

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра «Математическое
образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Исследование геометрии псевдоевклидовой плоскости»

Студент

Ю.В. 04.06.22
(подпись, дата)

Дыранова Юлия Вячеславовна
(ФИО полностью)

Руководитель

Пань 04.06.22
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Журавл 29.06.22
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 21.06.22 № 11)

Заведующий кафедрой

Пань 21.06.22 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой 5 (протокол заседания ГЭК от 06.07.22 № 3)

Секретарь ГЭК

Журавл 06.07.22 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2022

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Плоскость Минковского	7
1.1. Аксиоматическое определение плоскости Минковского	7
1.2. Двумерное псевдоевклидово пространство	9
1.3. Вращение ортонормированного репера в псевдоевклидовой плоскости	15
1.4. Измерение площадей и углов на псевдоевклидовой плоскости	22
Глава 2. Организация изучения темы «Псевдоевклидова геометрия»	29
2.1. О факультативных занятиях в современной школе	29
2.2. Факультативный курс по теме «Псевдоевклидова геометрия»	32
2.3. Конспекты занятий в рамках факультативного курса	38
Заключение.....	55
Список литературы.....	56

Введение

Любая научная теория в своём становлении проходит несколько стадий: от накопления отдельных её фактов, их систематизации, выстраивания в логическую последовательность до аксиоматического изложения уже построенной на содержательном уровне теории. Теория относительности появилась в результате продолжительного скопления экспериментального материала, что и привело к изменениям наших физических представлений о движении и формах материи.

После долгих попыток адаптировать прежние категории, обозначающие основные формы существования материи – пространство и время к новым открытым фактам физики, оказалось, что для этого требуется переделать в полном объеме все эти понятия. Эту проблему удалось решить в начале XX века известному физику-теоретику Альберту Эйнштейну в специальной теории относительности, рассматривающую пространственно-временные свойства физических процессов. Данный вопрос удалось разрешить лишь в том смысле, при котором было дано прямое формально-математическое представление о новых положениях материи. Задачу полного, совершенного физического обоснования этой математической модели еще предстоит решить современной физике.

Специальная теория относительности Эйнштейна является в целом макроскопической теорией, на которой объекты имеют размеры, поддаются измерению и видимы невооруженным взглядом. Теория относительности в этом определении продолжает историю классической физики. Не трудно убедиться, что макроскопические понятия, в том числе пространственно-временные образы имеют своё основание в физических свойствах мельчайших частиц материи или микрообъектов, которые образуют невидимый нами микромир [16].

Принцип относительности – основной физический принцип, согласно которому все физические процессы в инерциальных системах отсчета

протекают одинаково, независимо от того, находится ли эта система в состоянии равномерного или прямолинейного движения, или она неподвижна. В соответствии с этим все факты кинематики теории относительности можно объяснить, как предложения псевдоевклидовой геометрии, рассматривающие те свойства фигур, которые остаются неизменными при псевдоевклидовом движении [8]. Это положение констатирует глубокую связь между механикой, рассматривающую законы механики при скоростях, сравнимых со скоростью света и псевдоевклидовой геометрией. Эту связь обнаружил немецкий математик Герман Минковский, который ввел понятие псевдоевклидова пространства. А псевдоевклидову плоскость принято называть неевклидовой плоскостью Минковского.

В настоящее время в методической литературе мало представлены исследования, посвященные возможностям изучения школьниками основ псевдоевклидовой геометрии. Но изучение псевдоевклидовой геометрии позволяет существенно усилить логический, познавательный, исторический, прикладной и общекультурный компоненты школьного математического образования, способствует развитию логического, алгоритмического, критического и толерантного мышления. К сожалению, в школьном курсе геометрии 10-11, излагаемом как по учебнику Атанасяна Л.С. [3], так и по учебнику Погорелова А.В. [10], не освещены пункты о псевдоевклидовой геометрии, но немного о ней затрагивается при изучении специальной теории относительности в физике. По этой причине возникает необходимость в изложении основ псевдоевклидовой геометрии в форме факультативных занятий. Все вышесказанное определяет *актуальность выпускной квалификационной работы.*

Объект исследования: процесс обучения псевдоевклидовой геометрии.

Предмет исследования: методические особенности изучения геометрии псевдоевклидовой на факультативных занятиях.

Цель исследования: разработать методику изучения псевдоевклидовой геометрии в рамках факультативных занятий в средней школе.

Для достижения указанной цели необходимо решить следующие задачи:

- проанализировать научную и учебно-методическую литературу по тематике исследования;
- изложить систему аксиом псевдоевклидовой геометрии на плоскости;
- доказать основные факты псевдоевклидовой геометрии;
- разработать рабочую программу факультативного курса на тему «Псевдоевклидова геометрия»;
- разработать конспекты факультативных занятий.

Практическая значимость работы состоит в том, что полученные результаты могут быть использованы учителем математики при организации факультативных занятий в средней школе для классов с углубленным изучением математики, при организации и сопровождении исследовательской работы учащихся в средней школе, а также при решении различных задач неевклидовой геометрии.

Методы исследования:

- теоретические методы: изучение и анализ литературы по проблеме исследования, системный анализ основных понятий исследования, аналогия;
- практические методы: методы научного анализа и моделирование.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Во введении представлена справка о связи специальной теории относительности и псевдоевклидовой геометрии, обоснована актуальность исследования, приведены объект и предмет исследования, определены цели и задачи.

Первая глава посвящена аксиоматическому определению псевдоевклидовой плоскости и доказательству основных её фактов. В ней

также исследованы метрика плоскости Минковского, движения, а также измерение площадей и углов на псевдоевклидовой плоскости.

Во второй главе разработан факультативный курс «Псевдоевклидова геометрия» по изучению учащимися, проявляющими повышенный интерес к различным разделам математики, отдельных фактов псевдоевклидовой геометрии, обоснована актуальность и значимость изучения данной темы в рамках факультативных занятий в средней школе, дано подробное описание занятий с применяемыми формами обучения, а также представлены конспекты занятий факультативного курса.

В заключении обобщены результаты исследования.

Список литературы представлен 16 источниками, ссылки на которые содержатся в тексте работы.

Глава 1. Плоскость Минковского

1.1. Аксиоматическое определение плоскости Минковского

Пусть V – это множество элементов произвольной природы, R – поле действительных чисел [5].

Множество V назовем вещественным векторным пространством, а его элементы – векторами, если на V задано две операции: сложение векторов и умножение векторов на число. При этом требуется выполнение следующих условий:

Аксиомы векторного пространства

I группа аксиом.

1. $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in V$.
2. Существует нулевой вектор $\theta \in V$, такой что
$$a + \theta = a, \forall a \in V.$$
3. $\forall a \in V \exists! (-a): a + (-a) = \theta$.
4. $a + b = b + a, \forall a, b \in V$.

Свойства 1-4 показывают, что множество V является коммутативной группой относительно операции сложения векторов.

II группа аксиом.

5. $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a, \forall a \in V, \forall \lambda, \mu \in R$.
6. $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b, \forall a, b \in V, \forall \lambda \in R$.
7. $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a, \forall a, b \in V, \forall \lambda, \mu \in R$.
8. $1 \cdot a = a, \forall a \in V$.

Векторное пространство V называется n -мерным векторным пространством, если выполняются аксиомы размерности.

III группа аксиом.

9. В пространстве V существуют n линейно независимых вектора.
 10. Всякая система, состоящая из $(n+1)$ векторов из V линейно зависима.
- Натуральное число n называется размерностью векторного пространства.

Пространство V называется евклидовым векторным пространством, если на V определена операция скалярного произведения векторов, которая любым двум векторам a, b ставит в соответствии действительное число ab .

Эта операция должна обладать следующими свойствами:

IV группа аксиом.

$$11. ab = ba, \forall a, b \in V.$$

$$12. (a + b)c = ac + bc, \forall a, b, c \in V.$$

$$13. (\lambda a)b = \lambda(ab), \forall a, b \in V, \forall \lambda \in R.$$

$$14. a^2 = a \cdot a > 0, \text{ если } a \neq \theta; \text{ если } a = \theta, \text{ то } a^2 = 0.$$

Пространство V называется псевдоевклидовым векторным пространством, если аксиому 14 заменить аксиомой 14*:

14*. В пространстве V существуют ненулевые векторы, у которых скалярный квадрат не является положительным числом.

Указанные аксиомы достаточно важны в современной математике. Отметим, что, аксиомы 1-4 вводят понятие группы. Аксиомы 1-8 определяют понятие векторного пространства, аксиомы 1-10 задают конечномерное векторное пространство. Наконец, аксиомы 1-14 определяют понятие евклидова векторного пространства, а аксиомы 1-14* определяют понятие конечномерного псевдоевклидова векторного пространства, имеющее многие плодотворные применения в математике.

Пусть V – векторное пространство. Множество точек A называется аффинным пространством, если задано отображение $A \times V \rightarrow A: (a, v) \rightarrow a + v$ – внешняя сумма, которая каждой точке $a \in A$ и вектору $v \in V$ ставит в соответствие точку $a + v \in A$ и которая удовлетворяет следующим аксиомам:

$$1. (a + u) + v = a + (u + v), \forall a \in A, \forall u, v \in V.$$

$$2. a + 0 = a, \forall a \in A.$$

$$3. \forall a, b \in A \exists! v \in V: b = a + v.$$

Векторное пространство V называют направляющим или пространством переносов аффинного пространства A , а отображение $A \rightarrow A: a \rightarrow a + v$ называется параллельным переносом или сдвигом пространства A на вектор v .

Если V – конечномерное векторное пространство и $n = \dim V$, то аффинное пространство A называется n -мерным и часто обозначается A^n .

Аффинное пространство назовем евклидовым, если его направляющее пространство является евклидовым векторным пространством и псевдоевклидовым, если его направляющее пространство является псевдоевклидовым векторным пространством. В дальнейшем мы будем рассматривать двумерные евклидовы и псевдоевклидовы пространства.

1.2. Двумерное псевдоевклидово пространство

Псевдоевклидова плоскость E_{11}^2 отличается по метрическим свойствам с обычной плоскостью, но имеет сходство по аффинным свойствам с евклидовой [2].

Аффинный репер $\{O, e_1, e_2\}$ называется ортонормированным, если его координатные векторы e_1, e_2 ортогональны ($e_1 e_2 = 0$) и один из них имеет мнимоеединичную длину, а другой единичную.

Если оба вектора ортонормированного репера мнимоеединичные, то есть

$$e_1^2 = e_2^2 = -1, (1)$$

то скалярные квадраты и скалярные произведения будут отличаться знаком от формул, полученных на евклидовой плоскости. Соответственно, формулы нахождения расстояния на евклидовой и псевдоевклидовой плоскости будут различаться лишь множителем

$$i = \sqrt{-1}.$$

Таким образом, отличия между евклидовой и псевдоевклидовой геометрией будут формальными, то есть разниться в понятийном аппарате. Действительно, расстояние между точками A, B задается формулой

$$AB = \sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2}$$

на евклидовой плоскости;

$$AB = i\sqrt{(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2}$$

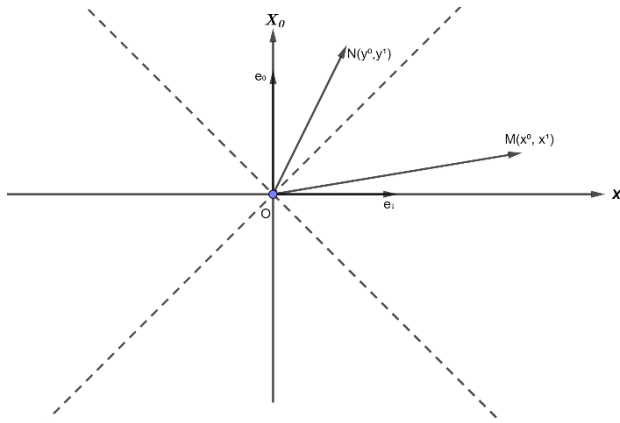
на псевдоевклидовой плоскости. Заметим, что расстоянием на псевдоевклидовой плоскости мы назовем расстояние на обычной плоскости после умножения на множитель i . На самом деле, все предложения псевдоевклидовой геометрии можно интерпретировать понятиями евклидовой.

Рассмотрим теперь более подробно псевдоевклидову плоскость. Обозначим мнимое единичный орт ортонормированного репера через e_0 , а единичный вектор через e_1 :

$$e_0^2 = -1, \quad e_1^2 = 1. (2)$$

Соответственно координаты вектора x будут обозначаться x^0, x^1 .

