углов и перпендикуляра.

3.1. Как отличить одну сторону от другой?

На этом занятии учащиеся рассматривают аксиому деления плоскости (IV_1).

Учитель раздает листы, на каждом нарисован отрезок. Рядом с отрезком расположены несколько точек, обозначенных буквами. Учитель объявляет детективную легенду: «В городе Плоскость произошла кража. Есть подозреваемые – точки, но свидетели не могут договориться, кто из них был с одной стороны от отрезка, а кто с противоположной. Нам нужно точное правило, как определять одну сторону и другую». Учитель вводит понятия, касающиеся относительного расположения точек относительно заданного отрезка, затем формулируется сама аксиома. Далее учащиеся получают задание «Тайный агент», где на своем листе они должны для каждой пары точек определить, лежат они с одной стороны или с разных. После выполнения учитель проводит игру «Двойной агент», где должен быстро показывать на доске две точки, а ученики должны поднять красную карточку, если точки с разных сторон, и зеленую, если с одной. Побеждает тот, кто дал больше

правильных ответов. В конце каждый заполняет «Протокол сторон». В нем нужно начертить отрезок, отметить две точки с каждой стороны и подписать какая пара лежит с одной стороны, а какая с разных. В протоколе также записывается аксиома IV_1 своими словами.

3.2. Окружность и круг. Тайна равноудаленных точек

Данное занятие посвящено изучению окружности и круга и их элементам.

Занятие начинается с легенды, что в архиве геометрических фигур произошла путаница, у одного объекта оказалось несколько имен. Одни называли его «окружностью», другие «кругом». Внутри него нашли странные части. Одни напоминали спицы колеса, другие куски пиццы, третьи полумесяцы. Детективам поручено навести порядок и установить точные названия всех элементов. Каждый ученик получает «Протокол окружности и круга» с единственной отметкой, точкой O . Учитель дает задание с помощью циркуля задержать всех подозреваемых – точки, которые отстоят от O ровно на 4 см. Далее учащиеся дают определение окружности. Затем они закрашивают внутренность и появляется круг, и они фиксируют разницу между окружностью и кругом. Далее учащиеся изучают элементы с помощью заданий от учителя (например, найти отрезок, который соединяет центр окружности с любой точкой на самой окружности или проведите отрезок, соединяющий две точки на окружности). В протоколе должны быть записаны все определения. Для закрепления учитель предлагает итоговую операцию «Восстановление личности» и выдает новый лист с окружностью, но на ней уже отмечены разные элементы (проведены радиус, хорды, диаметр, дуга) и закрашена часть круга (сегмент или сектор). Ученики должны подписать все элементы.

3.3. Рождение угла. Когда два луча встречаются?

На этом занятии учащиеся знакомятся с определением угла и его видами.

Учитель вводит понятие угла, указывая, что в аксиоматике Александра важна не длина сторон, а их взаимное расположение, поэтому стороны удобно считать не отрезками, а лучами. Чтобы сразу вовлечь класс, учитель проводит

игру «Живые лучи». Он вызывает к доске трех учеников, один становится «вершиной» (стоит на месте), двое других становятся «лучами» (вытягивают руки в разные стороны). Учитель дает им команды (например, изобразите такой угол, чтобы руки смотрели в разные стороны и не были на одной линии / смотрели противоположно, как стрелка / строго в одну сторону и накладывались друг на друга). Так через три конфигурации вводятся понятия настоящего, развернутого и нулевого угла. Далее учащиеся знакомятся с острым, тупым и прямыми углами. Для закрепления проводится групповая игра «Луч-детектив». Класс делится на команды, на экране изображены появляются 10 изображений разных пар лучей с общей вершиной. Команды за 5 секунд должны определить вид угла. В конце каждый заполняет «Протокол угла», где записывает определение и три вида угла, а также изображает их.

3.4. Фальшивый угол или настоящий?

Занятие посвящено изучению аксиомы откладывания угла (IV_2), понятия поперечины и соответственных поперечин.

В начале занятия учитель объявляет, что в детективное бюро поступило тревожное сообщение. Оно гласит, что в городе появился новый преступник, который подделывает углы. Злоумышленник научился копировать настоящие углы, но его копии оказываются неточными. Однако мы не можем доказать подделку, потому что не знаем строгого способа сравнения углов. Детективам предстоит освоить секретный метод. Ученики вместе с учителем вводят понятие поперечины, соответственных поперечин и равных углов. Теперь классу предстоит применить этот метод в операции «Клон». Каждая пара получает лист, где нарисован угол, и три рейки. Их задача начертить равный заданному угол. После выполнения выясняется, что результат получился единственным. Далее учитель формулирует аксиому и указывает, что это и есть главное оружие против преступника, ведь единственность исключает подделку. Для закрепления проводится игра «Испорченный чертеж». На экране появляются картинки с углами, где надо указать равные углы и фальшивые

углы и объяснить, какая аксиома нарушена. Затем каждый ученик получает карточку «Детектор подделок» с тремя утверждениями и тремя картинками, где нужно отметить верные или не верные утверждения и равные или не равные углы соответственно. В конце каждый заполняет «Протокол откладывания угла», где заполняет пропуски в определении поперечины, условия равенства углов и самой аксиоме.

3.5. Смежные и вертикальные углы: перекрестный допрос

Занятие направлено на рассмотрение вертикальных и смежных углов, прямых углов, а также понятие перпендикуляра.

Занятие начинается с легенды. К следователям поступает дело о пересечении двух прямых. На месте происшествия образовались четыре угла, каждый из которых подозревается в том, что дает ложные показания. Некоторые утверждают, что они смежные, другие – что вертикальные. А главный свидетель утверждает, что вертикальные углы всегда равны. Детективам предстоит провести перекрестный допрос и проверить все алиби. Далее учитель чертит на доске две пересекающиеся прямые, обозначает углы цифрами 1, 2, 3, 4. Класс получает задание для каждого угла найти его «соседей», то есть углы, с которыми он имеет общую сторону. Выясняется, что у каждого угла два соседа и один «противник», вертикальный угол. Учащиеся вводят определения. Затем начинается игра «Алиби угла». Каждая пара получает карточку, где нарисованы две пересекающиеся прямые, и один из углов, например $\angle 2$, заявляет, что он равен $\angle 4$, потому что они вертикальные. Детектив должен проверить это алиби, доказывая или опровергая равенство без транспортира, только логикой. Далее учащиеся доказывают, что вертикальные углы равны. Затем класс проверяет другие пары: например, если бы $\angle 2$ заявил, что он равен $\angle 1$ (смежному), то это было бы ложное алиби, так как смежные углы равны только в особом случае, когда каждый из них прямой. Так вводим понятие прямого угла. Далее учитель вводит понятие перпендикулярных

прямых. Ученики выполняют задание «Построй перпендикуляр». Для усвоения знаний проводится командная игра «Криминалистическая дуэль». Учитель называет два угла. Команды должны быстро ответить какие они. Затем задание усложняется тем, что учитель дает утверждения, и ученики должны сказать, верно оно или нет. В конце каждый заполняет «Протокол перекрестного допроса», где записывает определения вертикальных и смежных углов, теорему о равенстве вертикальных углов с кратким доказательством и понятие перпендикуляра.

Дело №4. Треугольное досье. Улики, признаки, тайные агенты (7 часов)

В этом деле учащиеся знакомятся с треугольниками. Сначала они изучают, из каких элементов состоит треугольник, какие бывают виды и что значит равенство треугольников. Затем осваивают три признака равенства, как по ограниченному набору улики гарантированно утверждать совпадение фигур. После этого в арсенале появляются секретные агенты: серединный перпендикуляр, биссектриса, высота и медиана. А завершается дело разгадкой тайн равнобедренного треугольника.

4.1. Треугольник. Первые улики

Занятие посвящено знакомству с треугольником, его элементами, основными видами и понятием равенства треугольников.

