

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**

**«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Изучение тригонометрических уравнений в школе»

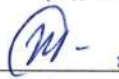
Студент

 15.05.26 Кудашева Полина Витальевна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель

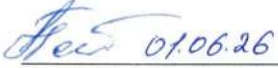
 15.05.26 Никитина О.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

 - 15.06.26 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

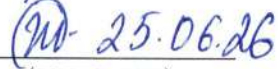
Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 01.06.26 № 10)

И.о. заведующего кафедрой

 01.06.26 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой хорошо (протокол заседания ГЭК от 25.06.26 № 5)

Секретарь ГЭК

 25.06.26 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ	5
1.1 Исторические аспекты развития тригонометрических уравнений....	5
1.2 Понятие тригонометрических уравнений	7
1.4 Требования к освоению темы «Тригонометрические уравнения» в школьном курсе	17
1.5 Дифференцированный подход как стратегия изучения тригонометрических уравнений	21
ГЛАВА 2 ОРГАНИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В СТАРШЕЙ ШКОЛЕ.....	24
2.1 Анализ содержания задачного материала школьных учебников по теме «Тригонометрические уравнения»	24
2.2 Дифференцированный подход при изучении тригонометрических уравнений.....	27
2.3 Конспекты уроков по теме «Тригонометрические уравнения»	37
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	44
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	45
ПРИЛОЖЕНИЕ	47

ВВЕДЕНИЕ

Изучение тригонометрии в старшей школе – длительный и сложный процесс. Данный раздел является одним из основных, включает в себя изучение различных тригонометрических функций, формул, решение уравнений и неравенств. Тригонометрические уравнения является центральной темой раздела, как по содержанию материала, изложенного в учебниках, так и по тем компетенциям, которые формируются у обучающихся в процессе освоения темы.

Актуальность выбранной темы обуславливается тем, что разбор тригонометрических уравнений различных типов вызывает большой интерес обучающихся, вместе с этим и большое количество трудностей, так как недостаточно только уметь применять алгебраические преобразования для их решения, необходимо научиться работать с тригонометрической окружностью, знать свойства функций и различные формулы для преобразования.

При подготовке к занятиям по темам, которые связаны с тригонометрическими уравнениями часто можно столкнуться с вопросами: «как правильно организовать деятельность обучающихся, чтобы минимизировать их трудности при решении заданий?», «какие задания эффективнее предложить?», «как методически грамотно составить подборку уравнений, чтобы обучающимся легче было запомнить методы решений?». Эти вопросы представляют лишь малую часть, с которыми может столкнуться учитель. Именно в этом и заключается проблема рассматриваемой темы.

Цель исследования: разработка методики изучения тригонометрических уравнений, в основе которой лежит дифференцированный подход.

Объект исследования: обучение математике в старшей школе.

Предмет исследования: организация обучения тригонометрическим уравнениям в курсе математике.

Чтобы реализовать поставленную цель, необходимо решить следующие задачи.

1. Изучить литературу по выбранной теме.
2. Обобщить и структурировать имеющуюся информацию, раскрывающую содержание темы.
3. Выявить основные требования, предъявляемые к освоению темы «Тригонометрические уравнения».
4. Провести классификацию типов тригонометрических уравнений и их способов решений.
5. Разработать методику формирования умений и навыков обучающихся по решению тригонометрических уравнений, в основе которой лежит дифференцированный подход.

При написании работы были использованы следующие методы исследования: поиск и анализ психолого-педагогической, математической литературы, обобщение и систематизация информации.

Практическая значимость работы состоит в возможности использования полученных результатов при работе на уроках математики.

Работа состоит из двух глав. В первой главе рассматриваются теоретические основы изучения тригонометрических уравнений в школьном курсе математики, в частности, требования к освоению этой темы и роль дифференцированного подхода к обучению учащихся при изучении данной темы.