Напомним, что псевдоевклидова отличается от евклидовой плоскости только метрическими свойствами. Именно поэтому, чертежам на псевдоевклидовой плоскости можно верить, если говорится не о метрических, а об аффинных свойствах. Так как, чертеж, построенный на бумаге, показывает геометрию Евклида. Следовательно, чертеж будет действителен тогда и только тогда, когда аффинные свойства обеих геометрий совпадают. Когда мы говорим о метрических свойствах, ситуация складывается иначе. Приведем пример, равные отрезки или ортогональные векторы на псевдоевклидовой плоскости в изображении на обычной уже таковыми являться не будут. На самом деле, можно провести небольшое сравнение с картой земных полушарий. Рассмотрим изображение полусфер в виде плоских кругов. Объективно это изображение имеет деформацию, так как геометрия на плоскости и на сфере различна; соответственно и расстояния равные в оригинале будут выглядеть различными на изображении. Точно такая же ситуация будет в случае, когда оригинал – псевдоевклидова плоскость, а её изображением является евклидова плоскость [12].



Давайте рассмотрим, как будут построены эти изображения. Векторы e_0 , e_1 всякого ортонормированного репера псевдоевклидовой плоскости построим на обычной плоскости в виде ортов. Обозначим начало O в виде начала O .

Рисунок 1– Разложение вектора по ортам

Затем построим на псевдоевклидовой плоскости каждую точку M в виде точки с теми же координатами на обычной плоскости. То есть, вектор $\overrightarrow{OM}$ будет разлагаться на изображении с теми же коэффициентами по ортам e_0 , e_1 , как и в оригинале (рис 1).

Возникает вопрос: любой ли ортонормированный репер в оригинале будет таковым в изображении? Нет, это будет верно лишь для данного репера, который мы выбрали изначально.

Рассмотрим псевдоевклидову плоскость с введенной на ней ортонормированной системой координат с векторами репера: e_0 – многоединичный и e_1 – единичный.

Воспользуемся условиями (2), получим матрицу координат метрического тензора

$$\begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. (3)$$

обратная матрица имеет соответственно вид:

$$\begin{pmatrix} g^{00} & g^{01} \\ g^{10} & g^{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. (4)$$

Далее, зависимость между ковариантными и контравариантными координатами вектора x ,

$$x_i = g_{ij}x^j,$$

принимает, очевидно, следующий вид:

$$x_0 = -x^0, \quad x_1 = x^1. (5)$$

Скалярное произведение $xy = g_{ij}x^i y^j$ теперь запишется так:

$$xy = -x^0 y^0 + x^1 y^1. (6)$$

В частности,

$$x^2 = -x^{0^2} + x^{1^2}. (7)$$

Воспользуемся контравариантными координатами x^0, x^1 вектора x , поскольку они имеют аффинный характер, и потому их можно без ошибок подсчитывать «по чертежу», то есть так же, как и на обычной плоскости.

Посмотрим, как будут выглядеть «на чертеже» некоторые основные конструкции псевдоевклидовой плоскости.

Отложим векторы от начала координат, при которой точка O – произвольная. Найдем прежде всего изотропные векторы x . Полагая $x^2 = 0$, получим согласно (7)

$$-x^{0^2} + x^{1^2} = 0, \quad \text{т. е. } x^0 = \pm x^1. (8)$$

Откладывая любые векторы x (изотропные) от точки O , получим, что их концы находятся по двум прямым (8). Рассматривая евклидову плоскость, данные прямые являются биссектрисами координатных углов. Рассматривая псевдоевклидову геометрию, они таковыми являться не будут.

Таким образом, в псевдоевклидовой плоскости проходят две изотропные прямые через начало координат, которые подвергаются параллельному сдвигу при движении точки O . Векторы x – неизотропные, которые мы откладываем от точки O , находятся в паре вертикальных углов, которые образуют изотропные прямые. Под понятием угла будем понимать некоторую область на плоскости, образованную двумя полупрямыми, выходящими из общей точки O . То есть, угол – аффинная конструкция, которая в обеих геометриях выглядит одинаково.

Рассмотрим векторы, лежащие в одной паре вертикальных углов с ортом e_1 («первая пара вертикальных углов»). Для этих векторов, как видно из чертежа, $|x^1| > |x^0|$, а следовательно, согласно (7)

$$x^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} > 0. (9)$$

Таким образом, векторы вещественной длины находятся в предлагаемой паре вертикальных углов.

Далее рассмотрим векторы, лежащие во второй паре вертикальных углов. Для них верно неравенство $|x^1| < |x^0|$, а следовательно,

$$x^2 = -x^{0^2} + x^{1^2} < 0. \quad (10)$$

и эти векторы обладают мнимой длиной.

Подведем итоги: в первой паре вертикальных углов, отложенные от начала координат, располагаются векторы вещественной длины, во второй паре – мнимой длины, а изотропные векторы – по сторонам этих углов.

Рассмотрим ортогональные векторы в изображении на псевдоевклидовой плоскости. Для простоты можно рассмотреть взаимно ортогональные прямые линии через точку O , так как в этом случае важно лишь направление для ортогональности векторов.

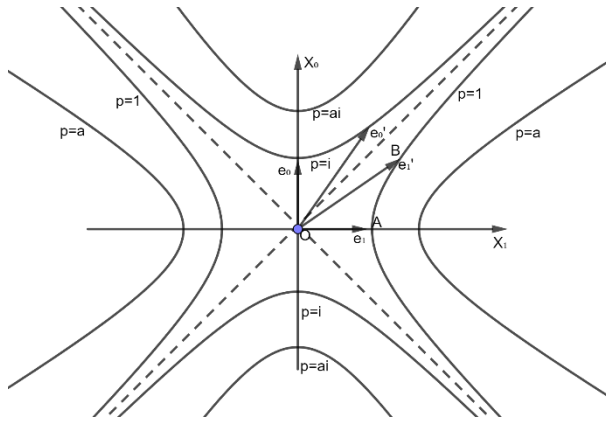
Пусть $M(x^0; x^1)$, $N(y^0; y^1)$ – любые точки, принадлежащие первой и второй прямой соответственно. Их радиусы-векторы $x = \overrightarrow{OM}$ и $y = \overrightarrow{ON}$ имеют те же координаты, что и сами точки, а условие ортогональности этих векторов имеет вид $xy = 0$, т.е. согласно (6) $-x^0y^0 + x^1y^1 = 0$, откуда

$$y^1:y^0 = x^0:x^1. \quad (11)$$

Это объясняется тем, что прямые имеют взаимно обратные угловые коэффициенты на изображении и расположены симметрично относительно биссектрис угла. Данная характеристика ортогональных прямых действительная в псевдоевклидовой геометрии, то есть на оригинале.

Заметим, что вращение одной из ортогональных прямых вызывает встречное вращение другой ортогональной прямой, причем, когда одна из них совпадает с изотропной прямой, вторая совпадает с ней. Это объясняется тем, что изотропная прямая, направленная по изотропному вектору, ортогональна самой себе.

Остановимся более подробно на метрике псевдоевклидовой плоскости. Для этого отложим от начала координат отрезки постоянной длины ρ во всех



направлениях. То есть, мы будем строить окружности с центром в точке O и радиусом ρ . Эту окружность и будут образовывать концы, построенных отрезков заданной длины. Стоит отметить, что радиус может иметь как вещественную, так и мнимую длину.

Рисунок 2 – Изображение окружности на псевдоевклидовой плоскости

Наложим условие, что вектор x имеет длину ρ : $x^2 = \rho^2$, или в координатной записи

$$-x^{0^2} + x^{1^2} = \rho^2. (12)$$

Заметим, что (12) является уравнением окружности с заданным началом координат и радиусом ρ , так как если откладывать переменный вектор x от начала координат, длиной ρ , то его конец опишет заданную окружность.

Рассмотрим каждый из трех случаев отдельно. Обозначим за α любое положительное число. Пусть $\rho = \alpha$ (радиус окружности вещественной длины). Получим уравнение:

$$-x^{0^2} + x^{1^2} = \alpha^2. (13)$$

В итоге, равнобочная гипербола с центром O и действительной осью OX_1 служит изображением окружности с центром в точке O и радиусом α (рис 2.).

Так как геометрические свойства оригинала и изображения различны, следовательно, радиусы окружности, равные в оригинале, не будут таковыми на изображении. А из свойств псевдоевклидовой метрики следует, что окружность распадается на две разомкнутые ветви.

Рассмотрим теперь случай $\rho = \alpha i$ (радиус окружности мнимый). Тогда уравнение (13) дает

$$-x^{0^2} + x^{1^2} = -\alpha^2, (14)$$

следовательно, в данном случае, равнобочная гипербола с центром в точке O и мнимой осью OX_1 служит изображением окружности на псевдоевклидовой плоскости. Таким образом, окружность на евклидовой плоскости принадлежит к числу эллипсов, а на псевдоевклидовой к гиперболам.

Наконец, в случае $\rho = 0$ мы возвращаемся к уравнению (8), и окружность нулевого радиуса сводится к паре изотропных прямых.

1.3. Вращение ортонормированного репера в псевдоевклидовой плоскости

Осуществим переход ортонормированного репера в другой ортонормированный репер на псевдоевклидовой плоскости [15].

Зафиксируем точку O на плоскости и совершим преобразование ортов. Такое преобразование плоскости назовем вращением ортонормированного репера.

Пусть e_0, e_1 – старые и $e_{0'}, e_{1'}$ – новые орты. По общим формулам

$$\begin{cases} e_{0'} = A_{0'}^0 e_0 + A_{0'}^1 e_1, \\ e_{1'} = A_{1'}^0 e_0 + A_{1'}^1 e_1 \end{cases} \quad (1)$$

Заметим, что здесь $A_{0'}^0 \neq 0$. Действительно, в противном случае оказалось бы, что мнимое единичный вектор $e_{0'}$, лишь численным множителем отличается от единичного вектора e_1 , что после почленного возведения в скалярный квадрат приводит к противоречию (все коэффициенты $A_{i'}^i$ – вещественные ввиду вещественного характера псевдоевклидовой плоскости). По той же причине $A_{1'}^1 \neq 0$. В силу ортогональности ортов $e_{0'}, e_{1'}$, мы получаем:

$$A_{0'}^1 : A_{0'}^0 = A_{1'}^0 : A_{1'}^1. \quad (2)$$

Обозначая:

$$A_{0'}^0 = a, A_{1'}^1 = b, \quad (3)$$

а также обозначая общее значение отношений (2) через β , получим:

$$A_{0'}^1 = a\beta, A_{1'}^0 = b\beta, \quad (4)$$

и преобразование (1) примет вид:

$$\begin{cases} e_{0'} = a(e_0 + \beta e_1), \\ e_{1'} = b(\beta e_0 + e_1). \end{cases} \quad (5)$$

Запишем теперь, что орт $e_{0'}$ - мнимоединичный:

$$e_{0'}^2 = -(A_{0'}^0)^2 + (A_{0'}^1)^2 = -a^2 + a^2\beta^2 = -1,$$

откуда

$$a = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}. (6)$$

Записывая аналогично, что орт $e_{1'}$ - единичный, получим:

$$e_{1'}^2 = -(A_{1'}^0)^2 + (A_{1'}^1)^2 = -b^2\beta^2 + b^2 = 1,$$

откуда

$$b = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}. (7)$$

Пользуясь последними результатами, можно окончательно переписать закон преобразования (5):

$$\begin{cases} e_{0'} = \frac{e_0 + \beta e_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}, \\ e_{1'} = \frac{\beta e_0 + e_1}{\pm\sqrt{1-\beta^2}}. \end{cases} (8)$$

Множитель β принимает значения по модулю меньшие единицы, так как коэффициенты преобразования были бы мнимыми, а если $\beta=1$ коэффициенты не существовали в принципе. Таким образом,

$$-1 < \beta < 1. (9)$$

В данных пределах β можно придавать любые значения, а также можно в каждой из двух формул (8) брать $\sqrt{1-\beta^2}$ с любым знаком, в одной независимо от другой. Из нашего вывода, заметим, что формулы (8) всегда переводят ортонормированный репер в ортонормированный. Это можно проверить простой проверкой.

Таким образом, мы имеем четыре типа вращений ортонормированного репера в зависимости от знака, с каким берётся $\sqrt{1-\beta^2}$ в верхней и нижней формулах (8). Этот знак в верхней формуле, очевидно, совпадает со знаком $A_{0'}^0$, причём, если он положительный, то $e_{0'}$ продолжает быть направленным

«вверх» от OX_1 , т.е. к той же ветви мнимоединичной окружности, что и e_0 ; если же он отрицательный, то $e_{0'}$ «перепрокидывается» к другой («нижней») её ветви.

