

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Математика и суперкомпьютерное моделирование»

Курсовая работа

по дисциплине «Нелинейные дифференциальные уравнения»
на тему «Теоремы существования и единственности для систем ОДУ в
нормальной форме»

Направление подготовки – 01.03.01 Математика

Профиль подготовки – Вычислительная математика и компьютерные науки

Выполнил студент: _____ Симакова Е.А.

Группа: _____ 19BM1

Руководитель:

к. ф.-м. н., доцент _____ Валовик Д.В.

Работа защищена с оценкой _____

Преподаватель _____

Дата защиты _____

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»

Зав. кафедрой МСМ

_____ Смирнов Ю. Г.

ЗАДАНИЕ

на курсовую работу по дисциплине

«Нелинейные дифференциальные уравнения»

Тема: «Теоремы существования и единственности для систем ОДУ в
нормальной форме»

- а) Изучить литературу по теме курсовой работы.
- б) Изложить реферативно изученный по теме теоретический материал.
- в) Самостоятельно придумать и решить задачи по теме курсовой работы.

Руководитель работы, доцент

Валовик Д.В.

Оглавление

Введение	4
Глава I. Теоретическая часть	5
1.1. Последовательные приближения. Теорема сходимости.....	5
1.2. Теорема существования и единственности	9
Глава II. Практическая часть	11
2.1. Составление дифференциальных уравнений по данным их интегралов ..	11
2.2. Уравнения с отделяющимися переменными.....	11
2.3. Уравнения однородные и приводящиеся к ним.....	12
2.4. Уравнения линейные и приводящиеся к ним.....	15
2.5. Интегрирующий множитель	17
2.6. Уравнения, не решенные относительно производной	18
2.7. Особенные решения уравнений.....	20
2.8. Разные задачи	22
2.9. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.....	23
Заключение.....	27
Список литературы	28

Введение

Дифференциальные уравнения – раздел математики, изучающий теорию и способы решения уравнений, содержащих искомую функцию и ее производные различных порядков одного аргумента (обыкновенные дифференциальные) или нескольких аргументов (дифференциальные уравнения в частных производных).

Теория дифференциальных уравнений представляет собой исключительно богатый содержанием, быстро развивающийся раздел математики, тесно связанный с другими областями математики и с ее приложениями.

Изучая какие-либо физические явления, исследователи прежде всего, пренебрегая второстепенными характеристиками явления, записывают основные законы, управляющие этим явлением, в математической форме. Очень часто эти законы можно выразить в виде дифференциальных уравнений. Такими оказываются модели различных явлений механики сплошной среды, химических реакций, электрических и магнитных явлений и др. Можно сказать, что большая часть путей, связывающих абстрактные математические теории и естественнонаучные приложения, проходит через дифференциальные уравнения.

Исследование дифференциальных уравнений часто облегчает возможность провести вычислительный эксперимент для выявления тех или иных свойств их решений, которые потом могут быть теоретически обоснованы и послужат фундаментом для дальнейших теоретических исследований.

В настоящее время дифференциальные уравнения представляют собой труднообозримую совокупность фактов, идей и методов, очень полезных для приложений и стимулирующих теоретические исследования во всех других разделах математики.

Целью данной курсовой работы является рассмотрение теоремы существования и единственности для систем ОДУ в нормальной форме.

Глава I. Теоретическая часть

1.1. Последовательные приближения. Теорема сходимости

Пусть даны уравнения $\dot{x} = f(t, x)$ и начальная точка $(t_0, x_0) \in G$. Рассмотрим вопрос о существовании решения задачи Коши с этими начальными данными. Будем фактически строить искомое решение методом *последовательных приближений Пикара*. Определяются они следующим образом.

Нулевое приближение $\varphi^0: \langle a_0, b_0 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ – произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая условию $\varphi(t_0) = x_0$. Здесь положим $\varphi^0(t) = x_0$, $t_0 \in \langle a_0, b_0 \rangle$. Пусть $\langle a_1, b_1 \rangle$ – такой промежуток, что $t_0 \in \langle a_1, b_1 \rangle$ и при $t \in \langle a_1, b_1 \rangle$ $(t, \varphi^0(t)) \subset G$. Тогда первое приближение $\varphi^1: \langle a_1, b_1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$ определим формулой

$$\varphi^1(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x_0) ds. \quad (1)$$

Вообще, при $k \in \mathbb{N}$, если $\varphi^{k-1}: \langle a_{k-1}, b_{k-1} \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\langle a_k, b_k \rangle \subset \langle a_{k-1}, b_{k-1} \rangle$, $t_0 \in \langle a_k, b_k \rangle$ и при $t \in \langle a_k, b_k \rangle$ $(t, \varphi^{k-1}(t)) \in G$, то

$$\varphi^k(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi^{k-1}(s)) ds. \quad (2)$$

Отметим, что $\varphi^k(t_0) = x_0$, $k \in \mathbb{N}_0$. Таким образом, первые k приближения $\varphi^0, \varphi^1, \dots, \varphi^k$ определены на некотором промежутке $\langle a_k, b_k \rangle$, содержащим t_0 как внутреннюю точку.

