

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

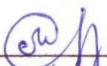
бакалаврская работа на тему:

«Методические особенности изучения темы «Векторы» в курсе геометрии
основного общего образования»

Студент

 13.06.25 Салихова Ангелина Ринатовна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель

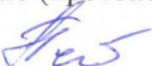
 13.06.25 Сорокина М. В.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

 - 28.06.25 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 16.06.25 № 12)

Заведующий кафедрой

 16.8.25 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой 4(хор) (протокол заседания ГЭК от 8.07.25 № 8)

Секретарь ГЭК

 - 8.07.25 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2025

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ВЕКТОРЫ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ	5
1.1 Место темы в школьной программе.....	5
1.2 Теоретические основы изучения темы «векторы»	14
1.3 Содержание школьных учебников по рассматриваемой теме	17
1.4 Анализ заданий ОГЭ и ЕГЭ	32
ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ВЕКТОРЫ».....	37
2.1 Технологические карты уроков	37
2.2 Методические разработки самостоятельных и контрольных работ	59
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	8484
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	85

ВВЕДЕНИЕ

Изучение такого математического объекта, как вектор, традиционно входит в школьный курс геометрии. Но зачастую эта тема изучается очень поверхностно. В последние годы задания, касающиеся операций над векторами, включены в контрольно-измерительные материалы единого государственного экзамена и ОГЭ. В силу этого данной теме стало уделяться в школе больше внимания. Однако, векторы – это инструментальная основа в различных областях. Они важны в инженерии, математике, физике, программировании, компьютерной графике и других науках. Поэтому необходимо грамотно и четко строить изучение материала, чтобы у обучающихся складывалось полное представление о взаимосвязи различных областей знания. Таким образом, исследование методических особенностей изучения темы «Векторы» не только актуально с точки зрения образовательных стандартов, но и имеет практическое значение для повышения качества математического образования в целом.

Все выше сказанное обуславливает актуальность данной выпускной квалификационной работы.

Цель исследования: изучение методических особенностей темы «Векторы» в курсе геометрии основного общего образования.

Объект исследования: тема «Векторы» в рамках курса геометрии для учащихся основного общего образования.

Предмет исследования: методические подходы, стратегии и средства обучения, используемые для преподавания темы «Векторы», а также их влияние на усвоение материала и развитие учебной деятельности учащихся.

Задачи исследования:

- 1) определить место темы в школьной программе на основе анализа рабочих программ;
- 2) охарактеризовать теоретические основы изучения темы «Векторы»;
- 3) провести анализ содержания школьных учебников по рассматриваемой теме;

- 4) проанализировать задания ОГЭ и ЕГЭ по изучаемой теме;
- 5) разработать технологические карты уроков;
- 6) представить методические материалы для самостоятельных и контрольных работ.

Для достижения цели исследования были использованы методы:

- анализ открытых источников по проблеме исследования и образовательных стандартов;
- изучение и анализ учебной литературы и школьных программ, методических пособий по теме работы;
- решение задачного материала по теме работы.

Выпускная квалификационная работа включает в себя: введение, две главы, заключение и список использованных источников.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ВЕКТОРЫ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ»

1.1 Место темы в школьной программе (анализ рабочих программ)

В школьном курсе математики вектору дается определение как отрезку прямой, который имеет величину и направление, или как направленному отрезку. Векторы и их свойства изучаются в разделе «Векторное исчисление». Изучение векторов в школе включает в себя следующие разделы и понятия:

- определение и обозначение;
- длина (модуль), нулевой вектор;
- действия с векторами (сложение по правилу треугольника и по правилу параллелограмма, вычитание, скалярное, векторное и смешанное умножение, умножение на число);
- компланарные, коллинеарные и равные вектора;
- координаты;
- разложение вектора по базису в двумерной и трёхмерной системах координат.

Векторы изучаются в федеральной рабочей программе учебного курса «Геометрия» в 7–9 классах на базовом [1] и углубленном уровнях[2] (раздел «Векторы», Таблица 1), в 10–11 классах на базовом [3] и углубленном уровнях [4] (содержательная линия «Векторы и координаты в пространстве», Таблица 2).

Таблица 1 – Изучение вектора на базовом и углубленном уровнях в 7-9 классах (Федеральная рабочая программа учебного курса «геометрия» в 7-9 классах)

	Базовый уровень	Углубленный уровень
Дидактические единицы	Вектор, длина (модуль) вектора, сонаправленные векторы, противоположно направленные векторы, коллинеарность векторов, равенство векторов, операции над векторами. Разложение вектора по двум	Векторы на плоскости. Сложение и вычитание векторов - правила треугольника и параллелограмма. Умножение вектора на число. Координаты вектора. Сложение и вычитание

Продолжение таблицы 1 – Изучение вектора на базовом и углубленном уровнях в 7-9 классах (Федеральная рабочая программа учебного курса «геометрия» в 7-9 классах)

	<p>неколлинеарным векторам. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов, применение для нахождения длин и углов.</p>	<p>векторов, умножение вектора на число в координатах. Применение векторов в физике, центр масс. Понятие о базисе (на плоскости). Разложения векторов по базису. Скалярное произведение векторов, геометрический смысл и выражение в декартовых координатах. Скалярное произведение и проецирование. Применение скалярного произведения векторов для нахождения длин и углов. Решение геометрических задач с помощью скалярного произведения.</p>
Предметные результаты	<p>Пользоваться векторами, понимать их геометрический и физический смысл, применять их в решении геометрических и физических задач. Применять скалярное произведение векторов для нахождения длин и углов.</p>	<p>Владеть понятием вектора. Уметь складывать и вычитать векторы, умножать на число, владеть правилами треуго. и параллелограмма. Владеть практическими интерпретациями векторов. Владеть сложением и вычитанием векторов, умножением вектора на число в координатах. Иметь представление о базисе (на плоскости). Раскладывать векторы по базису. Раскладывать векторы сил с помощью проецирования и тригонометрических соотношений. Применять полученные знания в простейших физических задачах. Применять скалярное произведение векторов для нахождения длин и углов. Решать геометрические задачи с помощью скалярного произведения.</p>

Продолжение таблицы 1 – Изучение вектора на базовом и углубленном уровнях в 7-9 классах (Федеральная рабочая программа учебного курса «геометрия» в 7-9 классах)

Количество часов	12	20
Основное содержание	<p>Определение векторов, сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число. Физический и геометрический смысл векторов. Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам. Координаты вектора. Скалярное произведение векторов, его применение для нахождения длин и углов. Решение задач с помощью векторов. Применение векторов для решения задач физики</p>	<p>Векторы на плоскости. Сложение и вычитание векторов – правила треугольника и параллелограмма. Умножение вектора на число. Координаты вектора. Сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число в координатах. Применение векторов в физике, центр масс. Понятие о базисе (на плоскости). Разложения векторов по базису. Скалярное произведение векторов, геометрический смысл и выражение в декартовых координатах. Дистрибутивность скалярного произведения. Скалярное произведение и проецирование. Применение скалярного произведения векторов для нахождения длин и углов. Решение геометрических задач с помощью скалярного произведения</p>
Основные виды деятельности обучающихся	<p>Формулировать определения тригонометрических функций тупых и прямых углов. Выводить теорему косинусов и теорему синусов (с радиусом описанной окружности). Выводить формулы для вычисления площадей с использованием теорем тригонометрии (формула площади треугольника через две стороны и угол между ними, формула площади четырёхугольника через его диагонали и угол между ними). Решать треугольники. Решать практические задачи, сводящиеся к нахождению различных элементов треугольника</p>	<p>Вводить векторы как направленные отрезки, исследовать геометрический (перемещение) и физический (сила) смыслы векторов. Знать определения суммы и разности векторов, умножения вектора на число, исследовать геометрический и физический смысл этих операций. Решать геометрические задачи с использованием векторов. Исследовать связь векторов с понятиями равнодействующей сил и равновесия сил, применять векторы к простейшим задачам механики и статики. Раскладывать вектор по двум неколлинеарным векторам, раскладывать</p>

Продолжение таблицы 1 – Изучение вектора на базовом и углубленном уровнях в 7-9 классах (Федеральная рабочая программа учебного курса «геометрия» в 7-9 классах)

		<p>векторы сил с помощью проецирования и тригонометрических соотношений. Определять скалярное произведение векторов геометрически и в координатах, доказывать равносильность определений и дистрибутивность скалярного произведения. Вычислять сумму, разность и скалярное произведение векторов в координатах. Применять скалярное произведение для нахождения длин и углов. Исследовать связь скалярного произведения и ортогонального проецирования, применять в задачах. Решать геометрические задачи с помощью скалярного произведения. Решать задачи на практическое применение скалярного приложения в физике (вычисление работы в механике)</p>
--	--	---

Таким образом, на базовом уровне содержание материала делает акцент на основных понятиях векторов – длина (модуль), сонаправленные и противоположно направленные векторы, коллинеарность и равенство, операции над векторами и разложение вектора по двум неколлинеарным векторам.

Углубленный уровень включает более сложные концепции, такие как векторы на плоскости, применение векторов в физике (например, центр масс). На углубленном уровне внимание уделяется более детальному рассмотрению операций в координатах, включая сложение, вычитание и умножение вектора на число в декартовых координатах. При изучении скалярного произведения в базовом курсе рассматривается скалярное произведение векторов и его применение для нахождения длин и углов.

В углубленном курсе акцентируется внимание на геометрическом смысле скалярного произведения, его дистрибутивности, а также на проецировании векторов. Это позволяет решать более сложные геометрические задачи с использованием скалярного произведения.

Базовый уровень включает понятие базиса. Углубленный уровень вводит понятие базиса на плоскости и разложения векторов по базису, что позволяет учащимся лучше понимать структуру векторного пространства.

В базовом уровне применение векторов ограничивается основными задачами и примерами. В углубленном уровне рассматриваются более сложные задачи, включая физические приложения (например, центр масс), что позволяет учащимся увидеть практическое использование векторов в различных областях.

Таким образом, углубленный уровень изучения темы «Векторы» предоставляет более полное и глубокое понимание данной темы, включая как теоретические аспекты, так и практические применения, что способствует развитию аналитического мышления у учащихся.

В 10–11 классах векторы на базовом и углубленном уровнях изучаются в содержательной линии «Векторы и координаты в пространстве» (Таблица 2).

Таблица 2 – Изучение вектора на базовом и углубленном уровнях в 10-11 классах

	Базовый уровень	Углубленный уровень
Дидактические единицы	Вектор на плоскости и в пространстве. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по трём некопланарным векторам. Правило параллелепипеда. Решение задач, связанных с применением правил действий с векторами. Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора. Простейшие задачи в координатах. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов. Вычисление углов между прямыми и плоскостями. Координатно-	Понятия: вектор в пространстве, нулевой вектор, длина ненулевого вектора, векторы коллинеарные и сонаправленные и противоположно направленные векторы. Равенство векторов. Действия с векторами: сложение и вычитание векторов, сумма нескольких векторов, умножение вектора на число. Свойства сложения векторов. Свойства умножения вектора на

Продолжение таблицы 2 – Изучение вектора на базовом и углубленном уровнях в 10-11 классах

	векторный метод при решении геометрических задач.	число. Понятие компланарные векторы. Признак компланарности 4трёх векторов. Правило параллелепипеда. Теорема о разложении вектора по трём некомпланарным векторам. Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора. Связь между координатами вектора и координатами точек. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов.
Предметные результаты	Оперировать понятием вектор в пространстве; выполнять действия сложения векторов, вычитания векторов и умножения вектора на число, объяснять, какими свойствами они обладают; применять правило параллелепипеда; оперировать понятиями: декартовы координаты в пространстве, вектор, модуль вектора, равенство векторов, координаты вектора, угол между векторами, скалярное произведение векторов, коллинеарные и компланарные векторы; находить сумму векторов и произведение вектора на число, угол между векторами, скалярное произведение, раскладывать вектор по двум неколлинеарным векторам; задавать плоскость уравнением в декартовой системе координат решать простейшие геометрические задачи на применение векторно-координатного метода	Свободно оперировать понятиями, соответствующими векторам и координатам в пространстве; выполнять действия над векторами; решать задачи на доказательство математических отношений и нахождение геометрических величин, применяя известные методы при решении математических задач повышенного и высокого уровня сложности; решать геометрические задачи на вычисление углов между прямыми и плоскостями, вычисление расстояний от точки до плоскости, в целом, на применение векторно-координатного метода при решении
Количество часов	10	12

Продолжение таблицы 2 – Изучение вектора на базовом и углубленном уровнях в 10-11 классах

Основное содержание	Вектор на плоскости и в пространстве. Сложение и вычитание векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по трём некопланарным векторам. Правило параллелепипеда. Решение задач, связанных с применением правил действий с векторами. Прямоугольная система координат в пространстве. Координаты вектора. Простейшие задачи в координатах. Угол между векторами. Скалярное произведение векторов. Вычисление углов между прямыми и плоскостями. Координатно-векторный метод при решении геометрических задач	Понятие вектора на плоскости и в пространстве. Сумма и разность векторов, правило параллелепипеда, умножение вектора на число, разложение вектора по базису трёх векторов, не лежащих в одной плоскости. Скалярное произведение, вычисление угла между векторами в пространстве. Простейшие задачи с векторами
Основные виды деятельн. обучающихся	Актуализировать факты и методы планиметрии, релевантные теме, проводить аналогии. Оперировать понятием вектор в пространстве. Формулировать правило параллелепипеда при сложении векторов. Складывать, вычитать векторы, умножать вектор на число. Изучать основные свойства этих операций. Давать определение прямоугольной системы координат в пространстве. Выразить координаты вектора через координаты его концов. Выводить, использовать формулу длины вектора и расстояния между точками. Выражать скалярное произведение векторов через их координаты, вычислять угол между двумя векторами, двумя прямыми. Находить угол между прямой и плоскостью, угол между двумя плоскостями аналитическими методами. Выводить, использовать формулу расстояния от точки до плоскости.	Актуализировать факты и методы планиметрии, релевантные теме, проводить аналогии. Оперировать понятиями: вектор на плоскости и в пространстве; компланарные векторы. Приводить примеры физических векторных величин. Осваивать правила выполнения действий сложения и вычитания векторов, умножения вектора на число. Доказывать признак компланарности трёх векторов. Доказывать теорему о разложении любого вектора по трём данным некопланарным векторам

Таким образом, на базовом уровне понятие вектора рассматривается в основном на интуитивном уровне, с акцентом на основные операции (сложение, вычитание, умножение на число) и их применение. Задачи сосредоточены на простых вычислениях и применении правил действий с векторами. Углубленный уровень, напротив, включает более сложные и детализированные определения. Например, рассматриваются коллинеарные векторы, нулевой вектор, а также свойства равенства векторов. Углубленное понимание векторов включает их классификацию и взаимосвязи.

Свойства операций с векторами на базовом уровне содержат операции над векторами без глубокого анализа их свойств. Сложение и вычитание рассматриваются как механические операции. На углубленном уровне внимание уделяется свойствам операций с векторами, таким как коммутативность и ассоциативность сложения, а также дистрибутивность умножения на число. Это создает более полное представление о математических основах работы с векторами.

Понятие компланарности векторов на базовом уровне не рассматривается, что ограничивает понимание пространственных отношений между векторами.

Углубленный уровень включает изучение компланарных и некомпланарных векторов, а также признаки компланарности для трех векторов. Это позволяет решать более сложные задачи, связанные с пространственными фигурами.

На базовом уровне рассматривается разложение вектора по трем некомпланарным векторам как правило параллелепипеда. На углубленном уровне изучается углубленное изучение теоремы о разложении вектора по некомпланарным векторам, что требует более глубокого понимания линейной зависимости и независимости.

Изучение координат на базовом уровне сосредоточено на простых задачах и прямоугольной системе координат. Применение координатного метода ограничено.

Углубленный уровень включает более сложные связи между

координатами векторов и координатами точек, а также углы между векторами и их вычисление с использованием скалярного произведения. Это позволяет применять координатно-векторный метод для решения более сложных геометрических задач.

На базовом уровне задачи имеют практическую направленность, но ограничиваются простыми примерами. На углубленном уровне решение задач требует более глубокого анализа и применения теоретических знаний, что развивает критическое мышление и навыки решения проблем.

Таким образом, углубленный уровень обучения предоставляет учащимся более комплексное понимание векторов и их свойств, а также развивает навыки анализа и применения этих знаний в различных контекстах.

В школьной геометрии понятие вектора вводится как направленный отрезок. Определение вектора, как направленного отрезка четко прослеживается в учебниках Л.С. Атанасяна и А.В. Погорелова. В 9 классе ученики знакомятся с векторами, изучают их сложение и вычитание, а также применение в задачах. В одном источнике его описывают абстрактно [15], а в другом – как обобщение физических величин, имеющих размер и направление. Хотя второй подход более практичен, он не совсем точен, так как вектор и векторная величина не одно и то же. Вектор – это лишь графическое представление векторной величины, которая отражает реальные свойства объектов и может быть измерена.

В физике векторные величины, такие как сила, вводятся уже в 7 классе. При этом подчеркивается, что «сила – физическая величина, значит, ее можно измерить» и вводится обозначение F . Также важно отметить, что геометрические векторы можно переносить в любое место, тогда как физические векторы имеют фиксированное направление и место приложения, что влияет на их действия.

В 9 классе внимание уделяется координатам векторов, их операции в системе координат и уравнениям прямой и окружности.

В 10 классе возвращаются к векторам в пространстве, включая понятие компланарных векторов.

В 11 классе изучают метод координат в пространстве и скалярное произведение векторов. Знания о векторах важны для решения геометрических и физических задач и служат основой для понимания векторов в пространстве.