Учитель держит в руках папку с надписью «Треугольник» и начинает занятие со слов, что в криминальном архиве появилась новая папка с пометкой «Треугольник». Детективам предстоит расследовать дела, где треугольники будут главными подозреваемыми. Учитель выдает каждой паре три деревянные или пластмассовые палочки и дает задание соединить палочки так, чтобы получилась замкнутая фигура из трех отрезков. После нескольких попыток класс формулирует первое наблюдение про треугольник и формулирует определение, учитель уточняет как называются элементы треугольника. Затем каждая пара получает набор карточек с разными треугольниками. Учитель

предлагает разложить их на группы по каким-нибудь признакам, измеряя линейкой и транспортиром. Так они выводят различные виды треугольника. Далее учитель показывает два треугольника, которые выглядят одинаково, и спрашивает: «Как доказать, что они равны, не полагаясь на глазомер?» Ученики предлагают измерить все стороны и углы. Учитель выдает парам два треугольника разного по цвету, но одинаковой формы, и просит измерить их стороны и углы. Дети формулируют определение равенства треугольников. Тут же обсуждается, что проверять шесть элементов каждый раз трудоемко, поэтому на следующих занятиях появятся более экономичные признаки равенства, которые позволят обходиться меньшим числом измерений. Для закрепления каждая пара получает несколько пар треугольников с уже указанными длинами сторон и градусными мерами углов (в виде таблицы). Нужно определить, равны ли треугольники, сравнивая числа. После этого каждый ученик заполняет «Протокол треугольника», где рисует свой треугольник, подписывает вершины, стороны, углы, указывает его вид и записывает определение равных треугольников. В конце проводится игра «Опознание в толпе»: учитель на экране показывает изображения треугольников и их параметров, а ученики должны быстро назвать вид.

4.2. Три стороны – неоспоримая улика

Занятие посвящено первому признаку равенства треугольников (по трем сторонам).

Занятие начинается с разминки, чтобы вспомнить теорию, которая понадобится для доказательства. Учитель раздает каждой паре карточку, на которой изображены два угла, на сторонах которых изображены точки. Также на карточке указано, что отрезки соединяющие эти точки (поперечины) равны. Учащимся предлагается определить, равны ли углы, и объяснить, на какое правило можно опереться. После ответа учитель фиксирует его на доске. После разминки учитель объявляет, что сегодня семиклассники будут расследовать дело о треугольниках. У них только стороны известны, а углы нет. Но,

используя понятие поперечины, можно доказать, что если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого, то и углы автоматически равны. Учитель предлагает провести следственный эксперимент, на котором каждая пара получает три отрезка (палочки, длины которых 6 см, 7 см, 8 см) и строит треугольник. Затем учитель выдает другой набор с точно такими же длинами, и ученики строят второй треугольник. Измеряя углы транспортиром, они убеждаются, что углы совпадают. Класс выдвигает гипотезу, что равенства трех сторон достаточно для равенства треугольников. Учитель помогает учащимся привести строгое доказательство, опираясь на поперечины. Для усвоения проводится задание «Тройное алиби». Класс делится на команды. Каждая команда получает карточку с тремя числами – длинами сторон. Нужно построить треугольник с помощью циркуля и линейки. Затем команды обмениваются чертежами и проверяют, совпадают ли треугольники. Далее каждый ученик заполняет «Протокол первого признака», где записывает формулировку, делает чертеж и кратко воспроизводит доказательство.

4.3. Две стороны и угол – поймать с поличным

На занятии учащиеся знакомятся со вторым признаком равенства треугольников (по двум сторонам и углу между ними).

Занятие начинается с короткого повторения первого признака равенства. Учитель показывает на доске два треугольника с указанными длинами сторон. Ученики должны определить, равны ли треугольники, и назвать признак, по которому это можно установить. Затем учитель задает вопрос: «А что, если мы знаем не все три стороны, а только две и угол между ними? Можно ли по этим данным утверждать, что треугольники равны?». Учитель предлагает провести операцию «Засада». Каждая пара получает карточку с двумя отрезками и углом. Учитель дает задание построить треугольник по этим элементам с помощью циркуля и линейки. Все учащиеся строят треугольники, а затем обмениваются чертежами с соседней парой. Измеряя третью сторону, ученики замечают, что она получилась одинаковой в обоих треугольниках. Класс делает

предположение, что по двум сторонам и углу между ними можно сказать, что треугольники равны. Учитель с учениками проводят доказательство. Для закрепления проводится игра «Опознавание по фотороботу». Класс делится на команды. Учитель показывает различные чертежи, учащиеся должны определить равны треугольники или нет, и если равно, то указать по какому признаку. Затем каждый заполняет «Протокол второго признака», где записывает формулировку, делает чертеж и кратко излагает доказательство теоремы.

4.4. Третий признак – операция «Противоречие»

В рамках этого занятия учащиеся знакомятся с третьим признаком равенства треугольников (по стороне и двум прилежащим углам).

Занятие начинается с повторения аксиомы IV_2 и второго признака равенства, потому что эти знания понадобятся для доказательства. Затем учитель дает задание построить треугольник по отрезку и двум прилежащим углам. Ученики убеждаются, что треугольник получается единственным. Возникает гипотеза, если сторона и два прилежащих угла одного треугольника равны стороне и двум прилежащим углам другого треугольника, то такие треугольники равны. Далее учитель подводит класс к доказательству через наводящие вопросы. Проводится игра на усвоение «Ложный след», в которой нужно применить все три признака. Класс делится на команды, и каждая команда получает карточки с описаниями пар треугольников. В одних случаях данные соответствуют одному из признаков, в других данные недостаточны (например, две стороны и угол не между ними). Учащиеся должны быстро определить, достаточно ли информации для утверждения о равенстве, и указать какой признак работает. После игры каждый заполняет «Протокол третьего признака», где делает чертеж, записывает теорему и краткую схему доказательства от противного.

4.5. Серединный перпендикуляр: невидимый страж отрезка

Занятие посвящено знакомству с серединным перпендикуляром отрезка.

Учитель начинает с легенды, в которой говорится, что в детективное агентство поступает заявление: из музея пропал ценный отрезок. На месте преступления осталась только подозрительная прямая, которая, как утверждает свидетель, проходила ровно посередине отрезка и была к нему перпендикулярна. Детективы должны выяснить, что это за прямая и какие у нее свойства. Учитель объявляет, что они будут расследовать дело о серединном перпендикуляре, невидимом страже, который охраняет отрезок. Учитель раздает каждому ученику «Протокол серединного перпендикуляра», на котором уже нарисован отрезок (разной длины на разных вариантах). Задание в протоколе – построить серединный перпендикуляр к отрезку с помощью циркуля и линейки. Учитель проверяет правильность построения, обходя класс. Далее учащиеся вводят определение и записывают его. Затем учитель предлагает доказать главное свойство, что любая точка серединного перпендикуляра равноудалена от концов отрезка. Для закрепления учитель раздает листы «Карточка стража» с индивидуальными заданиями. На листе изображены три разных отрезка с отмеченными точками. Необходимо для каждого отрезка построить серединный перпендикуляр, определить, лежат ли отмеченные точки на серединном перпендикуляре, и записать вердикт: точка является стражем (если лежит) или точка нарушитель (если не лежит) и кратко обосновать.

4.6. Три агента одного треугольника (биссектриса, высота, медиана)

Ученики переходят к изучению трех элементов треугольника – биссектрисе, высоте и медиане.

Занятие начинается с легенды, в которой говорится, что в треугольнике работают три секретных агента. У каждого своя миссия, но их имена засекречены. Детективам предстоит выяснить, кто есть кто, наблюдая за их действиями. Учитель раздает каждому три листа с изображением треугольника ABC и дает три задания «Досье агентов». В первом досье ученики соединяют вершины с серединами противоположных сторон и приходят к понятию и

определению медианы. Во втором строят перпендикуляры из вершин к противоположным сторонам, так рождается определение высоты. В третьем делят углы пополам с помощью циркуля и линейки, далее формулируют определение биссектрисы. Все определения фиксируются в «Протоколе трех агентов». Затем учитель проводит эксперимент «Восстановление по уликам», где ученикам надо определить, можно ли построить треугольник ABC по нескольким фрагментам. Каждый получает карточку с одним из наборов (например, только медиана AM и вершина B ; медиана AM и середина S стороны AB ; одна медиана AM ; высота AN и вершина B ; сторона AB и точка пересечения высот K ; высота AN и медиана AM ; высота AN и медиана BL ; высота AN и биссектриса AF ; медиана AM и биссектриса BE). Учащиеся индивидуально определяют, возможно ли восстановление, если да, то выполняют построение на отдельном листе. Затем учитель организует краткое обсуждение, фиксируя в протоколе, какие наборы достаточны, а какие нет. После этого проводится эксперимент «Точка встречи высот». Учитель делит задание по рядам. Первый ряд чертит остроугольный треугольник, второй – прямоугольный, третий – тупоугольный. Каждый ученик строит в своем треугольнике две высоты, отмечает точку их пересечения, затем проводит третью высоту. Когда все готовы, представители рядов докладывают результаты. Учитель обобщает и все записывают результаты в протокол.