Теорема 1.

Пусть $f(t, x): G \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию *Липшица* по x (глобально) на замкнутом множестве $D \subset G$. Пусть, далее, все приближения Пикара (1), (2), построенные по точке $(t_0, x_0) \in D$, определены на отрезке $[a, b]$, причем при $t \in [a, b]$ $(t, \varphi^k(t)) \in D$. Тогда последовательность функций $\varphi^k(t)$ сходится равномерно на $[a, b]$ и предельная функция $\varphi(t)$ является решением уравнения $\dot{x} = f(t, x)$, удовлетворяющего условию $\varphi(t_0) = x_0$.

Доказательство.

Вопрос о сходимости последовательности $\varphi^k(t)$ заменим эквивалентным вопросом о сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi^k(t), \quad (3)$$

где $\psi^0 = \varphi^0$, $\psi^k = \varphi^k - \varphi^{k-1}$, $k \in \mathbb{N}$. Наша цель – построить сходящийся числовой ряд, который мажорирует на $[a, b]$ ряд (3). Тогда по признаку Вейерштрасса ряд (3) будет сходиться равномерно на $[a, b]$.

Пусть L – постоянная Липшица функции $f(t, x)$ на множестве D ,

$$N = \sup_{t \in [a, b]} \|f(t, x_0)\|, \quad (4)$$

Докажем, что при $t \in [a, b]$ и $k \in \mathbb{N}$

$$\|\psi^k(t)\| \leq \frac{N}{L} \frac{(L|t - t_0|)^n}{k!}, \quad (5)$$

В силу (1), (4) и $\left\| \int_a^b f(t) dt \right\| \leq \left| \int_a^b \|f(t)\| dt \right|$ при $t \in [a, b]$

$$\|\psi^1(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, x_0)\| ds \right| \leq N|t - t_0|,$$

что доставляет базу для индукции по k . Далее, на основании (2)

$$\|\psi^{k+1}(t)\| \leq \left| \int_{t_0}^t \|f(s, \varphi^k(s)) - f(s, \varphi^{k-1}(s))\| ds \right|.$$

Так как f удовлетворяет на множестве D условию Липшица с постоянной Липшица L , то при $t \in [a, b]$

$$\|\psi^{k+1}(t)\| \leq L \left| \int_{t_0}^t \|\varphi^k(s) - \varphi^{k-1}(s)\| ds \right| = L \left| \int_{t_0}^t \|\psi^k(s)\| ds \right|.$$

Пусть (5) справедлива при некотором k . Тогда при $t \in [a, b]$

$$\|\psi^{k+1}(t)\| \leq L \left| \int_{t_0}^t \frac{N}{L} \frac{(L|s - t_0|)^k}{k!} ds \right|,$$

откуда

$$\|\psi^{k+1}(t)\| \leq \frac{N}{L} \frac{(L|t - t_0|)^{k+1}}{(k+1)!}, t \in [a, b].$$

Тем самым справедливость (5) при $k \in \mathbb{N}$ доказана. Следовательно, при $t \in [a, b]$ ряд (3) мажорируется сходящимся числовым рядом

$$\|x_0\| + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N}{L} \frac{[L(b-a)]^k}{k!}.$$

Пусть $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ – предельная функция. Покажем, что $\varphi(t)$ – решение рассматриваемой задачи Коши. Очевидно, $\varphi(t_0) = x_0$, так как $\varphi^k(t_0) = x_0$ при всех k . Проверим, что $\varphi(t)$ – решение уравнения $x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, x(s)) ds$. Условие непрерывности $\varphi(t)$ на промежутке $\langle a, b \rangle$, $t_0 \in \langle a, b \rangle$ выполняется по признаку Вейерштрасса; а условие того, что $(t, \varphi(t)) \in G$ при всех $t \in \langle a, b \rangle$ выполняется в силу замкнутости D .

Осталось проверить справедливость $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$. Перейдем в (2) к пределу при $k \rightarrow \infty$. Так как $\varphi^k \rightrightarrows \varphi$, а f удовлетворяет на D условию Липшица по x , то

$$f(t, \varphi^k(t)) \rightrightarrows_{k \rightarrow \infty} f(t, \varphi(t)).$$

Следовательно, в (2) можно перейти к пределу под знаком интеграла, что дает $\varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds$. Теорема доказана.

Замечание.

Ниже (теорема 2) будет доказано, что в условиях теоремы 1 любая область $U \subset D$ является областью единственности.

Следствие.