Во второй главе проводится анализ задачного материала по данной теме, приводятся конспекты некоторых уроков.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1 Исторические аспекты развития тригонометрических уравнений

Тригонометрия в процессе своего развития прошла две основные стадии. Первая стадия связана с развитием науки в античном мире. Предполагала решение вопросов астрономии, географии, геодезии, военного дела. Тригонометрия в это время связана с именами таких ученых как Гиппарх, Птолемей. В средневековое время их дело стали развивать ученые юго-востока, а именно, Индии (Брамагупта, Бхаскара и др.), Арабии (Ахмад Ибн-Абдаллах) и Европы (Пейербах, Коперник и др.). Деятельность ученых этого периода привела к выделению нового самостоятельного предмета сначала в Азербайджане в «Трактате о полном четырехстороннике» Насирэддина Туси, а позже в Европе в труде «Тригонометрия, или краткий обзорный трактат о решении треугольников» Варфоломея Питискуса.

Таким образом, на первой стадии тригонометрия сложилась как теория вычислительного приема решения треугольников, где основой выступали таблицы синусов и тангенсов.

Начало развития второй стадии тригонометрии было положено Франсуа Виета, идеи которого полностью раскрываются в школе Леонарда Эйлера. Именно в этот период создается аналитическая теория тригонометрических функций, дается обобщение многим теоремам тригонометрии.

Выделение в тригонометрии двух различных частей: гониометрии, собственно тригонометрии, связано с именем Николая Ивановича Лобачевского. Гониометрия – часть математического анализа, где раскрывается учение о трансцендентных тригонометрических функциях. Собственно

тригонометрия, в которой соединяются две ветви математики: геометрия и математический анализ [5].

Начиная с XVII в. тригонометрические функции стали находить применение для решения тригонометрических уравнений. В это же время появились формулы функций.

В 1786 г. А. Каньоли решил тригонометрическое уравнение: $a \cos A + b \cos B = n$, используя подстановки $a = m \cos B$, $b = m \sin B$.

В XIX веке окончательно формируются два направления тригонометрии: аналитическое решение треугольников и изучение свойств тригонометрических функций.

В 1937 г. В.В. Репьев предложил общий алгоритм решения тригонометрических уравнений.

До середины 60-х годов XX века изучение тригонометрии в школе осуществлялось совсем иначе, нежели, чем в современном мире. Обучающиеся 9-10 класса осваивали отдельную дисциплину «Тригонометрия». После 60-х годов тригонометрия стала менее представленной в школьных учебниках.

Изучение тригонометрии происходило по учебнику Е.С. Кочетковой «Алгебра и элементарные функции», после по учебнику А.Н. Колмогорова «Алгебра и начала анализа». Во втором материал по тригонометрическим уравнениям представлен в более углубленном формате, в нем рассматриваются и тригонометрические функции, и свойства сложения, и различные приемы решения тригонометрических уравнений.

Введение учебников А.Г. Мордковича, Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина было связано с переходом к одиннадцатилетней школе обучения. В данных учебниках наблюдается значительное усиление темы «Тригонометрические уравнения».

1.2 Понятие тригонометрических уравнений

Тригонометрическими уравнениями называются уравнения, в которых неизвестное содержится под знаком тригонометрической функции. Неизвестным в тригонометрическом уравнении является угол (дуга). Он может быть как непосредственно аргументом тригонометрической функции, например, в уравнении $\operatorname{atg} x = b$, так и входить в состав аргумента, например, в уравнении $\operatorname{atg}(x + b) = c$.

Понятие «решить тригонометрическое уравнение» аналогично понятию, встречающемуся в теории алгебраических уравнений, а именно, решить уравнение, значит, найти все корни или доказать, что таких корней нет. Корень тригонометрического уравнения – значение входящего в него неизвестного, которое удовлетворяет данному уравнению. Среди тригонометрических уравнений существуют те, которые не имеют решений, например, $\sin x = 3$. Если уравнение имеет решение, то их бесконечное множество.