4.7. Равнобедренный треугольник и тайна его углов.

На этом занятии учащиеся изучают равнобедренный треугольник, его свойства и признак.

Учитель раздает каждому ученику набор из нескольких вырезанных треугольников (разные по форме) и дает задание измерить стороны линейкой и найти треугольники, у которых есть две равные стороны. Ученики отбирают такие фигуры. Учитель подводит к понятию равнобедренный треугольник и вместе с учащимися формулирует определение. Далее предлагает задание на распознавание «Найди равнобедренных». На экране представлены рисунки, на

которых надо найти равнобедренные треугольники и объяснить свой выбор. Затем ученики переходят к свойству, каждый берет свой вырезанный равнобедренный треугольник и измеряет углы при основании транспортиром. Убеждаются, что они равны. Учитель просит сформулировать теорему и доказать ее строго, не полагаясь на измерения. Далее учитель задает вопрос: «Если в треугольнике два угла равны, можно ли утверждать, что он равнобедренный?» Ученики выдвигают гипотезу, учитель помогает доказать признак. Далее учитель обращает внимание на медиану, высоту и биссектрису, проведенные из вершины к основанию. Учащиеся строят эти отрезки на своем бумажном равнобедренном треугольнике и обнаруживают, что они совпадают. Учитель предлагает доказать это свойство. Закреплением послужит «Протокол равнобедренного треугольника», где нужно написать определение, свойства и признак равнобедренного треугольника и приклеить вырезанный треугольник.

Дело №5. Параллельный мир (6 часов)

В этом блоке изучается аксиома параллельных отрезков (IV_3). Из аксиомы выводятся основная теорема о параллельных, теоремы об углах, образованных параллельными и секущей, а затем, с опорой на эти теоремы, доказывается главный факт геометрии – сумма углов треугольника равна 180° .

5.1. Операция «Равные перпендикуляры»

Учащиеся знакомятся с аксиомой параллельных отрезков, леммой о перпендикулярности и понятием параллельных прямых и параллельных отрезков.

Учитель начинает урок с легенды: в детективное агентство поступает загадочный чертеж, на нем изображен отрезок AB , а от его концов в одну сторону отложены два одинаковых перпендикуляра AC и BD . Свидетель утверждает, что по этим данным можно однозначно восстановить всю фигуру, не измеряя больше ничего. Детективам предстоит проверить, действительно ли из этого следует, что отрезок CD равен AB и что все четыре угла получившегося четырехугольника прямые. Учитель раздает каждому ученику

«Протокол аксиомы IV_3 », чтобы по ходу занятия записывать основные выводы. Учитель просит начертить отрезок AB и от его концов в одну сторону построить перпендикуляры, отложить на них равные отрезки AC и BD и соединить точки C и D . Результаты заносятся в протокол. Учитель предлагает повторить с другими значениями, каждый раз результаты фиксируются в протоколе. Ученики самостоятельно формулируют вывод и записывают его в протокол как аксиому IV_3 . Далее учитель предлагает доказать лемму, что в такой конфигурации AC и BD также перпендикулярны CD . Затем учащиеся формулируют определения параллельных прямых, параллельных отрезков и фиксируют их в протоколе. Для закрепления проводится игра «Тайна равных перпендикуляров». Учитель показывает несколько конфигураций, ученики в протоколе делают пометки, в каких случаях выполняются аксиомы, и делают вывод о равенстве и параллельности.

5.2. Поимка единственной параллельной

На этом занятии учащиеся знакомятся с основной теоремой о параллельных прямых и признаком параллельности через задачу.

Учитель начинает с легенды о городе Параллельске, в котором пропала прямая. Было известно, что она проходила через точку и не пересекала другую прямую. Свидетели утверждают, что такая прямая одна, но преступник настаивает, что их может быть несколько. Учитель раздает каждому «Протокол параллельных». В первой части протокола дана прямая и точка, не лежащая на ней. Учащимся необходимо построить с помощью циркуля и линейки прямую, проходящую через данную точку и параллельную данной прямой. Ученики выполняют построение в протоколе и записывают шаги. Далее учитель просит доказать, что прямые не пересекаются и такая прямая единственная. Учащиеся доказывают с помощью учителя и фиксируют в протоколе. После этого ученики сами формулируют основную теорему о параллельных и записывают ее в протокол. На закрепление учитель дает задачу: построить две прямые a и b . Затем построить прямую $c \perp a$ и прямую $d \perp b$, причем они различны.

Требуется доказать, что c и d параллельны. Ученики работают в парах. После доказательства учитель помогает переформулировать результат как признак параллельности двух прямых, учащиеся записывают этот признак в протокол и приводят чертеж.

5.3. Операция «Секущая»

На занятии учащиеся узнают названия углов при пересечении двух прямых третьей и признаки параллельности прямых с доказательством.

Занятие начинается с легенды, что в отдел поступили показания свидетелей – углов, образованных при пересечении двух прямых секущей. Свидетели утверждают, что по их равенству или сумме можно судить о параллельности прямых, но детективы должны сами проверить эти улики и вывести строгие правила. Учитель раздает «Протокол секущей – часть 1» с чертежом двух прямых и секущей. Сначала ученики вместе с учителем подписывают пары углов. Затем учитель ставит задачу: можно ли, измерив только два угла, гарантировать, что прямые параллельны. Ученики выдвигают гипотезы. Далее они доказывают каждый признак и записывают их в протокол, заполняя пропуски в логических цепочках. На закрепление учитель выдает карточки с двумя заданиями: «Детектор углов» и «Детектор параллельности». В первом даны несколько чертежей и необходимо установить, какие углы являются соответственными, внутренними накрест лежащими, внутренними односторонними. Во втором задании даны несколько чертежей, и учащиеся должны определить параллельные прямые и указать по какому признаку.

5.4. Операция «Секущая 2.0»

Учащиеся на этом занятии проходят свойства параллельных прямых, обратные признакам параллельных прямых.

Учитель в начале урока говорит, что теперь детективы имеют дело с двумя заведомо параллельными прямыми. Преступник утверждает, что из параллельности нельзя сделать никаких выводов об углах. Нужно провести обратное расследование и доказать, что у параллельных прямых углы

подчиняются строгим законам. Каждый ученик получает «Протокол секущей – часть 2» с чертежом с двумя параллельными прямыми и секущей. Ученики сначала измеряют углы транспортиром и фиксируют наблюдения. Затем учитель предлагает доказать эти факты строго, не полагаясь на измерения. Учащиеся доказывают свойства и записывают их протокол. Чтобы усвоить данные свойства, учитель предлагает задание «Алиби параллельных». Каждый ученик получает карточку с чертежами, где даны параллельные прямые и секущая, известны углы. Нужно найти все остальные углы, обосновывая каждый шаг свойствами параллельных. Ученики работают в парах, затем сверяют ответы.

5.5. Прямоугольный треугольник под следствием

На занятии учащиеся изучают леммы о сумме углов прямоугольного треугольника и о двух острых углах, а также рассматривают признаки равенства прямоугольных треугольников.