Пусть $\dot{x} = f(t, x)$ – линейная система, т.е.

$$f(t, x) = P(t)x + q(t), \quad (6)$$

где $P: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^{n,n}$, $q: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$. Для любых $t_0 \in (a, b)$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ решение задачи Коши с начальными данными (t_0, x_0) определено на всем интервале (a, b) . При этом $G = (a, b) \times \mathbb{R}^n$ является областью единственности.

Доказательство.

Пусть $D = [\alpha, \beta] \times \mathbb{R}^n$, где $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Функция (6) удовлетворяет на D условию Липшица по x . Действительно, если $(t, \bar{x}) \in D$, $(t, \bar{\bar{x}}) \in D$, то

$$\|f(t, \bar{x}) - f(t, \bar{\bar{x}})\| \leq n\|P(t)\| \cdot \|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\| \leq L\|\bar{x} - \bar{\bar{x}}\|,$$

где

$$L = n \max_{t \in [\alpha, \beta]} \|P(t)\|.$$

Последовательные приближения определены на $[\alpha, \beta]$. Так как D замкнуто, то все условия теоремы 1 выполнены. Поэтому если $t_0 \in [\alpha, \beta]$, то решение $\varphi_{\alpha, \beta}(t)$ задачи Коши определено на $[\alpha, \beta]$. Так как $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ – любой отрезок, то в силу сделанного выше замечания функция $\varphi(t): (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$, сужение которой на $[\alpha, \beta]$ совпадает с $\varphi_{\alpha, \beta}(t)$, является решением на интервале (a, b) , а G – областью единственности.

1.2. Теорема существования и единственности

Теорема 2 (теорема существования и единственности).

Пусть $f: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию Липшица по x в области G локально. Тогда:

- 1) для любой начальной точки $(t_0, x_0) \in G$ существует решение задачи Коши, определенное на отрезке Пеано;
- 2) область G есть область единственности.

Доказательство. Существование.

По данному компакт $R \subset G$:

$$R = \{(t, x): |t - t_0| \leq a, \|x - x_0\| \leq b\}$$

определяем отрезок Пеано $[t_0 - h, t_0 + h]$, где

$$h = \min\{a, b/M\}, \quad M = \sup_{(t,x) \in R} \|f(t, x)\|.$$

Покажем, что если положить $D = R$, $[a, b] = [t_0 - h, t_0 + h]$, то условия теоремы 1 выполнены. Так как $f(t, x)$ удовлетворяет в G условию Липшица по x локально, то она удовлетворяет условию Липшица по x на R (глобально). Осталось доказать, что функции (2) определены при $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ и при этих t $(t, \varphi^k(t)) \in R$. Поскольку $h \leq a$, достаточно доказать, что при $|t - t_0| \leq h$

$$\|\varphi^k(t) - x_0\| \leq b, \quad k \in \mathbb{N}_0. \quad (7)$$

Применим индукцию по k . При $k = 0$ неравенство очевидно. Оценим норму

$$\varphi^{k+1}(t) - x_0 = \int_{t_0}^t f(s, \varphi^k(s)) ds.$$

Если предположить, что $\varphi^k(t)$ определено при $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ и (7) выполняется при некотором k , то в подынтегральной функции $(s, \varphi^k(s)) \in R$.

Тогда по определению M

$$\|\varphi^{k+1}(t) - x_0\| \leq M|t - t_0| \leq b,$$

что и требовалось доказать. Теперь существование решения задачи Коши, определенного при $|t - t_0| \leq h$, вытекает из теоремы 1.

Единственность.

Рассмотрим два решения уравнения $\dot{x} = f(t, x)$:

$$\varphi^i: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad i = 1, 2,$$

причем при некотором $t_0 \in \langle a, b \rangle$ $\psi^1(t_0) = \psi^2(t_0)$. Покажем, что $\psi^1(t) = \psi^2(t)$ при всех $t \in \langle a, b \rangle$.

Рассмотрим произвольный отрезок $[\alpha, \beta] \subset \langle a, b \rangle$, содержащий t_0 . Положим

$$u(t) = \|\psi^1(t) - \psi^2(t)\|.$$

Тогда

$$u(t) = \left\| \int_{t_0}^t \left(f(s, \psi^1(s)) - f(s, \psi^2(s)) \right) ds \right\|.$$

Так как интегральные кривые при $t \in [\alpha, \beta]$ – компактные множества, то найдется постоянная $L > 0$ такая, что

$$u(t) \leq L \left| \int_{t_0}^t u(s) ds \right|, \quad t \in [\alpha, \beta].$$

По лемме Гронуолла $u(t) = 0$ при $t \in [\alpha, \beta]$. Так как $[\alpha, \beta]$ – любой отрезок в $\langle a, b \rangle$, то $\psi^1(t) = \psi^2(t)$ при всех $t \in \langle a, b \rangle$. Теорема доказана.