Таким образом, тригонометрические уравнения в отличие от алгебраических уравнений либо не имеют решений в области действительных чисел, либо имеют бесконечное множество решений, так как тригонометрические функции – периодические, в данном случае решение выражено общей формулой [14].

Процесс решение тригонометрических уравнений осуществляется аналогично решению алгебраических уравнений, то есть необходимо привести любое уравнение к простейшему путем равносильных преобразований.

К простейшим тригонометрическим уравнениям относятся:

1.1 Уравнение вида: $\cos x = a$

Поскольку $\cos x \in [-1; 1]$, то данное уравнение имеет решение только при $|a| \leq 1$. Корни уравнения можно рассматривать как абсциссы точек пересечения косинусоиды и прямой $y = a$ (Рисунок 1).

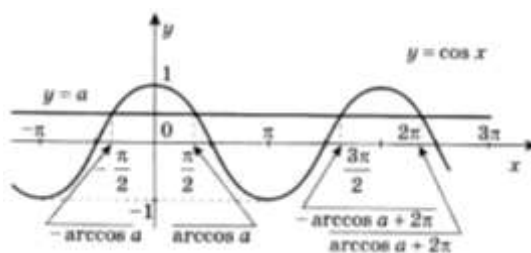


Рисунок 1 – Решение уравнения $\cos x = a$

Таким образом, в зависимости от значения a уравнение имеет следующие решения:

при $|a| \leq 1 \Rightarrow x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$

при $|a| \geq 1 \Rightarrow$ решений нет.

Выделяют частные случаи:

$$a = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$a = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$a = -1 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

1.2 Уравнение вида: $\sin x = a$

Поскольку $\sin x \in [-1; 1]$, то данное уравнение имеет решение только при $|a| \leq 1$. Корни уравнения можно рассматривать как абсциссы точек пересечения синусоиды и прямой $y = a$ (Рисунок 2).

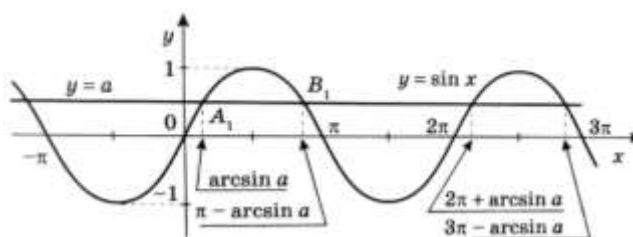


Рисунок 2 – Решение уравнения $\sin x = a$

Таким образом, в зависимости от значения a уравнение имеет следующие решения:

при $|a| \leq 1 \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, k \in \mathbb{Z},$ также решение можно представить двумя формулами:

$$x = \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ и } x = \pi - \arcsin a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z};$$

при $|a| \geq 1 \Rightarrow$ решений нет.

Выделяют частные случаи:

1. $a = 1 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$
2. $a = 0 \Rightarrow \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z},$
3. $a = -1 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$

1.3 Уравнение вида: $\operatorname{tg} x = a$.

Корни уравнения можно рассматривать как абсциссы точек пересечения тангенсоиды и прямой $y = a$ (Рисунок 3).

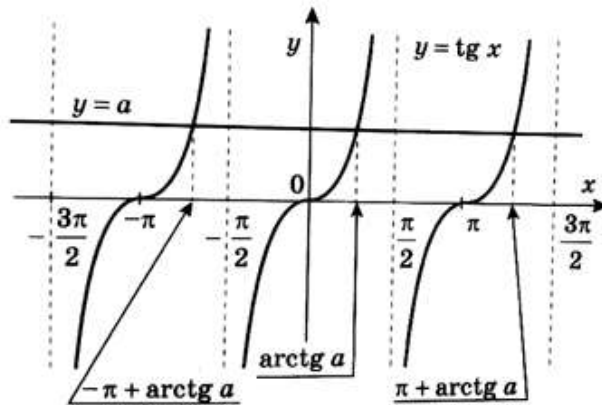


Рисунок 3 – Решение уравнения $\operatorname{tg} x = a$

Таким образом, уравнение имеет решение: $x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

Выделяют частные случаи:

1. $a = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$
2. $a = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi k, k \in \mathbb{Z},$
3. $a = -1 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$

1.4 Уравнение вида: $\operatorname{ctg} x = a$.