Аналогично знак $\sqrt{1 - \beta^2}$, избранный нами для нижней формулы, совпадает, очевидно, со знаком A_1^1 . При этом $e_{1'}$ остаётся направленным к той же, как и e_1 («правой»), ветви единичной окружности, если этот знак положительный, и «перепрокидывается» к другой («левой») её ветви, если этот знак отрицательный.

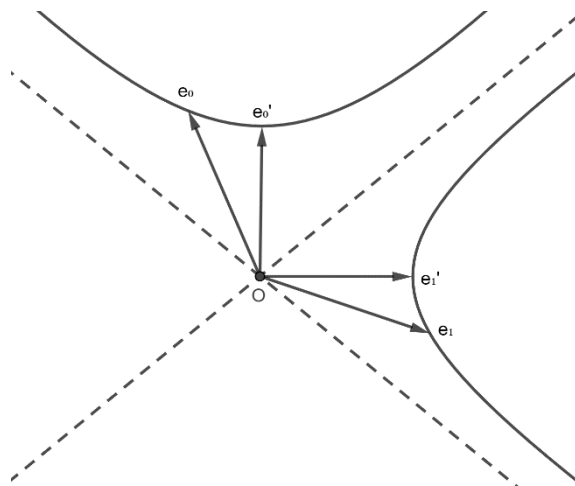
Охарактеризуем каждый из четырех типов вращений ортонормированного репера:

1. Собственное вращение. Назовем вращение при условии $A_0^0 > 0, A_1^1 > 0$. Следовательно, (8) дает

$$e_{0'} = \frac{e_0 + \beta e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, e_{1'} = \frac{\beta e_0 + e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (10)$$

В согласии со сказанным при собственном вращении концы векторов $e_{1'}$, $e_{0'}$ остаются на прежних ветвях единичной и соответственно мнимоединичной окружностей.

Векторы $e_{0'}$, $e_{1'}$ будут в изображении симметричными относительно «биссектрисы координатного угла». Неравноправие реперов $\{O, e_0, e_1\}$ и $\{O, e_{0'}, e_{1'}\}$ кажущееся и связано с условностью их изображения на обычной



плоскости (отчего и получается, что один как бы «настоящий», а другой «искаженный»). Мы могли бы условиться, наоборот, векторы $e_{0'}$, $e_{1'}$ изображать ортами обычной плоскости, и тогда e_0 , e_1 изобразились бы более длинными векторами, образующими тупой угол (рис. 3).

Рисунок 3 – Построение векторов на изображении

Заметим, что при $\beta=0$ мы получим тождественное преобразование, так как при изменении параметра β в допустимых его значениях (9) непрерывно меняется и собственное вращение ортонормированного репера. Следовательно, из-за непрерывного процесса вращения репера будем получать собственное вращение репера при изменении β от 0 до нужного значения. Вычислим ещё определитель преобразования [14]:

$$Det |A_{i'}^i| = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} = 1. (11)$$

Собственное вращение не меняет ориентации репера.

2. Несобственное вращение 1-го рода. При условии: $A_{0'}^0 > 0, A_{1'}^1 < 0$.

Это значит, что конец единичного орта e_1 «перепрокидывается» на другую ветвь единичной окружности, конец же орта e_0 остается на прежней ветви мнимоединичной окружности. Формулы (8) принимаю вид:

$$e_{0'} = \frac{e_0 + \beta e_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, e_{1'} = -\frac{\beta e_0 + e_1}{\sqrt{1-\beta^2}}. (12)$$

Изменяется несобственное вращения репера первого рода, при меняющемся β в его пределах, но тождественное преобразование из этого получить невозможно.

При $\beta = 0$ мы получаем:

$$e_{0'} = e_0, e_{1'} = -e_1, (13)$$

т.е. происходит как бы зеркальное отражение репера за счет перпрокидывания оси OX_1 при неподвижной оси OX_0 (зеркальное отражение относительно оси OX_0). Нетрудно заметить, сравнивая формулы (12) с (10), что всякое несобственное вращение 1-го рода получается из соответствующего собственного вращения наложением на него зеркальные отражения (13). Заметим еще, что в нашем случае

$$Det |A_{i'}^i| = -1, (14)$$

и, следовательно, ориентация репера меняется на обратную.

3. Несобственное вращение 2-го рода определяется условием

$$A_{0'}^0 < 0, A_{1'}^1 > 0.$$

Заметим, что данный тип вращения подобен несобственному вращению первого рода с отличием в том, что конец орта e_0 перепрокидывается на другую ветвь мнимоединичной окружности, а конец орта e_1 остается на прежней ветви единичной окружности. Формулы преобразования будут:

$$e_{0'} = -\frac{e_0 + \beta e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, e_{1'} = \frac{\beta e_0 + e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (15)$$

При $\beta = 0$ получаем:

$$e_{0'} = -e_0, e_{1'} = e_1, \quad (16)$$

т.е. происходит зеркальное отражение репера относительно оси OX_1 .

Главное отличие по сравнению с (13) состоит в том, что зеркальное отражение осуществляется относительно прямой с мнимым расстоянием, в этом случае, относительно прямой с вещественным расстоянием вдоль неё.

Заметим, что несобственное вращение второго рода получается из собственного вращения наложением на него зеркального отражения (16).

Отметим еще, что в нашем случае

$$\text{Det } |A_{i'}^i| = -1, \quad (17)$$

так что ориентация репера меняется на обратную.

4. Несобственное вращение 3-го рода определяется условием

$$A_{0'}^0 < 0, A_{1'}^1 < 0.$$

Концы обоих ортов перескакивают на другие ветви соответствующих окружностей. Формулы преобразования будут:

$$e_{0'} = -\frac{e_0 + \beta e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, e_{1'} = -\frac{\beta e_0 + e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (18)$$

Очевидно, в этом случае

$$\text{Det } |A_{i'}^i| = 1,$$

и ориентация репера сохраняется. При непрерывном изменении β в пределах (9) несобственные вращения 3-го рода меняются непрерывно; конечно, тождественное преобразование в их число не входит.

При $\beta = 0$ получаем:

$$e_{0'} = -e_0, e_{1'} = -e_1, (19)$$

то есть репер подвергается отражению относительно точки О. Отметим, что в таком случае нельзя получить преобразование «вращение на 180° », какое бы мы применили на евклидовой плоскости; так как получим стойкое препятствие изотропных прямых для непрерывного вращения орта (так как являясь либо мнимоединичным, либо единичным векторов не может принять изотропное направление).

Сопоставим формулы (18) с (10) получим, что несобственное вращение третьего рода получается из собственного вращения наложение на него отражения (19).

За счет непрерывного изменения параметра β прослеживается, что вращение репера в каждом из четырех типов непрерывно переходит одно в другое. Но если рассматривать вращения разных типов реперов, они никогда не смогут быть непрерывно переведены одно в другое. Главное отличие состоит в том, что при одном из них конец орта e_1 или e_0 остается на прежней ветви псевдоевклидовой окружности, а при другом переходит на другую ветвь. Нельзя осуществить переход вращения одного типа ортонормированного репера к другому, так как нельзя осуществить этот переход непрерывным образом. То же самое легко установить и из того, что A_0^0 и A_1^1 , не могут обращаться в нуль, а следовательно, при непрерывном изменении не могут изменять знак.

В данном пункте мы более подробно рассмотрели вращения ортонормированного репера, а также всех его типов. Конечно, после заданного вращения ортонормированного репера можно задать вращение и самой псевдоевклидовой плоскости таким образом, что каждая точка плоскости

перейдёт в соответствующую точку нового репера, сохраняя при этом её расположение относительно старого репера. Другими словами, координаты x^0, x^1 прежней точки относительно прежнего репера. Данное преобразование псевдоевклидовой плоскости на себя, назовем её вращением около фиксированной точки O , и отнесем его к одному из выделенных четырех типов в соответствии с направлением вращения данного репера. Классификация вращения не зависит от формы выбора первоначального репера. При несобственных вращениях репера первого, второго и третьего рода меняются местами: ветви единичной окружности, мнимоединичной окружности и ветви обеих окружностей. При собственных вращениях каждая ветвь мнимоединичной и единичной окружностей переходит на себя.

Главное сходство вращений евклидовой и псевдоевклидовой плоскости заключается: во-первых, в том, что единственная точка O – неподвижная; во-вторых, геометрические свойства фигур остаются неизменными. Так как координаты точек, подверженных перемещению репера, остаются без изменений, а новый репер остается также ортонормированным и обладает прежними геометрическими свойствами, следовательно, свойства фигур в результате вращения репера остаются прежними.

Сочетая любые вращения ортонормированного репера около точки O с произвольными параллельными сдвигами, получим преобразования также ортонормированного репера, а после этого преобразования плоскости на себя, которые назовем движениями в псевдоевклидовой геометрии. Движения, также, как и на обычной плоскости, сохраняют геометрические свойства фигур и берут все преобразования псевдоевклидовой плоскости на себя, с этими же свойствами.

Рассматривая евклидову плоскость, мы знаем, что существуют движения двух видов: собственные движения, сохраняющие ориентацию плоскости и осуществляющие переход плоскости из начального положения в конечный непрерывный образ, и несобственные движения, меняющие ориентацию

плоскости на противоположную, сочетая собственные движения зеркальным отражением относительно произвольной прямой в плоскости [3].

Данные типы движений на псевдоевклидовой плоскости мы будем называть собственными движениями и несобственными первого, второго и третьего рода. Подведем итоги: в пределах каждого отдельного типа существует переход от одного движения к другому. Например, тождественные преобразования, которые относятся к собственным движениям, можно осуществлять непрерывный переход от начального положения заданной плоскости к конечному, а несобственные движения соответственно первого, второго и третьего рода получим наложение на собственные движения относительно прямой с мнимым расстоянием, вещественным расстоянием и относительно точки.

Таким образом, мы получим четыре класса ортонормированных реперов, зависящих от типа движений, выбранных нами: собственных движений или несобственных первого, второго и третьего рода. В рамках выбранного класса можно осуществить перевод от старого ортонормированного репера к новому, но переход между двумя разными классами невозможен.

1.4. Измерение площадей и углов на псевдоевклидовой плоскости

Объем произвольного тела D в n -мерном аффинном пространстве определяется посредством интеграла

$$V_d = \int dx^1 \dots dx^n$$

в какой-либо аффинной координатной системе. В частности, «двумерный объем», т.е. площадь в случае двумерного аффинного пространства, имеет вид

$$V_d = \iint dx^1 dx^2. \quad (1)$$

Определенная таким образом площадь (как и объем в общем случае) представляет собой лишь относительный инвариант, принимающий различные численные значения в различных координатных системах, а именно, умножающийся на $\left| \text{Det}[A_{ij}^i] \right|^{-1}$ при переходе от одного репера к другому:

$$e_{i'} = A_{i'}^i e_i. (2)$$

Но в случае двумерного евклидова пространства мы находимся в лучшем положении, так как у нас среди аффинных координатных систем выделены ортонормированные координатные системы.

Условимся называть площадью фигуры D в двумерном евклидовом пространстве интеграла V_d , вычисленный в ортонормированной координатной системе.

Определенная таким образом площадь будет уже инвариантом. В случае собственно евклидовой, т.е. обычной, плоскости хорошо известно, что интеграл V_d действительно дает площадь в обычном смысле слова, разумеется, не зависящую от той ортонормированной координатной системы, в которой она вычисляется.

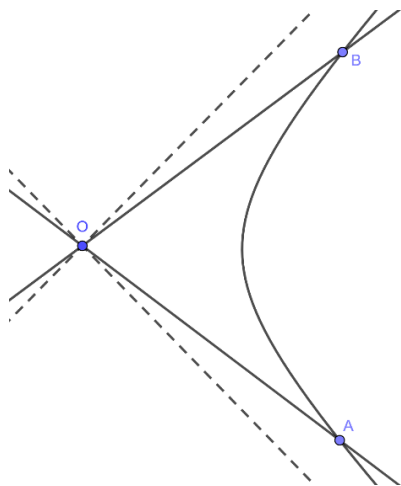
В случае псевдоевклидовой плоскости матрица преобразования (2) при всех вращениях ортонормированного репера удовлетворяет следующему условию:

$$\text{Det}|A_{i'}^i| = \pm 1, \text{ следовательно, } |\text{Det}|A_{i'}^i|| = 1, (3)$$

а отсюда следует, что интеграл (1) при переходе от одной ортонормированной координатной системы к другой не меняется (умножается на единицу).

Рассмотрим теперь непосредственно, как измеряются углы на плоскости Минковского. Будем использовать модель обычной планиметрии. Построим единичный круг с центром в вершине угла и возьмем удвоенную площадь сектора, полученного сторонами этого угла. Заметим, что полученное построение и будет являться измерением угла в радианах.