Занятие начинается с разминки «Блиц-опрос: следы аксиомы IV_3 ». Учитель показывает на экране несколько рисунков, в одних от отрезка в одну сторону отложены равные перпендикуляры, в других – в разные, в третьих – перпендикуляры не равны. Ученики должны быстро определить, в каком случае можно утверждать, что отрезки равны и параллельны, и назвать аксиому IV_3 . Это повторяет аксиому параллельных отрезков, которая понадобится в доказательстве. Далее школьники получают «Протокол прямоугольного треугольника». На чертеже изображен прямоугольный треугольник. Учитель ставит задачу провести дополнительное построение, используя аксиому. В итоге учащиеся выводят, что сумма углов равна двум прямым углам. Ученики самостоятельно формулируют лемму, фиксируют ее в протокол. Далее учитель спрашивает: «А может ли в любом треугольнике быть два тупых угла или два прямых?» Учащиеся рассуждают и формулируют вторую лемму и записывают ее в протокол. Далее ученики в парах выводят признаки равенства прямоугольных треугольников и записывают их в протокол. На закрепление

учащиеся выполняют задание «Восстанови улику». Дан прямоугольный треугольник, известен один острый угол. Необходимо найти второй, обосновав ответ. Также дается задача на применение признаков равенства.

5.6. Сумма углов треугольника: разгадка вековой тайны

В рамках занятия учащиеся знакомятся с теоремой о сумме углов треугольника, а также с понятием внешнего угла треугольника и теоремой о внешнем угле треугольника.

В начале урока проводится разминка «Блиц-опрос: свойства параллельных». Учитель показывает чертежи с двумя параллельными прямыми и секущей, указывает два угла. Учащиеся быстро называют остальные, обосновывая свойствами. Далее учитель раздает «Протокол углов треугольника» с произвольным треугольником. Ученики по руководством учителя проводят через вершину прямую, параллельную стороне. С помощью свойств доказывают, что сумма углов треугольника равна 180° . Формулируют и записывают теорему о сумме углов треугольника. Далее учитель предлагает продлить одну из сторон за вершину. Ученики сами дают определение внешнего угла и, сравнивая, получают теорему о внешнем угле треугольнике. Записывают ее формулировку и доказательство в протокол. На усвоение выполняют задание «Найди пропавший угол» (по двум углам треугольника найти третий, по двум внутренним углам найти третий и внешний при нем угол, по внешнему углу и одному внутреннему найти остальные два внутренних).

Дело №6. Вердикт детектива: от аксиом к комиксу (4 часа)

Завершающее дело курса, подведение итогов всех геометрических исследований. Ученики не изучают новые аксиомы и не доказывают теоремы. Вместо этого они рефлексиируют пройденный путь: как изменилось их мышление, где в жизни встречаются аксиомы, что оказалось самым неожиданным. Затем они творчески переосмысливают аксиоматику, создавая детективные комиксы, где герои используют аксиомы для раскрытия

преступлений. В финале проходит защита проектов. Это дело не добавляет новых знаний, но закрепляет и делает осмысленным весь факультативный курс.

6.1. Круглый стол «Чему нас научила аксиоматика?»

Занятие начинается с заключительной легенды. Учитель сообщает, что главное расследование подошло к концу, все аксиомы допрошены, все теоремы доказаны, все дела раскрыты. Теперь детективы должны собраться на итоговое совещание, чтобы подвести черту и поделиться опытом. Класс превращается в круглый стол, где каждый имеет право голоса. Сначала учитель предлагает вспомнить яркие моменты курса и проводит краткое обсуждение, где учащиеся делятся своими впечатлениями. Затем класс делится на группы по 5 – 6 человек. Каждая группа получает карточку с одним из вопросов (например, какой момент курса был самым трудным и как удалось преодолеть соблазн «посмотреть на картинку» или зачем математики вообще придумали аксиомы и что было бы без них), обсуждает, и затем представители каждой группы выступают с краткими выводами. Затем проводится игра, где учитель называет утверждение, а команды по очереди отвечают, является ли оно аксиомой или теоремой. В завершение каждый ученик получает стикер и пишет на нем свое главное открытие за курс. Стикеры клеятся на большой плакат «Наши выводы». Учитель зачитывает несколько ярких примеров и подводит итог: детективы не только изучили геометрию, но и научились мыслить строго, не доверять иллюзиям и ценить логику.

6.2 – 6.3. Создание и защита «Аксиоматического комикса»

После круглого стола учащиеся переходят к творческому этапу, созданию детективного комикса. Задача каждой команды – придумать сюжет на 4 – 6 кадров, где персонажи используют аксиомы Александра для раскрытия преступления. Например, аксиома параллельных отрезков спасает от столкновения двух поездов или аксиома Архимеда разоблачает мошенника, который утверждал, что его можно бесконечно долго преследовать маленькими шагами. Комикс рисуется от руки на листе А3 или в цифровом формате.

Учитель консультирует по корректности применения аксиом. Далее проходит защита комиксов. Каждая группа представляет свой комикс, объясняет, какие аксиомы задействованы и как именно они работают в сюжете. В конце учитель подводит итог и говорит, что курс завершен, но аксиоматическое мышление остается с ними навсегда.

5. *Планируемые результаты освоения курса.*

Личностные результаты.

В ходе освоения программы факультатива у обучающегося будут сформированы:

- потребность в интеллектуальной деятельности, проявляющаяся в устойчивом интересе к поиску логических обоснований вместо опоры на визуальную очевидность;

- готовность к принятию правил и договоренностей как основы любой дедуктивной теории;

- способность к конструктивному диалогу при обсуждении доказательств, умение выслушивать альтернативные способы рассуждения и аргументированно отстаивать свою позицию;

- развитие самооценки через фиксацию собственных успехов;

- уважение к научной строгости, понимание того, что отсутствие доказательства делает любое утверждение лишь гипотезой;

- стремление к преодолению интеллектуальных трудностей (отказ от интуитивного «это видно» в пользу ссылки на аксиому или теорему);

- заинтересованность к математической науке и математическому творчеству.

Метапредметные результаты.

У обучающегося будут сформированы умения:

- самостоятельно формулировать цель доказательства в рамках конкретного занятия;

- планировать последовательность шагов доказательства, выбирая подходящие аксиомы или ранее доказанные теоремы;
- анализировать геометрических чертеж, информацию;
- классифицировать утверждения на аксиомы и теоремы;
- планировать и организовывать совместную работу с одноклассниками и учителем.

Предметные результаты.

У обучающегося будут сформированы:

- знания аксиом А. Д. Александрова и умение объяснять их геометрический смысл;
- умения оперировать основными понятиями геометрии, принятые в аксиоматике А. Д. Александрова;
- умения различать аксиому, теорему, определение и понимать их роль в дедуктивном построении геометрии;
- умения применять аксиомы для обоснования простейших свойств геометрических фигур;
- умения доказывать основные теоремы планиметрии;
- умения выполнять с помощью циркуля и линейки стандартные построения;
- умения решать задачи на вычисление геометрических величин с использованием доказанных теорем и признаков.

2.3 Конспекты занятий в рамках факультативного курса

Конспект факультативного занятия по теме «Что такое отрезок, если не верить глазам?»

Тема: «Что такое отрезок, если не верить глазам?».

Класс: 7 класс.

Форма работы: фронтальная, индивидуальная, парная.

Цель: сформировать у учащихся понятие отрезка как геометрического объекта, создать условия для открытия аксиом I_1 и I_2 .

Задачи:

– образовательные: познакомить с формулировками аксиом, сформировать понимание единственности отрезка, соединяющего две точки, отработать умение обосновывать простейшие утверждения ссылкой на аксиомы;

– развивающие: развивать логическое мышление через анализ и отбор истинных утверждений, развивать наблюдательность и воображение;

– воспитательные: воспитывать внимательность и аккуратность, формировать умение работать в парах.

Планируемые результаты:

– личностные: проявление познавательного интереса, готовность к сотрудничеству в паре при выполнении заданий, понимание важности строгих аксиом;

– метапредметные: умение анализировать информацию, представленную в виде текста с пропусками, способность классифицировать утверждения на истинные и ложные;

– предметные: знание аксиом I_1 и I_2 , умение объяснить, почему отрезок имеет два конца и внутренние точки и почему между двумя точками можно провести единственный отрезок.

Структура занятия:

1. Организационный этап (3 мин.)
2. Актуализация знаний (4 мин.)
3. Открытие нового знания (24 мин.)
4. Первичное закрепление (10 мин.)
5. Рефлексия (4 мин.)

Ход занятия

1. Организационный этап.