1.2 Теоретические основы изучения темы «Векторы»

Векторы – геометрические объекты, которые имеют как величину, так и направление. У векторов есть начальная точка в том месте, где они начинаются, и конечная точка, которая указывает конечное положение точки. К векторам можно применять различные операции, такие как сложение, вычитание и умножение.

Стандартная форма представления вектора $\vec{a} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$. Здесь x, y, z - действительные числа а $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы осей x, y и z соответственно.

Направление вектора определяется указанием его начала и конца. На чертеже вектор изображается стрелкой $\vec{a}$ или чертой $\overline{a}$, также допускается жирное обозначение **a**, или обозначение начала и конца: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. Если начало и конец вектора совпадают, то он называется нулевым и обозначается $\vec{0} = \overrightarrow{AA}$. Длиной $\overrightarrow{AB}$ называется длина соответствующего отрезка. Длина нулевого вектора определяется равной 0.

Ненулевые векторы называются коллинеарными, если лежат на одной либо параллельных прямых. Соответственно, они могут иметь либо одинаковые (сонаправленные), либо противоположные направления (противоположно направленные).

$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, лежащие на одной прямой, сонаправлены ($\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$). В противном случае векторы противоположно направлены (рисунок 1).

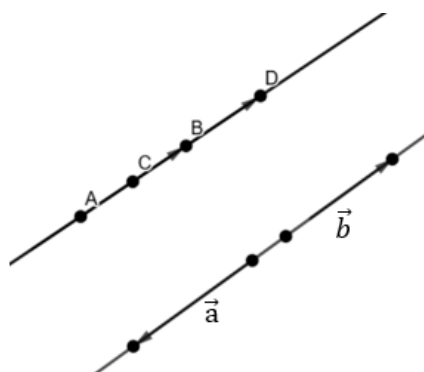


Рисунок 1 – Сонаправленные и противоположно направленные векторы

Векторы, лежащие на параллельных прямых, сонаправлены, если они лежат в одной полуплоскости относительно прямой и противоположно направлены, если они лежат в разных полуплоскостях (рисунок 2).

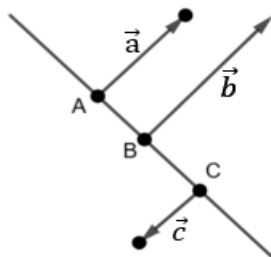


Рисунок 2 – Сонаправленные и противоположно направленные векторы

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются равными, если они сонаправлены и имеют равные длины. В этом случае существует параллельный перенос, переводящий вектор $\vec{a}$ в вектор $\vec{b}$. Вектор, противоположный $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$. Так, $\overrightarrow{BA}$ противоположен $\overrightarrow{AB}$.

Суммой $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, определенный следующим образом. Возьмем произвольную точку A и отложим от нее вектор $\vec{a}$, получим вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. От точки B отложим вектор $\vec{b}$, получим точку C . Вектор $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ (рисунок 3) называется суммой $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

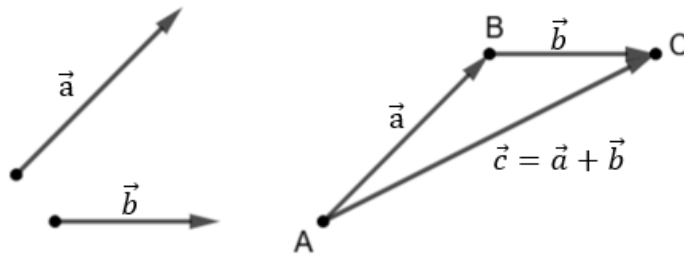


Рисунок 3 – Сумма векторов

Таким образом, для любых трех точек плоскости имеет место равенство $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (правило треугольника).

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ отложить от одной точки O : $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, то суммой $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будет являться вектор $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ – диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ (рисунок 4), так как очевидно, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ (правило параллелограмма).

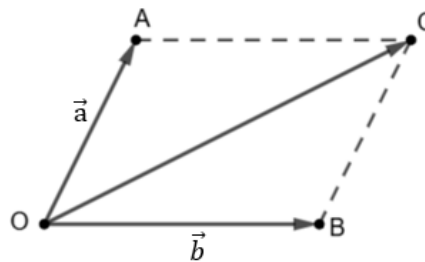


Рисунок 4 – Правило параллелограмма

Сумма векторов обладает следующими свойствами:

- ассоциативность: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- наличие нулевого вектора, такого, что для любого $\vec{a}$: $\vec{a} + 0 = \vec{a}$;
- для любого $\vec{a}$ существует $-\vec{a}$, что $\vec{a} + (-\vec{a}) = 0$;
- коммутативность сложения $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют вектор $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$ такой, что $\vec{x} + \vec{b} = \vec{a}$.

Скаляр – это вещественное число, не имеющее направления. Когда скаляр умножается на вектор, мы умножаем скаляр на каждую составляющую вектора.

Операция умножения вектора на скаляр называется скалярным умножением.

Если r отрицательно, то направление результирующего вектора меняется на 180 градусов.

Умножение векторов на любую скалярную величину определяется как «масштабирование». Масштабирование в векторах изменяет только величину и не влияет на направление.

Некоторые свойства скалярного умножения векторов:

- Коммутативность. Скалярное произведение не зависит от порядка векторов, поэтому их можно менять местами.
- Дистрибутивность. Скалярное произведение вектора на сумму двух векторов равно сумме скалярных произведений первого вектора и каждого из двух векторов.
- Сочетательный закон. Позволяет группировать векторы при вычислении: можно сначала вычислить скалярное произведение двух векторов, а затем умножить результат на третий вектор.
- Скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его длины. Этот результат часто используется для вычисления длины вектора.
- Скалярное произведение двух векторов равно нулю, если хотя бы один из векторов является нулевым или если векторы перпендикулярны друг другу.

1.3 Содержание школьных учебников по рассматриваемой теме

Утвержденный федеральный перечень учебников математики позволяет выделить ряд учебников, соотносимых с тематикой изучения квадратичной функции, предлагаемые разными авторами, в разных классах. Рассмотрим некоторые из них. И. Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев. Геометрия. 7-9-классы [6].

Таблица 3 – Тематическое планирование по теме «Векторы» в представлении Л. С. Атанасяна, В. Ф. Бутузова, С. Б. Кадомцева [6]

Тема	Номер урока	Номера заданий
9 класс		
Глава 9. § 1. Понятие вектора	76-78	738-752
Глава 9. § 2. Сложение и вычитание векторов	79-82	753-774
Глава 9. § 3. Умножение вектора на число. Применение векторов	83-85	775-810, 903-910
Глава 10. § 1. Координаты вектора	86- 87	911-928
Глава 10. § 2. Простейшие задачи в координатах	88-89	929-958
Глава 11. § 3. Скалярное произведение вектора	101-104	

Логика изучения векторов следующая (Рисунок 5):

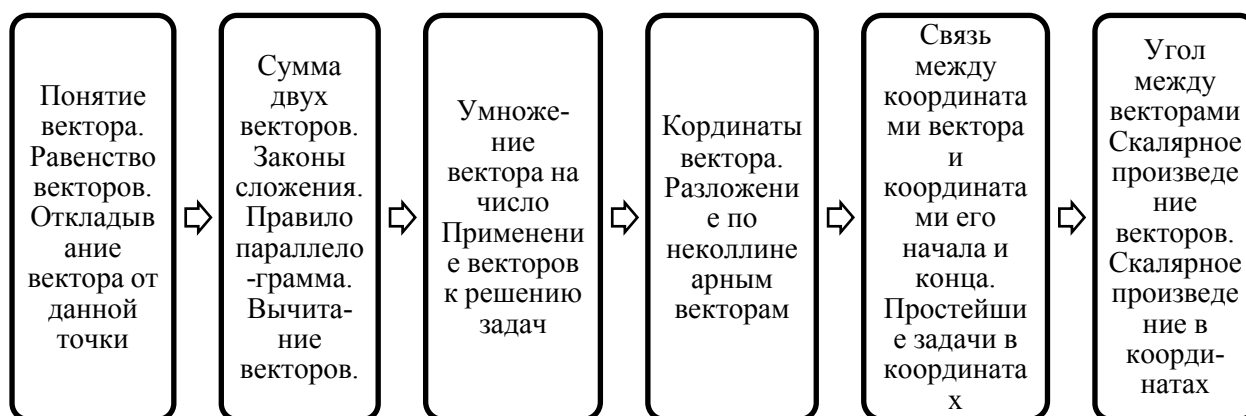


Рисунок 5 – Логика изучения векторов в учебнике Л.С. Атанасяна и др [1]

Всего на изучение темы «Векторы» отводится 16 часов.

Изучение векторов начинается с физической аналогией с вектором силы. Далее вводятся определения вектора, длины вектора, обозначения вектора.

Равенство векторов также определяется на примере движения тела, при котором все точки движутся прямолинейно и равномерно.

Рассматривается понятие коллинеарность, сонаправленность, противоположная направленность. Вводятся соответствующие обозначения и иллюстрации (Рисунок 6).

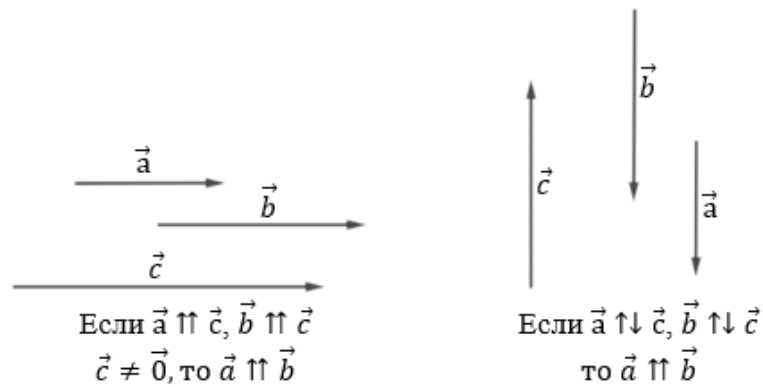


Рисунок 6 – Понятия сонаправленности, противоположной направленности

Далее рассматривается условие равенства векторов и откладывание векторов от одной точки.

Сумма векторов рассматривается в виде правила треугольника (Рисунок 7).

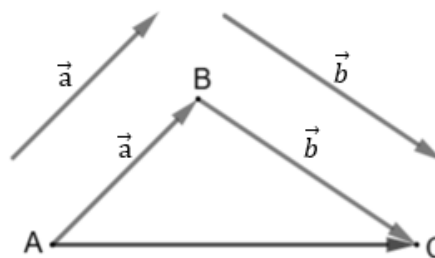


Рисунок 7 – Иллюстрация правила треугольника

Следующий шаг – доказательство переместительного и сочетательного законов. На основе доказательства выводится правило параллелограмма сложения векторов (Рисунок 8).

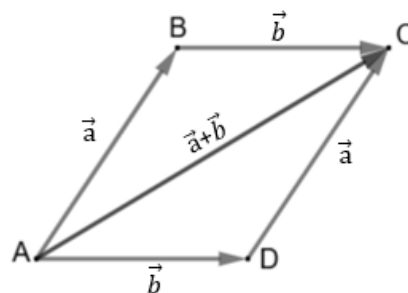
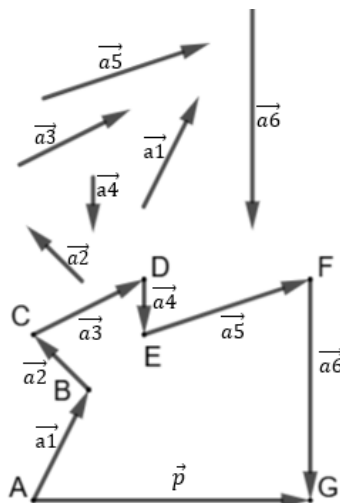


Рисунок 8– Иллюстрация правила параллелограмма

Сумма нескольких векторов рассматривается аналогично (Рисунок 9).



$$\vec{p} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4 + \vec{a}_5 + \vec{a}_6$$

Рисунок 9 – Иллюстрация сложения нескольких векторов

Вычитание векторов рассматривается с противоположным вектором, с иллюстрацией правила треугольника (Рисунок 10).

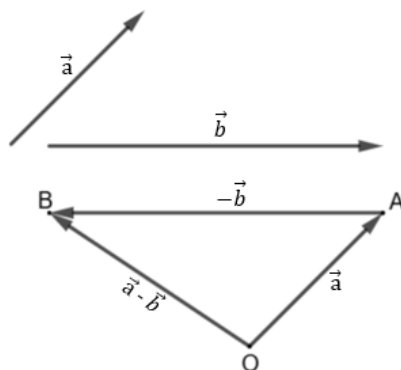


Рисунок 10 – Иллюстрация вычитания векторов

При изучении умножения вектора на число рассматриваются первый и второй распределительный законы, сочетательный закон.

Задачный материал отрабатывается с использованием средней линии треугольника и трапеции, также используются задачи на построение.

При рассмотрении координат вектора сначала доказывается лемма о неколлинеарных векторах, а затем – теорема о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам. Далее с учетом этого факта рассматривается

разложение вектора по единичным координатным векторам.

Скалярное произведение векторов предваряет угол между векторами. Скалярное произведение дается на основе аналогии с определением работы силы, а уже затем – координатно-формульным способом.

2) И.Ф. Шарыгин. Геометрия, 9 класс[18].

Таблица 4 – Тематическое планирование по теме «Векторы» в представлении И.Ф. Шарыгин [18]

Тема	Номер урока	Номера заданий
9 класс		
§ 12. 1. Декартовы координаты на плоскости	12	1394-1398
§ 12.2. Уравнение линии	13	1399-1407
§ 12.3. Векторы на плоскости	14	1408-1420
§ 12.4. Скалярное произведение векторов	15	1421-1431
§ 12.5. Координатный и векторный методы	16	1432-1450

Логика изучения векторов в учебнике следующая (Рисунок 11):



Рисунок 11– Логика изучения векторов в учебнике И.Ф. Шарыгина [18]

Всего на изучение векторов отводится 8 часов.

Изучение векторов начинается с рассмотрения точек плоскости как множества координат прямоугольной декартовой системы координат. Далее рассматривается общее уравнение прямой исходя из координатного подхода. Вектор определяется как направленный отрезок.

Рассматривается равенство двух векторов, понятие длины вектора и нулевого вектора.

Сложение векторов определяется исходя из правила треугольника.

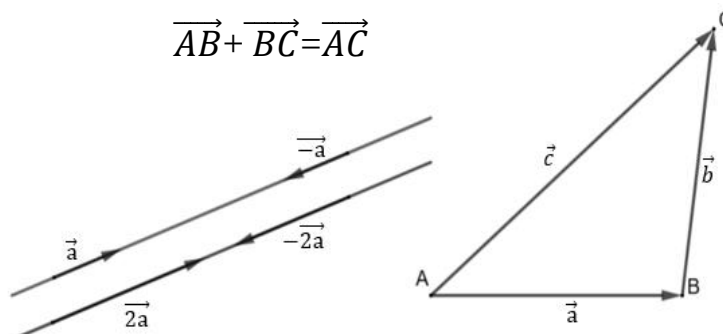


Рисунок 12 – Иллюстрация к сложению векторов

Неравенство треугольника в векторной форме определяется исходя из правила треугольника.

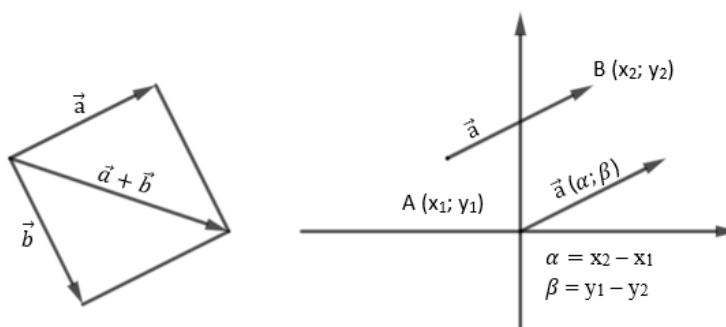


Рисунок 13 – Иллюстрация к координатам векторов

На основании формулы определения координат вектора через координаты его начальной и конечной точек подчеркивается факт того, что в какой бы точке плоскости ни находилось начало вектора, его координаты будут одними и теми же.

Доказывается единственность разложения вектора по двум неколлинеарным векторам.

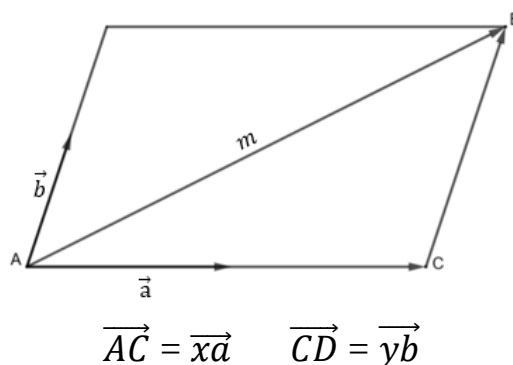


Рисунок 14– Иллюстрация к единственности разложения

Скалярное произведение векторов определяется как произведение модулей на косинус угла между ними.

Доказывается распределительное свойство скалярного произведения, а также метод определения его значения через сумму произведений координат векторов.

В рамках координатного и векторного методов рассматривается решение задач, вводится окружность Аполлония.

Рассматриваются типичные решения задач на коллинеарность, свойства скалярного произведения. Доказывается теорема косинусов и теорема о высотах треугольника.

3) А.В. Погорелов. Геометрия, 7-9 класс[15].