То же самое будет и обстоит на псевдоевклидовой плоскости. Но главное отличие в том, что мы будем измерять лишь те углы, для которых все полупрямые, выходящие из вершины и лежащие внутри угла или по его сторонам, будут неизотропными. Представим, что угол описывается вращением одного из его сторон до совпадения с другой, при этом вращении сторона не



должна принимать изотропного направления. Допустимые углы – углы, удовлетворяющие заданному условию.

Опишем теперь единичную и мнимоединичную окружности с центром в вершине O данного допустимого угла (рис. 4).

Рисунок 4 – Единичная и мнимоединичная окружности

Согласно нашему условию, стороны угла пересекутся с одной и той же ветвью одной из окружностей. Сектор AOB , удвоенная площадь которого называется величиной угла AOB .

Из этого определения ясно, что величина угла обладает аддитивным свойством: если допустимый угол разделить полупрямой, исходящей из его вершины, на два угла, то его величина будет равняться сумме величин составляющих его углов.

Итак, на псевдоевклидовой плоскости мы будем по отдельности проводить измерение углов внутри каждого из четырех основных углов, которые образованы в данной точке, проходящие через неё изотропными прямыми. При этом становится невозможным измерение углов, «перекидывающихся» из одного основания угла к другому. Это следует из того, что при изменении угла AOB , вращая его сторону OB против часовой стрелки, стремясь к полному совпадению с данным изотропным направлением OI . Таким образом, площадь сектора AOB будет стремиться к бесконечности, так как площадь на псевдоевклидовой плоскости и на плоскости Евклида одинаково выражаются интегралом (1) в ортонормированной системе координат, и соответственно, совпадают. На евклидовой плоскости площадь сектора AOI , ограниченная ветвью гиперболы и её асимптотой площадь, является бесконечной [11].

Заметим, что если хоть одна из сторон угла АОВ стремится к изотропному направлению, то величина угла стремится к бесконечности. Следовательно, если сторона ОВ угла АОВ достигла изотропного направления ОI, то измерить величину данного угла будет невозможно, и принимаем её за бесконечность. И, очевидно, не будем измерять величину угла, при котором данная сторона перешла за изотропное направление ОI, в этом случае будем считать величину угла как сверхбесконечную.

Подсчитаем, в частности, угол, на который поворачивается вектор e_1 при собственном вращении (45.10) ортонормированного репера $\{O, e_0, e_1\}$.

В данном случае, требуется подсчитать площадь сектора АОВ на псевдоевклидовой плоскости при помощи полярных координат. Тогда

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} r^2 d\varphi. (4)$$

Здесь r – полярный радиус – выражается через полярный угол φ из уравнения единичной окружности

$$-x^0{}^2 + x^1{}^2 = 1.$$

Так как x^1, x^0 в изображении играют роль прямоугольных декартовых координат, то

$$x^1 = r \cos \varphi, \quad x^0 = r \sin \varphi, (5)$$

и мы получаем:

$$r^2(-\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = 1, \quad r^2 = \frac{1}{\cos 2\varphi}. (6)$$

Вставляя это значение в (4), имеем:

$$S_{AOB} = \frac{1}{2} \int_0^{\alpha} \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{1}{4} \ln \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right). (7)$$

Здесь α – конечное значение полярного угла φ – совпадает с углом наклона вектора e_1 , к вектору e_1 (в изображении). Обозначим через θ псевдоевклидов угол между e_1 , и e_1 . Тогда по общему определению

$$\theta = 2, S_{AOB} = \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg} \alpha}.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e^{2\theta} - 1}{e^{2\theta} + 1} = \operatorname{tg} \theta. (8)$$

Итак, гиперболический тангенс угла между e_1 , и e_1 в псевдоевклидовой плоскости равен тангенсу угла между этими векторами в плоскости изображения (при условии, что e_1 и e_0 в изображении тоже являются ортонормированными, как мы все время это и предполагаем).

При вычислении угла θ мы молчаливо приписали ему знак, совпадающий со знаком полярного угла α . В этом смысле нужно понимать и формулу (8).

Из (8) видно еще раз, что когда направление e_1 , стремится к изотропному, т.е. когда $\alpha \rightarrow \pm \frac{\pi}{4}$ и, значит $\operatorname{tg} \alpha \rightarrow \pm 1$, то $\operatorname{th} \theta \rightarrow \pm 1$, а следовательно, $\theta \rightarrow \pm \infty$.

Таким образом, заставляя e_1 , вращаться в пределах основного угла $I'OI$, мы заставляем псевдоевклидов угол θ его наклона к e_1 меняться от $-\infty$ до $+\infty$.

Поучительно выразить формулы преобразования (45.10)

$$e_{0'} = \frac{e_0 + \beta e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad e_{1'} = \frac{\beta e_0 + e_1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (9)$$

через угол θ . Так как координаты вектора e_1 , относительно репера $\{O, e_0, e_1\}$ равны, как мы видим, $\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}}$, то, пользуясь обычной геометрией на плоскости изображения, получаем:

$$\operatorname{tg} \alpha = \beta,$$

а отсюда

$$\beta = \operatorname{th} \theta, (10)$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{e^\theta + e^{-\theta}}{2} = \operatorname{ch} \theta, \quad \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{e^\theta - e^{-\theta}}{2} = \operatorname{sh} \theta.$$

Формулы собственного вращения (9) примут теперь вид

$$\begin{cases} e_{0'} = ch\theta e_0 + sh\theta e_1, \\ e_{1'} = sh\theta e_0 + ch\theta e_1. \end{cases} \quad (11)$$

Эти формулы по внешности напоминают формулы собственного вращения ортонормированного репера на обычной плоскости

$$\begin{cases} e_{0'} = \cos\alpha e_0 - \sin\alpha e_1, \\ e_{1'} = \sin\alpha e_0 + \cos\alpha e_1. \end{cases} \quad (12)$$

Конечно, замена тригонометрических функции гиперболическими (а также изменение знака в одном члене) сильно преобразует всю картину. В частности, в формулах (11) можно менять θ от $-\infty$ до $+\infty$ без периодического повторения результата, как это будет в обычных формулах (12).

В результате, мы пришли к выводу, что теперь не трудно ввести измерение углов в любом n -мерном вещественном евклидовом пространстве. Для этого нужно провести через стороны угла плоскость: она будет нести на себе собственно евклидову геометрию, в случае евклидова пространства, и тогда, угол будем измерять как на привычной нам плоскости; или она будет нести на себе псевдоевклидову геометрию, и тогда угол будет измеряться как было показано выше, или является изотропным, в данном случае измерение будет невозможным.

В первом случае острый (или прямой) угол между векторами a , b определяется обычной формулой

$$\cos \theta = \frac{|ab|}{\sqrt{a^2 \cdot b^2}}, \quad (13)$$

во втором же случае формулой

$$ch \theta = \frac{|ab|}{\sqrt{a^2 \cdot b^2}}, \quad (14)$$

причем здесь предполагается, что a^2, b^2, ab – одного знака (иначе угол не имеет смысла). В самом деле, если этот знак положительный, то можно принять:

$$e_1 = \frac{a}{\sqrt{a^2}}, \quad e_{1'} = \frac{b}{\sqrt{b^2}}, \quad (15)$$

причем $e_1 e_{1'} > 0$, т.е. $e_1, e_{1'}$ лежат в одном основном угле. Тогда, умножая скалярно на e_1 второе из уравнений (11), получаем:

$$e_1 e_{1'} = ch\theta$$

и, пользуясь (15), приходим к формуле (14).

Если же знак a^2, b^2, ab – отрицательный, то положим:

$$e_0 = \frac{a}{\sqrt{-a^2}}, \quad e_{0'} = \frac{b}{\sqrt{-b^2}}, \quad (16)$$

причем $e_0 e_{0'} < 0$, т.е. $e_0, e_{0'}$ лежат в одном основном угле. Умножая скалярно на e_0 первое из уравнений (16), получаем:

$$e_0 e_{0'} = -ch\theta$$

и, пользуясь (16), снова приходим к (14).

Заметим, что для данных неколлинеарных векторов a, b первый, второй или третий случай имеет место в зависимости от положительного, отрицательного или нулевого значения $a^2 b^2 - (ab)^2$.

Глава II. Организация изучения темы

«Псевдоевклидова геометрия»

2.1. Особенности факультативных занятий как формы образовательного процесса в современной школе

Факультативные занятия – основная форма внеклассной работы, направленная на расширение и углубление научно-теоретических знаний и практических навыков учащихся, повышение учебной мотивации, воспитание интереса к самостоятельным занятиям и исследованиям, а также профессиональную ориентацию личности обучающегося [7].

Термин «факультативный» происходит от французского *Facultatif*, который в свою очередь проистекает из лат. *Facultas* и переводится как «возможность» обозначая возможный, но необязательный, предоставленный на выбор, курс.

Выделяют следующие особенности факультативного образования:

1. Широта и вариативность содержания материалов и методов обучения, в том числе методов оценки результатов деятельности.
2. Индивидуализация и дифференциация обучения на основе интересов и склонностей учащихся к тому или иному виду и направлению деятельности.
3. Добровольность посещения занятий учащимися.
4. Ориентация на освоение методологии дальнейшего самообучения.
5. Высокий мотивационный уровень формирования личности.

Факультатив – это ступень перехода от освоения учебного предмета к изучению науки, соответствующей ему. Факультативные курсы по содержанию охватывают направления, изучающие углубление и расширение своих знаний, полученных по определённым предметам в школе, а также дополнительные знания за страницами школьных учебников. Таким образом, можно выделить следующие типы факультативных курсов:

1. Предметные курсы, основная цель которых – углубление знаний по учебным дисциплинам.
2. Межпредметные курсы, задача которых – интеграция знаний учащихся

о природе и обществе, а также помощь обучающимся в выборе профиля обучения в старших классах и профессиональном самоопределении.

3. Факультативные курсы по предметам, не входящим в типовой учебный план, посвященные изучению инженерного творчества, решению социальных, общественных и культурных проблем и др.

В свою очередь факультативные курсы по математике делятся на три группы:

1. Курсы повышенного уровня. Основная цель – углубить знания, полученные учащимися на уроках математики. Сочетают теоретическую и экспериментальную подготовку учащихся.

2. Курсы прикладной математики, цель которых – ознакомить учащихся с различными примерами использования достижений математики в жизни и повысить их интерес к развитию разделов современной математики.

3. Специальные курсы, направленные на изучение некоторых разделов математической науки, играющих значимую роль в формировании у учащихся научного мировоззрения. Цель курса – компенсировать отсутствие некоторых значимых тем в программе основного курса.

Срок длительности факультативных курсов может варьироваться от одного учебного полугодия до нескольких учебных лет. В последнем случае программы факультатива для каждого года независимы друг от друга, что позволяет обучающимся начать изучать данный курс на любом году. Часы, выделяемые на факультативные курсы, должны входить в максимальный объем учебной нагрузки школьников.

Организационные формы обучения на факультативных занятиях довольно разнообразны: лекция, беседа, дискуссия, дебаты, диспут, практикум решения задач, семинар, конференция, интеллектуальная и деловые игры и др. В силу возрастных особенностей школьников, а именно необходимости в смене деятельности, наиболее целесообразно использование комбинированных форм. Так, одно занятие может содержать некоторые элементы беседы, лекции и

практической работы. С целью развития самостоятельности и творческих способностей учащихся практическую часть занятий ориентируют на решение нетривиальных задач, а именно исследовательских задач, заданий повышенной сложности, с неполными или избыточными данными и др.

Работа учащихся по изучению факультативных курсов может быть лишь качественно оценена, не принято выставление отметок по результатам факультатива. Основными критериями успешности являются уровень динамики их познавательного интереса, появление любознательности, смекалки и интуиции. Основным вознаграждением учащегося, посещающим и активно работающим на факультативе является похвальное слово учителя, а также размещение достижения ученика в школьной группе социальной сети. Основной формой контроля ребят на факультативе может быть выполнение проектов по заданной теме, организация круглых столов и дискуссий.

Роль факультативных занятий заключается в том, что они способствуют:

- развитию склонностей и способностей учащихся с помощью соответствующей интеллектуальной нагрузки;
- развитию навыков и умений самообразовательной, исследовательской и творческой деятельности школьников;
- удовлетворению интересов учащихся;
- обеспечению прочности приобретаемых знаний и повышению качества подготовки к продолжению образования;
- профессиональной ориентации учащихся.