– Здравствуйте, детективы! Сегодня мы начинаем наше первое расследование. Дело называется «Исчезновение середины».

Учитель показывает лист с двумя нечеткими точками.

– Посмотрите на доску. Вот точки A и B . Они на месте, а вот отрезка между ними нет. Концы уцелели. Как такое могло случиться? И главное, можем ли мы быть уверены, что отрезок вообще существовал, и что между A и B есть внутренние точки? Чтобы это выяснить, мы допросим двух свидетелей – аксиомы существования и проведения отрезка. Заполним протоколы показаний, а затем составим алиби для отрезка AB . Приготовьтесь, расследование начинается!

2. Актуализация знаний.

– Прежде чем допрашивать свидетелей, давайте вспомним что мы узнали на вводном занятии. Что такое аксиома? И чем она отличается от теоремы? (Аксиома – это утверждение, принимаемое без доказательства, теорема – утверждение, которое доказывают)

– Верно. Сегодня мы познакомимся с первыми аксиомами связи. Они станут нашими главными свидетелями. А теперь приступим к расследованию.

3. Открытие нового знания.

– Первым свидетелем является аксиома I_1 . Возьмите карточку «Протокол существования» (рисунок 39). Ваша задача подчеркнуть правильные варианты.

ПРОТОКОЛ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Показания свидетеля _____

Я, аксиома существования, заявляю, что:

☐ _____ (существует / не существует) хотя бы один отрезок;

☐ у каждого отрезка есть ровно _____ (один / два / три) конца;

☐ кроме того отрезок _____ (содержит / не содержит) другие точки.

ОТДЕЛ ГЕОМЕТРИИ
Подразделение: аксиом

конфиденциально
не разглашать

Рисунок 39

«Я, аксиома существования, заявляю, что:

1. _____ (существует / не существует) хотя бы один отрезок;
2. У каждого отрезка есть ровно _____ (один / два / три) конца;
3. Кроме того отрезок _____ (содержит / не содержит) другие точки.»

– Время вышло. Давайте проверим. Кто прочитает, что получилось?

– Правильно. Аксиома I_1 утверждает, что отрезок существует, у него ровно два конца, и кроме концов есть другие точки – внутренние. Запомните это.

– Теперь давайте составим «Фоторобот отрезка» (рисунок 40). У каждого на столе лист с размытыми, почти стертыми точками A и B . Глазам верить нельзя, точки видны плохо. Но мы знаем показания аксиомы существования. Что мы должны сделать? (Обвести концы, провести отрезок, отметить внутренние точки)

– Верно, выполняйте. Обведите концы четко, проведите между ними пунктиром «невидимый» отрезок, а затем отметьте на нем три любые внутренние точки. После этого приготовьтесь объяснить, почему вы уверены, что эти точки существуют, даже если отрезок полностью не нарисован.



Рисунок 40

– Отлично. Вы только что восстановили фоторобот отрезка, опираясь на показания первого свидетеля. Запомните, что аксиома I_1 гарантирует, что у отрезка есть внутренние точки, даже если мы их не видим.

– Теперь допросим второго свидетеля, аксиому I_2 . Возьмите «Протокол проведения» (рисунок 41). Заполните пропуски. А затем на том же листе с размытыми точками попробуйте нарисовать два разных отрезка между A и B . Получается?

ПРОТОКОЛ ПРОВЕДЕНИЯ

Показания свидетеля

Я, аксиома проведения, заявляю, что:

☐ любые две точки можно соединить _____ (отрезком / кривой / ломаной);

☐ такой отрезок существует _____ (только один / иногда два / много).

ОТДЕЛ ГЕОМЕТРИИ
Подразделение аксиом

конфиденциально
не распространять

Рисунок 41

«Я, аксиома проведения, заявляю, что:

1. Любые две точки можно соединить _____ (отрезком / кривой / ломаной);

2. Такой отрезок существует _____ (только один / иногда два / много).»

– Кто попробовал? Получилось нарисовать два разных отрезка? (Нет, второй отрезок получается кривым или ломаным)

– Правильно. Ведь аксиома проведения утверждает, что любые две точки можно соединить отрезком, и притом только одним. Это гарантия единственности. Представьте, если бы отрезков было два, мы не смогли бы однозначно измерить, например, расстояние.

4. *Первичное закрепление.*

– А теперь самое ответственное – составить «Алиби отрезка АВ». Каждая пара получает конверт с уликами и большой бланк «Алиби отрезка» (рисунок 42). На карточках написаны утверждения. Одни из них правдивы, другие ложные. Вашей задачей является отобрать только верные улики, приклеить их на бланк и рядом написать, какая аксиома подтверждает каждую улику. Работаем в парах.

АЛИБИ ОТРЕЗКА

ИНСТРУКЦИЯ: Выберите утверждения в отведенные места и укажите, из чего следует каждое утверждение

Улика №1	Следует из:
Место для вклеивания улики	
Улика №2	Следует из:
Место для вклеивания улики	
Улика №3	Следует из:
Место для вклеивания улики	
Улика №4	Следует из:
Место для вклеивания улики	
Улика №5	Следует из:
Место для вклеивания улики	
Улика №6	Следует из:
Место для вклеивания улики	

УЛИКИ: ПРОВЕРЬТЕ ИЛИ ЗАПИСАТЕ

СОВЕТУЕМ ПОСМОТРЕТЬ

Рисунок 42

Набор утверждений:

1. Между A и B есть хотя бы одна внутренняя точка. (Истина, I_1)
2. Между A и B можно провести два разных отрезка. (Ложь)
3. Отрезка AB не может существовать без внутренних точек. (Истина, I_1)

4. Если нарисовать отрезок между точками A и B , он будет единственным.
(Истина, I_2)

5. У отрезка может быть три конца. (Ложь)

6. Концы отрезка – это его внутренние точки. (Ложь)

7. Отрезок AB существует всегда, даже если его не нарисовать. (Истина, I_1 и I_2)

8. Любые две точки можно соединить только одним отрезком. (Истина, I_2)

9. Внутренние точки отрезка – это те, которые лежат между концами.
(Истина, I_1)

10. Отрезок можно провести только если он нарисован на бумаге. (Ложь)

– Время вышло. Давайте проверим. Я называю утверждение, а те, кто его наклеил, поднимают руку и называют аксиому, из которой следует данное утверждение.

– Молодцы. Теперь у отрезка AB есть надежное алиби. Он существует, единственен и имеет, кроме концов, внутренние точки.

5. *Рефлексия.*

– Итак, детективы, подведем итог нашего первого расследования. Что мы сегодня выяснили? (Аксиома существования гласит, что существует отрезок, он имеет ровно два конца и есть другие точки, лежащие на отрезке, а аксиома проведения отрезка гласит, что любые две точки соединить единственным отрезком)

– Верно. Мы восстановили фоторобот отрезка и собрали его алиби. Но остается главный вопрос, где же середина? Мы знаем, что внутренние точки есть, но как найти ту самую, которая делит отрезок пополам? Это мы будем расследовать на следующих занятиях, когда познакомимся с аксиомами равенства и аксиомой Архимеда. Сдайте листы с алиби. Расследование первого эпизода закрыто. До встречи!

Конспект факультативного занятия по теме «Операция «Секущая»»

Тема: «Операция «Секущая»».

Класс: 7 класс.

Форма работы: фронтальная, индивидуальная, парная.

Цель: создать у учащихся целостное представление о трех признаках параллельности прямых, выработать умение безошибочно выделять на чертеже пары соответственных, накрест лежащих и односторонних углов, а также применять эти признаки для обоснования параллельности.

Задачи:

– образовательные: ввести точные наименования для углов, возникающих при пересечении двух прямых секущей, сформулировать и логически обосновать каждый из трех признаков параллельности, научить по заданным значениям углов делать вывод о параллельности прямых;

– развивающие: развивать способность к анализу геометрического чертежа и классификации угловых пар, навык доказательства от противного;

– воспитательные: воспитывать аккуратность при работе с чертежами, формирование коммуникабельности.