Таблица 5 – Тематическое планирование по теме «Векторы» в представлении А.В. Погорелова [15]

Тема	Номер урока	Номера заданий
9 класс § 10. Векторы		
Абсолютная величина и направление вектора	91	1
Равенство векторов	92	2-3
Координаты векторов	93	4-7
Сложение векторов	94	8-14
Сложение сил	95	15-16
Умножение вектора на число	96	17-23
Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам	97	24-27
Скалярное произведение вектора	98	28-44
Разложение вектора по координатным осям	99	45-50

Логика изучения квадратичной функции в учебнике следующая:

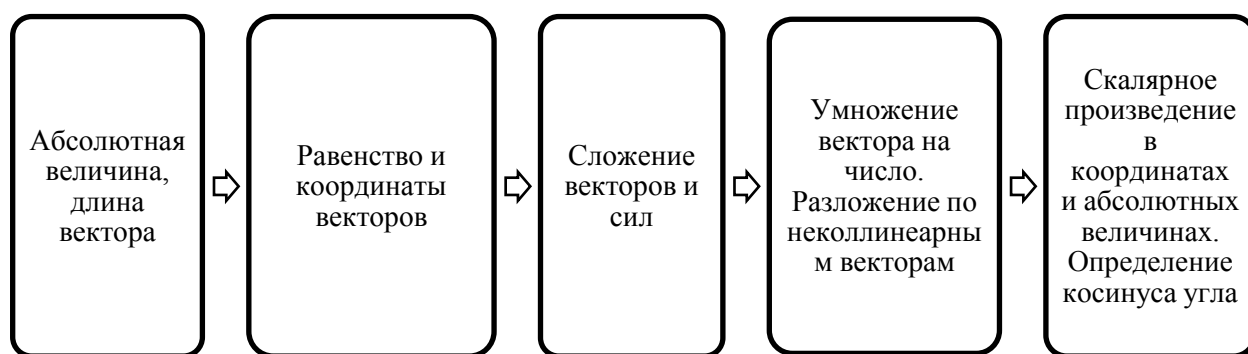


Рисунок 15– Логика изучения векторов в учебнике А.В. Погорелова [15]

Понятие вектора и его координат вводится аксиоматически. Правила треугольника и параллелограмма вводятся независимо друг от друга. Умножение вектора на число также вводится аксиоматически.

Теорема о разложении вектора по двум неколлинеарным векторам доказывается от противного.

Скалярное произведение векторов определяется как сумма произведений их координат. Исходя из этого доказывается факт равенства скалярного произведения произведению модулей векторов на косинус угла между ними.

Разложение вектора по координатным осям сразу строится с использованием единичных ортов.

Задачный материал сведен к минимуму.

4) М. А. Волчкевич. Геометрия, 9 класс[5].

Таблица 6 – Тематическое планирование по теме «Векторы» в представлении М. А. Волчкевича [5]

Тема	Номер урока	Номера заданий
9 класс Глава 3 Векторы и координаты		
§ 7. Векторы	27-29	1-42
§ 8. Базис векторов. Скалярное произведение	30-32	1-30/1-32
§ 9. Метод координат	33-35	1-37/1-20
§ 10. Длина окружности и площадь круга	36-39	8-14

Автор определяет понятие вектора или направленного отрезка как отрезок, у которого указан порядок его концов: один из них считается началом вектора, а другой – концом. Например, вектор $\overrightarrow{AB}$ имеет своё начало в точке А

и конец в точке В. Часто вектор обозначают одной маленькой буквой, но обязательно ставят над ней стрелку.

Понятие вектора вводится на основании жизненных (забивание гвоздя) и физических (сила) примеров.

Сонаправленность и противоположная направленность определяется при помощи нахождения по одну или по разные стороны от прямой, соединяющей начала векторов.

Логика изучения векторов в учебнике следующая (Рисунок 16):



Рисунок 16— Логика изучения векторов в учебнике М. А. Волчкевича

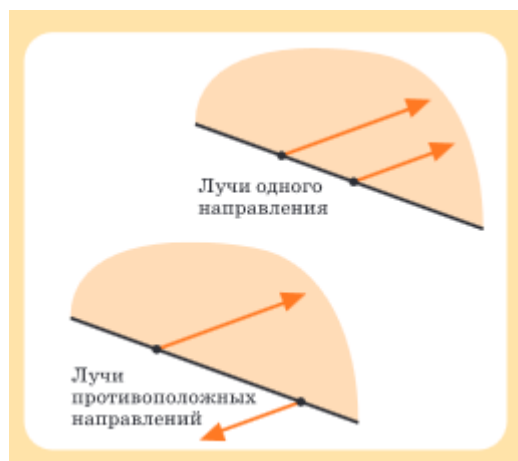


Рисунок 17– Иллюстрация к определению сонаправленности и противоположной направленности

Правило треугольника при сложении векторов дается аксиоматически.

ПРАВИЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

Для любых трёх точек A , B и C выполняется равенство: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

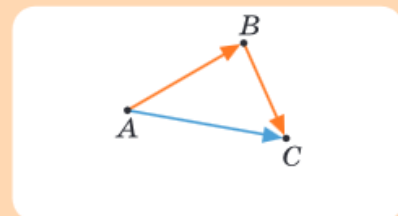


Рисунок 18– Аксиоматическое определение правила треугольника

Правило параллелограмма сложения векторов доказывается на основании введенного правила треугольника.

Переместительный и сочетательный законы даются также аксиоматически.

СВОЙСТВА СЛОЖЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1. Для любых двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ верно равенство: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

Переместительный закон

2. Для любых трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ верно равенство: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Сочетательный закон

Рисунок 19– Аксиоматика законов сложения векторов

Разность двух векторов и фак их противоположной направленности определяются и иллюстрируются.

Доказывается также правило замкнутой цепочки: если сумма нескольких векторов равна нулю, то из них можно составить замкнутую цепочку.

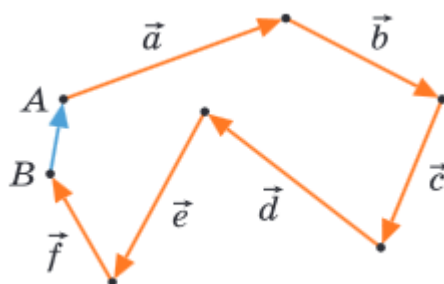


Рисунок 20 – Иллюстрация правила замкнутой цепочки

При определении произведения вектора на число проводится аналогия со свойствами умножения чисел. При этом произведением вектора $\vec{a}$ на действительное число $k \neq 0$ называют такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $k \cdot |\vec{a}|$, причем $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены при $k > 0$; противоположно направлены при $k < 0$.

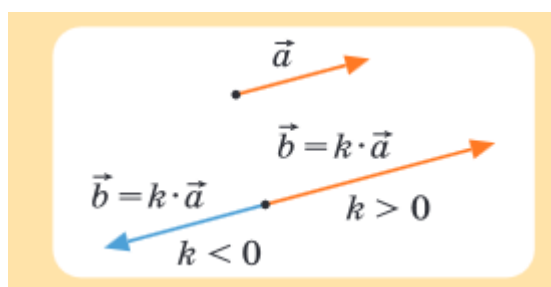


Рисунок 21 – Иллюстрация произведения вектора на число

В учебнике геометрии для 9 класса М. А. Волчкевича, свойства умножения вектора на число доказываются. Демонстрируются переместительный закон, сочетательный закон, несколько правил раскрытия скобок и умножение на ноль (Рисунок 22).

СВОЙСТВА УМНОЖЕНИЯ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

- | | |
|---|---------------------------------|
| 1. Для любого вектора $\vec{a}$ и числа k
верно равенство: $k \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot k$. | <i>Переместительный закон</i> |
| 2. Для любого вектора $\vec{a}$ и чисел k и l
верно равенство: $k \cdot (l \cdot \vec{a}) = (k \cdot l) \cdot \vec{a}$. | <i>Сочетательный закон</i> |
| 3. Для любого вектора $\vec{a}$ и чисел k и l
верно равенство: $(k + l) \cdot \vec{a} = k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{a}$. | <i>Правило раскрытия скобок</i> |
| 4. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и числа k
верно равенство: $k \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = k \cdot \vec{a} + k \cdot \vec{b}$. | <i>Правило раскрытия скобок</i> |
| 5. Для любого вектора $\vec{a}$
верно равенство: $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$. | <i>Умножение на ноль</i> |

Рисунок 22– Иллюстрация умножения вектора на число

Векторным способом доказывается факт равенства медианы треугольника половине суммы векторов его сторон, выходящих.

Векторным способом доказывается факт равенства вектора, идущего из середины отрезка AB в середину отрезка A_1B_1 , половине суммы векторов $\overrightarrow{AA_1}$ и $\overrightarrow{BB_1}$, соединяющих концы этих отрезков.

Примеры решения задач содержат задачи на соотношение векторов.

Интересная «находка» авторов учебника – рубрика «Для тех, кто хочет знать больше».

Так, § 7. Векторы содержит информацию о центре масс.

Центром равных масс, расположенных в точках $A_1, A_2, \dots, A_n$, называется такая точка O , что

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$

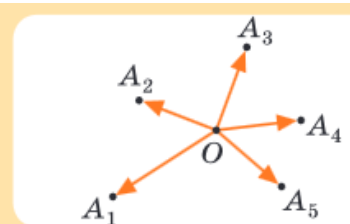


Рисунок 23– Иллюстрация к определению центра масс рубрики: Для тех, кто хочет знать больше

Доказательство теоремы о центре масс и его единственности (Для любой системы точек существует единственный центр масс).

Иллюстрирует, почему существует центр масс для любых точек $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Логически обосновывается нахождение центра масс треугольника на пересечении его медиан и центра масс четырехугольника на пересечении его средних линий.

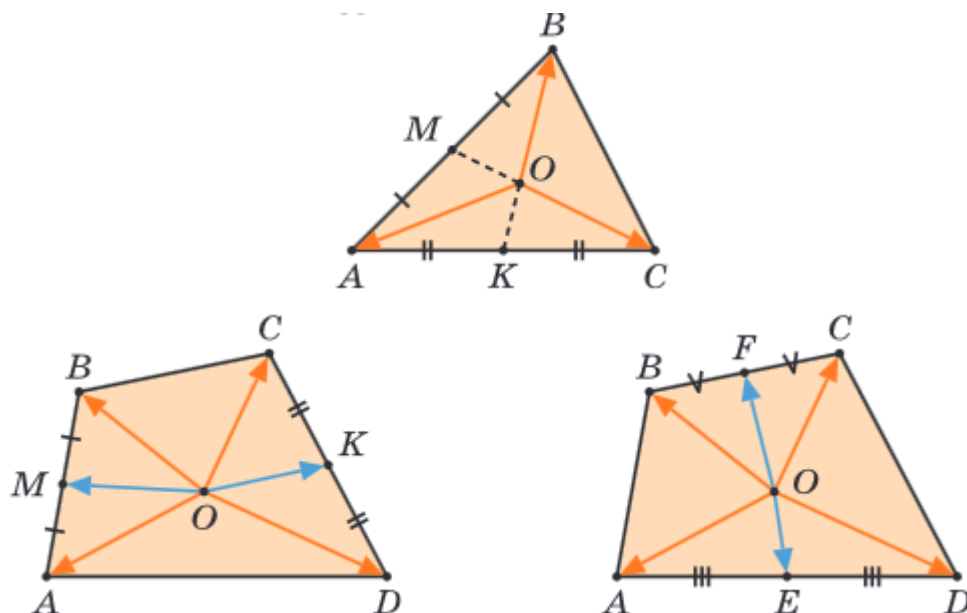


Рисунок 24– Обоснование центров масс треугольника и четырехугольника

Блок «Скалярное произведение» начинается с изучения системы координат. Даются интересные исторические аспекты римских актусов и центурий, шахматных нотаций, аналитического декартова метода.

Дается подробнейшее объяснение того, почему каждая система координат связана с векторами.

Вводится понятие коллинеарности и доказывается лемма о коллинеарных векторах. Как и у других авторов, доказывается лемма о единственности разложения вектора по двум другим неколлинеарным векторам.

В системе координат Декарта определены базисные (координатные) векторы, доказывается формула длины вектора как сумма квадратов его координат.

Теорема: Квадрат длины вектора в системе Декарта равен сумме квадратов его координат. $|\vec{a}\{x; y\}|^2 = x^2 + y^2$

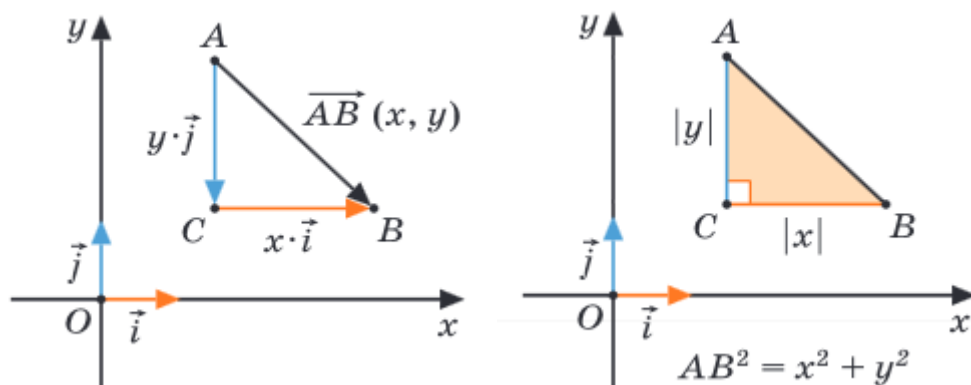


Рисунок 25– Иллюстрация к доказательству определения длины вектора

Аналогичным образом доказываются операции над координатами векторов, пропорциональность координат коллинеарных векторов.

$$\vec{a}\{x_1; y_1\}$$

$$\vec{b}\{x_2; y_2\}$$

$$\vec{a} + \vec{b}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2\}$$

$$\vec{a} - \vec{b}\{x_1 - x_2; y_1 - y_2\}$$

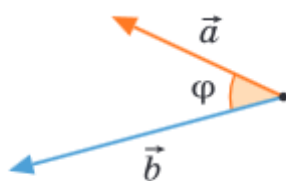
$$k\vec{a}\{kx_1; ky_1\}$$

При рассмотрении координат точек на плоскости вводится понятие радиус-вектора, идущего из начала координат в данную точку плоскости.

Строится доказательство теорем о а) равенстве координат вектора в данной системе разностям координат его конца и начала; б) равенстве квадрата расстояния между точками на плоскости Декарта сумме квадратов разностей координат его концов.

Также доказываются: а) равенство координат середины отрезка среднему арифметическому координат его концов; б) равенство координат центра масс треугольника среднему арифметическому координат всех его вершин.

Скалярное умножение вводится через иллюстрацию работы силы и определяется стандартным образом как произведение модулей длин векторов на косинус угла между ними.



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$$

Рисунок 26– Иллюстрация определения скалярного произведения

Доказывается выражение скалярного произведения через координаты векторов, свойства скалярного умножения.

СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО УМНОЖЕНИЯ

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. $(\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2 = a^2$ для любого вектора $\vec{a}$.
3. $(k \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = k \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$ для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и действительного числа k .
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

Рисунок 27– Свойства скалярного умножения

С помощью свойств скалярного умножения доказывается формула:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Примеры решения задач содержат определение косинуса угла в декартовой системе координат между векторами с заданными координатами, скалярное произведение векторных отрезков в параллелограмме с заданными свойствами, определение косинуса угла между сторонами равнобедренного треугольника по свойствам их боковых медиан и т.д.

Метод координат содержит базовые основы уравнений кривых, прямой в разных видах (общее, в отрезках, при помощи вектора-нормали, а также разных видах свойств параллельных и перпендикулярных прямых).

Примеры решения задач охватывают комбинирование аналитических и геометрических методов.

Задачный материал представлен задачами трех категорий.

- задачи первой категории разбираются в качестве иллюстрированных примеров с решениями;
- задачи второй категории относятся к блокам параграфа;
- задачи третьей категории относятся к параграфу в целом для самостоятельного прорешивания и закрепления изученного материала.

Логика изложения, содержание материала и примеры задачного материала доказывают несомненное превосходство учебника М. А. Волчкевича под ред. И. В. Ященко и соответствуют в целом фундаментальной концепции аналитической геометрии на плоскости в ее логических основаниях и способах доказательств.

Нетривиальные задачи, рубрика «Для тех, кто хочет знать больше», вводные сведения с опорой на физические явления расширяют сферу применения векторов применительно к вопросам физики и существенным образом расширяют возможности учащихся.

Таким образом, среди рассмотренных нами подходов к изучению вектора наиболее адекватный и логически выстроенный подход – у М. А. Волчкевича. Все остальные авторы имеют формализованный подход и менее обширный задачный и фактический материал.

1.4 Анализ заданий ЕГЭ

В 2024 году в программе экзамена по математике профильного уровня всего одно изменение – в первой части добавили задачу № 2 на векторы. Новые задания можно условно разделить на две группы: сложение и координаты вектора. Разберем данную группу заданий в ЕГЭ по профильной математике.

Рассмотрим типичные задания ЕГЭ профильного уровня (задание № 2).

Пример 1. В прямоугольной трапеции $ABCD$ с основанием AD и прямым углом A известно, что $AB = 8$ и $\angle D = 30^\circ$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{CD}$.