В настоящее время факультативные занятия в общеобразовательной школе являются важной частью общешкольной учебно-воспитательной работы. Весь опыт применения факультативных занятий в школе доказывает их эффективность, ведь они способствуют достижению приоритетной задачи образования – всестороннего развития личности с учетом их индивидуальных интересов.

2.2. Факультативный курс по теме «Псевдоевклидова геометрия»

1. Пояснительная записка.

Как известно, одной из ведущих функций школьного курса математики является развивающая функция. Изучение алгебры, геометрии и начал математического анализа позволяет сформировать познавательные психические процессы и свойства личности, а именно память, внимание, познавательную активность и самостоятельность, заложить основы логического, алгоритмического, критического и математического мышления, способствовать развитию таких методов мышления, как анализ, синтез, абстрагирования и др. Однако, не все компоненты мышления могут быть актуализированы на том или ином математическом содержании. В их число входит и толерантное мышление, заключающееся в возможности восприятия человеком образов, не соответствующих или даже противоречащих сложившимся у него представлениям, которые изначально оценивались как единственно правильные. Эта возможность мышления принимается за достаточно валидный показатель уровня интеллекта человека, его открытости познавательным контактам с противоречиями мира и способности гибко реагировать на изменяющиеся условия современности. Тем не менее в рамках элементарной математики, изучаемой в средней школе, не представляется возможным раскрыть абсолютное множество тем с целью развития толерантного мышления. В связи с этим, есть необходимость изучения в рамках факультативных занятий, не относящихся к школьному курсу разделов математики, позволяющих вывести учащихся за пределы привычной картины мира. В качестве таких разделов может быть выбрана псевдоевклидова геометрия, которую можно рассматривать в сравнение с известной для учащихся евклидовой плоскостью. Все вышеперечисленное и обосновывает актуальность и значимость изучения псевдоевклидовой геометрии в рамках факультативных занятий.

Цель факультатива – создать условия для формирования представлений учащихся о псевдоевклидовой геометрии посредством рассмотрения её основных объектов и сравнения их с евклидовой геометрии, и доказательства отдельных её теорем.

Задачи факультативного курса:

- создать условия для расширения математических знаний, умений и навыков, применяемых при решении задач в псевдоевклидовой геометрии;
- способствовать развитию математического кругозора, логического, алгоритмического и толерантного мышления, исследовательских умений;
- научить корректно выстраивать доказательства, выдвигать гипотезы и применять в рассуждениях методы анализа, синтеза и сравнения;
- воспитать такие качества личности, как инициативность, трудолюбие, ответственность и любознательность, а также способствовать развитию навыков самообразования.

2. Место факультативного курса в учебном плане.

Программа факультатива предполагает проведение занятий для учащихся 10-11 классов, обладающих высокими интеллектуальными способностями и проявляющих повышенный интерес к математике. Периодичность проведения занятий – раз в неделю, что в сумме за одно полугодие составит 17 часов.

3. Тематическое планирование.

В рамках рабочей программы факультативного курса «Псевдоевклидова геометрия» разработано тематическое планирование, приведенное в форме таблицы 1.

Таблица 1 – Тематическое планирование

№	Тема	Часы	Форма занятия
Введение (1 ч.)			
1.	Геометрия в прошлом, будущем и настоящем.	1 ч.	Беседа

Раздел I. Аксиоматическое построение евклидовой геометрии (3 ч.)			
3.	Некоторые теоремы евклидовой геометрии	1 ч.	Лекция с элементами практики
Раздел II. Псевдоевклидова геометрия (13 ч.)			
4.	История открытия псевдоевклидовой геометрии	1 ч.	Интерактивная лекция
5.	Скалярное произведение векторов в псевдоевклидовой геометрии	1 ч.	Лекция с элементами практики
6.	Прямая и окружность на псевдоевклидовой плоскости	2 ч.	Лекция
			Лекция с элементами практики
7.	Треугольник в псевдоевклидовой плоскости. Доказательство теорем.	3 ч.	Лекция с элементами исследовательской работы
			Лекция с элементами практики
			Практика
8.	Псевдоевклидовы движения	2 ч.	Лекция
			Лекция с элементами практики
9.	Сравнительный анализ теорем евклидовой и псевдоевклидовой геометрии	4 ч.	Лекция с элементами практики
			Лекция с элементами практики
			Групповая консультация
			Конференция
Итого:		17 ч.	

4. Основное содержание.

Введение (1 ч.).

Геометрия в прошлом, будущем и настоящем: об истории появления геометрии, Евклид и его «Начала», дальнейшее развитие геометрии (Д. Гильберт, Г. Вейль и др.), современные разделы геометрии, о значимости аксиоматического изложения геометрии.

Раздел 1. Аксиоматическое построение евклидовой геометрии (3 ч.)

Об аксиомах евклидовой геометрии: основные объекты евклидовой плоскости (точки и прямые), основные отношения на E^2 , аксиомы евклидовой геометрии, определение отрезка, луча, угла и др.

Некоторые теоремы евклидовой геометрии: простейшие теоремы геометрии Евклида, теорема о признаках равенства треугольника, неравенство треугольника, теорема о точке пересечения медиан.

Раздел II. Псевдоевклидова геометрия (13 ч.)

История открытия псевдоевклидовой геометрии: специальная теория относительности и её связь с псевдоевклидовой геометрией, открытая Германом Минковским.

Скалярное произведение векторов в псевдоевклидовой геометрии: вывод формул в псевдоевклидовой геометрии расстояния от начала координат до произвольной точки, расстояния между двумя произвольными точками, угла между отрезками на основе евклидовой геометрии.

Прямая и окружность на псевдоевклидовой плоскости: определение прямой и окружности, их построение, выделение три типа прямых и окружностей на плоскости; построение прямой, проходящей через заданную точку и перпендикулярной к некоторой прямой l , в случае, когда l – неизотропная и изотропная прямая.

Треугольник в псевдоевклидовой плоскости: определение треугольника, вывод следствий о равносторонних и равнобедренных треугольниках, доказательство теоремы неравенства треугольников.

Псевдоевклидовы движения: рассмотрения основных типов движения (параллельный перенос, псевдоевклидовый поворот, симметрия) на псевдоевклидовой плоскости, знакомство с формулами.

Сравнительный анализ теорем евклидовой и псевдоевклидовой геометрии: сравнительная характеристика теорем об элементах треугольника, теоремы синусов, теоремы косинусов и др.

5. Учебно-методическое и материально-техническое обеспечение факультативного курса.

Материально-техническое оснащение аудиторий предполагает наличие:

- ноутбуков;
- мультимедийного проектора;
- интерактивной доски.

Учебно-методическое обеспечение факультатива представлено:

– программным обеспечением:

1. Операционная система;
2. Файловый менеджер;
3. Антивирусная программа;
4. Браузер;
5. Динамическая математическая программа GeoGebra.

– списком источников [1], [6], [12]:

1. Александров П. С., Маркушевич А. И., Хинчин А. Я. Энциклопедия элементарной математики книга пятая – геометрия. М. : Наука, 1966. 624 с.

2. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия: Методы и приложения. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 760 с.

3. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М. : Наука, 1967. 664 с.

6. Планируемые результаты освоения факультативного курса.

Согласно ФГОС СОО рабочая программа предполагает достижение учащимися личностных, метапредметных и предметных результатов [9].

Личностные результаты представлены сформированностью:

- готовности к самообразованию и самовоспитанию, опирающейся на мотивацию к учебной деятельности и индивидуальный интерес к математике;
- умения общаться не только со сверстниками, но и с учителями на основе взаимного уважения;
- умения разумно выходить из конфликтных ситуаций;

- уважения к личности и её достоинству, доброжелательное отношение к окружающим;
- адекватной позитивной самооценки и Я-концепции;
- устойчивого познавательного интереса и становления смыслообразующей функции познавательного мотива;
- заинтересованности к математической науке и математическому творчеству;
- логического, алгоритмического и толерантного мышления, а также личностных качеств, необходимых для адаптации в современном мире.

К метапредметным результатам отнесем:

- умение самостоятельно поставить учебную цель или цель исследования, планирование, осуществление контроля и оценки учебных действий в соответствии с намеченной целью и планом ее достижения;
- навыки проектирования плана действия по достижению поставленной цели, самостоятельного отбора оптимальных путей решения задач при конкретных условиях;
- умение анализировать информацию, отыскивать необходимое в различных источниках, корректировать, перерабатывать и передавать её по коммуникативным каналам;
- владение приемами умственных действий: определения понятий, использование обобщения, аналогии, классификации, установка причинно-следственных связей, построение умозаключений;
- умение планировать и организовать учебную деятельность совместно со всеми участниками образовательного процесса: ставить цель своей работы и распределять функции, активно работать и коммуницировать в группе, выдвигать гипотезы, находить решение проблемы, доказывать и аргументировать свою точку зрения.

В рамках предметных результатов должны быть сформированы:

- знания аксиом и основных теорем евклидовой геометрии в интерпретации псевдоевклидовой геометрии;

- умения проводить сравнительный анализ и аналогию между фактами евклидовой и псевдоевклидовой геометрии;
- осуществлять построение математического объекта с помощью программных средств;
- умение моделировать математические объекты, исследовать построенные модели, интерпретировать построенный результат;
- приемы владения различными языками математики (словесный, символический, графический) для иллюстрации, интерпретации, аргументации и доказательства.

2.3. Конспекты занятий в рамках факультативного курса

Конспект факультативного занятия по теме

«Прямая и окружность в псевдоевклидовой плоскости»

Класс: 10, 11 класс.

Тема: Прямая и окружность в псевдоевклидовой плоскости.

Организационная форма занятия: лекция с элементами практики.

Форма работы: фронтальная, групповая.

Цель: создать условия для успешного определения учащимися понятия прямой и окружности в псевдоевклидовой плоскости, а также вывода некоторых их свойств.

Задачи:

– *образовательные:* формирование умения построения прямой и окружности в псевдоевклидовой плоскости;

– *развивающие:* развитие навыков организации деятельности исследовательского характера (методов сравнения, анализа, обобщения, содействие развитию умения выдвижения гипотез), памяти, наблюдательности;

– *воспитательные:* формирование посредством введения элементов деятельности исследовательского характера, устойчивого интереса к математике, формирование коммуникативности.

Планируемые результаты:

– *личностные*: умение вести диалог со сверстниками и учителями на основе взаимного уважения и принятия, уважение к личности и её достоинству, доброжелательное отношение к окружающим, заинтересованность к математической науке и математическому творчеству, развитие логического и алгоритмического мышления.

– *метапредметные*: умение самостоятельно поставить учебную цель, навыки планирования, проектирования плана действия по достижению поставленной цели, осуществления контроля и оценки учебных действий в соответствии с намеченной целью и планом ее достижения, владения приемами умственных действий.

– *предметные*: навыки построение прямой и окружности в псевдоевклидовой плоскости, навыки применения методов доказательства математических утверждений, построения математического объекта с помощью программных средств.

Структура занятия:

I. Организационный момент (2 минуты).

II. Актуализация опорных знаний и умений, формулировка темы и цели занятия (8 минут).

III. Открытие нового знания (30 минут).

IV. Рефлексия (5 минут).

Ход урока.

I. Организационный момент.

– Добрый день, уважаемые ученики! Знаменитый английский философ и естествоиспытатель Роджер Бэкон считал, что в истории черпаем мы мудрость, в поэзии – остроумие, в математике – проницательность. Как вы думаете, какой смысл заложил автор в данное высказывание? (Приводят мнения)

– Действительно, способность замечать, чувствовать, прогнозировать позволило человечеству достичь современного уровня прогресса. Сегодня каждый из вас сможет примерить на себя роль ученого-исследователя и

попытаться самостоятельно открыть новые факты геометрии. Я уверена, что у вас все получится!

II. Актуализация опорных знаний и умений.

– О чём же пойдёт речь на нашем занятии? Об этом вы сможете узнать, решив кроссворд (рис. 5) (упражнение также можно пройти на сайте LearningApps.org по ссылке <https://learningapps.org/view25251433>) [4].