Корни уравнения можно рассматривать как абсциссы точек пересечения котангенсоиды и прямой $y = a$ (Рисунок 4).

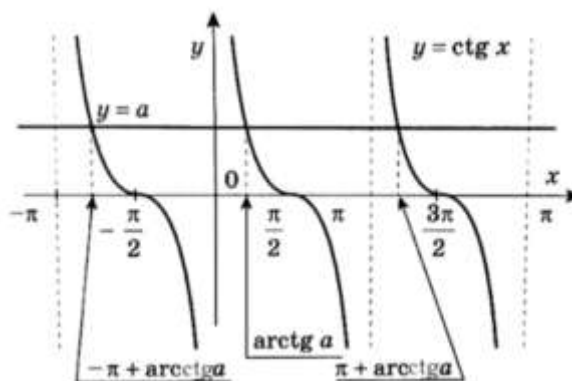


Рисунок 4 – Решение уравнения $\text{ctg} x = a$

Таким образом, имеет решение: $x = \text{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Выделяют частные случаи:

1. $a = 1 \Rightarrow \text{ctg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$,
2. $a = 0 \Rightarrow \text{ctg} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$,
3. $a = -1 \Rightarrow \text{ctg} x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

1.3 Методы решения тригонометрических уравнений

При решении различных тригонометрических уравнений используют разнообразные приемы. Обычно решение сводится к последовательному применению нескольких приемов, которые помогают свести уравнение к системам или совокупностям простейших уравнений. Так как выбор метода решения может быть неоднозначным, то и запись полученного решения может отличаться, хотя и будет выражать одни и те же решения в их различных комбинациях [12].

Выделяют следующие методы решения тригонометрических уравнений:

1. Метод замены переменной

Прием, который находит применение при решении различных уравнений. Суть которого заключена в замене исходных переменных другими. Основная цель применения данного способа – упрощение исходного уравнения и приведение его к известному виду.

Пример. Решить уравнение: $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$.

Заметим, что можно ввести новую переменную, заменив $\sin x = t$, получим $2t^2 - 5t + 2 = 0$.

Получено квадратное уравнение, при решении которого найдем:

$$t_1 = 2, t_2 = \frac{1}{2}.$$

Вернувшись к первоначальной неизвестной, находим:

$$\begin{cases} \sin x = 2 \Rightarrow \text{решений нет, так как } \sin x \in [-1; 1]; \\ \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример. Решить уравнение: $\cos 2x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0$.

Заметим, что аргументы у входящих в уравнение тригонометрических функций различные. Преобразуем $\cos 2x$ как косинус двойного аргумента, выбрав при этом формулу, которая выражает $\cos 2x$ через $\sin x$, получим:

$$1 - 2\sin^2 x + 3\sqrt{2}\sin x - 3 = 0 \Rightarrow 2\sin^2 x - 3\sqrt{2}\sin x + 2 = 0.$$

Заменим $\sin x = t$, получим $2t^2 - 3\sqrt{2}t + 2 = 0$.

Корни квадратного уравнения: $t_1 = \sqrt{2}, t_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Вернувшись к первоначальной неизвестной, находим:

$$\begin{cases} \sin x = \sqrt{2} \Rightarrow \text{решений нет, так как } \sin x \in [-1; 1]; \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = (-1)^k \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

2. Метод разложения на множители

При решении тригонометрических уравнений суть данного метода заключена в следующем: если уравнение $f(x) = 0$ можно преобразовать к виду $f_1(x) \cdot f_2(x) = 0$, то задача сводится к решению совокупности уравнений:

$$\begin{cases} f_1(x) = 0 \\ f_2(x) = 0 \end{cases}$$

Пример. Решить уравнение: $\left(\sin x - \frac{1}{3}\right)\left(\cos x + \frac{2}{5}\right) = 0$.