Планируемые результаты:

– личностные: проявление познавательного интереса, осознание ценности строго логического вывода перед интуитивной догадкой, уважение к мнению партнера при парной работе;

– метапредметные: умение самостоятельно формулировать гипотезу о параллельности по заданным углам, умение анализировать информацию, владение приемом доказательства «от противного»;

– предметные: знание углов при пересечении параллельных прямых секущей, трех признаков параллельности, умение доказывать параллельность, умение находить на чертеже указанные пары углов.

Структура занятия:

1. Организационный этап (3 мин.)
2. Актуализация знаний (4 мин.)
3. Открытие нового знания (25 мин.)
4. Первичное закрепление (10 мин.)
5. Рефлексия (3 мин.)

Ход занятия

1. Организационный этап.

– Добрый день, детективы! Сегодня мы приступаем к операции под кодовым названием «Секущая». В наше агентство поступили показания группы углов, которые образовались при пересечении двух подозрительных прямых третьей, которая называется секущей. Эти углы заявляют, что по их внешнему виду, по равенству или по сумме, можно безошибочно определить, будут ли две исходные прямые когда-нибудь пересекаться или же они параллельны. Нашей задачей на этот раз является проверить эти показания, вывести строгие правила и научиться применять их в деле. Готовы к расследованию?

2. Актуализация знаний.

– Прежде чем разбираться с новыми свидетелями, давайте вспомним, что мы уже знаем о параллельности. Ранее мы познакомились с параллельными прямыми и отрезками. Кто напомним определения? (Прямые, которые не пересекаются, называются параллельными, а параллельные отрезки – это отрезки, лежащие на параллельных прямых)

– Отлично. А как мы строили параллельную прямую через точку, не лежащую на данной прямой? (Опускали перпендикуляр, затем восстанавливали перпендикуляр к нему)

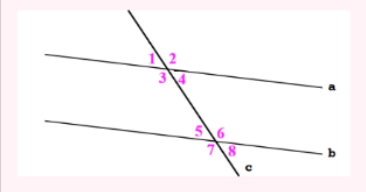
– Верно. Это знание нам сегодня пригодится. А теперь внимание, появляется новый объект – секущая. Что это такое? Давайте разберемся прямо сейчас.

3. Открытие нового знания.

Учитель раздает «Протокол секущей – часть 1» (рисунок 43). На передней странице изображены две прямые a и b , пересеченные третьей прямой c . Углы пронумерованы от 1 до 8. В протоколе есть пустые строки для определения секущей, подписей пар углов и таблица с признаками параллельности, которую надо заполнить.

ПРОТОКОЛ СЕКУЩЕЙ – ЧАСТЬ 1

Углы: Схема левого пересечения



Покажите соседям

Секущая – это _____

Классификация углов (пары углов)

Признак	Условие	Заключение
1	Сумма односторонних углов = _____	$a \parallel b$
2	Соответственные углы _____	$a \parallel b$
3	Накрест лежащие углы _____	$a \parallel b$

Рисунок 43

– Посмотрите на чертеж. Прямая c пересекает и прямую a , и прямую b . Такая прямая называется секущей. Запишите это определение в протокол.

– Теперь дадим имена каждому углу и каждой паре. Я показываю на доске, вы подписываете в протоколах.

– Накрест лежащие – это пары 3 и 6, а также 4 и 5. Почему накрест? Потому что они лежат между прямыми и по разные стороны от секущей, как будто перекрещиваются. Подпишите.

– Соответственные – это пары 1 и 5, 2 и 6, 3 и 7, 4 и 8. Они расположены по одну сторону от секущей, один угол между прямыми, другой – снаружи, но они как бы «смотрят» в одном направлении. Подпишите.

– Односторонние – это пары 3 и 5, 4 и 6. Они оба лежат между прямыми и находятся по одну сторону от секущей. Подпишите.

– Теперь главный вопрос расследования. Допустим, нам не известно, параллельны ли прямые a и b . Но мы измерили всего два угла. Какие комбинации равенств или сумм могут служить неопровержимой уликой того, что a и b никогда не пересекутся? Выдвигайте гипотезы. (Если накрест лежащие углы равны, если соответственные углы равны, если сумма односторонних углов 180°)

– Эти три предположения и есть признаки параллельности, давайте заполним таблицу в протоколе. Наша задача доказать каждое из них, опираясь на уже известные аксиомы и теоремы. Возьмите следующий лист протокола. Начнем мы с признака по сумме внутренних односторонних углов. Пусть при пересечении прямых a и b секущей c сумма внутренних односторонних углов, например $\angle 1$ и $\angle 2$, равна 180° . Надо доказать, что $a \parallel b$. Какой метод доказательства часто используют, когда хотят показать, что прямые не пересекаются, как вы думаете? (Метод от противного, надо предположить, что они пересекаются, и получить противоречие)

– Верно. Предположим, что a и b не параллельны, то есть они пересекаются в некоторой точке C . Что у нас получится? (Образуется треугольник $\triangle ABC$, где A и B – точки пересечения секущей с прямыми)

– Отлично. Теперь нам нужно использовать условие $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$. Посмотрите на чертеж, какие углы являются смежными с $\angle 1$? ($\angle 1$ и $\angle 3$ смежные, их сумма равна 180°)

– Тогда чему равен $\angle 3$ через $\angle 1$? ($\angle 3 = 180^\circ - \angle 1$)

– А чему равен $\angle 2$ по условию? ($\angle 2 = 180^\circ - \angle 1$, потому что $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$)

– Значит $\angle 3 = \angle 2$. Давайте попробуем дополнительное построение. Продолжим сторону CA за точку A на отрезок AD , равный BC . Что можно сказать о треугольниках ABD и ABC ? (Они равны по двум сторонам и углу между ними)

– Верно. Тогда какому углу равен $\angle ABD$? ($\angle 1$)

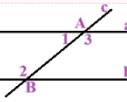
– Но $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, а значит $\angle ABD + \angle CBA = 180^\circ$. Обратите внимание, эти углы смежные. Получается, что BD и BC лежат на одной прямой. Значит, мы получили, что и точка A , и точка B лежат на отрезке CD . Но тогда прямые a и c совпадают, что противоречит условию. Следовательно, наше предположение о пересечении a и b неверно. Значит, $a \parallel b$.

– Запишите доказательство в протокол, заполнив пропуски (рисунок 44).

СОВЕТЫ И ПОДСКАЗКИ ДЛЯ ДЕТЕЙ
ПРОТОКОЛ СЕКУЩЕЙ
ЧАСТЬ 1

Первый признак параллельности

МЕСТО ДЛЯ ЧЕРТЕЖА:



УСЛОВИЕ: ДОКАЗАТЬ:

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО:

1. Предположим противное. Пусть a _____
2. Тогда они пересекаются в некоторой точке _____
3. Получим треугольник _____ где A и B — точки пересечения секущей c с прямыми a и b .
4. По условию $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, а значит $\angle 3 = 180^\circ - \angle 1$.
5. Следовательно _____
6. Выполним дополнительное построение. Продолжим сторону _____ за точку A на отрезке AD равной _____
7. Рассмотрим $\triangle$ _____ и $\triangle$ _____
8. По построению: $\angle 1, \angle AD =$ _____ по построению; $\angle 2, \angle AB =$ _____ по построению; $\angle 3, \angle DB =$ _____
9. Значит $\triangle$ _____ и $\triangle$ _____ по двум сторонам и углу между ними.
10. Но равенства треугольников следует, что _____
11. $\angle ABD = \angle CBA =$ _____
12. Тогда прямые _____ и _____ совпадают, что противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно и a _____ b .

СОВЕРШЕННО СОВЕРШЕНО — НЕ ПОКАЗЫВАТЬ

Рисунок 44

«Условие: _____ ($\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$)

Доказать: _____ ($a \parallel b$)

Доказательство:

1. Предположим противное. Пусть a _____ (не параллельна) b . Тогда они пересекаются в некоторой точке _____ (C).

2. Получаем треугольник _____ (ABC), где A и B — точки пересечения секущей c с прямыми a и b .

3. $\angle 1$ и $\angle 3$ — _____ (смежные) углы, поэтому $\angle 3 = 180^\circ - \angle 1$.

4. По условию $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$, а значит $\angle 2 = 180^\circ - \angle 1$.

5. Следовательно, _____ ($\angle 3$) = _____ ($\angle 2$).