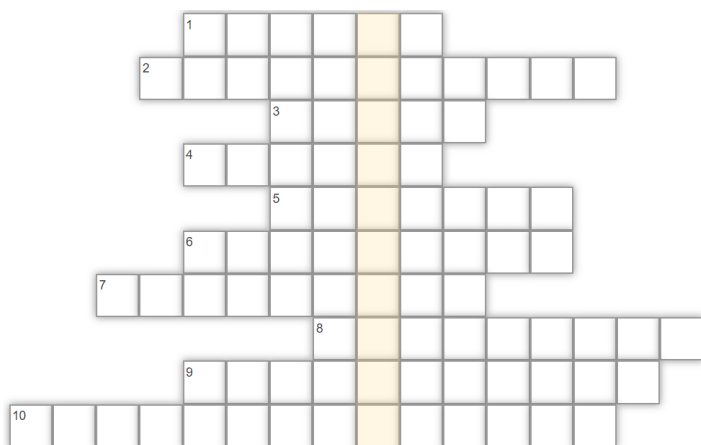


Рисунок 5 – Поле кроссворда

1. Направленный отрезок (вектор).
2. Луч, исходящий из вершины угла и делящий этот угол на два равных угла (биссектриса).
3. Отрезок, который соединяет любые две точки окружности (хорда).
4. Длина отрезка, соединяющего центр окружности с любой точкой, лежащей на окружности (радиус).
5. Отрезок - часть прямой ... между двумя точками (лежащей).
6. Это равенство, включающее в себя переменную, значение которой нужно вычислить (уравнение).
7. Это множество точек на плоскости, для которых модуль разности расстояний от двух точек — величина постоянная и меньшая, чем расстояние между фокусами (гипербола).
8. Это прямая, к которой график заданной функции приближается сколько угодно близко, но не пересекает её (асимптота).

9. Прямая, которая имеет с окружностью только одну общую точку (касательная).

10. Бинарное отношение эквивалентности, поэтому разбивает всё множество прямых на классы параллельных между собой прямых (параллельность).

Ответ: окружность.

– Ребята, как вы думаете какая тема нашего урока? (Окружность)

– Да, вы совершенно правы, но еще мы с вами рассмотрим и понятие прямой.

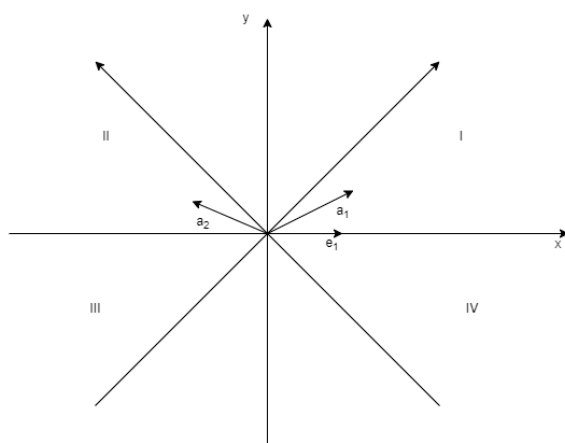
– Запишем число и тему урока. Какова же цель нашего занятия? (Изучить прямую и окружность, рассмотрев их определение и основные свойства)

– Все слова, приведенные в кроссворде, тем или иным образом, связаны с темой нашего урока, поэтому для того, чтобы приступить к изучению нового понятия, вспомним определение прямой и окружности на евклидовой плоскости, теоремы о радиусе и касательной, о секущей и касательной и др. (Приводят формулировки теорем и признаков, важно актуализировать определения прямой и окружности в евклидовой плоскости).

III. Открытие нового знания.

– Теперь мы можем приступить к определению понятия прямой. Как мы уже с вами говорили, как в псевдоевклидовой геометрии определяется скалярное произведение векторов? ($\vec{x} \cdot \vec{y} = x_1 y_1 - x_2 y_2$).

– Введем систему координат на аффинной плоскости и построим на ней новую плоскость. Как вы считаете, длины векторов будут выражаться



действительными или мнимыми числами?

$$1) |\vec{a}| > 0 \Leftrightarrow x_1^2 - y_1^2 > 0 \Leftrightarrow |x_1| > |y_1|.$$

$$2) |\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow x_1^2 - y_1^2 = 0 \Leftrightarrow |x_1| = |y_1|.$$

$$3) |\vec{a}| = ai, a \in R^+ \Leftrightarrow x_1^2 - y_1^2 < 0 \Leftrightarrow |x_1| < |y_1|.$$

Рисунок 6 – Отложение векторов от начала координат

– Ребята, отложим векторы от начала координат. В каких четвертях они будут располагаться? (рис. 6). Разобьем это задание по рядам: 1 ряд – 1 случай, 2 ряд – 2 случай, 3 ряд – 3 случай [13].

- 1) Векторы находятся внутри I и III четверти, которые образуют биссектрисы углов.
- 2) Векторы будут параллельны биссектрисам координатных углов.
- 3) Эти векторы откладываются от начала координат во II и IV углах.

– Молодцы, давайте сделаем себе рисунок в тетради и краткую запись по этой информации.

На самых первых уроках мы вспомнили определение коллинеарных векторов на евклидовой плоскости. На псевдоевклидовой плоскости коллинеарные векторы обязательно должны быть векторами одного рода. Соответственно, мы получим три типа прямых на псевдоевклидовой плоскости:

– Прямая называется прямой 1-го рода, если её направляющий вектор 1-го рода.

– Прямая называется прямой 2-го рода, если её направляющий вектор 2-го рода.

– Прямая называется прямой изотропной, если её направляющий вектор изотропный.

– Запишем в тетради следующее определение.

Определение. Две прямые называются ортогональными, если ортогональны их направляющие векторы. Если прямая изотропна, то любой её направляющий вектор ортогонален сам себе и всем параллельным ему векторам. Поэтому для изотропных прямых параллельность и перпендикулярность совпадают.

– Рассмотрим понятие окружности на псевдоевклидовой плоскости. Ребята, пользуясь формулой расстояния для точек в евклидовой геометрии сформулируем определение для псевдоевклидовой геометрии.

Учащийся формулируют определение: расстоянием между точками А и В назовем обобщенную длину вектора $\overrightarrow{AB}$. Если $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$, то $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}$.

– Отлично, как вы считаете в псевдоевклидовой геометрии расстояние будет выражаться только действительным числом? (Действительным числом, нулем и чисто мнимым числом).

– Как и в евклидовой геометрии, выведем некоторые свойства расстояний:

$$1. |AB| = |BA|, \forall A, B.$$

2. Если $|AB|, |AC|, |BC|$ расстояния одного и того же рода, то выполнится неравенство $|AB| < |AC| + |BC|$.

– Для дальнейшего расширения и углубления своих знаний в псевдоевклидовой геометрии введем вспомогательную систему координат. И перевернем её на 45 градусов, тогда формулы преобразования координат примут следующий вид:

$$\begin{cases} x = x \cdot \cos 45 - y \cdot \sin 45 \\ y = x \cdot \sin 45 + y \cdot \cos 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x - y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \end{cases}$$

– Подставим данные значения в формулу расстояния между точками и получим:

$$\begin{aligned} |AB| &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}(x_2 - y_2 - x_1 + y_1)^2 + \frac{1}{2}(x_2 + y_2 - x_1 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)} \end{aligned}$$

– А это есть, ни что иное, как уравнение окружности. Попробуем сформулировать определение окружности.

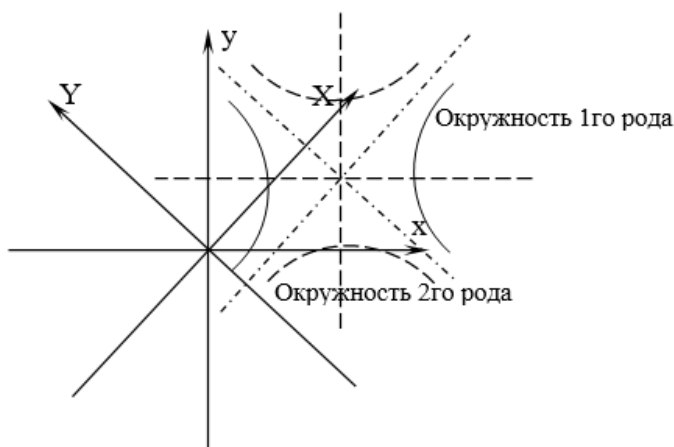


Рисунок 7 – Три типа окружностей

Определение. Окружностью называется множество точек псевдоевклидовой плоскости, равноудаленных от данной точки. Эта точка называется центром окружности. Расстояние, на которое удалены все точки окружности от центра, называется радиусом окружности [1].

Пусть $F(x_0, y_0)$ – центр, r – радиус окружности, тогда точка $H(x, y) \in \omega(O, r) \Leftrightarrow |HF| = r$, т.е. $\sqrt{2(x - x_0)(y - y_0)} = r$ или $2(x - x_0)(y - y_0) = r^2$ – уравнение во вспомогательной системе координат (в основных координатах $2(x - x_0)(y - y_0) = r^2$).

– Ребята, выделим типы окружностей в зависимости от значения её радиуса (рис. 7)

Если $r' > 0$, то окружность называется окружностью 1 рода.

Если r' чисто мнимое число, то окружность называется окружностью 2 рода.

Если $r' = 0$, то окружность называется изотропной.

Из уравнения окружности следует, что она изображается гиперболой с центром в $F(x_0', 0)$. Оси этой гиперболы параллельны осям F_x , F_y , а асимптоты параллельны биссектрисам координатных углов, т.е. параллельны осям O_x , O_y .

– Основной лекционный материал по данной теме мы с вами закончили, а теперь выполним небольшую практическую работу, а именно выполним задачу на построение.

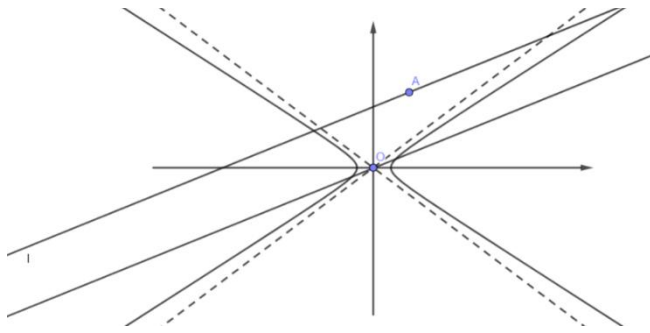
Задача:

Дано: -прямая, A – точка.

Построить прямую $k: A \in k, k \perp l$.

а) l – неизотропная прямая;

б) l – изотропная прямая.



Первый вариант выполняет под буквой а, а второй вариант под буквой б. И рисунки к этим построения сделать в программе Geogebra на компьютере.

Рисунок 8 – Неизотропная прямая

Решения учеников:

а) Построение (рис. 8)

- 1) $\omega = \text{окр}(O, r)$ – псевдоевклидова;
- 2) $BD \parallel l, BD$ – хорда;
- 3) C – середина AB ;
- 4) OC – прямая, сопряженная l ;
- 5) $A \in s, s \perp OC$.

б) Так как изотропная прямая перпендикулярна всем параллельным ей прямым, то $A \in s, s \parallel l$ (в этом случае параллельность и перпендикулярность совпадает).

– Ребята, давайте подумаем, какие свойства прямых мы можем ввести о перпендикулярности прямых, которые мы заметили в ходе практической работы?

1. Перпендикулярные прямые, проведенные к одной прямой – параллельны.
2. Через любую точку проходит прямая, перпендикулярная данной, и только одна.
3. Перпендикулярные неизотропные прямые – прямые разных родов.

IV. Рефлексия.

– С каким понятием мы сегодня познакомились? (прямая и окружность на псевдоевклидовой плоскости)

– Что же такое прямая, окружность? (Дают определения)

– Какие типы прямых и окружностей мы сегодня выделили?

– С какими свойствами прямых мы познакомились сегодня?
(Перечисляют свойства)

– Какие моменты нашего занятия вам оказались сложнее по сравнению с остальными?

– Как вы думаете, достигли ли мы целей, поставленных в начале занятия?

– В качестве домашнего задания к следующему занятию вам необходимо вспомнить теорему синусов и косинусов, а также их доказательство в евклидовой геометрии.

– Ребята, вы отлично сегодня поработали! До свидания!

Конспект факультативного занятия по теме

«Треугольник в псевдоевклидовой плоскости. Доказательство теорем»

Класс: 10, 11 класс.

Тема: Треугольник в псевдоевклидовой плоскости. Доказательство теорем.

Организационная форма занятия: лекция с элементами практики.

Форма работы: фронтальная, групповая.

Цель: создать условия для успешного введения понятия треугольника и сравнения теорем о треугольниках в геометрии Евклида и в псевдоевклидовой геометрии.

Задачи:

– *образовательные:* умения проводить сравнительный анализ и аналогию между фактами геометрии Евклида и псевдоевклидовой геометрии;

– *развивающие:* развитие навыков организации деятельности исследовательского характера (методов сравнения, анализа, обобщения, содействие развитию умения выдвижения гипотез), памяти, наблюдательности;

– *воспитательные:* формирование посредством введения элементов деятельности исследовательского характера устойчивого интереса к математике, формирование коммуникабельности.