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{3} = 0 \\ \cos x + \frac{2}{5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{3} \\ \cos x = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \arccos \left(-\frac{2}{5} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = (-1)^k \arcsin \frac{1}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, x = \pm \arccos \left(-\frac{2}{5} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример 2. Решить уравнение: $1 + \sin x \cdot \cos 2x = \sin x + \cos 2x$.

$$1 + \sin x \cdot \cos 2x - \sin x - \cos 2x = 0,$$

$$(1 - \cos 2x) - \sin x(1 - \cos 2x) = 0,$$

$$(1 - \cos 2x)(1 - \sin x) = 0,$$

$$\begin{cases} 1 - \cos 2x = 0 \\ 1 - \sin x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

3. Однородные тригонометрические уравнения

Среди однородных уравнений выделяют уравнения первой степени уравнения второй степени.

3.1 Однородные уравнения первой степени

Это уравнения вида: $a \sin x + b \cos x = 0$.

Такого типа уравнения можно решить делением обеих частей уравнения на $\cos x$, получим: $\frac{a \sin x}{\cos x} + \frac{b \cos x}{\cos x} = \frac{0}{\cos x} \Rightarrow a \operatorname{tg} x + b = 0$.

Таким образом, получили простейшее тригонометрическое уравнение:

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a}.$$

Делить обе части уравнение на одно и то же число можно только в том случае, когда есть уверенность, что это выражение никогда не обратится в нуль. В данном случае необходимо проверить отличен ли $\cos x$ от нуля. Предположим, что $\cos x = 0$, тогда исходное уравнение примет вид:

$$a \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = 0.$$

Таким образом, $\cos x = 0, \sin x = 0$, что невозможно, поскольку $\sin x, \cos x$ обращаются в нуль в различных точках.

Пример. Решить уравнение: $3 \sin 2x - 2 \cos 2x = 0$.

Разделим полученное уравнение на $\sin 2x$, получим: $3\operatorname{tg} x - 2 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 2x = \frac{2}{3}$.

Далее, $2x = \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

3.2 Однородные уравнения второй степени

Это уравнение вида: $a \sin^2 x + b \cos x \sin x + c \cos^2 x = 0$.

В том случае, если уравнение является «полным», то есть никакой из коэффициентов не равен 0, то можно разделить данное уравнение на $\cos^2 x$, причем такое деление не приведет к потере корней уравнения. Тогда получим: $a \operatorname{tg}^2 x + b \operatorname{tg} x + c = 0$, полученное уравнение – квадратное относительно $\operatorname{tg} x$.

В случае, когда коэффициент $a = 0$, уравнение станет следующим: $b \cos x \sin x + c \cos^2 x = 0$, которое можно решить с помощью вынесения общего множителя: $\cos x (b \sin x + c \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ b \sin x + c \cos x = 0 \end{cases}$

В случае, когда коэффициент $c = 0$, уравнение станет следующим: $a \sin^2 x + b \cos x \sin x = 0$, которое можно решить с помощью вынесения общего множителя: $\sin x (a \sin x + b \cos x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ a \sin x + b \cos x = 0 \end{cases}$

Пример. Решить уравнение: $3 \cos^2 x - \sin 2x - \sin^2 x = 0$.

Применив формулу синуса двойного угла, получим однородное уравнение второй степени: $3 \cos^2 x - 2 \sin x \cos x - \sin^2 x = 0$, после деления на $\cos^2 x$, получим уравнение, которое равносильно данному:

$$3 - 2 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^2 x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = -3 \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

4. Введение дополнительного аргумента

Данный способ применим для преобразования уравнения вида:

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

Левая часть уравнения приводится к виду:

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi), \text{ где } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}.$$

Применив такое преобразование, получим простейшее тригонометрическое уравнение вида: $\sin x = a$.