Решение:

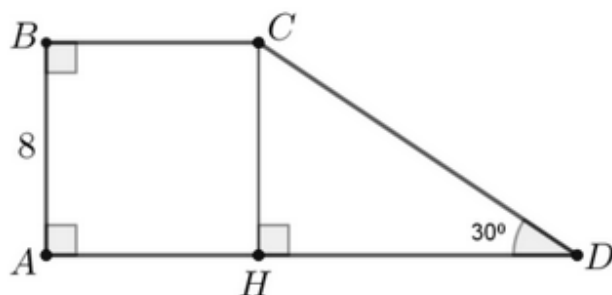


Рисунок 28– Иллюстрация к Примеру 1

Опустим высоту CH . Тогда: $CH=AB=8$. По определению синуса из треугольника CHD :

$$\sin 30^\circ = CH/CD \Leftrightarrow 1/2 = 8/CD \Leftrightarrow |\overrightarrow{CD}| = 16.$$

Ответ: 16.

Пример 2. По данным на рисунке найдите $|\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KT} + \overrightarrow{PS}|$, если $SP = 4\sqrt{2}$.

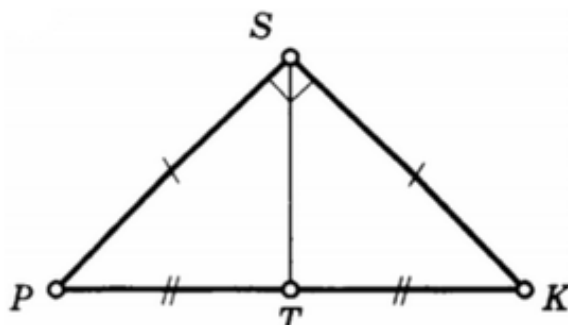


Рисунок 29– Иллюстрация к Примеру 2

Решение:

$$|\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KT} + \overrightarrow{PS}| = |\overrightarrow{KP} + \overrightarrow{PS} - \overrightarrow{KT}| = |\overrightarrow{KS} - \overrightarrow{KT}| = |\overrightarrow{TS}|$$

Прямоугольный $\triangle PSK$ равнобедренный ($PS=KS$), поэтому $\angle SPK = 45^\circ$. По определению синуса из $\triangle PST$:

$$\sin 45^\circ = TS/SP \Leftrightarrow 2/\sqrt{2} = TS/4\sqrt{2} \Leftrightarrow TS = 4.$$

$$\text{Следовательно, } |\overrightarrow{KP} - \overrightarrow{KT} + \overrightarrow{PS}| = |\overrightarrow{TS}| = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 3. По данным на рисунке найдите $|\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{NE} - \overrightarrow{NO}|$, если $MN = 5$ и $NE = 12$.

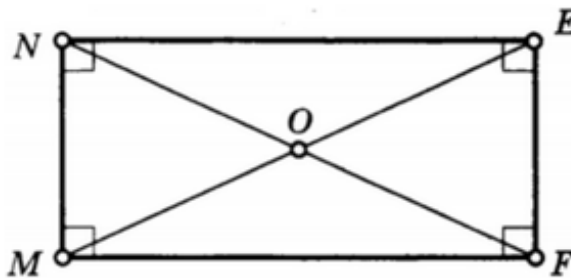


Рисунок 30– Иллюстрация к Примеру 3

Решение:

$$|\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{NE} - \overrightarrow{NO}| = |\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NE} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{NO}| = |\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF} - \overrightarrow{NO}| = |\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{NO}|.$$

Воспользуемся тем, что $MF = NE$. Тогда $|\overrightarrow{MF} - \overrightarrow{NO}| = |\overrightarrow{NE} - \overrightarrow{NO}| = |\overrightarrow{OE}|$.

По теореме Пифагора из $\triangle MNE$:

$$ME^2 = MN^2 + NE^2 \Leftrightarrow ME = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13.$$

Тогда $OE = ME/2 = 13/2 = 6,5$.

Следовательно, $|\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{NE} - \overrightarrow{NO}| = |\overrightarrow{OE}| = 6,5$.

Ответ: 6,5.

Пример 4. Найдите значение x , при котором векторы $(\overrightarrow{4}; \overrightarrow{5})$ и $(\overrightarrow{x}; \overrightarrow{-6})$ перпендикулярны.

Решение:

Если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно 0.

Соответственно $4 \cdot x - 5 \cdot 6 = 0$, откуда $x = 15/2 = 7,5$.

Ответ: 7,5.

Пример 5. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $2\vec{b}$.

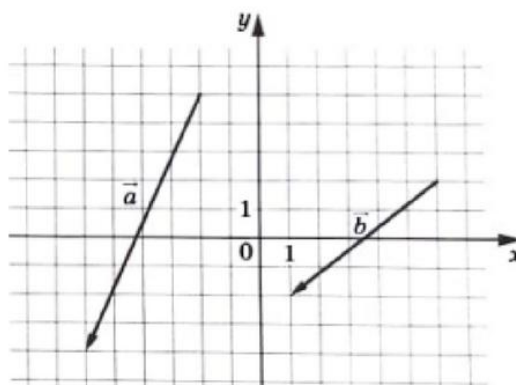


Рисунок 31– Иллюстрация к Примеру 5

Решение:

Выпишем координаты каждого вектора.

$$\vec{a} (-6 - (-2); -4 - 5) = (-4; -9);$$

$$\vec{b} (1 - 6; -2 - 2) = (-5; -4).$$

$$2\vec{b} = 2 (-5; -4) = (-10; -8).$$

Так как скалярное произведение векторов равно сумме произведений их координат, получим $\vec{a} \cdot 2\vec{b} = -4 \cdot (-10) + (-9) \cdot (-8) = 40 + 72 = 112$.

Ответ: 112.

Пример 6. Даны векторы $\vec{a} (2; 3)$ и $\vec{b} (-3; y)$. Найдите y , если $|\vec{b}| = 1,5|\vec{a}|$. Если таких значений несколько, в ответ запишите меньшее из них.

Решение:

По условию задачи имеем для $1,5|\vec{a}|$

$$\sqrt{2,25(2)^2 + 2,25 \cdot 3^2} = 1,5 \cdot \sqrt{13}$$

По условию задачи имеем $|\vec{b}| = \sqrt{9 + y^2}$

Так как левые части равны, то равны и правые:

$$1,5 \cdot \sqrt{13} = \sqrt{9 + y^2}$$

$$2,25 \cdot 13 = 9 + y^2$$

$$y^2 = 20,25$$

Откуда $y_1 = -4,5$, $y_2 = 4,5$.

Подбирая ответ в соответствии с условиями задачи, выбираем $y_1 = -4,5$ как подходящее значение.

Ответ: $-4,5$.

Таким образом, задания ориентированы на свойства координат векторов при умножении вектора на число, сложении/вычитании, знание свойств скалярного произведения, знание свойств плоских фигур.

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «ВЕКТОРЫ»

2.1 Технологические карты уроков

Рассмотрим технологические карты уроков по темам «Сумма двух векторов. Законы сложения векторов. Правило параллелограмма», «Скалярное произведение векторов» по учебнику Л.С. Атанасяна в 9 классе.

I. Урок по теме «Сумма двух векторов. Законы сложения векторов. Правило параллелограмма».

Тип урока: изучение нового материала.

Цели урока:

1) Образовательные. Повторить и закрепить основные понятия, связанные с векторами, включая их свойства, операции с векторами (сложение), а также применение векторов для решения геометрических и физических задач.

2) Развивающие. Развивать логическое мышление и навыки аналитического подхода к решению задач, формируя умение применять теоретические знания о векторах в практических ситуациях, а также развивать пространственное воображение через визуализацию векторных операций и их геометрического представления.

3) Воспитательные. Формировать такие качества, как настойчивость в решении задач, внимание к деталям, умение работать в команде при обсуждении и решении практических задач, а также развивать интерес к математике и физике как основам научного познания.

Учебные задачи направлены на достижение личностных результатов обучения: развивать познавательные интересы, интеллектуальные и творческие способности учащихся; развивать умение слушать; ясно, точно, грамотно излагать свои мысли в устной и письменной речи; развивать креативность мышления, инициативу, находчивость, активность при решении математических задач.

Метапредметные результаты: развивать умение ставить цели и выбирать алгоритмы для решения учебных задач, формировать навыки применения математических знаний в различных ситуациях, требующих разных подходов и интуиции.

Предметные: переводить словесную модель в знаково-символическую форму, развивать умение составлять алгоритмы решения задач на оптимизацию через опыт и логику. Совершенствовать навыки использования свойств квадратичной функции для решения задач.

Оборудование: компьютер, интерактивная доска, мультимедийный проектор, документ камера, лист самоконтроля, раздаточный материал (карты).

Формы организации учебной деятельности: фронтальная, групповая работа.

Таблица 7– Технологическая карта урока «Сумма двух векторов. Законы сложения векторов. Правило параллелограмма».

Тема	Сумма двух векторов. Законы сложения векторов. Правило параллелограмма.
Тип урока	Изучение нового материала.
Вид урока	Изучение нового материала (лекция) с последующим закреплением через решение задач.
Цели	<p>Предметные – ввести понятие суммы двух векторов; рассмотреть законы сложения векторов; научить строить сумму двух данных векторов, используя правило треугольника и параллелограмма.</p> <p>Метапредметные – учить самостоятельно определять пути достижения целей в том числе альтернативные; выбирать наиболее эффективные способы решения задач.</p> <p>Личностные – воспитывать аккуратность, внимание.</p>
Задачи	<ol style="list-style-type: none"> 1. На основе повторения и обобщения ранее изученного материала и в ходе знакомства с новым выработать навыки правильного построения суммы векторов; 2. Освоить правила сложения двух векторов: правило треугольника и правило параллелограмма; 3. Использовать познавательный процесс для воспитания усидчивости и терпения.
УУД	<p>Личностные УУД: умение распознавать нравственные аспекты поведения и ориентироваться в межличностных отношениях.</p> <p>Регулятивные УУД: планирование своей деятельности для решения задач, постановка целей и выдвижение гипотез.</p> <p>Коммуникативные УУД: способность слушать, вести диалог, выражать мысли, интегрироваться в группу и поддерживать здоровое соперничество.</p>

Продолжение таблицы 7 – Технологическая карта урока

	Познавательные УУД: понимание математики как метода познания, овладение геометрическим языком для описания окружающего мира, развитие пространственных представлений и применение знаний для решения практических задач.
Планируемые результаты	Предметные УУД: знать, что такое вектор, уметь находить сумму векторов; применять эти знания для решения геометрических задач. Личностные УУД: уметь слушать, вести диалог. Метапредметные УУД: применять знания о векторах для решения задач.
Методы и приёмы обучения	Объяснительно-иллюстративный; Наглядный (демонстрация компьютерной презентации).
Межпредметные связи	Актуализировать полученные знания при решении задач
Ресурсы:	Геометрия. 7-9 классы : учеб. для общеобразоват. организаций / [Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Д. Кадомцев и др]. - 5-е изд. - М. : Просвещение, 2015. - 383с.

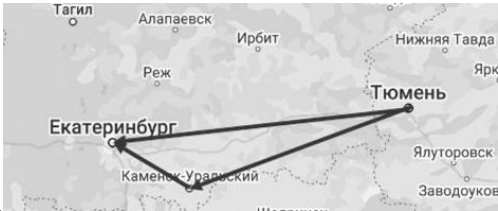
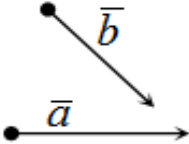
Таблица 8 – Содержательная часть технологической карты урока по теме «Сложение векторов. Правило параллелограмма»

№	Этап	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Формируемые умения
1	2	3	4	5
1. Мотивационно-ориентировочный блок				
1	Организационный момент	Приветствие учащихся; Проверка готовности класса к уроку, организации рабочих мест;	Приветствие учителя; Проверка готовности к уроку;	Л: осознание необходимости получения новых знаний,

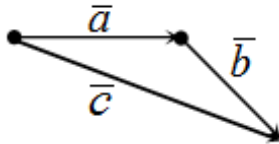
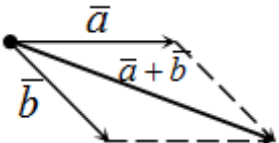
Продолжение таблицы 8 – Содержательная часть технологической карты урока

		<p>- Проверьте ваши рабочие места: учебник, рабочая тетрадь, ручка, линейка, карандаш.</p> <p>Организация внимания:</p> <p>- Мы сегодня на уроке</p> <p>Будем все чертежники:</p> <p>В руки инструмент возьмем</p> <p>И попробуем понять как нам векторы слагать...</p>	Ученики слушают учителя.	<p>мотивация познавательной деятельности.</p> <p>К: умения слушать, вступать в диалог.</p> <p>П: развитие мыслительных операций</p>
2	Вводная беседа. Актуализация знаний	<p>Сегодня на уроке мы продолжаем изучение главы «Векторы».</p> <p>Учитель предлагает ученикам вспомнить, какие темы изучались ранее в главе «Векторы».</p> <p>Тема нашего урока – «Сумма двух векторов. Законы сложения векторов. Правило параллелограмма».</p> <p>Учитель предлагает ученикам самостоятельно сформулировать цель урока.</p> <p>Для дальнейшего изучения векторов нам необходимо научиться находить сумму двух векторов, потому что в практической жизни, где мы сталкиваемся с примерами применения различных сил (а сила, как известно, величина векторная) чтобы узнать результат действия силы мы должны предусмотреть воздействие всех сил, т.е. найти их сумму.</p>	<p>Слушают учителя</p> <p>Ученики отвечают на вопрос учителя: понятие вектора, равенство векторов, откладывание вектора от данной точки. Записывают тему урока в тетрадь</p> <p>Формулируют цель урока: Цель нашего урока – выяснить, как построить сумму двух векторов.</p>	<p>К: умение высказывать собственные мысли, умение слушать и воспринимать другого, понимать собеседника.</p> <p>П: умение перерабатывать информацию, выделять существенные признаки</p> <p>Р: самостоятельное выделение и формулирование целей.</p> <p>Л: личностное самоопределение, осознание необходимости получения новых знаний.</p>

Продолжение таблицы 8 – Содержательная часть технологической карты урока

2. Организационно-деятельностный блок				
3	Основной этап	<p>Рассмотрим примеро перемещении материальной точки из точки О в точку L, а затем из точки L в точку М по рисунку. Введение понятия суммы двух векторов. Правило треугольника для суммы векторов. Представим, что точка О – город Тюмень. Автобус, по дороге из Твери в Екатеринбург делает остановку в г. Каменск-Уральский (точка L). А мог бы напрямую поехать в Екатеринбург (точка М).</p>  <p>Работа с учебником. Давайте рассмотрим рис.250 в учебнике. Учитель у доски: Пусть заданы два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.</p>  <p>Сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, есть некоторый третий вектор $\vec{c}$, получаемый следующим образом: из конца вектора $\vec{a}$ откладываем вектор $\vec{b}$, затем</p>	<p>Ученики слушают учителя</p> <p>Ученики открывают учебники, рассматривают рисунок. Слушают учителя.</p>	<p>П: умения логически рассуждать, делать умозаключение, формирование интереса к теме. Л: готовность к самообразованию, осознание личной ответственности за результат; умение переносить предметные знания на другие сферы деятельности человека. К: умение слушать и вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении, давать полный ответ, доказывать свою точку зрения. Р: планирование своей деятельности для решения поставленной задачи.</p>

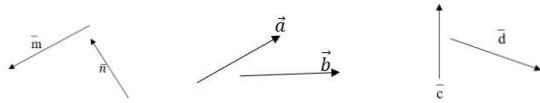
Продолжение таблицы 8 – Содержательная часть технологической карты урока

		<p>соединяем начало вектора $\vec{a}$ и конец вектора $\vec{b}$; полученный в результате вектор $\vec{c}$ и есть сумма указанных векторов.</p>  <p>Учитель предлагает ученикам самостоятельно посмотреть в учебнике правильно сложения двух векторов и записать его в тетрадь (правило треугольника).</p> <p>Правило параллелограмма для суммы векторов. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - неколлинеарные векторы, то для нахождения суммы $\vec{a} + \vec{b}$ - приводим эти векторы к общему началу и на них строим параллелограмм.</p>  <p>Диагональ параллелограмма, имеющая с заданными векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ общее начало, и будет суммой этих векторов</p> <p>Сформулируем определение суммы двух векторов и запишем его в тетради: (стр. 200)</p>	<p>Ученики работают с учебником, записывают правило сложения векторов, в тетради.</p>	
		<p>Ученики записывают определение в тетрадь. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора. 1. Отметим произвольную</p>		

Продолжение таблицы 8 – Содержательная часть технологической карты урока

	<p>Физкультминутка</p>	<p>Учитель объясняет законы сложения векторов, учитель у доски.</p> <ol style="list-style-type: none"> $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. <p>Перед вами алгоритм для проведения физкультминутки. Давайте побудем немного исполнителями и постараемся точно выполнить все команды.</p> <p>Дружно с вами мы считали и про числа рассуждали, А теперь мы дружно встали, свои косточки размяли. На счет раз- кулак сожмем, на счет два - в локтях согнем. На счет три — прижмем к плечам, на 4 — к небесам Хорошо прогнулись, и друг другу улыбнулись Про пятерку не забудем — добрыми всегда мы будем. На счет шесть прошу всех сесть.</p>	<p>точку А и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$. 2.Затем от полученной точки В - отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. 3.Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.</p> <p>Слушают и записывают правила в тетрадь.</p> <p>Выполняют физкультминутку</p>	
--	-------------------------------	--	--	--

Продолжение таблицы 8 – Содержательная часть технологической карты урока

3. Первичное закрепление				
4	Первичное закрепление	<p>1. Начертите попарно неколлинеарные векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Постройте векторы</p> <p>1) $\vec{a} + \vec{b}$, 2) $\vec{b} + \vec{a}$, 3) $\vec{a} + \vec{c}$, 4) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$, 5) $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.</p> <p>Какие из построенных векторов равны друг другу?</p> <p>2. Решите №759(а) без помощи чертежа. Докажите, что</p> <p>А) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ}$.</p> <p>Доказательство:</p> $\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{MQ} \\ \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{MQ} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{равенство верное,}$ $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MQ}.$ <p>3. Дан параллелограмм, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}=6$ см, $\overrightarrow{BC}=8$ см, $\angle B=90^\circ$. Найти сумму векторов $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.</p> <p>Работа в парах. Каждая пара получает раздаточный материал на карточках. Постройте сумму данных векторов:</p>  <p>Самостоятельное выполнение задания в тетрадах. (проверка усвоения новых знаний).</p>	<p>Учащиеся выполняют работу самостоятельно, один ученик у доски.</p> <p>Ученики делятся по парам (сосед по парте), выполняют задание в тетрадах.</p> <p>Ученики самостоятельно выполняют задание в тетрадах.</p>	

[illegible]

II. Урок по теме «Скалярное произведение векторов».

Тип урока: изучение нового материала.