Планируемые результаты:

– *личностные:* умение вести диалог со сверстниками и учителями на основе взаимного уважения и принятия, уважение к личности и её достоинству,

доброжелательное отношение к окружающим, заинтересованность к математической науке и математическому творчеству, развитие логического и алгоритмического мышления.

– *метапредметные*: умение самостоятельно поставить учебную цель, навыки планирования, проектирования плана действия по достижению поставленной цели, осуществления контроля и оценки учебных действий в соответствии с намеченной целью и планом ее достижения, владения приемами умственных действий.

– *предметные*: умения проводить сравнительный анализ и аналогию между фактами геометрии Евклида и псевдоевклидовой геометрии, умение моделировать математические объекты, исследовать построенные модели, интерпретировать построенный результат, навыки построения математического объекта с помощью программных средств.

Структура занятия:

- I. Организационный момент (2 минуты).
- II. Актуализация опорных знаний и умений (3 минуты).
- III. Формулировка темы и цели занятия (2 минуты).
- IV. Открытие нового знания (28 минут).
- V. Первичное закрепление (5 минут).
- VI. Рефлексия (5 минут).

Ход урока.

I. Организационный момент.

– Здравствуйте, дорогие ученики! Немецкий мыслитель Фридрих Ницше говорил: «Тот, кто жаждет научиться летать, должен сначала научиться стоять, ходить, бегать, лазать и танцевать, – нельзя сразу научиться летать!» Как вы думаете, что хотел передать нам автор в данных словах? (Высказывают мнения)

– За прошедшие занятия мы многое узнали о евклидовой геометрии и псевдоевклидовой геометрии: об аксиоматическом построении евклидовой геометрии, об аксиоматике псевдоевклидовой геометрии, узнали историю её

возникновения, а также познакомились с такими понятиями как окружность и прямая, изучили скалярное произведение в псевдоевклидовой геометрии. Сегодня мы с вами начнем изучать один из самых интересных и важных разделов данной темы – треугольник и доказательство теорем о треугольниках на псевдоевклидовой плоскости. Но начнем наше занятие с повторения.

II. Актуализация опорных знаний и умений.

– Выполните следующие задания:

1. Сформулируйте понятия трех типов прямых и окружностей на псевдоевклидовой плоскости;
2. Укажите формулу для нахождения скалярного произведения векторов на псевдоевклидовой плоскости;
3. Дайте определение треугольника на евклидовой плоскости [10];
4. Сформулируйте теорему синусов и косинусов.
5. Сформулируйте теорему о неравенствах треугольника.

III. Формулировка темы и цели занятия.

– Исследование теорем псевдоевклидовой геометрии проведем в сравнении с теоремами евклидовой геометрии, и начнем мы их изучение с определения одной из основных фигур геометрии. Как вы думаете, какой? (Треугольник)

– Какова же тема нашего урока? (Сравнение теорем о треугольниках евклидовой и псевдоевклидовой геометрии)

– Какова же цель нашего урока? (Провести сравнительный анализ некоторых теорем о треугольниках на евклидовой и псевдоевклидовой плоскости)

IV. Открытие нового знания.

– Ребята, как вы думаете с чего, начинается изучение нового объекта в геометрии? (Определения)

Определение. Треугольником называют совокупность трех неколлинеарных точек, не лежащих по две на одной изотропной прямой, и трех попарно их соединяющих отрезков [1].

– Посмотрите пожалуйста на рисунок в презентации, и пользуясь определением, назовите треугольник в псевдоевклидовой и евклидовой геометрии (рис. 9).

$\triangle ABC$ не является треугольником в псевдоевклидовой плоскости, так как все его точки лежат по одну сторону от изотропной прямой.

$\triangle MNP$ является треугольником в псевдоевклидовой плоскости.

– Ребята, обозначения у треугольника остаются прежними.

Назовите вершины треугольника (M, N, P). Стороны треугольника (MN, NP, MP) и углы треугольника (M, N, P).

– Рассмотрим треугольник первого рода, назовите этот треугольник ($\triangle ABC$). И введем обозначения, которые будем использовать для доказательства теорем: $|AB| = c$, $|BC| = a$, $|AC| = b$.

Пусть $\triangle ABC$ – произвольный треугольник в псевдоевклидовой плоскости первого рода. Обозначим за наибольшую сторону – длину отрезка $|AB|$. Совершим гиперболический поворот вокруг точки A, так чтобы отрезок $|AB|$ был параллелен оси абсцисс. Все построения я предлагаю вам делать в программе GeoGebra за своим устройством.

– Ребята, вы уже поняли какую теорему мы будем доказывать? (Неравенство треугольника).

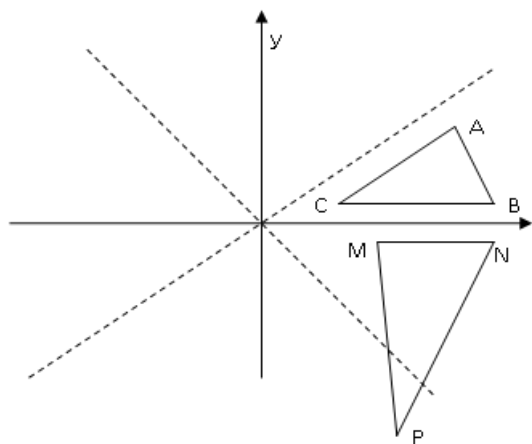


Рисунок 9 – Треугольник в псевдоевклидовой геометрии

– Правильно, какой наш следующий шаг? (Построим окружность на псевдоевклидовой плоскости с центром в точке A и радиусом $|AC|$).

– Ребята, в каких точках она пересечет отрезок $|AB|$? (Давайте обозначим точку пересечения за M).

– Так как точки C и M лежат на одной окружности, то обозначим их длины $|AC| = |AM| = b$. Что из этого следует? ($|AC| < |AB|$, следовательно M – лежит между A и B).

Аналогично учащиеся самостоятельно доказывают другое неравенство (рис. 10). Решение учащихся: Проведем псевдоевклидову окружность с центром в точке B и радиусом a . Эта окружность пересечёт отрезок $|AB|$ в некоторой точке N . Так как C и M на одной окружности, то $|BN| = |BC| = a$. Так как $|BC| < |AB|$, следовательно N – лежит между A и B .

– Совершенно верно, так псевдоевклидовы окружности – гиперболы, то одна из них будет вогнута к A , а другая к B . Поэтому какой из этого можно сделать вывод? ($|AB| > |AM| + |BN|$) И переводя в наши обозначения мы получили: $c > b + a$.

– Какой вывод мы можем из этого сделать? (Как и в евклидовой геометрии выполняется неравенство треугольника: большая сторона больше суммы двух других сторон)

– Ребята, из этой важной теоремы мы можем сформулировать следствия, давайте запишем их в тетрадь.

Следствия:

1. Правильных треугольников в псевдоевклидовой плоскости не существует.
2. Основание равнобедренного треугольника равно удвоенному произведению боковой стороны.

– Доказательства этого достаточны просты, и я предлагаю вам в качестве

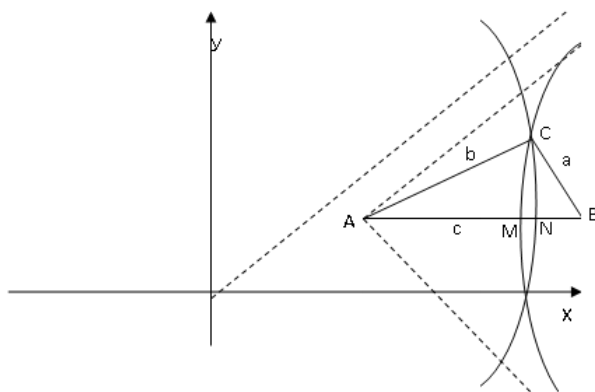


Рисунок 10 – Псевдоевклидовы окружности

домашнего задания их доказать, первый вариант берет – второе свойство, а второй вариант – первое.

– А теперь приступим непосредственно к доказательству теоремы косинусов и теоремы

синусов.

– Ребята, с какой вы хотите начать? (теоремы косинусов)

– Рисунком я предлагаю воспользоваться из предыдущей теоремы.

– Кто хочет попробовать доказать её у доски? (один из учеников выходит к доске)

Доказательство учеников:

1) Из неравенства треугольников следует, что $|AB| = |CB| - |CA|$.

2) Возведем это равенство в квадрат: $\overrightarrow{AB}^2 = \overrightarrow{CB}^2 + \overrightarrow{CA}^2 - 2 \cdot \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}$, учитывая наши обозначения и гиперболический косинус получим: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \operatorname{ch} C$.

3) Что и требовалось доказать.

– Молодцы, теорема косинусов выглядит аналогично для треугольника со сторонами одного рода, но что будет, если мы возьмем стороны разного рода? ($c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$, но угол будет уже комплексным числом).

– Совершенно верно, ребята, приступим непосредственно к теореме синусов. Какое важное условие нужно наложить, чтобы она выполнялась в псевдоевклидовой плоскости? (Стороны должны быть однородными).

– Правильно, приступим к её доказательству. Начнем вместе, а продолжит доказывать каждый самостоятельно. В начале урока и дома мы повторили, как доказывается теорема в евклидовой геометрии, аналогично она будет доказываться и в псевдоевклидовой.

Доказательство:

1) Рассмотрим отношения: $\frac{a^2}{\operatorname{sh}^2 A}$; $\frac{b^2}{\operatorname{sh}^2 B}$; $\frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 C}$.

2) По теореме косинусов получим: $\operatorname{ch} A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $\operatorname{ch} B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$; $\operatorname{ch} C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

3) Воспользуемся свойством: $\operatorname{sh}^2 a = \operatorname{ch}^2 a - 1$.

4) Получим:

$$\frac{a^2}{\operatorname{sh}^2 A} = \frac{a^2}{\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 - 1} = \frac{4a^2 b^2 c^2}{b^4 + c^4 + a^2 - 2b^2 c^2 - 2a^2 b^2 - 2a^2 c^2},$$

$$\frac{b^2}{\operatorname{sh}^2 B} = \frac{b^2}{\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right)^2 - 1} = \frac{4a^2 b^2 c^2}{b^4 + c^4 + a^2 - 2b^2 c^2 - 2a^2 b^2 - 2a^2 c^2},$$

$$\frac{c^2}{\operatorname{sh}^2 C} = \frac{c^2}{\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)^2 - 1} = \frac{4a^2 b^2 c^2}{b^4 + c^4 + a^2 - 2b^2 c^2 - 2a^2 b^2 - 2a^2 c^2},$$

5) Так как $a > 0, b > 0, c > 0$. Получим: $\frac{a}{\operatorname{sh} A} = \frac{b}{\operatorname{sh} B} = \frac{c}{\operatorname{sh} C}$.

6) Что и требовалось доказать.

– Ребята, с помощью теоремы косинусов и синусов мы можем решать треугольники в псевдоевклидовой плоскости.

V. Первичное закрепление.

– Теперь повторим все факты, изученные сегодня на занятии. На доске приведены исходные поля «Только в псевдоевклидовой геометрии», «Только в евклидовой геометрии», «Для обеих геометрий» (рис. 11), а также факты (рис. 12), которые вам необходимо будет соотнести с верным полем (интерактивное упражнение также можно пройти на сайте LearningApps.org по ссылке <https://learningapps.org/watch?v=piwxa0mq222>). (Ответы приведены на рисунке 13)

– Ребята, но не все факты, которые вы увидите, мы сегодня на уроке рассмотрели, нужно подумать и сделать вывод по какому-либо утверждению.