Решение уравнения таким способом приводит к результату, где есть слагаемое $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$, которое может вызвать трудности при дальнейшем решении уравнения. Поэтому применять данный способ удобно только в тех случаях, когда вспомогательный угол является табличным, например, $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}$.

Пример. Решить уравнение $\sin 3x - \cos 3x = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

Преобразуем левую часть уравнения, используя вспомогательный угол:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{\frac{3}{2}} \Rightarrow \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{7\pi}{12} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 3x = \frac{11\pi}{12} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{11\pi}{36} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ: $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{11\pi}{36} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

5. Введение половинного аргумента.

Данный способ, также как и предыдущий, применим для решения уравнения: $a\sin x + b\cos x = c$.

Для преобразования левой части уравнения необходимо применить формулы двойного аргумента, а правую часть умножить на тригонометрическую единицу:

$$2a\sin x \cos x + b\cos^2 x - b\sin^2 x = c(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

После преобразования полученного уравнения, получим однородное уравнение.

Пример. Решить уравнение: $4\sin x + \cos x = 4$.

Применим формулы двойного аргумента для преобразования левой части уравнения: $4 \cdot 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = 4\sin^2\frac{x}{2} + 4\cos^2\frac{x}{2}$.

Перенесем все элементы в одну часть уравнения и приведем подобные слагаемые: $5\sin^2\frac{x}{2} - 8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3\cos^2\frac{x}{2} = 0$.

Разделим уравнение на $\cos^2\frac{x}{2}$, получим:

$$5\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 8\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3 = 0.$$

Имеем квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Сделаем замену $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = t$.

Тогда уравнение примет вид: $5t^2 - 8t + 3 = 0$. Корнями квадратного уравнения являются: $t_1 = 1, t_2 = \frac{3}{5}$.

Сделаем возврат к исходной переменной:

$$\begin{cases} \operatorname{tg}\frac{x}{2} = 1 \\ \operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{2} = \operatorname{arctg}\frac{3}{5} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = 2\operatorname{arctg}\frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}; x = 2\operatorname{arctg}\frac{3}{5} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

6. Применение формул преобразование произведения тригонометрических функций в сумму или разность, преобразования суммы и разности в произведение

Сущность данного метода заключена в применении тригонометрических формул, а именно:

$$\begin{aligned} 1) \sin x \cos y &= \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}; & 2) \cos x \cos y &= \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2}; \\ 3) \sin x \sin y &= \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}. \end{aligned}$$

Пример. Решить уравнение: $2\cos x \sin 3x = \sin 4x + 1$.

Преобразуем левую часть уравнения, используя формулу произведения синуса на косинус:

$$2 \frac{\sin 4x + \sin 2x}{2} = \sin 4x + 1 \Rightarrow \sin 4x + \sin 2x = \sin 4x + 1 \Rightarrow \sin 2x = 1 \Rightarrow$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Пример. Решить уравнение: $\sin 3x + \sin x = \sin 2x$.

Преобразуем левую часть уравнения, заменив сумму тригонометрических функций на произведение:

$$2 \cdot \frac{\sin(2x + x) + \sin(2x - x)}{2} = \sin 2x \Rightarrow 2\sin 2x \cos x - \sin 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ответ: $x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

7. Применение ограниченности функций $y = \sin x, y = \cos x$.

При решении любого тригонометрического уравнения важно помнить про ограниченность области определения тригонометрических функций, а именно $|\sin x| \leq 1, |\cos x| \leq 1$.

Пример. Решить уравнение: $3\sin 5x + 7\cos 7x = 13$.

Известно, что $-1 \leq \sin 5x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\sin 5x \leq 3$,

$$-1 \leq \cos 7x \leq 1 \Rightarrow -7 \leq 7\cos 7x \leq 7.$$

Таким образом, $-10 \leq 3\sin 5x + 7\cos 7x \leq 10$.

Исходя из множества значений, можно сделать вывод, что уравнение решений не имеет.