Цели урока:

1) Образовательные: ввести понятие угла между векторами, ввести понятие «скалярное произведение векторов», его свойств и формировать умение применять скалярное произведение векторов при решении геометрических задач.

2) Развивающие: развивать способность делать выводы на основе свойств функций, строить логические цепочки и проводить обоснования.

3) Воспитательные: развивать коммуникативные навыки посредством обсуждения и совместного решения задач в группах, формировать чувство ответственности за свои результаты и умение анализировать ошибки.

Учебные задачи направлены на достижение личностных результатов обучения: развивать познавательные интересы, интеллектуальные и творческие способности учащихся; развивать умение слушать; развивать креативность мышления, инициативу, находчивость, активность при решении математических задач.

Метапредметные результаты: развивать умение ставить цели и выбирать алгоритмы для решения учебных задач, формировать навыки применения математических знаний в различных ситуациях, требующих разных подходов и интуиции.

Предметные: переводить словесную модель в знаково-символическую форму, развивать умение составлять алгоритмы решения задач на оптимизацию через опыт и логику. Совершенствовать навыки использования свойств квадратичной функции для решения задач.

Оборудование: компьютер, интерактивная доска, мультимедийный проектор, лист самоконтроля, раздаточный материал (карты).

Формы организации учебной деятельности: фронтальная, групповая работа.

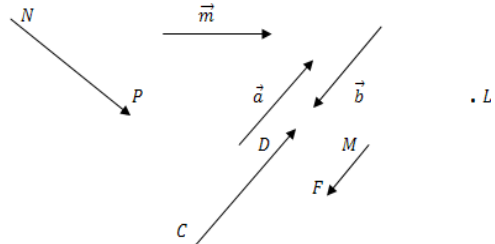
Таблица 9 – Технологическая карта урока «Скалярное произведение векторов».

Тема	Скалярное произведение векторов
Цели	<p>Образовательные: ввести понятие угла между векторами, ввести понятие «скалярное произведение векторов», его свойств и формировать умение применять скалярное произведение векторов при решении геометрических задач.</p> <p>Развивающие: развивать логическое мышление и аналитические навыки через решение задач, связанных со скалярным произведением. Формировать умение визуализировать и интерпретировать результаты, полученные при вычислении скалярного произведения.</p> <p>Воспитательные: формировать настойчивость и терпение в решении задач, внимание к деталям и умение работать в команде. Развивать интерес к математике и физике как основам научного познания.</p>
Задачи	<ol style="list-style-type: none"> 1. Продолжить формирование и развитие навыков применения векторов при решении задач; 2. Формировать умение сотрудничать; 3. Развивать мотивацию изучения геометрии.
УУД	<p>Личностные УУД: умение распознавать нравственные аспекты поведения и ориентироваться в межличностных отношениях.</p> <p>Регулятивные УУД: планирование своей деятельности для решения задач, постановка целей и выдвижение гипотез.</p> <p>Коммуникативные УУД: Способность слушать, вести диалог, выражать свои мысли, интегрироваться в группу и поддерживать здоровое соперничество (например, обсуждение решений задач в парах или группах).</p> <p>Познавательные УУД: Понимание математики как метода познания, овладение геометрическим языком для описания окружающего мира. Развитие пространственных представлений и применение знаний о векторах для решения практических задач.</p>
Планируемые результаты	<p>Предметные УУД: знать определение скалярного произведения и его свойства. Уметь находить скалярное произведение двух векторов и применять эти знания для решения геометрических задач.</p> <p>Личностные УУД: уметь слушать, вести диалог, активно участвовать в обсуждениях.</p> <p>Метапредметные УУД: применять знания о скалярном произведении для решения конкретных задач.</p>
Основные понятия	Векторные величины. Скалярное произведение. Геометрическая интерпретация скалярного произведения. Угол между векторами.
Межпредметные связи	Актуализировать полученные знания о векторах при решении задач по физике (например, работа силы). Связь с тригонометрией при нахождении угла между векторами через скалярное произведение.
Ресурсы:	Геометрия. 7-9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / [Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов, С.Д.Кадомцев и др].- 5-е изд.-М. : Просвещение, 2015. - 383с.:ил.

Таблица 10 – Содержательная часть технологической карты урока по теме
«Законы сложения векторов. Правило параллелограмма»

№	Этап	Деятельность учителя	Деятельность учащихся	Формируемые умения
1	2	3	4	5
1. Мотивационно-ориентировочный блок				
1	Организационный момент	Приветствие учащихся; проверка учителем готовности класса к уроку; организация внимания: начать урок хотелось бы словами американского физика Юджина Пола Вигнера: «Математика – это наука о хитроумных операциях, производимых по специально разработанным правилам над специально придуманными понятиями». Сегодня как раз мы и будем заниматься такими хитроумными операциями над специально разработанными понятиями. А полученные знания нам пригодятся в дальнейшем.	Приветствие учителя Проверка готовности к уроку Слушают учителя	Л: осознание необходимости получения новых знаний, мотивация познавательной деятельности. К: умения слушать, вступать в диалог, вырабатывать совместную точку зрения, участвовать в коллективном обсуждении. П: развитие мыслительных операций

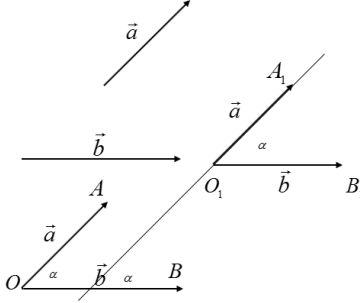
Продолжение таблицы 10 – Содержательная часть технологической карты урока

2	Вводная беседа. Актуализация знаний	<p>Кратко повторяет основные понятия о векторах.</p> <p>Задаёт вопросы ученикам: Что такое вектор? (Отрезок, который имеет направление) Чем характеризуется отрезок? (Направлением и длиной) По какой формуле вычисляется длина вектора? ($\vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2}$) Какие координаты имеет нулевой вектор? ((0; 0)) Могут ли нулевые координаты быть у ненулевого вектора? (У ненулевого вектора может быть только одна из координат нулевой) Посмотрите на рисунок и скажите, какие векторы коллинеарные ($\overrightarrow{CD}, \vec{b}, \overrightarrow{FK}, \vec{a}$), какие неколлинеарные ($\overrightarrow{NP}, \vec{m}$), какие векторы сонаправленные ($\overrightarrow{CD}$ и $\vec{a}$, $\overrightarrow{FK}$ и $\vec{b}$), какие противоположно направленные ($\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{FK}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\vec{b}$, $\overrightarrow{FK}$ и $\vec{a}$, $\vec{a}$ и $\vec{b}$)?</p> 	<p>Слушают объяснения учителя.</p> <p>Отвечают на вопросы</p>	<p>К: умение высказывать собственные мысли, умение слушать и воспринимать другого, понимать собеседника.</p> <p>П: умение перерабатывать информацию, выделять существенные признаки</p> <p>Р: самостоятельное выделение и формулирование целей.</p> <p>Л: личностное самоопределение, осознание необходимости получения новых знаний.</p>
---	--	---	---	---

Продолжение таблицы 10 – Содержательная часть технологической карты урока

		<p>Какие действия вы умеете уже выполнять над векторами? (Сложение, вычитание и умножение на число)</p> <p>Что получается в результате этих операций? (Вектор)</p> <p>Какую операцию вы ещё не рассматривали? (Умножение вектора на вектор)</p> <p>Сегодня мы и займёмся произведением векторов.</p> <p>Тема урока – скалярное произведение векторов.</p>	<p>Отвечают на вопросы учителя, записывают тему урока в тетради.</p>	
2. Организационно-деятельностный блок				
3	Основной этап	<p>Основная часть (30 минут)</p> <p>Прежде чем определить скалярное произведение векторов, давайте построим угол между векторами.</p> <p>Пусть нам даны два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим от произвольной точки O векторы $\vec{OA} = \vec{a}$ и $\vec{OB} = \vec{b}$. Если эти векторы не являются сонаправленными, то угол между $\vec{OA}$ и $\vec{OB}$ образуют угол $\angle AOB$, градусную меру этого угла обозначим через α и будем говорить, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен α, принято, что $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$.</p>	<p>Анализируют определение. Выясняют понятия, которые необходимо дополнительно исследовать.</p>	<p>П: умения логически рассуждать, делать умозаключение, формирование интереса к теме.</p> <p>Л: готовность к самообразованию, осознание личной ответственности за результат; умение переносить предметные</p>

Продолжение таблицы 10 – Содержательная часть технологической карты урока

		 <p>Таким образом, углом между любыми двумя ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом. Обратите внимание, что угол α не зависит от выбора точки O от которой откладываются вектора.</p> <p>Если же вектора параллельны или один из них равен нулю, то угол $\alpha = 0$ по определению.</p> <p>Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \wedge \vec{b}$.</p> <p>Рассмотрим примеры:</p> <p>Два вектора называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.</p> <p>Скажите, глядя на рисунок, какие вектора будут перпендикулярными? ($\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{d}$ и $\vec{b}$, $\vec{f}$ и $\vec{b}$)</p>	<p>Рассматривают рисунок, отвечают на вопросы учителя.</p>	<p>знания на другие сферы деятельности человека.</p> <p>К: умение слушать и вступать в диалог, участвовать в коллективном обсуждении, давать полный ответ, доказывать свою точку зрения.</p> <p>Р: планирование своей деятельности для решения поставленной задачи.</p>
--	--	--	--	---

Продолжение таблицы 10 – Содержательная часть технологической карты урока

	<p>– Косинус угла между ненулевыми векторами $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ можно вычислить по формуле:</p> $\cos \angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$ <p>Учитель вводит формальное определение скалярного произведения двух векторов. Объясняет свойства скалярного произведения, такие как коммутативность и дистрибутивность. Приводит примеры применения этих свойств в разных ситуациях. Учитель объясняет геометрический смысл скалярного произведения, показывая, как оно связано с углом между двумя векторами. Обсуждает, как скалярное произведение может использоваться для определения, являются ли два вектора перпендикулярными или параллельными. Учитель демонстрирует, как вычислить скалярное произведение двух векторов, используя формулу. Приводит примеры задач, которые требуют вычисления скалярного произведения, и пошагово решает их с классом. Учитель показывает, как</p>	<p>Слушают объяснение учителя, используя интеллект-карту:</p> <pre> graph LR A[Скалярное произведение векторов] --- B[Определение] A --- C[Формула] A --- D[Свойства] A --- E[Геометрическая интерпретация] A --- F[Применения] A --- G[Примеры] B --- B1[Математическая операция] B --- B2[Результат — число] C --- C1["a · b = a b cos(θ)"] C --- C2[" a — длина вектора a"] C --- C3["θ — угол между векторами"] D --- D1["Коммутативность: a · b = b · a"] D --- D2["Дистрибутивность: a · (b + c) = a · b + a · c"] D --- D3["Нулевая длина: a · 0 = 0"] E --- E1[Угол между векторами] E --- E2[Проекция одного вектора на другой] F --- F1["Физика: работа, энергия"] F --- F2["Компьютерная графика: освещение, тени"] G --- G1[Векторы в пространстве] G --- G2[Применение в задачах на решение треугольников] </pre>	
--	--	---	--

Продолжение таблицы 10 – Содержательная часть технологической карты урока

	<p>скалярное произведение может использоваться для решения практических задач, таких как определение работы, выполненной силой, или нахождение проекции одного вектора на другой. Приводит примеры задач из реальной жизни, чтобы продемонстрировать, как скалярное произведение может быть применено в различных контекстах.</p>	<p>Анализируют теоремы. Рассматривают доказательство теоремы. Задают вопросы учителю. Заполняют таблицу:</p> <table><tr><th>Теоремы</th><th>В доказательствах теоремы мне непонятно...</th><th>Вопросы учителю</th></tr><tr><td>Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны</td><td></td><td>Почему ...?</td></tr><tr><td>Скалярное произведение векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ можно вычислить по формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$</td><td></td><td>Как...?</td></tr></table>	Теоремы	В доказательствах теоремы мне непонятно...	Вопросы учителю	Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны		Почему ...?	Скалярное произведение векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ можно вычислить по формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$		Как...?	
Теоремы	В доказательствах теоремы мне непонятно...	Вопросы учителю										
Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны		Почему ...?										
Скалярное произведение векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ можно вычислить по формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$		Как...?										
	<p>Организует исследование свойств скалярного произведения векторов:</p> <p>– Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ и любого числа k справедливы равенства:</p> <p>1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;</p> <p>2) $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b})$;</p> <p>3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$</p>	<p>Делают записи в рабочей тетради. Задают вопросы учителю. Проводят исследование. Ищут дополнительную информацию и проверяют достоверность предложенных учителем свойств скалярного произведения векторов. Обсуждают в группах результаты исследований</p>										

Продолжение таблицы 10 – Содержательная часть технологической карты урока

			<p>Отвечают на вопросы. Определяют свой уровень усвоения знаний. Заполняют таблицу.</p> <table><tr><th rowspan="2">Вопросы</th><th colspan="2">Варианты ответов</th></tr><tr><th>Знаю ответ на вопрос (+)</th><th>Не знаю ответ на вопрос (+)</th></tr><tr><td>Чему равен угол между сонаправленными векторами?</td><td></td><td></td></tr><tr><td>Чему равен угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если хотя бы один из них нулевой?</td><td></td><td></td></tr><tr><td>Как обозначают угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?</td><td></td><td></td></tr><tr><td>Какие векторы называют перпендикулярными?</td><td></td><td></td></tr><tr><td>Как найти скалярное произведение векторов, если известны их координаты?</td><td></td><td></td></tr><tr><td>Каковы свойства скалярного произведения векторов?</td><td></td><td></td></tr></table> <p>Анализируют ответы на вопросы. Проводят дополнительное изучение нового материала. Задают вопросы учителю</p>	Вопросы	Варианты ответов		Знаю ответ на вопрос (+)	Не знаю ответ на вопрос (+)	Чему равен угол между сонаправленными векторами?			Чему равен угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если хотя бы один из них нулевой?			Как обозначают угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?			Какие векторы называют перпендикулярными?			Как найти скалярное произведение векторов, если известны их координаты?			Каковы свойства скалярного произведения векторов?			
Вопросы	Варианты ответов																										
	Знаю ответ на вопрос (+)	Не знаю ответ на вопрос (+)																									
Чему равен угол между сонаправленными векторами?																											
Чему равен угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если хотя бы один из них нулевой?																											
Как обозначают угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$?																											
Какие векторы называют перпендикулярными?																											
Как найти скалярное произведение векторов, если известны их координаты?																											
Каковы свойства скалярного произведения векторов?																											

Продолжение таблицы 10 – Содержательная часть технологической карты урока

		<p>Задания.</p> <p>1. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:</p> <p>1) $\vec{a} = 2, \vec{b} = 5, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$;</p> <p>2) $\vec{a} = 3, \vec{b} = 2\sqrt{2}, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$;</p> <p>3) $\vec{a} = 4, \vec{b} = 1, \angle(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ$.</p> <p>2. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:</p> <p>1) $\vec{a}(2; -1), \vec{b}(1; -3)$;</p> <p>2) $\vec{a}(-5; 1), \vec{b}(2; 7)$</p>	<p>Решение.</p> <p>1.</p> <p>1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 5$;</p> <p>2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = 3 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -6$;</p> <p>3) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 1 \cdot 1 = 4$.</p> <p>2.</p> <p>1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$;</p> <p>2) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -3$</p>	
3. Рефлексивно-оценочный блок				
4	Рефлексия	<p>Организует подведение итогов урока обучающимися.</p> <p>Способствует размышлению учащихся над вопросами:</p> <p>– Могу ли я сказать, что разобрался в теме урока?</p> <p>– Понравилось ли мне узнавать что-то новое?</p> <p>– Могу ли я лучше учиться?</p> <p>– Нужно ли мне изменить свое отношение к урокам геометрии в лучшую сторону?</p>	<p>Подводят итоги своей работы на уроке.</p> <p>Проводят самооценку, рефлексию</p>	<p>Л: умение оценивать свои достижения, выявлять причины неудачи.</p> <p>К: умение адекватно оценивать результат, сотрудничать со сверстниками и учителем.</p> <p>П: умение сопоставлять цель и результат</p>

Продолжение таблицы 10 – Содержательная часть технологической карты урока

4. Объяснение домашнего материала				
5	Домашнее задание	Задаёт дозированное домашнее задание из учебника	Учащиеся записывают домашнее задание в зависимости от уровня освоения темы урока	
5. Подведение итогов урока, оценивание знаний				
6	Подведение итогов урока, оценивание знаний	Организует обсуждение о том, что учащиеся узнали на уроке. Задаёт вопросы: «Какое свойство скалярного произведения оказалось для вас самым полезным?», «Можете ли вы привести пример реальной ситуации, в которой можно использовать скалярное произведение?»	Отвечают на вопросы	Саморегулирование

2.2 Методические разработки самостоятельных и контрольных работ

Рассмотрим систему задач для самостоятельных и контрольных работ по теме «Векторы» в 9 -11 классах.