Глава II. Практическая часть

2.1. Составление дифференциальных уравнений по данным их интегралов

Задача. Найти дифференциальное уравнение следующего семейства линий с несколькими параметрами:

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Решение. Так как уравнение семейства содержит три параметра, то дифференцируем его три раза, считая $y = y(x)$.

Находим производные y' , y'' и y''' :

$$y' = 2ax + b,$$

$$y'' = 2a,$$

$$y''' = 0.$$

Так как после третьего дифференцирования параметров не осталось, то семейство кривых описывается следующим уравнением:

$$y''' = 0.$$

2.2. Уравнения с отделяющимися переменными

Задача. Проинтегрировать следующее уравнение:

$$y' = \sin(x - y).$$

Решение. Сделаем замену $x - y = z$. Продифференцировав обе части равенства по x , получим:

$$1 - y' = z',$$

таким образом

$$y' = 1 - z'.$$

Подставим все в уравнение и получим:

$$1 - z' = \sin(z),$$

$$z' = 1 - \sin(z).$$

Приведем полученное уравнение к виду, удобному для интегрирования:

$$\int \frac{dz}{1 - \sin z} = \int dx.$$

Упростим знаменатель интеграла, находящегося в левой части:

$$1 - \sin z = \sin^2\left(\frac{z}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{z}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{z}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{z}{2}\right) = \left(\sin\left(\frac{z}{2}\right) - \cos\left(\frac{z}{2}\right)\right)^2.$$

Используя формулу дополнительного угла, получим:

$$\sin\left(\frac{z}{2}\right) - \cos\left(\frac{z}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{z}{2} - \varphi\right),$$

где $\varphi = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$, тогда:

$$\left(\sin\left(\frac{z}{2}\right) - \cos\left(\frac{z}{2}\right)\right)^2 = 2 \sin^2\left(\frac{z}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

Теперь упрощенный знаменатель подставим в уравнение:

$$\int \frac{dz}{2 \sin^2\left(\frac{z}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \int dx.$$

Проинтегрируем левую часть:

$$\int \frac{dz}{2 \sin^2\left(\frac{z}{2} - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(\frac{z}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(\frac{z}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{1}{2}} = -\operatorname{ctg}\left(\frac{z}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + C.$$

Проинтегрируем правую часть:

$$\int dx = x + C.$$

Запишем ответ, полученный после интегрирования:

$$-\operatorname{ctg}\left(\frac{z}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = x + C.$$

Сделаем обратную замену $z = x - y$ и запишем ответ:

$$-\operatorname{ctg}\left(\frac{x - y}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = x + C.$$

2.3. Уравнения однородные и приводящиеся к ним

Задача1. Решить дифференциальное уравнение, выделив интегральную кривую, проходящую через точку $M(0,1)$:

$$(y^2 - 3x^2) dx + 2xy dy = 0.$$

Решение. Данное уравнение является однородным. Однородное дифференциальное уравнение приводится к дифференциальному уравнению с

разделяющимися переменными подстановкой $y = zx$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда $dy = zdx + xdz$.

Подставим выражения y и dy в заданное уравнение:

$$(z^2x^2 - 3x^2) dx + 2x^2z(zdx + xdz) = 0.$$

Раскроем скобки:

$$(z^2x^2 - 3x^2) dx + 2x^2z^2dx + 2x^3zdz = 0.$$

Сгруппируем:

$$x^2(z^2 - 3 + 2z^2) dx + 2x^3zdz = 0,$$

$$x^2(3z^2 - 3) dx + 2x^3zdz = 0.$$

Разделим обе части на $x^2 \neq 0$:

$$(3z^2 - 3) dx + 2xzdz = 0.$$

Разделяем переменные:

$$\frac{-2z}{3z^2 - 3} dz = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{-2z}{3z^2 - 3} dz = \int \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем левую часть:

$$\int \frac{-2z}{3z^2 - 3} dz = \int \frac{-2z d(3z^2 - 3)}{(3z^2 - 3) \cdot 6z} = -\frac{1}{3} \int \frac{d(3z^2 - 3)}{3z^2 - 3} = -\frac{1}{3} \ln|3z^2 - 3| + \ln C.$$

Проинтегрируем правую часть:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln C.$$

Таким образом получили:

$$-\frac{1}{3} \ln|3z^2 - 3| + \ln C = \ln|x|,$$

$$\ln|x| + \frac{1}{3} \ln|3z^2 - 3| = \ln C.$$

Умножим обе части на 3, получим:

$$3 \ln|x| + \ln|3z^2 - 3| = 3 \ln C,$$

$$x^3(3z^2 - 3) = \bar{C}.$$

Выполняем обратную замену $z = \frac{y}{x}$:

$$x^3 \left(3 \frac{y^2}{x^2} - 3 \right) = \bar{C},$$

Раскроем скобки и поделим обе части на 3:

$$xy^2 - x^3 = \frac{1}{3} \bar{C}.$$

Получим общее решение:

$$xy^2 - x^3 = \tilde{C}.$$

Подставив точку $M(0,1)$ в общее решение, мы получим, что $\tilde{C} = 0$. Тогда решением задачи будет функция:

$$xy^2 - x^3 = 0.$$

Задача2. Решить дифференциальное уравнение:

$$xy' = y \ln \frac{x}{y}.$$

Решение. Данное уравнение является однородным. Однородное дифференциальное уравнение приводится к дифференциальному уравнению с разделяющимися переменными подстановкой $y = zx$, где $z = z(x)$ – новая неизвестная функция. Тогда $y' = xz' + z$.