Пример. Решить уравнение: $\cos 3x + \cos 2,5x = 2$.

Ввиду ограниченности функции $y = \cos x$, исходное равенство выполняется только в том случае, если $\cos 3x = 1$ и $\cos 2,5x = 1$, то есть от исходного уравнения перейдем к системе:

$$\begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \cos 2,5x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2,5x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{4\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Чтобы найти решение полученной системы, необходимо решить в целых числах уравнение:

$$\frac{2\pi k}{3} = \frac{4\pi n}{5} \Rightarrow k = \frac{6n}{5}.$$

Таким образом, целое число n должно быть кратно 5 или k должно быть кратно 6.

Подставив $n = 5t$ во второе уравнение последней системы, получим:

$$x = 4\pi t, t \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = 4\pi t, t \in \mathbb{Z}$

1.4 Требования к освоению темы «Тригонометрические уравнения» в школьном курсе

Основной целью изучения математики является развитие мышления, активизация мыслительной деятельности, особое место в данном процессе занимает алгебра, изучение в её курсе различных содержательных линий. Овладение различными логическими, абстрактными конструкциями способствует развитию многих умений: находить закономерности, обосновывать истинность, использовать обобщение, конкретизацию, абстрагирование, аналогию.

Изучение тригонометрических уравнений приходится на 10-11 класс. В соответствии с федеральной рабочей программой среднего общего образования базового уровня обучающиеся 10 классы должны [1]:

- оперировать такими понятиями, как синус, косинус, тангенс произвольного угла, тригонометрическое уравнение;
- использовать запись тригонометрического угла, используя обратные тригонометрические функции;
- выполнять преобразования тригонометрических выражений;

- решать тригонометрические уравнения.

На освоение формул тригонометрии и тригонометрических уравнений отводится 22 ч.

В соответствии с федеральной рабочей программой среднего общего образования углубленного уровня обучающиеся 10 классы должны:

- свободно оперировать понятиями: синус, косинус, тангенс, котангенс числового аргумента и давать определения им;
- оперировать понятиями: арккосинус, арксинус, арктангенс числового аргумента и давать определения им;
- применять тригонометрические формулы для преобразования различных тригонометрических выражений;
- свободно оперировать понятием тригонометрические уравнения и применять формулы для решения различных типов тригонометрических уравнений.

На освоение тригонометрических выражений и уравнений отводится также 22 ч, как и на базовом уровне.

Таким образом, главной целью изучения темы «Тригонометрические уравнения» является формирование у обучающихся умения решать простейшие тригонометрические уравнения, а также овладение различными приемами для решения разных типов уравнений.

Рассмотрим методическую линию изучения темы «Тригонометрические уравнения» в учебнике «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы» Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, М.В. Ткачёва, который входит в федеральный перечень учебников 2025-2026 учебного года [3].

Изучение тригонометрических уравнений начинается с уравнения вида: $\cos x = a$. Сразу приводится ряд примеров для демонстрации способа решения предложенного уравнения. Рассматриваются уравнения с разными значениями a . Вводится определение арккосинуса: «арккосинусом числа $a \in [-1; 1]$

называется такое число $\alpha \in [0, \pi]$, косинус которого равен a ». В этом же параграфе доказывается справедливость формулы:

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

Показывается, что корни уравнения можно находить по формуле:

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Особое внимание уделяется решению частных случаев уравнения: $\cos x = 0, \cos x = 1, \cos x = -1$.

Далее обучающиеся переходят к изучению уравнения $\sin x = a$. В данной теме также рассматривается ряд примеров, вводится определение арксинуса. Автор дает следующую трактовку понятию: «Арксинусом числа $a \in [-1; 1]$ называется такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a ».

Доказана формула: $\arcsin(-a) = -\arcsin a$.

Выведена формула, которой выражается решение рассматриваемого уравнения: $x = (-1)^k \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Также отмечены частные случаи уравнения и их решения.