I. Блок заданий для самостоятельных работ

Самостоятельная работа по теме «Понятие вектора», 9 класс.

Задача 1. Укажите векторы:

- а) сонаправленные с вектором $\vec{m}$;
- б) сонаправленные с вектором $\vec{n}$;
- в) противоположно направленные с $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

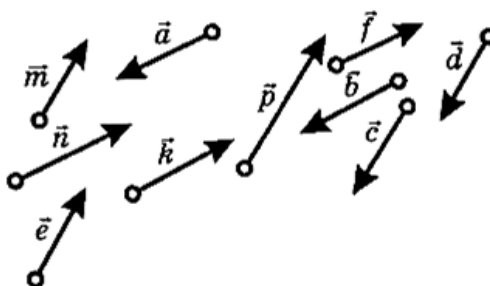


Рисунок 32 – Иллюстрация к задаче 1

Решение:

- а) $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{e}$; $\vec{m} \uparrow\uparrow \vec{p}$.
- б) $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{k}$; $\vec{n} \uparrow\uparrow \vec{f}$.
- в) $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{c}$; $\vec{m} \uparrow\downarrow \vec{d}$; $\vec{n} \uparrow\downarrow \vec{a}$; $\vec{n} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

Задача 2. MNKP – параллелограмм. Укажите векторы:

- а) коллинеарные; б) сонаправленные; в) противоположные;
- г) равные.

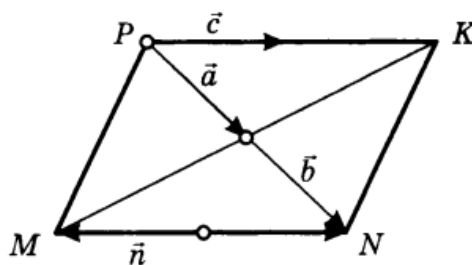


Рисунок 33 – Иллюстрация к задаче 2

Решение:

а) $\vec{c}$ и $\vec{n}$; $\vec{c}$ и $\vec{m}$; $\vec{m}$ и $\vec{n}$; $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

б) $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{m}$; $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

в) $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{n}$; $\vec{n} \uparrow\downarrow \vec{m}$.

г) $\vec{a} = \vec{b}$; $\vec{c} = \vec{m}$.

Задача 3. От точки А отложите вектор:

а) равный вектору $\vec{a}$;

б) сонаправленный $\vec{b}$;

в) противоположно направленный $\vec{c}$.

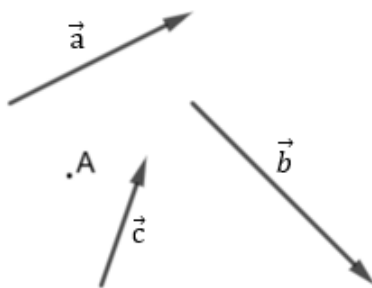


Рисунок 34 – Иллюстрация к задаче 3

Решение:

а) $\vec{a} = \vec{p}$;

б) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{s}$

в) $\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{g}$

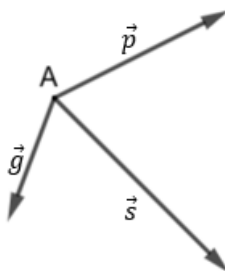


Рисунок 35 – Решения задачи 3

По итогам самостоятельной работы учитель математики выявит уровень знаний учеников 9 класса, полученных после изучения темы «Понятие вектора»:

- умение учащихся находить и различать векторы;
- способность учеников точно изображать векторы на чертеже;
- понимание теории по теме и способность применять её на практике.

Самостоятельная работа по теме «Сложение и вычитание векторов»,

9 класс.

Задача 1. Постройте вектор $\vec{a} + \vec{b}$ двумя способами

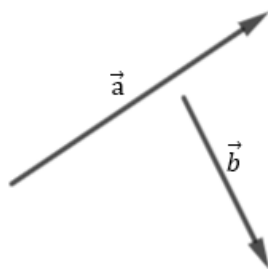


Рисунок 36 – Иллюстрация к задаче 1

Решение:

Построение суммы векторов методом треугольника:

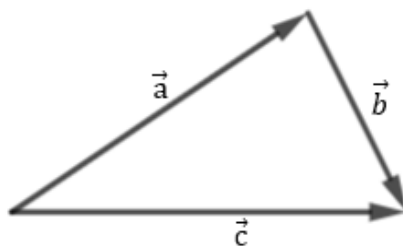


Рисунок 37 – Построение суммы векторов методом треугольника

Построение суммы векторов методом параллелограмма:

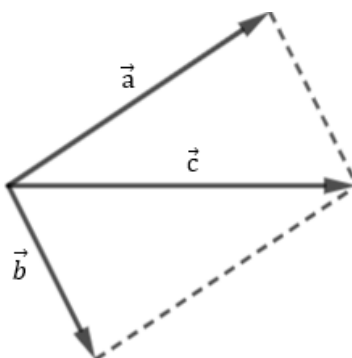


Рисунок 38 – Построение суммы векторов методом параллелограмма

Задача 2. Постройте вектор $\vec{a} - \vec{b}$.

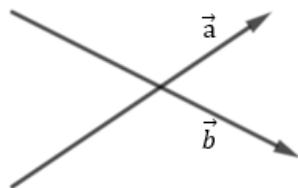


Рисунок 39 – Иллюстрация к задаче 2

Решение: $\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

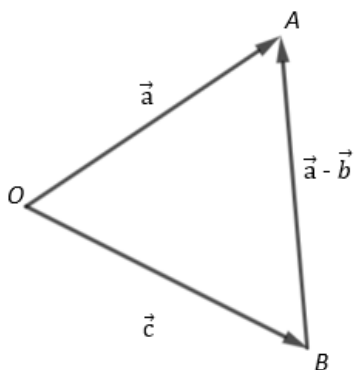


Рисунок 40 – Решение задачи 2, вектор $\vec{a} - \vec{b}$

Задание 3. Постройте вектор $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

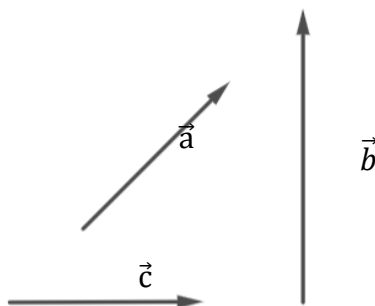


Рисунок 41 – Иллюстрация к задаче 3

Решение:

Сумма трёх векторов находится по правилу многоугольника. Первый вектор складывается со вторым, затем их сумма – с третьим вектором и так далее.

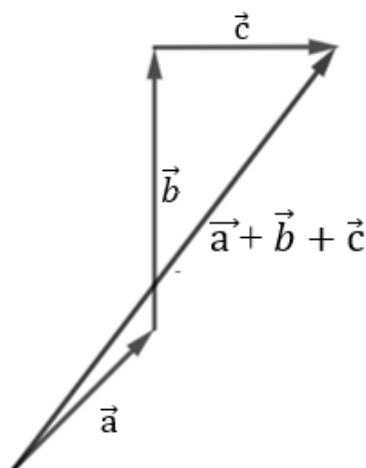


Рисунок 42 – Решение задачи 3

Задача 4. А, В, С, D, E – произвольные точки.

Найдите сумму $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE}$.

Решение:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}) + \overrightarrow{EA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{EA} = \\ &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EA} = 0 \end{aligned}$$

Задача 5. М, N, E, F, K – произвольные точки.

Доказать, что $\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{EK} + \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{NE}$

Доказательство:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{EK} + \overrightarrow{NF} &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{NE}, \text{ так как } \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EK} = \overrightarrow{MK}, \\ \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NE} &= \overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KN} = \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{MF}, \\ \overrightarrow{MF} &= \overrightarrow{MF} \Rightarrow \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{KN} + \overrightarrow{EK} + \overrightarrow{NF} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{NE}, \text{ ч.т.д.} \end{aligned}$$

По итогам самостоятельной работы учитель математики получит информацию об уровне знаний учеников 9 класса по теме «Сложение и вычитание векторов»:

- понимание основных операций над векторами (сложение, вычитание);
- умение применять как геометрические, так и алгебраические методы при решении задач;
- способности учеников представлять сложение и вычитание векторов, анализировать результаты.

Эти наблюдения помогут учителю определить, насколько ученики усвоили материал по теме и какие аспекты требуют дальнейшего внимания.

Самостоятельная работа по теме «Скалярное умножение векторов», 9 класс.

Задача 1. Стороны параллелограмма ABCD равны 3 и 6, $\angle A = 60^\circ$.

Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ б) $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$

Решение:

1) Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ равно произведению их длин на косинус угла между ними. Длины сторон параллелограмма даны: $|\overrightarrow{AB}|=3$ и $|\overrightarrow{AD}|=6$. Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ равен 60° . Таким образом, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(60^\circ) = 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 9$.

2) Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ также равно произведению их длин на косинус угла между ними. Длина $|\overrightarrow{BA}|=|\overrightarrow{AB}|=3$, и $|\overrightarrow{BC}|=|\overrightarrow{AD}|=6$. В параллелограмме противоположные углы равны, а смежные в сумме дают 180° . Так как угол $\angle A = 60^\circ$, то угол $\angle B = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Угол между векторами $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ равен $180 - \angle B = 60^\circ$.

Таким образом, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(60^\circ) = 3 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 9$

Ответ: 1) 9 и 2) 9

Задача 2. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{k}\{2; 7\}$ и $\vec{l}\{-3; 2\}$.

Решение:

Скалярное произведение двух векторов $\vec{k} = (k_1, k_2)$ и $\vec{l} = (l_1, l_2)$ вычисляется как $\vec{k} \cdot \vec{l} = k_1 \cdot l_1 + k_2 \cdot l_2$. В данном случае, вектор $\vec{k} = (2, 7)$ и вектор $\vec{l} = (-3, 2)$.

$$\vec{k} \cdot \vec{l} = 2 \cdot (-3) + 7 \cdot 2 = -6 + 14 = 8$$

Ответ: 8.

Задача 3. Используя данные, указанные на рисунке, найдите:

а) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ б) $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AM}$

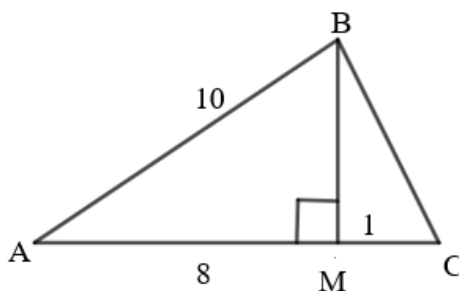


Рисунок 43 – Иллюстрация к задаче 3

Решение:

1) Для нахождения скалярного произведения $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC}$ рассмотрим треугольник $\triangle ABC$. Из рисунка видно, что $|\overrightarrow{BA}| = 10$ и $|\overrightarrow{AC}| = 8$.

Вектор $\overrightarrow{BA}$ направлен из точки B в точку A, а вектор $\overrightarrow{AC}$ – из точки A в точку C. Угол между векторами не прямой, в случае прямоугольного треугольника $\triangle AMB$, BM перпендикулярна AC , и проекция вектора $\overrightarrow{BA}$ на $\overrightarrow{AC}$ равна длине AM . Из рисунка $AM=8$.

Так как угол между $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AC}$ не прямой, найдем его по теореме косинусов, $BC^2 = BA^2 + AC^2 - 2 \cdot BA \cdot AC \cdot \cos(\angle BAC)$.

$$BC^2 = 100 + 64 - 2 \cdot 10 \cdot 8 \cdot \cos(\angle BAC),$$

$$BC^2 = 164 - 160 \cdot \cos(\angle BAC).$$

Т.к. треугольник BMC прямоугольный, то $BC^2 = BM^2 + MC^2 = 1 + MC^2$.
 $AM=8$, $MC=8-AM$.

Т.к. треугольник BMC прямоугольный, то $BM^2 + MC^2 = BC^2 \Rightarrow 1 + MC^2 = 164 - 160 \cdot \cos(\angle BAC)$. Угол между векторами $\angle BAC = \angle A$. Зная, что $AM=8=AC$. Точка M совпадает с точкой C. В этом случае вектор $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$. Т.к. $|\overrightarrow{AC}| = 8$ и проекция BA на AC равна AM , то скалярное произведение будет $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{AM}| = 10 \cdot 8 = 80$.

2) Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AM}$. Длина вектора $\overrightarrow{BM}$ равна 1, а длина вектора $\overrightarrow{AM}$ равна 8. Угол между векторами $\overrightarrow{BM}$ и $\overrightarrow{AM}$ составляет 180 градусов, значит $\cos(180^\circ) = -1$. $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AM} = |\overrightarrow{BM}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(180^\circ) = 1 \cdot 8 \cdot (-1) = -8$.

Ответ: 1) 80, 2) -8.

Задача 4*. Сторона ромба ABCD равна 8. Найдите косинус угла A, если скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ равно 48.

Решение:

Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ равно $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos(\angle A)$. $|\overrightarrow{AB}| = 8$ и $|\overrightarrow{AD}| = 8$, так как это стороны ромба. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 8 \cdot 8 \cdot \cos(\angle A) = 48$.

$$64 \cdot \cos(\angle A) = 48. \cos(\angle A) = 48 : 64 = \frac{3}{4}.$$

Ответ: $\frac{3}{4}$.

Задача 5*. Найдите угол между векторами $\vec{v}\{6; -3\}$ и $\vec{u}\{6; 12\}$.

Решение:

Используем формулу для нахождения угла между векторами: $\cos(\varphi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{|\vec{v}| |\vec{u}|}$. Сначала найдем скалярное произведение $\vec{v} \cdot \vec{u} = 6 \cdot 6 + (-3) \cdot 12 = 36 - 36 = 0$. Далее найдем длины векторов: $|\vec{v}| = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45}$, $|\vec{u}| = \sqrt{6^2 + 12^2} = \sqrt{36 + 144} = \sqrt{180}$. Тогда, $\cos(\varphi) = \frac{0}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{180}} = 0$. Следовательно, $\varphi = 90^\circ$.

Ответ: $\varphi = 90^\circ$.

При проведении данной самостоятельно работы, учитель геометрии выяснит важные аспекты уровня знаний и навыков учащихся.

1. Понимание определения:

- Учитель сможет определить, насколько хорошо ученики понимают, что такое скалярное умножение векторов, и в чем заключается его суть. Учащиеся должны знать, что скалярное произведение двух векторов даёт число и вычисляется по формуле: $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cos(\theta)$, где θ – угол между векторами.

2. Умение выполнять вычисления:

- Важно, чтобы ученики могли корректно выполнять вычисления скалярного произведения, проводя необходимые шаги для нахождения длины векторов и угла между ними. Учитель сможет оценить, насколько быстро и точно ученики 9 класса могут работать с числами.

3. Применение геометрической интерпретации:

- Учитель увидит, могут ли ученики понимать и интерпретировать результат скалярного произведения в контексте геометрии. Например, ученики должны уметь объяснить, что если скалярное произведение положительное, то векторы направлены примерно в одну сторону, если ноль – перпендикулярны, а если отрицательное – направлены в разные стороны.

4. Понимание взаимосвязи между векторами:

- Работы могут показать, способны ли ученики использовать скалярное произведение для определения линейной зависимости или независимости векторов, а также для нахождения углов между ними.

5. Знание свойств и формул:

- Учитель сможет оценить, знает ли ученик основные свойства скалярного произведения (например, распределительное свойство, свойство коммутативности и ассоциативности). Умение применять эти свойства при решении задач также крайне важно.

6. Способность к анализу и обобщению:

- Учитель будет видеть, насколько ученики могут анализировать результаты и делать обобщения на основании своих вычислений. Это может включать умение формулировать выводы о взаимоотношениях векторов на основании результата скалярного произведения.

Таким образом, проверяя работу, учитель получит комплексное представление о том, как учащиеся усвоили теоретический материал, применяют его на практике и могут ли объяснить свои результаты и выводы.

Самостоятельная работа по теме «Координаты вектора», 10 класс.

Задача 1. Даны точки А (1;6) и В (4;2). Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его модуль.

Решение:

Для того, чтобы найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, необходимо вычесть из координат точки В координаты точки А: $\overrightarrow{AB} = (4 - 1, 2 - 6) = (3, -4)$. Модуль вектора $|\overrightarrow{AB}|$ вычисляется по формуле: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Ответ: координаты вектора $\overrightarrow{AB} = (3; -4)$, $|\overrightarrow{AB}| = 5$.

Задача 2. Вычислите координаты векторов $3\vec{a} + 4\vec{b}$ и $2\vec{a} + 3\vec{b}$, если даны векторы $\vec{a}\{1; -2\}$, $\vec{b}\{-2; 5\}$.

Решение:

Для начала рассмотрим, как можно вычислить сумму двух векторов по формуле: $3\vec{a} + 4\vec{b} = (3 \cdot a_1 + 4 \cdot b_1; 3 \cdot a_2 + 4 \cdot b_2)$, где a_1 и a_2 – координаты вектора $\vec{a}$, а b_1 и b_2 – координаты вектора $\vec{b}$.

Теперь подставим значения координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в формулу: $3\vec{a} + 4\vec{b} = (3 \cdot 1 + 4 \cdot (-2); 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 5)$. Выполним вычисления: $3\vec{a} + 4\vec{b} = (3 - 8; -6 + 20)$, $3\vec{a} + 4\vec{b} = (-5; 14)$. Таким образом, координаты вектора $3\vec{a} + 4\vec{b}$ равны $(-5; 14)$.