Только в псевдоевклидовой геометрии	Только в евклидовой геометрии	Для обеих геометрий
---	-------------------------------------	------------------------

Рисунок 11 – Исходные поля

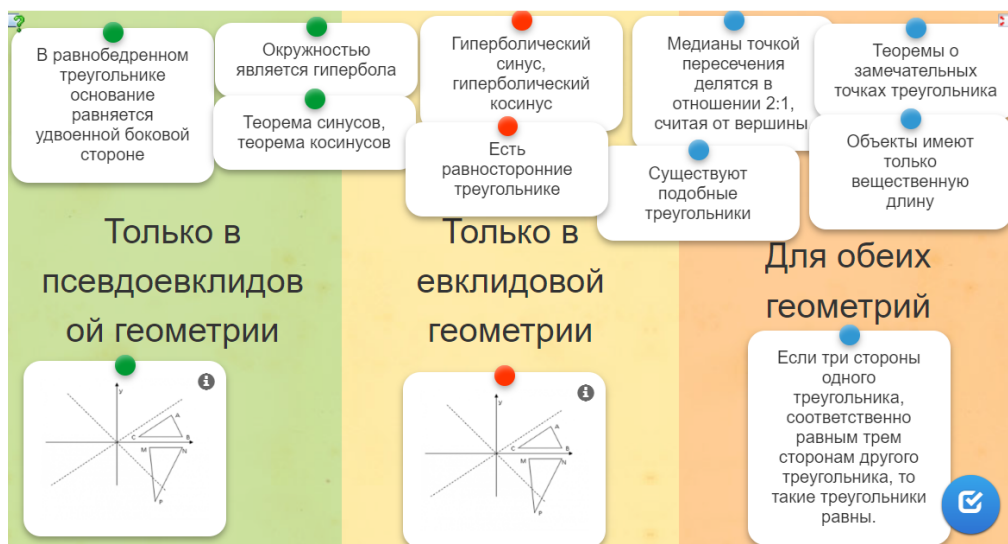


Рисунок 12 – Факты евклидовой и псевдоевклидовой геометрии

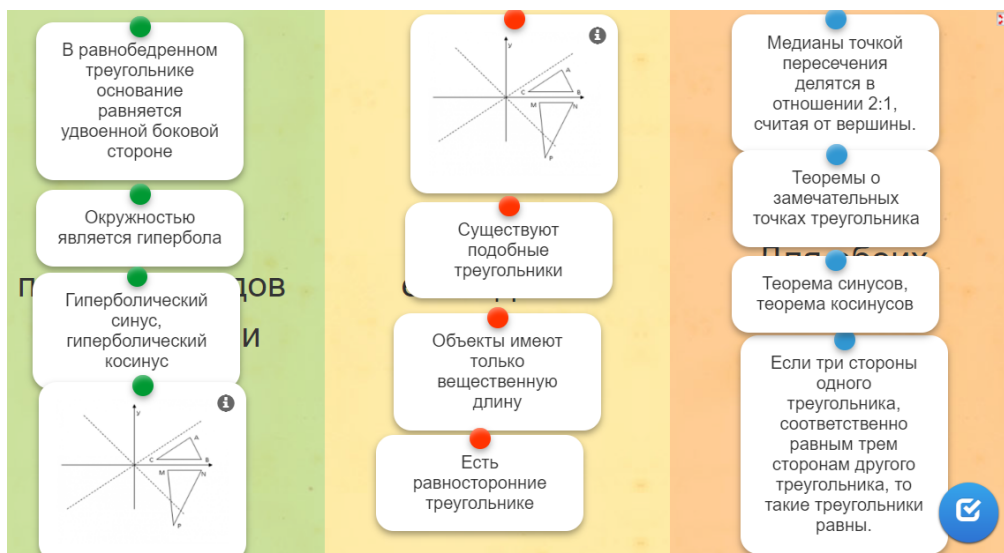


Рисунок 13 – Ответы к заданию

VI. Рефлексия.

– Итак, сегодня мы с вами начали изучать основные факты и теоремы псевдоевклидовой геометрии. Какие теоремы, мы сегодня изучили и доказали? (Перечисляют теоремы)

– Какие моменты нашего занятия вам показались сложнее по сравнению с остальными?

– Как вы думаете, достигли ли мы цели, поставленной в начале занятия?

– Вашим домашним заданием к следующему занятию будет выбрать одну из теорем, выполнимых в псевдоевклидовой геометрии и доказать её, только учтите, чтобы все теоремы были доказаны.

– Спасибо за плодотворную работу на сегодняшнем занятии, надеюсь, в дальнейшем нам удастся открыть еще огромное множество фактов псевдоевклидовой геометрии! До свидания!

Заключение

Псевдоевклидова геометрия представляет собой один из разделов вузовского курса геометрии, способствующий формированию научного мировоззрения учащихся, развитию логического, алгоритмического и толерантного мышления, а также повышению поисковой и учебной мотивации. Сегодня в условиях средней школы возможность организации изучения основ псевдоевклидовой геометрии на уроках отсутствует. Для реализации этой идеи возникает необходимость в системной факультативной работе, проводимой под руководством педагогов, обладающих специальной подготовкой.

В ходе проведенной мной работы получены следующие результаты:

1. Изучены и проанализированы научная и учебно-методическая литература и Интернет-ресурсы по теме организации изучения неевклидовой геометрии в средней школе, а именно псевдоевклидовой геометрии.

2. Представлено последовательное изложение теоретического материала исследования, включающее в себя аксиоматическое определение псевдоевклидовой плоскости, доказательство основных теорем, рассмотрены основные псевдоевклидовы движения.

3. Разработана рабочая программа факультативного курса «Псевдоевклидова геометрия».

5. Составлены два конспекта занятий в рамках разработанного факультативного курса.

Полученные результаты свидетельствуют о решении всех поставленных задач исследования. Цель исследования, заключающаяся в разработке методики изучения псевдоевклидовой геометрии в рамках факультативных занятий в средней школе, была достигнута.

Список литературы

1. Александров П. С., Маркушевич А. И., Хинчин А. Я. Энциклопедия элементарной математики книга пятая – геометрия. М. : Наука, 1966. 624 с.
2. Аналитическая геометрия евклидова пространства : учеб. пособие / В. И. Паньженский, О. П. Сурина, М. В. Сорокина, О. В. Якунина. Пенза : Изд-во ПГУ, 2021. 254 с.
3. Андреева З. И., Шеремет Г. Г. Псевдоевклидова плоскость // Актуальные проблемы обучения математике : сб. тр. Всероссийской научно-практической конференции. Орел : Изд. ОГУ, 2002. Т. 3. С. 84–93.
4. Геометрия. 7-9 классы : учебник для общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанасян [и др.]. 7-е изд. М. : Просвещение, 2017. 383 с.
5. Горшкова Л. С., Сорокина М. В. Основания геометрии : учеб. пособие для студентов педагогических вузов. Пенза : ПГПУ им. В. Г. Белинского, 2009. 144 с.
6. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия : Методы и приложения. М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 760 с.
7. Миронов А. Н., Хайртдинова Г. Ф. К вопросу о содержании факультативных занятий по математике в школе // Азимут научных исследований : педагогика и психология. 2019. Т. 8. № 2(27). С. 162–164.
8. Медведев В. Б. Начала теоретической физики. Механика, теория поля, элементы квантовой механики. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 600 с.
9. Муштавинская И. В. Путеводитель по ФГОС основного и среднего общего образования : методическое пособие. Санкт-Петербург : КАРО, 2018. 176 с.
10. Погорелов А. В. Геометрия. 7–9 классы : учебник для общеобразовательных учреждений. М. : Просвещение, 2018. 240 с.
11. Понарин Я. П. Аффинная и проективная геометрия. М. : МЦНМО, 2014. 287 с.

12. Рашевский П. К. Риманова геометрия и тензорный анализ. М. : Наука, 1967. 664 с.
13. Уткин А. А. Геометрическое моделирование окружающего мира : учеб. пособие. М. : ФЛИНТА, 2019. 219 с.
14. Шаваревич И. Р., Ремизов А. О. Линейная алгебра и геометрия. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. 512 с.
15. Шрайнер Е. Г. Геометрия евклидовой, псевдоевклидовой и полувеклидовой плоскостей : учеб. пособие. Новосибирск : Новосибирский гос. пед. ун-т, 2007. 151 с.
16. Яглом М. И. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. М. : Наука, 1969. 303 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«05» 10 2021 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Дырановой Юлии Вячеславовны.

Тема работы «Исследование геометрии псевдоевклидовой плоскости».

Утверждена приказом по Университету от «27» декабря 2021 г. № 1057/о.

Срок сдачи студентом законченной работы «04» июня 2022 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Анализ научной и учебно-методической литературы по теме исследования.	Октябрь – ноябрь 2021	выполнено
2.	Изложение систем аксиом псевдоевклидовой геометрии на плоскости.	Декабрь 2021	выполнено
3.	Доказательство основных фактов псевдоевклидовой геометрии.	Январь – февраль 2022	выполнено
4.	Разработка рабочей программы факультативного курса на тему «Псевдоевклидова геометрия».	Март – апрель 2022	выполнено
5.	Разработка конспектов факультативных занятий по темам: «Прямая и окружность в псевдоевклидовой плоскости», «Треугольник в псевдоевклидовой плоскости. Доказательство теорем».	Апрель 2022	выполнено
6.	Оформление текста работы.	Май – июнь 2022	выполнено
7.	Подготовка презентации и выступления.	Июнь 2022	выполнено

Дата выдачи задания « 05 » 10 2021 г.

Руководитель Пань Паньженский В.И.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению Ды Дыранова Ю.В.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Дырановой Юлии Вячеславовны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Дыранова Юлия Вячеславовна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Исследование геометрии псевдоевклидовой плоскости» выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.



подпись
04.06.22

дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 04.06.22

дд.мм.гггг

Руководитель ВКР 

подпись В.И. Паньженский

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Исследование геометрии псевдоевклидовой плоскости»

студентки 4 курса Дырановой Юлии Вячеславовны
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
профиля «Математика»

Руководитель ВКР Паньженский Владимир Иванович



Отчет о проверке на заимствования №1



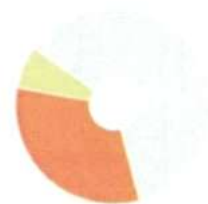
Автор: Дыранова Юлия Вячеславовна
Проверяющий: Паньженский Владимир Иванович (kaf-geom@yandex.ru / ID: 161)
Организация: Пензенский государственный университет
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - <http://pnzgu.antiplagiat.ru>

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 14
Начало загрузки: 05.06.2022 17:08:04
Длительность загрузки: 00:00:08
Имя исходного файла: ДИПЛОМ Дыранова ЮВ.docx
Название документа: ДИПЛОМ Дыранова ЮВ
Размер текста: 1 кБ
Тип документа: Выпускная квалификационная работа
Символов в тексте: 78032
Слов в тексте: 9852
Число предложений: 686

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 05.06.2022 17:08:13
Длительность проверки: 00:00:24
Комментарии: не указано
Поиск с учетом редактирования: да
Модули поиска: ИПС Адилет, Библиография, Сводная коллекция ЭБС, Интернет Плюс, Сводная коллекция РГБ, Цитирование, Переводные заимствования (RuEn), Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu), Переводные заимствования по Интернету (EnRu), Переводные заимствования издательства Wiley (RuEn), eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ, Медицина, Диссертации НББ, Перефразирования по eLIBRARY.RU, Перефразирования по Интернету, Патенты СССР, РФ, СНГ, Модуль поиска "ПГУ", СМИ России и СНГ, Шаблонные фразы, Кольцо вузов, Издательство Wiley, Переводные заимствования



ЗАИМСТВОВАНИЯ
31.99%

САМОЦИТИРОВАНИЯ
0%

ЦИТИРОВАНИЯ
7.28%

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
60.73%

05.06.2022

ДД.ММ.ГГГГ.

подпись

В.И. Паньженский

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Исследование геометрии псевдоевклидовой плоскости»
студентки Дырановой Юлии Вячеславовны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль «Математика», гр. 18ФПМ1

В выпускной квалификационной работе Дырановой Ю.В. разработан факультативный курс по псевдоевклидовой геометрии для учащихся средней школы, обладающих высокими интеллектуальными способностями и проявляющих повышенный интерес к математике.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемой литературы.

Во введение представлены история возникновения псевдоевклидовой геометрии и её связь с кинематикой, цель и задачи исследования, отмечается актуальность темы и практическая значимость исследования. В первой главе излагаются основные факты псевдоевклидовой геометрии: аксиоматическое определение плоскости Минковского, двумерное псевдоевклидово пространство, вращение ортонормированного репера в псевдоевклидовой плоскости, а также измерение площадей и углов на псевдоевклидовой плоскости. Во второй главе представлена рабочая программа факультативного курса по псевдоевклидовой геометрии. Детально разработаны два занятия по изучению прямой и окружности в псевдоевклидовой геометрии, треугольника на псевдоевклидовой плоскости с доказательством некоторых теорем по заданной теме. В заключении формулируются основные выводы, к которым пришел автор исследования.

Выпускная квалификационная работа Дырановой Ю.В. представляет определенный интерес как для учителей математики, так и для преподавателей и студентов, изучающих раздел «Неевклидовы геометрии», и, следовательно, является актуальной.

Считаю, что выпускная квалификационная работа Дырановой Ю.В. «Исследование геометрии псевдоевклидовой плоскости» удовлетворяет требованиям, предъявляемым к выпускным квалификационным работам, и заслуживает оценки «отлично».

Руководитель, к.ф.-м.н., профессор
зав. кафедрой «Математическое образование»



В.И. Паньженский