6. Выполним дополнительное построение. Продолжим сторону _____ (CA) за точку A на отрезок AD , равный _____ (BC).

7. Рассмотрим Δ _____ (ABD) и Δ _____ (ABC):

7.1. $AD =$ _____ (BC) по построению;

7.2. $AB -$ _____ (общая) сторона;

7.3. $\angle DAB = \angle$ _____ (ABC).

Значит, Δ _____ (ABD) = Δ _____ (ABC) по двум сторонам и углу между ними.

8. Из равенства треугольников следует, что $\angle$ _____ (ABD) = $\angle$ _____ (1).

9. $\angle ABD + \angle CBA =$ _____ (180°).

10. Тогда прямые _____ (a) и _____ (c) совпадают, что противоречит условию. Следовательно, наше предположение неверно, и a _____ ($\parallel$) b .»

– Теперь рассмотрим второй признак по соответственным углам. Возьмите следующий лист протокола. Кто сможет сформулировать второй признак? (Если при пересечении двух прямых третьей прямой окажется, что соответственные углы равны, то прямые параллельны)

– Посмотрите на чертеж. Пусть $\angle 1 = \angle 2$. Что мы знаем о $\angle 1$ и $\angle 3$? (Они смежные, $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$)

– По условию, $\angle 1 = \angle 2$. Значит мы можем заменить $\angle 1$ на $\angle 2$, что получится? ($\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, это сумма внутренних односторонних углов, значит по первому признаку прямые параллельны)

– Вы правы, заполните этот вывод в протоколе (рисунок 45).

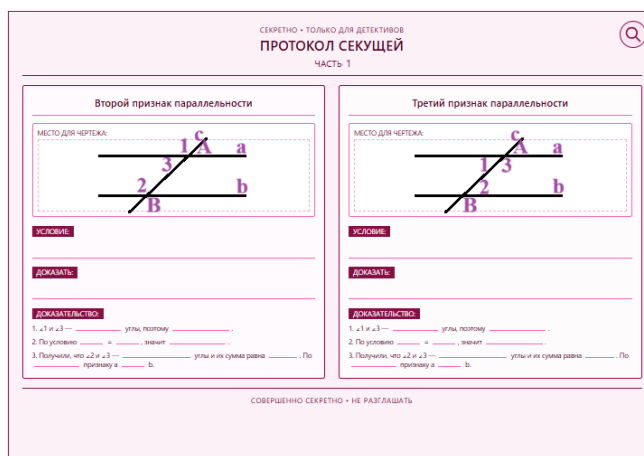


Рисунок 45

«Условие: _____ ($\angle 1 = \angle 2$)

Доказать: _____ ($a \parallel b$)

Доказательство:

1. $\angle 1$ и $\angle 3$ — _____ (смежные) углы, поэтому _____ ($\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$).

2. По условию _____ ($\angle 1$) = _____ ($\angle 2$), значит _____ ($\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$).

3. Получили, что $\angle 2$ и $\angle 3$ — _____ (внутренние односторонние) углы и их сумма равна _____ (180°). По _____ (первому) признаку a _____ ($\parallel$) b »

– Остался последний, третий признак параллельности по накрест лежащим углам. Кто его может сформулировать? (Если при пересечении двух прямых третьей прямой окажется, что внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны)

– Молодцы. Пусть $\angle 1 = \angle 2$. Что можно сказать о $\angle 1$ и $\angle 3$? (Смежные, значит $\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$)

– По условию, $\angle 1 = \angle 2$. Так же, как и в предыдущем, мы можем заменить $\angle 1$ на $\angle 2$, что получится? ($\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$, это сумма внутренних односторонних углов, значит по первому признаку прямые параллельны)

– Все верно. Запишите и этот вывод (рисунок 45).

«Условие: _____ ($\angle 1 = \angle 2$)

Доказать: _____ ($a \parallel b$)

Доказательство:

1. $\angle 1$ и $\angle 3$ – _____ (смежные) углы, поэтому _____ ($\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$).

2. По условию _____ ($\angle 1$) = _____ ($\angle 2$), значит _____ ($\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ$).

3. Получили, что $\angle 2$ и $\angle 3$ – _____ (внутренние односторонние) углы и их сумма равна _____ (180°). По _____ (первому) признаку a _____ ($\parallel$) b .»

4. *Первичное закрепление.*

– Теперь проверим, насколько хорошо вы усвоили новые знания. Работаем в парах. На партах лежат карточки с двумя заданиями «Детектор углов» (рисунок 46) и «Детектор параллельности» (рисунок 47). В первом вам необходимо установить, какие углы являются соответственными, внутренними накрест лежащими и внутренними односторонними. Во втором задании вам нужно указать параллельные прямые на рисунках и по какому признаку вы это определили.

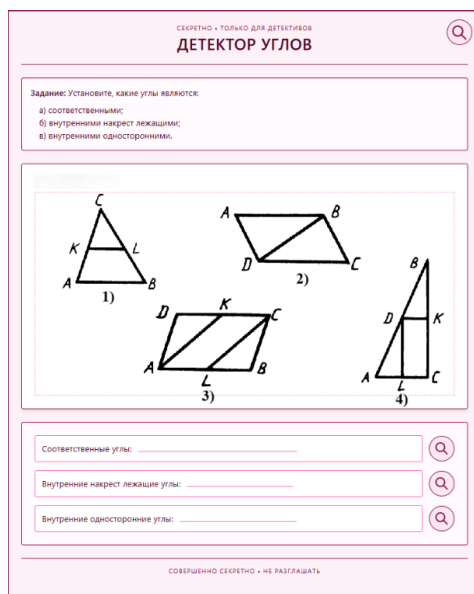


Рисунок 46

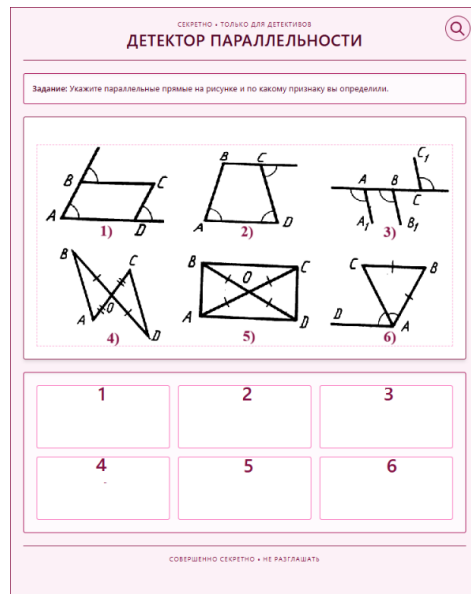


Рисунок 47

– Все выполнили. Давайте теперь разберем каждый чертеж.

5. *Рефлексия.*

– Итак, детективы, подведем черту под сегодняшней операцией. Какие три признака параллельности мы вывели и доказали? (По сумме односторонних углов, равной 180° , по равенству накрест лежащих углов, по равенству соответственных углов)

– Молодцы! Теперь мы умеем, имея всего два угла из восьми, выносить вердикт, пересекутся прямые или нет. Это очень ценный инструмент. Но расследование не закончено. На следующем занятии «Операция «Секущая 2.0»» мы пойдем обратным путем, если прямые заведомо параллельны, то какие свойства углов из этого следуют? Вы будете выступать уже не в роли следователей, а в роли экспертов, проверяющих «Алиби параллельных». Спасибо всем за работу, дело продвигается успешно!

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Система аксиом А. Д. Александрова представляет собой четкую и систематичную основу для изучения начальных сведений планиметрии, обеспечивая прочную основу для глубокого понимания геометрической теории. Ее применение способствует формированию у школьников дедуктивного мышления, логической культуры, интереса к строгому математическому обоснованию и целостного восприятия геометрии. Однако в современной школьной практике потенциал этой аксиоматики остается нераскрытым. Для решения этой проблемы разработан факультативный курс в детективной сюжетной рамке, позволяющий мотивировать учащихся и системно осваивать аксиоматику.

По итогам выполненной мной работы можно выделить следующие основные результаты:

1) Проведен обзор и анализ научных и учебно-методических источников по теме аксиоматического построения геометрии, а именно системы аксиом А. Д. Александрова.