Аналогично можно вычислить координаты вектора $2\vec{a} + 3\vec{b}$: $2\vec{a} + 3\vec{b} = (2 \cdot a_1 + 3 \cdot b_1; 2 \cdot a_2 + 3 \cdot b_2)$. Подставим значения координат векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в формулу: $2\vec{a} + 3\vec{b} = (2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2); 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 5)$. Выполним вычисления: $2\vec{a} + 3\vec{b} = (2 - 6; -4 + 15)$, т.е. $2\vec{a} + 3\vec{b} = (-4; 11)$. Таким образом, координаты вектора $2\vec{a} + 3\vec{b}$ равны $(-4; 11)$.

Ответ: $3\vec{a} + 4\vec{b} = (-5; 14)$; $2\vec{a} + 3\vec{b}$ равны $(-4; 11)$.

Задача 3. Даны два вектора: $\vec{a} = (4, 3)$ и $\vec{b} = (-2, 6)$. Найдите результирующий вектор при выполнении операции $\vec{a} - \vec{b}$, представив ответ в координатном виде. Объясните геометрический смысл вычитания векторов и продемонстрируйте, каким образом направление и величина полученного вектора связаны с исходными векторами.

Решение:

Для начала находится разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, где $\vec{a} = (4, 3)$, а $\vec{b} = (-2, 6)$. Вычитание векторов осуществляется покомпонентно, то есть: $\vec{a} - \vec{b} = (4 - (-2), 3 - 6) = (4 + 2, 3 - 6) = (6, -3)$.

Геометрически операция вычитания векторов представляет собой нахождение вектора, который начинается в конце второго вектора ($\vec{b}$) и заканчивается в конце первого ($\vec{a}$). Другими словами, если представить вектор $\vec{b}$ перевернутым (т.е. взять вектор $-\vec{b}$), операция $\vec{a} - \vec{b}$ становится равносильной

сумме $\vec{a}$ и $-\vec{b}$. Направление результирующего вектора (6, -3) указывает на то, что он ориентирован вправо (положительное направление по оси x) и вниз (отрицательное направление по оси y). Его длина, или модуль, равен $\sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$. Таким образом, как величина, так и направление полученного вектора отражают относительные позиции исходных векторов: разница по горизонтали составляет 6 единиц, а по вертикали – -3 единицы, что показывает, что переход от вектора $\vec{b}$ к вектору $\vec{a}$ осуществляется с правым смещением и падением вниз.

При проверке самостоятельной работы по теме «Координаты вектора», учитель может выяснить следующие данные:

- понимание и определение вектора;
- способности к определению координат вектора. Ученики 10 класса должны уметь находить координаты вектора на основе координат его начальной и конечной точек. Учитель проверит, насколько точно ученики понимают формулу для нахождения координат вектора и как они ей пользуются при решении задач.
- навыки выполнения операций с векторами: сложение, вычитание векторов.

Таким образом, проверяя самостоятельную работу, учитель получит полное представление о том, как хорошо ученики усвоили материал о координатах векторов, способны ли они применять знания на практике и могут ли объяснять свои решения. Проверка работ также позволит выявить распространенные ошибки и недочеты, которые учащиеся могут допускать при расчетах и интерпретации результатов.

Самостоятельная работа по теме «Векторы»(профильный уровень ЕГЭ).

Задача 1. Даны векторы $\vec{r}(5; 3)$ и $\vec{p}(4; -6)$. Найдите скалярное произведение $\vec{r} \cdot \vec{p}$.

Решение:

Скалярное произведение векторов $\vec{r}(r_1; r_2) \cdot \vec{p}(p_1; p_2)$ равно

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = r_1 \cdot p_1 + r_2 \cdot p_2.$$

$$\vec{r} \cdot \vec{p} = 5 \cdot 4 + 3 \cdot (-6) = 20 - 18 = 2.$$

Ответ: 2.

Задача 2. Даны векторы $\vec{t}(2; 0)$ и $\vec{s}(1; 4)$. Найдите длину вектора $\vec{t} + 3\vec{s}$.

Решение:

Найдем координаты вектора $\vec{t} + 3\vec{s}$:

$$\vec{t} + 3\vec{s} = \{2 + 3 \cdot 1; 0 + 3 \cdot 4\} = \{5; 12\}.$$

Значит, его длина равна $|\vec{t} + 3\vec{s}| = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = 13$.

Ответ: 13.

Задача 3. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ координатами которых являются целые числа.

Найдите длину вектора $\vec{a} + 3\vec{b}$.

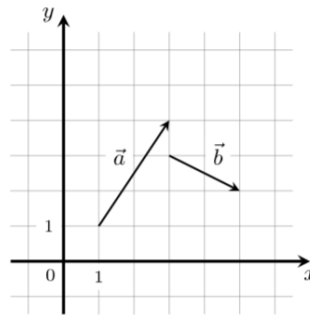


Рисунок 44 – Иллюстрация к задаче 3

Решение:

Найдем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

Найдем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \{3 - 1; 4 - 1\} = \{2; 3\};$$

$$\vec{b} = \{5 - 3; 2 - 3\} = \{2; -1\}, \text{ тогда } \vec{a} + 3\vec{b} = \{2 + 3 \cdot 2; 3 + 3 \cdot (-1)\} = \{8; 0\}.$$

Длина вектора $\vec{a} + 3\vec{b}$: $|\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8$.

Ответ: 8.

Задача 4. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

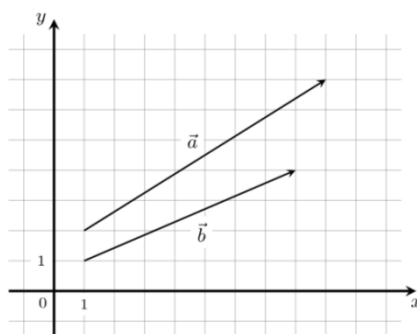


Рисунок 45 – Иллюстрация к задаче 4

Решение:

Найдем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \{9 - 1; 7 - 2\} = \{8; 5\};$$

$$\vec{b} = \{8 - 1; 4 - 1\} = \{7; 3\}.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$ равно

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2.$$

Следовательно, скалярное произведение векторов $\vec{a} \cdot \vec{b}$ равно:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 \cdot 7 + 5 \cdot 3 = 56 + 15 = 71.$$

Ответ: 71.

Задача 5. Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны 3 и 7, а угол между ними равен 60° .

Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Решение:

Мы знаем, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$, где φ – угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Тогда $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = 3 \cdot 7 \cdot \cos 60^\circ = \frac{21}{2} = 10,5$.

Ответ: 10,5.

Самостоятельная работа по теме «Векторы» (профильный уровень ЕГЭ) включает в себя задания на нахождение скалярного произведения векторов, координат векторов по рисунку, нахождение длины вектора – важные темы для учеников, сдающих ЕГЭ профильного уровня.

При проведении данной работы, учитель проверит правильно ли применяют ученики формулы при решении задач. Учитель также будет

анализировать общий подход ученика к решению задач. Насколько он умеет структурировать свои решения, применять теорию на практике и делать выводы по результатам вычислений. Важно, чтобы ученики не только получали правильные ответы, но и понимали, что конкретное решение подразумевает в контексте геометрии.

Таким образом, проверка самостоятельной работы по теме, охватывает как вычислительные навыки, так и аналитическое мышление учеников.

II. Блок заданий для контрольных работ

Задача 1. В прямоугольном $\triangle ABC$ с прямым $\angle C$ известно, что $AB = \sqrt{125}$, $AC = 10$. Найдите длину суммы векторов $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{AC}$.

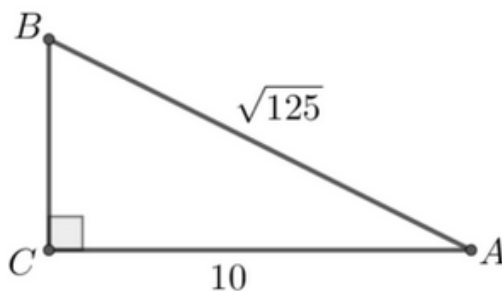


Рисунок 46 – Иллюстрация к Задаче 1

Решение:

По теореме Пифагора $AB^2 = CA^2 + CB^2 \Leftrightarrow CB = \sqrt{125 - 100} = 5$. Тогда $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 5$.

Ответ: 5.

В задаче 1 проверяются следующие знания и умения:

1. Свойства прямоугольных треугольников: Понимание теоремы Пифагора для вычисления длины сторон треугольника.
2. Знание основ векторной алгебры, в частности, как складывать векторы и находить их длину.
3. Способность интерпретировать и визуализировать треугольник и его стороны, а также понимание отношения между сторонами треугольника.

4. Навыки работы с формулами: Умение применять формулы для расчёта длины векторов и понимать физический смысл векторов в контексте задачи.

Эта задача является хорошей проверкой понимания этих тем, а также возможности их практического применения для решения задачи.

Задача 2. В прямоугольном $\triangle ABC$ с прямым $\angle C$, $BC = 21$, $AC = 20$. Найдите длину разности векторов $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

Решение:

По теореме Пифагора $AB^2 = CA^2 + CB^2 \Leftrightarrow AB = \sqrt{20^2 + 21^2} = 29$.

Тогда $|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{BA}| = 29$.

Ответ: 29.

В задаче 2 проверяются следующие знания и умения:

1. Свойства прямоугольных треугольников: Понимание теоремы Пифагора для вычисления длины гипотенузы треугольника.

2. Знание о векторной алгебре, включая умение находить разность векторов и их длину.

3. Геометрия и тригонометрия: Умение интерпретировать длины сторон треугольника и применение тригонометрических функций, если это необходимо.

4. Алгебра и формулы: Навыки работы с формулами для вычисления длины векторов и понимание их значения в контексте задачи.

Эта задача помогает развить навыки применения линейной алгебры и геометрии для решения реальных задач.

Задача 3. В $\triangle ABC$ $AB = BC = 13$, $\angle BAC = 30^\circ$. Найти длину $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

Решение:

Достроим равнобедренный $\triangle ABC$ до ромба $ABCD$.

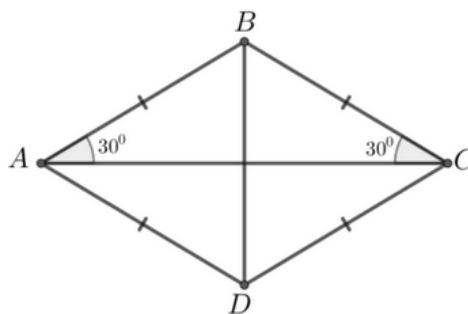


Рисунок 47 – Иллюстрация к Задаче 3

Из $\angle BAC = 30^\circ \Rightarrow \angle BAD = 60^\circ$, и $\triangle ABD$ равносторонний. По правилу параллелограмма $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$, откуда $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = 13$.

Ответ: 13.

В задаче 3 проверяются следующие знания и навыки:

1. Свойства треугольников: Понимание, что треугольник ABC является равнобедренным, так как две стороны равны.
2. Умение работать с векторами, в частности, находить сумму векторов.
3. Применение тригонометрических функций для нахождения длин сторон и координат точек в треугольнике, основанное на углах.
4. Знание о том, как углы, стороны и векторы связаны друг с другом в контексте треугольников.

Эта задача дает возможность попрактиковаться в использовании векторного анализа и тригонометрии для решения геометрических задач.

Задача 4. В $\triangle ABC$ $AB = BC = 7$, $\angle ABC = 60^\circ$. Найти длину $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$.

Решение:

Достроим равнобедренный $\triangle ABC$ до ромба $ABCD$.

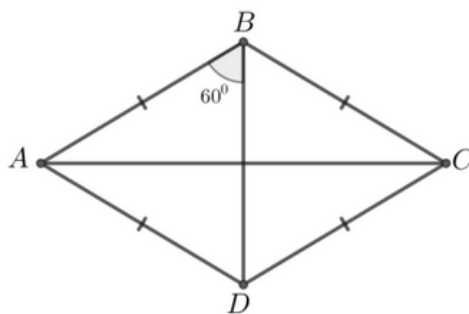


Рисунок 48 – Иллюстрация к Задаче 4

Из $\angle ABC = 120^\circ \Rightarrow \angle ABD = 60^\circ$, и $\triangle ABD$ равносторонний. По правилу параллелограмма $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$, откуда $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{BD}| = 7$.

Ответ: 7.

В задаче 4 проверяются следующие знания и навыки:

1. Свойства равнобедренных и равносторонних треугольников: Понимание структуры треугольников с равными сторонами и углами, а также их угловых свойств.
2. Векторы и их сумма: Умение работать с векторами, использовать правило параллелограмма для нахождения суммы векторов и понимание, как это связано с геометрией фигур.
3. Знание о том, что диагонали параллелограмма делят его на равные части и как это использовать для нахождения длины векторов.
4. Применение тригонометрических знаний для нахождения углов и сторон в треугольниках.
5. Умение достраивать фигуры и использовать их свойства для решения задач, в данном случае — достройка треугольника до ромба.

Эта задача помогает развить аналитическое мышление и способность применять различные геометрические и алгебраические методы для решения задач.

Задача 5. На стороне CD квадрата ABCD лежит точка P так, что $CP =$

= PD, O – точка пересечения диагоналей. Выразите векторы $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{BP}$, $\overrightarrow{PA}$ через векторы $\vec{x} = \overrightarrow{BA}$ и $\vec{y} = \overrightarrow{BC}$.

Решение:

В квадрате диагонали точкой пересечения делятся пополам.

$$1) \overrightarrow{BO} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2} (\vec{y} - \vec{x})$$

$$2) \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} - \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} = \vec{y} - \frac{1}{2} \vec{x}$$

$$3) \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CA} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} = \\ = -\frac{1}{2} \vec{x} - \vec{y}.$$

$$\text{Ответ: } \overrightarrow{BO} = \frac{1}{2} (\vec{y} - \vec{x}), \overrightarrow{BP} = \vec{y} - \frac{1}{2} \vec{x}, \overrightarrow{PA} = -\frac{1}{2} \vec{x} - \vec{y}.$$

В задаче 5 проверяются следующие знания и навыки:

1. Умение работать с векторами, а также выражать один вектор через другие векторы.

2. Понимание свойств квадратов, таких как равные стороны и углы, а также расположение диагоналей.

3. Правила сложения векторов: Знание, как складывать и вычитать векторы, что необходимо для нахождения векторов от одной точки к другой в пределах фигуры.

4. Умение преобразовывать и отображать векторы в координатной системе, если это требуется для упрощения вычислений.

5. Расположение точек и их отношения: Навыки определения отношений между точками на фигуре, включая точки пересечения и длины отрезков.

Эта задача помогает развить пространственное мышление и навыки векторного анализа, что важно в геометрии и математике в целом.

Задача 6. Начертите два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Постройте векторы, равные: а) $-\vec{a}/2 + 3\vec{b}$; б) $2\vec{b} - \vec{a}$.

Решение: Чтобы построить векторы, сначала начертим два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости.

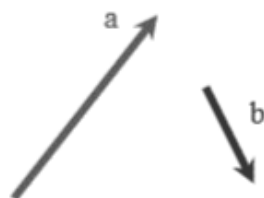


Рисунок 49 – Иллюстрация к задаче 6

а) Чтобы построить вектор $-\vec{a}/2 + 3\vec{b}$, сначала построим вектор $-\vec{a}/2$ (вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, с длиной, равной половине длины. Затем построим вектор $3\vec{b}$ (вектор, сонаправленный вектору $\vec{b}$, с длиной, в три раза большей длины $\vec{b}$). Вектор $-\vec{a}/2 + 3\vec{b}$ будет суммой этих двух векторов.

б) Чтобы построить вектор $2\vec{b} - \vec{a}$, сначала построим вектор $2\vec{b}$ (вектор, сонаправленный вектору $\vec{b}$, с длиной, в два раза большей длины $\vec{b}$). Затем построим вектор $-\vec{a}$ (вектор, противоположный вектору $\vec{a}$). Вектор $2\vec{b} - \vec{a}$ будет суммой этих двух векторов.

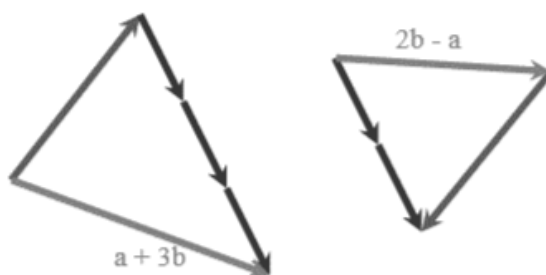


Рисунок 50 – Решение задачи 6

В задаче 6 проверяются следующие знания и навыки:

1. Понимание концепции векторов и их свойств, таких как направление и длина.
2. Операции с векторами: Умение проводить операции сложения, вычитания и умножения векторов на скаляры.
3. Графическое представление: Навыки начертания векторов на плоскости и визуализации их результатов.
4. Понимание расположения векторов в пространстве и их взаимосвязи,

что помогает в выполнении операций.

Эта задача развивает умение работать с векторами, а также графически визуализировать математические операции.

Задача 7. В прямоугольной системе координат даны векторы $\vec{a}\{3; -2\}$ и $\vec{b}\{1; -2\}$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = 5\vec{a} - 9\vec{b}$ и его длину. Постройте вектор $\vec{c}$, если известно, что его конец совпадает с точкой M(3; 2).