Разделим обе части уравнения на $x \neq 0$:

$$y' = \frac{y}{x} \ln \frac{x}{y}.$$

Подставим выражения y и y' в заданное уравнение:

$$xz' + z = z \ln(z)^{-1}.$$

Упростим:

$$xz' = -z (\ln z + 1).$$

Разделяем переменные:

$$-\frac{dz}{z (\ln z + 1)} = \frac{dx}{x}.$$

Интегрируем:

$$-\int \frac{dz}{z(\ln z + 1)} = \int \frac{dx}{x}.$$

Проинтегрируем левую часть:

$$-\int \frac{dz}{z(\ln z + 1)} = -\int \frac{d(\ln z + 1)}{z(\ln z + 1) \cdot \frac{1}{z}} = -\ln|\ln z + 1| + \ln C.$$

Проинтегрируем правую часть:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln C.$$

Таким образом получили:

$$-\ln|\ln z + 1| + \ln C = \ln|x|,$$

$$\ln|x| + \ln|\ln z + 1| = \ln C.$$

Выполняем обратную замену $z = \frac{y}{x}$ и упрощаем:

$$x \left(\ln \left(\frac{y}{x} \right) + 1 \right) = C,$$

$$\ln \left(\frac{y}{x} \right) = \frac{C}{x} - 1,$$

$$\frac{y}{x} = e^{\frac{C}{x} - 1}.$$

Получили общее решение:

$$y = x e^{\frac{C}{x} - 1}.$$

2.4. Уравнения линейные и приводящиеся к ним

Задача. Найти y :

$$\int_0^{\infty} xy \, dx = x^2 + y.$$

Решение. Найдем производную от обеих частей уравнения:

$$\left(\int_0^{\infty} xy \, dx \right)' = (x^2 + y)',$$

Получим:

$$xy = 2x + y'.$$

Получили линейное уравнение, найдем его общее решение:

$$y' = xy - 2x,$$

$$y' = x(y - 2),$$

$$\frac{dy}{(y - 2)} = xdx.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{(y - 2)} = \int xdx.$$

Проинтегрируем левую часть:

$$\int \frac{dy}{(y - 2)} = \ln|y - 2| + \ln C.$$

Проинтегрируем правую часть:

$$\int xdx = \frac{x^2}{2} + \ln C.$$

Таким образом получили:

$$\ln|y - 2| = \frac{x^2}{2} + \ln C.$$

Упрощаем:

$$y - 2 = Ce^{\frac{x^2}{2}}.$$

Получили общее решение:

$$y = Ce^{\frac{x^2}{2}} + 2.$$

Исходя из начального условия $y(0) = 0$, находим $C = -2$. Следовательно:

$$y = -2e^{\frac{x^2}{2}} + 2.$$

2.5. Интегрирующий множитель

Задача. Интегрировать уравнение с множителем одного из видов

$M = f(x + y)$ или $M = f(xy)$:

$$x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y' = 0.$$

Решение. Представим y' в виде $\frac{dy}{dx}$ и умножим обе части уравнения на dx :

$$(x^2y^3 + y) dx + (x^3y^2 - x)dy = 0.$$

Раскроем скобки:

$$x^2y^3 dx + y dx + x^3y^2 dy - xdy = 0.$$

Вынесем за скобку из первого и третьего слагаемого x^2y^2 :

$$x^2y^2(y dx + xdy) + y dx - xdy = 0.$$

Выражение, которое получили в скобках – это полный дифференциал. То есть $y dx + xdy = d(xy)$. Тогда уравнение примет вид:

$$x^2y^2 d(xy) + y dx - xdy = 0.$$

Видно, что если умножить обе части уравнения на $\frac{1}{xy}$, то уравнение будет иметь вид уравнения в полных дифференциалах. Получим:

$$xy d(xy) + \frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = 0,$$

$$d\left(\frac{x^2y^2}{2}\right) + d(\ln x) - d(\ln y) = 0,$$

$$d\left(\frac{x^2y^2}{2} + \ln x - \ln y\right) = 0,$$

$$d\left(\frac{x^2y^2}{2} + \ln \frac{x}{y}\right) = 0.$$

Непосредственно проинтегрируем:

$$\frac{x^2y^2}{2} + \ln \frac{x}{y} = C.$$

Умножим обе части уравнения на 2 и получим окончательный ответ:

$$x^2y^2 + 2 \ln \frac{x}{y} = \tilde{C}.$$

2.6. Уравнения, не решенные относительно производной

Задача1. Решить уравнение:

$$xy'^2 + 2yy' - x = 0.$$

Решение. Сначала выразим из уравнения y :

$$y = \frac{x - xy'^2}{2y'} = \frac{x}{2y'} - \frac{xy'}{2}.$$

Воспользуемся методом введения параметра, т.е. $y' = p$, $dy = p dx$:

$$y = \frac{x}{2p} - \frac{xp}{2}.$$

Берем полный дифференциал от обеих частей равенства и заменяем $dy = p dx$:

$$p dx = \frac{dx}{2p} - \frac{x dp}{2p^2} - \frac{p dx}{2} - \frac{x dp}{2}.$$

Умножаем обе части уравнения на $2p^2$:

$$2p^3 dx = p dx - x dp - p^3 dx - xp^2 dp.$$

Переносим члены с dx влево, а с dp – вправо. Группируем члены по дифференциалам:

$$(3p^3 - p) dx = -x(1 + p^2) dp.$$

Умножим обе части уравнения на $\frac{1}{x(3p^3 - p)}$, получим:

$$\int \frac{dx}{x} = - \int \frac{p^2 + 1}{3p^3 - p} dp.$$

Проинтегрируем левую часть:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln C.$$

Проинтегрируем правую часть. Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби методом неопределенных коэффициентов:

$$\frac{p^2 + 1}{3p^3 - p} = \frac{p^2 + 1}{p(3p^2 - 1)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{3p^2 - 1}.$$

Приводим полученную сумму простейших дробей к общему знаменателю:

$$\frac{p^2 + 1}{3p^3 - p} = \frac{A(3p^2 - 1) + (Bp + C)p}{3p^3 - p}.$$

Группируем в числителе слагаемые при одинаковых степенях и при

$p \neq 0, p \neq \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$, получим:

$$p^2 + 1 = p^2(3A + B) + Cp - A.$$

Два многочлена равны тогда и только тогда, когда коэффициенты при одинаковых степенях совпадают. Приравниваем коэффициенты и решаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 3A + B = 1, \\ C = 0, \\ -A = 1. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 1 - 3A, \\ C = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -1, \\ B = 4, \\ C = 0. \end{cases}$$

Тогда, получим:

$$\frac{p^2 + 1}{3p^3 - p} = \frac{-1}{p} + \frac{4p}{3p^2 - 1}.$$

И, следовательно,

$$\begin{aligned} -\int \frac{p^2 + 1}{3p^3 - p} dp &= \int \frac{dp}{p} - \int \frac{4p}{3p^2 - 1} dp = \ln|p| - 4 \int \frac{pd(3p^2 - 1)}{(3p^2 - 1) \cdot 6p} = \\ &= \ln|p| - \frac{2}{3} \ln|3p^2 - 1| + \ln C. \end{aligned}$$

Таким образом, получили:

$$\ln|x| = \ln|p| - \frac{2}{3} \ln|3p^2 - 1| + \ln C.$$

Откуда:

$$x = \frac{Cp}{(3p^2 - 1)^{2/3}}.$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{Cp}{(3p^2 - 1)^{2/3}}, \\ y = \frac{x}{2p} - \frac{xp}{2}. \end{cases}$$

Задача2. Решить уравнение:

$$x^2 y'^2 - 2xyy' + y^2 = x^2 y^2 - x^4.$$

Решение. Сделаем замену $u = \frac{y}{x}$, $y' = u'x + u$ и подставим в уравнение:

$$x^2(u'x + u)^2 - 2x^2u(u'x + u) + x^2u^2 = x^4u^2 - x^4.$$

Раскрывая скобки и упрощая уравнение, получаем:

$$x^4 u'^2 = x^4(u^2 - 1),$$

$$u' = \pm \sqrt{u^2 - 1}.$$

Интегрируем:

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}} = \pm \int dx,$$

$$\ln |u + \sqrt{u^2 - 1}| = \ln e^{\pm x} + \ln C,$$

$$u + \sqrt{u^2 - 1} = Ce^{\pm x}.$$

Возвращаемся к замене и в итоге получаем:

$$y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cxe^{\pm x}.$$

Ответ:

$$y + \sqrt{y^2 - x^2} = Cxe^{\pm x}.$$

2.7. Особенные решения уравнений

Задача1. Найти особенное решение уравнения:

$$(xy' + y)^2 + 3x^5(xy' - 2y) = 0.$$

Решение. Дифференцируем обе части равенства по y' :

$$2x(xy' + y) + 3x^6 = 0,$$

$$2x^2y' + 2xy + 3x^6 = 0,$$

$$2xy' + 2y + 3x^5 = 0.$$

Откуда получаем:

$$y' = -\frac{3x^5 + 2y}{2x}.$$

Подставляем y' в заданное уравнение:

$$\left(x\left(-\frac{3x^5+2y}{2x}\right)+y\right)^2+3x^5\left(x\left(-\frac{3x^5+2y}{2x}\right)-2y\right)=0.$$