2) В систематизированном виде представлены все группы аксиом А. Д. Александрова и доказаны ближайшие следствия.

3) Разработана рабочая программа факультативного курса «Аксиоматический детектив: геометрия без свидетелей», которая посвящена изучению начальных сведений планиметрии на основе системы аксиом А. Д. Александрова.

4) Разработаны два конспекта занятий в рамках факультатива.

Все поставленные задачи исследования решены, цель работы достигнута. Разработанный факультативный курс может быть использован в школе для углубленного изучения геометрии и развития логического мышления учащихся.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия : учеб. для 7 – 9 кл. сред. шк. М. : Просвещение, 1992. 320 с.
2. Александров А. Д., Нецветаев Н. Ю. Геометрия : учеб. 2-е изд., исправ. СПб. : БХВ-Петербург, 2010. 624 с.
3. Александров А. Д. Основания геометрии : учеб. пособие для вузов. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. 288 с.
4. Геометрия. 7 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / А. Д. Александров [и др.] ; Рос. акад. наук, Рос. акад. образования. М. : Просвещение, 2013. 176 с.
5. Горшкова Л. С., Сорокина М. В. Основания геометрии : учебное пособие для студентов педагогических вузов. Пенза : ПГПУ им. В. Г. Белинского, 2009. 144 с.
6. Киселев А. П., Рыбкин Н. А. Геометрия: Планиметрия: 7-9 кл. : Учебник и задачник. М. : Дрофа, 1995. 352 с.
7. Математика. Геометрия: 7 – 9-е классы: базовый уровень : учеб. / Л. С. Атанасян [и др.]. 14-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2023. 416 с.
8. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. / Ю. М. Колягин [и др.]. М. : Просвещение, 1977. 480 с.
9. Миронов А. Н., Хайртдинова Г. Ф. К вопросу о содержании факультативных занятий по математике в школе // Азимут научных исследований: педагогика и психология. 2019. Т. 8. № 2(27). С. 162–164.
10. Паньженский В. И., Сорокина М. В., Тяпин Н. А. Различные варианты построения евклидовой геометрии : учеб. пособие. Пенза : Изд-во ПГУ, 2015. 60 с.
11. Трифонова Н. В., Трифонов С. В., Макеева Е. А. Современные приемы, методы и формы проведения факультативных занятий по математике в

школе // Общество и наука : векторы развития : сб. тр. науч.-практ. конф. Чебоксары : Центр научного сотрудничества «Интерактив плюс», 2025. Вып. 1. С. 190–192.

12. Шестакова М. Н. Использование интерактивных технологий на уроках математики в общеобразовательной школе // Наука и практика в образовании : элек. науч. журн. 2022. Т. 3. № 5. С. 303–311. URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/ispolzovanie-interaktivnyh-tehnologii-na-urokah-matematiki-v-obscheobrazovatelnoy-shkole/viewer>. Заглавие с экрана (дата обращения: 07.03.2026).

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
« 12 » 09 20 25 г.
Паньженский В.И. Паньженский В.И.

Задание

по ВКР студента Щегловой Кристины Денисовны
(ФИО полностью)

Тема работы «Особенности изучения начальных сведений планиметрии на основе системы аксиом А. Д. Александрова»

Утверждена приказом по университету от « 25.09 » 20 25 г. № 1103/0

Срок сдачи студентом законченной работы « 21 » 04 20 25 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Анализ научной и учебно-методической литературы по теме исследования	Октябрь 2025 г.	Выполнено <i>Пань</i>
2.	Рассмотрение и изложение аксиом А. Д. Александрова и их ближайшие следствия	Ноябрь – декабрь 2025 г.	Выполнено <i>Пань</i>
3.	Разработка рабочей программы факультативного курса на тему «Аксиоматический детектив: геометрия без свидетелей»	Январь – март 2026 г.	Выполнено <i>Пань</i>
4.	Разработка конспектов факультативных занятий по темам: «Что такое отрезок, если не верить глазам?», «Операция «Секущая»»	Март 2026 г.	Выполнено <i>Пань</i>
5.	Оформление текста работы	Апрель – май 2026 г.	Выполнено <i>Пань</i>
6.	Подготовка презентации и выступления	Июнь 2026 г.	Выполнено <i>Пань</i>

Дата выдачи задания «11» 09 2025г.

Руководитель *Пань* Паньженский В.И.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

Щеглова Щеглова К.Д.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
Гулякову А.Д.
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Щегловой Кристины Денисовны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Щеглова Кристина Денисовна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Особенности изучения начальных сведений планиметрии на основе системы аксиом А. Д. Александрова», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


подпись
21.04.26
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 21.04.26
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР 
подпись
Паньженский В.И.
Ф.И.О.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ»
выпускной квалификационной работы на тему «Особенности изучения
начальных сведений планиметрии на основе системы аксиом А. Д.
Александрова»
студентки 4 курса Щегловой Кристины Денисовны
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование» профиля
подготовки «Математика»
Руководитель ВКР Паньженский Владимир Иванович



Отчет предоставлен сервисом
«Антиплагиат» - <http://nngu.antiplagiat.ru>



Отчет о проверке

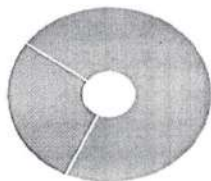
Автор: Щеглова Кристина Денисовна

Название документа: Особенности изучения начальных сведений
планиметрии на основе системы аксиом А.Д.Александрова

Проверяющий: Паньженский Владимир Иванович

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования "Пензенский государственный
университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



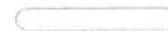
Совпадения:
28,06%



Оригинальность:
71,94%



ИИ-контент:
0%



Цитирования:
0%



Самоцитирования:
0%



1 «Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

2 Проверено: 97,35% текста документа, исключено из проверки: 2,65% текста документа. Разделы и элементы, отключенные пользователем: Титульный лист, Библиография, Приложение

- Совпадения — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- Самоцитирование — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» — это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- Цитирование — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированию относятся также шаблонные фразы, библиография, фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- Текстовое пересечение — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- Источник — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- Оригинальный текст — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальности» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 31

Тип документа: Выпускная квалификационная работа

Дата проверки: 22.04.2026 13:42:58

Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 88

Символов в тексте: 122094

Слов в тексте: 16892

Число предложений: 2686

22.04.26

ДД.ММ.ГГГГ.

ПОДПИСЬ

Паньженский В.И.
Ф.И.О. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Особенности изучения начальных сведений планиметрии на
основе системы аксиом А. Д. Александрова»
студентки Щегловой Кристины Денисовны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 22ФПМ1

В выпускной квалификационной работе Щегловой Кристины Денисовны разработан факультативный курс по изучению начальных сведений планиметрии, основанного на системе аксиом А.Д. Александрова.

Актуальность темы исследования обусловлена тем, что система аксиом Александрова выделяется своим вниманием к деталям и ясностью структуры, обеспечивая прочную основу для глубокого понимания теории. Использование такого подхода могло бы стать полезным дополнением к стандартному курсу, давая учителям возможность развивать у школьников навыки критического мышления и умение ясно выражать свои мысли в математике.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, заключения и списка использованных источников.

Основная часть состоит из двух глав. В первой главе детально рассмотрена система аксиом Александра Даниловича Александрова, лежащей в основе разработанного факультативного курса.

Во второй главе представлена рабочая программа факультативного курса по изучению начальных сведений планиметрии на основе системы аксиом А.Д. Александрова. А также даны развернутое тематическое планирование, подробное описание каждого занятия и представлены конспекты двух занятий факультативного курса.

Работа Щегловой К.Д. является самостоятельным исследованием. Практическая значимость заключается в возможности внедрения разработанного факультативного курса в образовательный процесс средних общеобразовательных учреждений.

Выпускная квалификационная работа Щегловой Кристины Денисовны «Особенности изучения начальных сведений планиметрии на основе системы аксиом А. Д. Александрова» удовлетворяет требованиям, предъявляемым к выпускным квалификационным работам, и заслуживает оценки «отлично».

Руководитель ВКР



Паньженский Владимир Иванович, и. о.
заведующего кафедрой «Математическое
образование», к.ф.-м.н., профессор