Решение:

Найдем $5\vec{a}$, для этого умножим координаты вектора на 5:

$$5\vec{a} = \{5 \cdot 3; 5 \cdot (-2)\}.$$

Найдем $\vec{c}$, для этого вычтем из полученных координат $5\vec{a}$ координаты $9\vec{b}$:

$$5\vec{a} - 9\vec{b} = \{15 - 9 \cdot 1; -10 - 9 \cdot (-2)\} = \{6; 8\}.$$

$$\text{Найдем длину вектора } \vec{c}: |\vec{c}| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = 10.$$

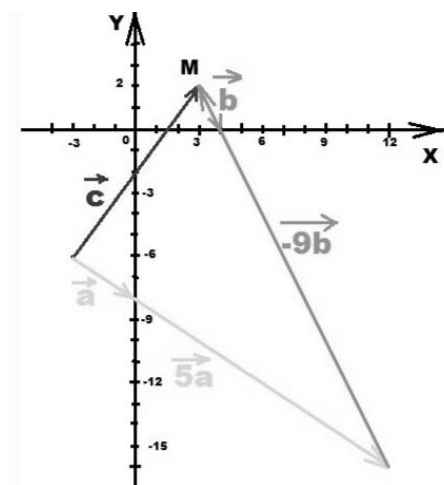


Рисунок 51 – Решение задачи 7

Ответ: $\vec{c} = \{6; 8\}$, $|\vec{c}| = 10$.

В задаче 7 проверяются следующие знания и навыки:

1. Понимание прямоугольной (декартовой) системы координат и представление векторов в виде координат.
2. Умение выполнять операции сложения и вычитания векторов, а также умножения векторов на скаляры.
3. Знание формулы для вычисления длины вектора и умение применять её на практике.

4. Навыки изображения векторов в координатной системе и понимание их свойств.

5. Понимание того, как перемещаются вектора относительно другой точки (в данном случае точки М) влияет на его начало и конец.

Эта задача способствует развитию навыков работы с векторами, а также их визуализации в системе координат.

Задача 8. Найдите координаты и длину вектора $\vec{b}$, если $\vec{b} = \vec{c}/2 - \vec{d}$, $\vec{c}\{6; -2\}$, $\vec{d}\{1; -2\}$.

Решение:

Найдём координаты вектора $\vec{b}$:

$$\vec{b} = \frac{\vec{c}}{2} - \vec{d}; \frac{\vec{c}}{2} (3; -1); -\vec{d}(-1; 2);$$

$$\vec{b}(3 + (-1); -1 + 2);$$

$$\vec{b} (2; 1).$$

Найдём длину полученного вектора по формуле:

$$\vec{a} (x; y)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

Ответ: $\sqrt{5}$.

В задаче 8 проверяются следующие знания и навыки:

1. Умение выполнять операции сложения и вычитания векторов, а также деление вектора на скаляр.

2. Способность находить координаты результирующего вектора на основе заданных векторов.

3. Знание формулы для вычисления длины вектора и умение применять её для нахождения длины результирующего вектора.

4. Работа с векторными алгебраическими выражениями: Умение манипулировать векторными выражениями для нахождения новых векторов, алгебраические и геометрические свойства.

Задача 9. Вычислить $|\vec{a} + \vec{b}|^2$, если $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ и угол между векторами 60° .

Решение:

По правилу параллелограмма $\vec{a} + \vec{b} = \vec{AC}$.

По теореме косинусов $\vec{AC}^2 = \vec{AB}^2 + \vec{BC}^2 - 2 \cdot \vec{AB} \cdot \vec{BC} \cdot \cos 120^\circ$.

$$\vec{AC} = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot (-1/2)} = \sqrt{37}.$$

Тогда $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{AC}|^2 = 37$.

Ответ: 37.

В задаче 9 проверяются следующие знания и навыки:

1. Понимание того, как длины и углы между векторами влияют на их сумму.
2. Умение применять формулы.
3. Знание тригонометрических функций и их использование для вычисления косинуса угла.
4. Умение выполнять операции возведения в квадрат и суммирования чисел.
5. Знание, как векторы могут быть представлены на плоскости и как их длина и направление взаимосвязаны.

Эта задача способствует развитию аналитического мышления и навыков работы с векторами.

Задача 10*. В треугольнике ABC точка O – точка пересечения медиан. Выразите вектор $\vec{AO}$ через векторы $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{AC}$.

Решение:

В $\triangle ABC$ точка O – точка пересечения медиан.

1. Медиана делит сторону пополам, а точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении 2:1, считая от вершины.
2. Пусть M – середина BC. Тогда $\vec{AM}$ – медиана. $\vec{AO} = \frac{2}{3} \vec{AM}$.

3. $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ (правило сложения векторов в треугольнике, где М – середина ВС).

4. Следовательно, $\overrightarrow{AO} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b})$.

Ответ: $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$.

Задача 10 о нахождении вектора $\overrightarrow{AO}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ проверяет следующие знания и навыки учеников:

1. Основные свойства треугольников: Понимание, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую медиану в отношении 2:1.

2. Знание, что вектор может быть представлен как разность координат.

3. Умение выполнять операции над векторами, такие как сложение и умножение на скаляр.

4. Понимание геометрической интерпретации векторов в контексте точек и отрезков в треугольниках.

5. Осознание, как выражать точки и векторы в пространстве с использованием векторных координат. При решении задачи ученику необходимо воспользоваться свойством деления медианы и представить вектор $\overrightarrow{AO}$ через векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Задача 11*.

На плоскости построен параллелограмм, вершины которого определяются следующим образом: точка О – начало координат, точка А – конец вектора $\vec{a} = (3, -1)$, точка В – конец вектора $\vec{b} = (2, 4)$, а точка С – получается в результате сложения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Используя свойства диагоналей параллелограмма, решите следующую задачу:

1) Найдите координаты точки пересечения диагоналей, представив её в виде вектора, исходящего из начала координат.

2) Обоснуйте, почему полученный результат соответствует свойствам параллелограмма, используя операции сложения, вычитания векторов и умножения вектора на число.

Дайте подробное пошаговое объяснение каждого этапа решения задачи.

Решение:

1) Рассмотрим построение параллелограмма с вершинами:

1. $O = (0, 0)$

2. $A = (3, -1)$, совпадает с координатами вектора $\vec{a}$

3. $B = (2, 4)$, совпадает с координатами вектора $\vec{b}$

4. $C(5, 3)$, совпадает с координатами $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (3 + 2; -1 + 4) = (5; 3)$

Известно, что в параллелограмме диагонали пересекаются в своих серединах. Это означает, что точка пересечения диагоналей будет находиться в середине каждой из диагоналей.

Выберем диагональ OC с концами в точках O и C . Чтобы найти середину отрезка OC , необходимо сложить координаты концов и разделить результат на 2.

Если $\overrightarrow{OC} = (5; 3)$, то деление координат на 2 даёт координаты точки пересечения диагоналей: $(5; 3) / 2 = (\frac{5}{2}; \frac{3}{2})$

Таким образом, координаты точки пересечения диагоналей представляются в виде вектора $(\frac{5}{2}; \frac{3}{2})$.

2) Поскольку диагонали параллелограмма пересекаются в своих серединах, точка пересечения равна половине суммы координат концов диагонали $(\vec{a} + \vec{b})/2$. Таким образом, конечный ответ соответствует свойствам параллелограмма и арифметически обоснован посредством сложения и умножения вектора на константу.

Задача 11 о нахождении координат точки пересечения диагоналей параллелограмма проверяет следующие знания и навыки учащихся:

1. Умение работать с координатами точек на плоскости и представлять векторы в виде координат.

2. Понимание того, что диагонали параллелограмма пересекаются в точке, которая делит каждую диагональ пополам.

3. Знание того, как выполняются операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

4. Умение обосновать полученные результаты, используя теоретические знания о векторах и свойствах параллелограммов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Векторы являются важным элементом математического образования, поскольку они не только развивают пространственное мышление, но и служат основой для понимания более сложных понятий в математике и физике. Современные образовательные стандарты требуют от учащихся не только знания теории векторов, но и умения применять полученные знания на практике. Эффективные методические подходы к изучению векторов могут значительно повысить качество обучения и заинтересованность учеников в предмете.

При работе над темой «Методические особенности изучения темы «Векторы» в курсе геометрии основного общего образования» нами были последовательно поставлены и решены следующие задачи.

- 1) Определено место темы в школьной программе на основе анализа рабочих программ.
- 2) Изложены теоретические основы изучения темы «Векторы».
- 3) Проведен анализ содержания школьных учебников по рассматриваемой теме.
- 4) Проведен анализ заданий ЕГЭ по изучаемой теме.
- 5) Разработаны технологические карты уроков по темам «Законы сложения векторов. Правило параллелограмма», «Скалярное произведение векторов» по учебнику Л.С. Атанасяна в 9 классе.
- 6) Представлена методическая разработка самостоятельных и контрольных работ.

Методическая разработка содержит «банк» заданий с решениями для самостоятельного выбора преподавателями при проведении самостоятельных и контрольных работ.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1) Федеральная рабочая программа основного общего образования «Математика» (базовый уровень) (для 5–9 классов образовательных организаций). М. : Институт стратегии развития образования, 2023. 106 с.
- 2) Федеральная рабочая программа основного общего образования «Математика» (углубленный уровень) (для 5–9 классов образовательных организаций). М. : Институт стратегии развития образования, 2023. 101 с.
- 3) Федеральная рабочая программа основного общего образования «Математика» (базовый уровень) (для 10–11 классов образовательных организаций). М. : Институт стратегии развития образования, 2023. 65 с.
- 4) Федеральная рабочая программа основного общего образования «Математика» (углубленный уровень) (для 10–11 классов образовательных организаций). М. : Институт стратегии развития образования, 2023. 81 с.
- 5) Волчкевич М. А. Математическая вертикаль. Геометрия. 9 класс : учеб. базовый уровень. М. : Просвещение, 2024. 176 с.
- 6) Геометрия. учеб. для 7-9 кл. сред. шк. базовый уров./ Л. С. Атанасян [и др.] ; под ред. Т.А. Бурмистрова. М. : Просвещение, 2024. 416 с.
- 7) Геометрия. учеб. для 7-9 класса : учебник для общеобразовательных учреждений / В. А. Смирнов [и др.]. М.: Мнемозина, 2018. 376 с.
- 8) Геометрия. учебное пособие для 8-9классов средней школы / А. Н. Колмогоров [и др.] ; под редакцией А. Н. Колмогорова. М. : Просвещение, 2018. 348 с.
- 9) Геометрия. 7-9 классы : Программа и тематическое планирование / И. М. Смирнова [и др.] ; М. : Просвещение, 2019. 44 с.
- 10) Изучение геометрии в 7-9 классах : пособие для учителей / Л. С. Атанасян [и др.] ; под редакцией Т. А. Бурмистрова, М.: Просвещение, 2019. 255 с.
- 11) Лашманкина А. В. Методический анализ содержания темы «Векторы» в курсе геометрии основной школы // Современное образование :

научные подходы, опыт, проблемы, перспективы. Сборник статей XIV Международной научно-практической конференции «Артемовские чтения». Пензенский государственный университет; под общей редакцией М. А. Родионова. Пенза : Изд-во ПГУ, 2018. С. 188-191.

12) Малых А. Е. Опорные планиметрические задачи. Треугольники и многоугольники: учеб. пособие. М. : Перм. гос. пед. ун., 2020. 204 с.

13) Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / Н. Л. Стефанова [и др.]. М. : Дрофа, 2020. 416 с.

14) Методика обучения геометрии: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Гусев [и др.]; под ред. В. А. Гусева. М. : Издат. центр «Академия», 2019. 368 с.

15) Погорелов А. В. Геометрия. 7-9 классы : учеб. для общеобразоват. организаций. М. : Просвещение, 2023. 240 с.

16) Саранцев Г. И. Общая методика преподавания математики: учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и университетов. М. : Изд-во «Крас. Окт.», 2019. 208 с.

17) Теория и методика обучения математиков школе : учеб. пособие / Л. О. Денищевой [и др.]; М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2021. 247 с.

18) Шарыгин И. Ф., Геометрия 7-9 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений. М. : Дрофа, 2019. 462 с.

19) Шурыгина И. В., Фунт И. П. О понятиях вектора и векторной величины в школьной математике и физике // Инновационная наука : международный научный журнал. Елабуга, 2016. Вып. № 3. С. 228-229.

20) Слета Ю. О. Причины возникновения затруднений у учащихся основной школы при решении планим. задач на вычисление // Развитие современной науки: теоретические и прикладные аспекты, сборник статей студентов, магистрантов, аспирантов, молодых ученых и преподавателей. 2020. с. 78. [URL:https://elibrary.ru/item.asp?id=26664270](https://elibrary.ru/item.asp?id=26664270) (дата обращения 24.03.2025).

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое
образование

Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: заочная

Утверждаю: зав. кафедрой
« 30 » 10 2024 г.
А.Е. Маньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Салиховой Ангелина Ринатовны
(ФИО полностью)

Тема работы «Методические особенности изучения темы «Векторы» в курсе
геометрии основного общего образования».

Утверждена приказом по Университету от « 25.12 » 20 24 г. № 1351/0

Срок сдачи студентом законченной работы « 16 » июня 20 25 г.

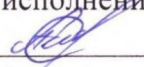
КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Анализ научной и учебно-методической литературы по теме исследования.	Октябрь – ноябрь 2024	выполнено
2.	Анализ федеральных рабочих программ основного общего образования по математике профильного и базового уровней	Декабрь 2024	выполнено
3.	Анализ содержания школьных учебников по теме «Векторы».	Январь 2025	выполнено
4.	Анализ открытого банка заданий единого государственного экзамена по теме «Векторы»	Февраль 2025	выполнено
5.	Разработка технологических карт уроков	Март – апрель 2025	выполнено
6.	Разработка заданий контрольных и самостоятельных работ по изучаемой теме..	Апрель 2025	выполнено
7.	Оформление текста работы.	Май – июнь 2025	выполнено
8.	Подготовка презентации и выступления.	Июнь 2025	выполнено

Дата выдачи задания «08» 10 2024 г.

Руководитель  Сорокина М.В.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

 Салихова А.Р.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студента (ки) 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения

Салиховой Ангелины
Ринатовны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Салихова Ангелина Ринатовна, студентка 5 курса заочной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Методические особенности изучения темы «Векторы» в курсе геометрии основного общего образования», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


подпись
03.06.2025
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 03.06.2025
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР  М.В. Сорокина
подпись И.О.Ф.

Протокол
проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ» выпускной
квалификационной работы на тему
«Методические особенности изучения темы «Векторы» в курсе геометрии
основного общего образования»
студентки 5 курса Салиховой Ангелины Ринатовны
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика»
Руководитель ВКР Сорокина Марина Валерьевна

Отчет о проверке

Автор: Сорокина Марина Валерьевна

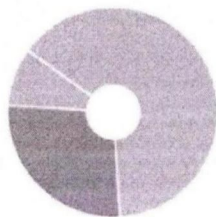
Проверяющий: Сорокина Марина Валерьевна

Название документа:

407960d3Metodicheskie_osobennosti_izucheniya_temy_Vektory_v_kurse_geometrii_osn

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
27,1%

Оригинальность:
64,02%

Цитирования:
8,88%

Самодитирование:
0%

❶ «Совпадения», «Цитирования», «Самодитирование», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

⚠ Снята отметка «Подозрительный документ». Комментарий: не указан

❶ Проверено: 93,95% текста документа, исключено из проверки: 6,05% текста документа. Разделы, отключенные пользователем: Титульный лист, Содержание, Библиография

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самодитированию. Показатель «Совпадения» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- **Самодитирование** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или создателем которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самодитирование» — это доля фрагментов текста, отнесенных к самодитированию, в общем объеме текста.
- **Цитирование** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным: к цитированным источникам, заголовкам, библиографии, фрагментам текста, найденным модулем поиска «СПС Гарант» нормативно-правовым документам. Показатель «Цитирование» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- **Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- **Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- **Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правильности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 99

Количество страниц: 78

Тип документа: Не указано

Символов в тексте: 95518

Дата проверки: 03.06.2025 12:30:04

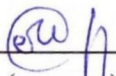
Слов в тексте: 13176

Дата корректировки: Нет

Число предложений: 2046

03.06.25

(дата)


(подпись)

М. В. Сорокина

(ИОФ руководителя ВКР)

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методические особенности изучения темы «Векторы» в курсе
геометрии основного общего образования»
студентки Салиховой Ангелины Ринатовны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 203ФПМ1

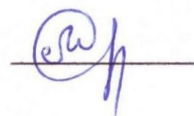
Выпускная квалификационная работа Салиховой А.Р. посвящена методическим особенностям изучения векторов в школьном курсе планиметрии.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка используемой литературы. Во введении представлены цель и задачи исследования, отмечается актуальность темы, выделены предмет и объект исследования. В первой главе излагаются теоретические факты, необходимые для дальнейшей работы. Проведен анализ федеральных рабочих программ основного общего образования по математике профильного и базового уровней. Изучено содержание нескольких школьных учебников по геометрии, в том числе входящих в федеральный перечень. Проведен их сравнительный анализ. Рассматриваются примеры некоторых задач на применение векторов, встречающиеся в едином государственном экзамене по математике. Во второй главе разработаны две технологические карты уроков. Приведены разработки для проведения самостоятельных и контрольных работ по теме «Векторы».

Работа Салиховой А.Р., доклад и презентация оформлены в соответствии с требованиями, предъявляемыми к выпускным квалификационным работам. Представленные результаты могут быть частично использованы в работе учителя математики.

Выпускная квалификационная работа заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель, к. ф.-м. н, доцент кафедры
«Математическое образование»



М. В. Сорокина