Раскрываем скобки и находим ответ:

$$\left(-\frac{3x^5+2y}{2}+y\right)^2+3x^5\left(-\frac{3x^5+2y}{2}-2y\right)=0,$$

$$\left(-\frac{3}{2}x^5-y+y\right)^2+3x^5\left(-\frac{3}{2}x^5-y-2y\right)=0,$$

$$\left(-\frac{3}{2}x^5\right)^2+3x^5\left(-\frac{3}{2}x^5-3y\right)=0,$$

$$\frac{9}{4}x^{10}-\frac{9}{2}x^{10}-9x^5y=0,$$

$$-\frac{9x^{10}+36x^5y}{4}=0,$$

$$9x^{10}+36x^5y=0.$$

Ответ:

$$x^5+4y=0.$$

Задача2. Решить уравнение:

$$x^2y'^2-2(xy-2)y'+y^2=0.$$

Решение. Дифференцируем обе части равенства по y' :

$$2x^2y'-2(xy-2)=0,$$

$$2x^2y'-2xy+4=0,$$

Откуда получаем:

$$y'=\frac{2xy-4}{2x^2}=\frac{xy-2}{x^2}.$$

Подставляем y' в заданное уравнение:

$$x^2\left(\frac{xy-2}{x^2}\right)^2-2(xy-2)\left(\frac{xy-2}{x^2}\right)+y^2=0.$$

Раскрываем скобки, приводим подобные и находим ответ:

$$\left(\frac{xy-2}{x}\right)^2+\left(\frac{-2xy(xy-2)+4(xy-2)}{x^2}\right)+y^2=0,$$

$$\frac{x^2 y^2 - 4xy + 4}{x^2} + \left(\frac{-2x^2 y^2 + 4xy + 4xy - 8}{x^2} \right) + y^2 = 0,$$

$$\frac{x^2 y^2 - 4xy + 4 - 2x^2 y^2 + 4xy + 4xy - 8 + x^2 y^2}{x^2} = 0,$$

$$x^2 y^2 - 4xy + 4 - 2x^2 y^2 + 4xy + 4xy - 8 + x^2 y^2 = 0,$$

$$4xy = 4.$$

Ответ:

$$xy = 1.$$

2.8. Разные задачи

Задача. Найти интеграл уравнения:

$$(y + xy')^2 = x^2 y'.$$

Решение. Уравнение является не разрешенные относительно производной.

Сначала выразим из уравнения y :

$$y = \pm x \sqrt{y'} - xy'.$$

Воспользуемся методом введения параметра, т.е. $y' = p$, $dy = p dx$:

$$y = \pm x \sqrt{p} - xp.$$

Берем полный дифференциал от обеих частей равенства и заменяем $dy = p dx$:

$$p dx = \pm \sqrt{p} dx \pm \frac{x dp}{2\sqrt{p}} - p dx - x dp.$$

Переносим члены с dx влево, а с dp – вправо. Группируем члены по дифференциалам:

$$(2p \mp \sqrt{p}) dx = x \left(\frac{\pm 1}{2\sqrt{p}} - 1 \right) dp.$$

Умножим обе части уравнения на $\frac{1}{x(2p \mp \sqrt{p})}$, получим:

$$\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \int \frac{dp}{p}.$$

Проинтегрируем левую часть:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + \ln C.$$

Проинтегрируем правую часть:

$$-\frac{1}{2} \int \frac{dp}{p} = -\frac{1}{2} \ln|p| + \ln C.$$

Таким образом, получили:

$$\ln|x| = -\frac{1}{2} \ln|p| + \ln C.$$

Откуда:

$$x = \frac{C}{\sqrt{p}}.$$

Ответ:

$$\begin{cases} x = \frac{C}{\sqrt{p}}, \\ y = \pm x\sqrt{p} - xp. \end{cases}$$

2.9. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Задача1. Решить уравнение:

$$y''' = y''^3.$$

Решение. Сделаем замену $y'' = u$; $y''' = u'$ и подставим её:

$$u' = u^3.$$

Заменяем u' на $\frac{du}{dx}$ и разделим переменные:

$$\frac{du}{dx} = u^3,$$

$$\frac{du}{u^3} = dx.$$

Проинтегрируем и получим:

$$\int \frac{du}{u^3} = \int dx,$$

$$-\frac{1}{2u^2} + C = x.$$

Выразим u^2 и вернемся к замене:

$$u^2 = \frac{1}{2(-x + C)},$$

$$y''^2 = \frac{1}{2(-x + C)}.$$

Возведем обе части уравнения в степень $\frac{1}{2}$:

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{-x + C}}.$$

Проинтегрируем обе части уравнения по переменной x :

$$y' = \int \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{-x + C}} dx,$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{dx}{\sqrt{-x + C}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int (-x + C)^{-\frac{1}{2}} d(-x + C) = -\sqrt{-2x + 2C} + C_2.$$

Обозначим $2C = C_1$, проинтегрируем еще раз обе части уравнения по переменной x :

$$\begin{aligned} y &= \int (-\sqrt{-2x + C_1} + C_2) dx = -\int \sqrt{-2x + C_1} dx + \int C_2 dx = \\ &= -\frac{1}{2} \int (-2x + C_1)^{\frac{1}{2}} d(-2x + C) + C_2 x = \frac{1}{3} (-2x + C_1)^{\frac{3}{2}} + C_2 x + C_3. \end{aligned}$$

Ответ:

$$3y = (-2x + C_1)^{\frac{3}{2}} + C_2 x + C_3.$$

Задача2. Решить уравнение, используя одну из подстановок

$y - xy' = u, yu' = u, y \pm x = u$:

$$yy'' + y'^2 = \frac{yy'}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Решение. Применим метод выделения полных дифференциалов. Мы видим, что $yy'' + y'^2 = (yy')'$, получим:

$$(yy')' = \frac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Теперь мы можем сделать замену $yy' = u$. Подставим её:

$$u' = \frac{u}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Заменяем u' на $\frac{du}{dx}$ и разделим переменные:

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Проинтегрируем и получим:

$$\int \frac{du}{u} = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\ln|u| = \ln|x + \sqrt{1+x^2}| + \ln C,$$

$$u = C(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Вернемся к замене:

$$yy' = C(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Заменяем y' на $\frac{dy}{dx}$ и разделим переменные:

$$y \frac{dy}{dx} = C(x + \sqrt{1+x^2}),$$

$$y dy = C(x + \sqrt{1+x^2}) dx,$$

$$\int y dy = \int C(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

Проинтегрируем левую часть:

$$\int y dy = \frac{y^2}{2} + \tilde{C}.$$

Проинтегрируем правую часть:

$$\begin{aligned} C \int (x + \sqrt{1+x^2}) dx &= C \left(\int x dx + \int \sqrt{1+x^2} dx \right) \\ &= C \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{\ln|x + \sqrt{1+x^2}|}{2} \right) + \tilde{C}. \end{aligned}$$

Таким образом, получили:

$$\frac{y^2}{2} = \frac{C}{2} \left(x^2 + x\sqrt{1+x^2} + \ln|x + \sqrt{1+x^2}| \right) + \tilde{C}.$$

Умножим обе части уравнения на 2:

$$y^2 = C \left(x^2 + x\sqrt{1+x^2} + \ln|x + \sqrt{1+x^2}| \right) + \tilde{C}.$$

Вынесем за скобку у первых двух слагаемых x :

$$y^2 = C \left(x \left(x + \sqrt{1+x^2} \right) + \ln|x + \sqrt{1+x^2}| \right) + \tilde{C}.$$

Заменим $C(x + \sqrt{1+x^2})$ на u :

$$y^2 = ux + \ln|u| + \tilde{C}.$$

Ответ:

$$u = C \left(x + \sqrt{1+x^2} \right); y^2 = ux + \ln|u| + \tilde{C}.$$

Заключение

В теоретической части курсовой работы была рассмотрена теорема существования и единственности для систем ОДУ в нормальной форме.

В практической части курсовой работы были рассмотрены методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, которые были закреплены путем решения практических задач.

Можно сделать вывод, что многие физические законы, которым подчиняются те или иные явления, записываются в виде математического уравнения, выражающего определенную зависимость между какими-то величинами. Часто речь идет о соотношении между величинами, изменяющимися с течением времени, например экономичность двигателя, измеряемая расстоянием, которое автомашина может проехать на одном литре горючего, зависит от скорости движения автомашины. Соответствующее уравнение содержит одну или несколько функций и их производных и называется дифференциальным уравнением.

Большое значение, которое имеют дифференциальные уравнения для математики и особенно для ее приложений, объясняется тем, что к решению таких уравнений сводится исследование многих физических и технических задач.

Таким образом, дифференциальные уравнения играют существенную роль и в других науках, таких, как биология, экономика и электротехника; в действительности, они возникают везде, где есть необходимость количественного (числового) описания явлений.

Список используемой литературы

1. Бибииков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений: Учеб. пособие для ун-тов. – М.: Высш. шк., 1991. – 303 с.
2. Гюнтер Н.М. Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике: Учебное пособие, 3-е изд., 1945. – 223 с.
3. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000, 176 стр.