После осуществляется изучения другого простейшего уравнения:

$$\operatorname{tg} x = a.$$

План освоения темы осуществляется по аналогии с другими простейшими уравнениями, то есть автор дает определение: «Арктангенсом числа $a \in \mathbb{R}$ называется такое число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, тангенс которого равен a ».

Выведена общая формула для решения уравнения:

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

а также доказано, что $\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a$.

После выведения общих формул для решения простейших уравнений, осуществляется переход к решению более сложных уравнений.

В учебнике рассмотрены некоторые примеры решения уравнений:

- 1) уравнения, сводящиеся к квадратным;
- 2) уравнения вида: $a \sin x + b \cos x = c$.

3) уравнения, решаемые разложением левой части на множители.

В конце каждого параграфа предложена система упражнений, которая способствует усвоению изложенного теоретического материала [4].

В данном учебнике в начале каждого параграфа содержатся цитаты великих математиков, которые способствуют расширению кругозора обучающихся.

Таким образом, в учебнике Ш. А. Алимова изучение темы «Тригонометрические уравнения» проводится по содержательно-методической линии, что демонстрируется в таблице 1.

Таблица 1 – Изучение темы «Тригонометрические уравнения» «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы» Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, М.В. Ткачёва

Название темы	Содержание темы
Уравнение $\cos x = a$	Нахождение общей формулы корней уравнения, примеры решений, демонстрация решений на тригонометрической окружности, частные случаи.
Уравнение $\sin x = a$	Нахождение общей формулы корней уравнения, примеры решений, демонстрация решений на тригонометрической окружности, частные случаи.
Уравнение $\operatorname{tg} x = a$	Нахождение общей формулы корней уравнения, примеры решений, демонстрация решений на тригонометрической окружности, частные случаи.
Решение тригонометрических уравнений: 1. Уравнения, сводящиеся к квадратным 2. Уравнение	Примеры решения некоторых типов уравнений. Примеры решения некоторых типов уравнений.

Продолжение таблицы 1

$a\sin x + b\cos x = c$ 3. Уравнения, решаемые разложением левой части на множители	Демонстрация метода введения вспомогательного угла. Примеры решения некоторых типов уравнений.
---	---

1.5 Дифференцированный подход как стратегия изучения тригонометрических уравнений

В современной образовательной среде личностно-ориентированное обучение является одним из основных приоритетных направлений. Особое внимание уделяется индивидуализации и дифференциации обучения.

Дифференциация – разделение, расслоение целого на различные части, формы, именно такой перевод с латинского языка имеет данное понятие.

Дифференцированное обучение предполагает овладение минимумом общеобразовательной подготовки каждого ученика. Такой формат учитывает потребности не только сильных обучающихся, но и тех, кому изучение предмета, в частности, алгебры даётся тяжело.

Селевко Г. К. дает определение: «Дифференцированное обучение – это форма организации учебного процесса, при которой учитель работает с группой обучающихся, составленной с учетом наличия у них каких-либо значимых для учебного процесса общих качеств» [11].

Выделяют различные виды дифференциации.

1. Дифференциация по психологическим особенностям, при котором учитывается тип мышления, памяти.

2. Дифференциация по обученности, при которой учитывается степень освоенности материала, то есть ученики, которые полностью освоили тему,

получают задания на углубления знаний, а обучающиеся плохо освоившие тему получают задания коррекцию знаний.

3. Дифференциация по познавательным способностям, при которой обучающимся предлагается задачи разного уровня сложности для решения.

4. Дифференциация по интересам и склонностям, при которой обучающимся предлагаются различные исследовательские и творческие задания, соответствующие их интересам.

Использование дифференцированного подхода в обучении на уроках математики способствует повышению учебной мотивации, интереса к предмету.

Процесс успешной организации дифференцированного обучения на уроке должен включать следующие этапы:

1. Определение первичного критерия дифференциации.
2. Проведение диагностики.
3. Распределение обучающихся по группам.
4. Разработка заданий разного уровня.
5. Непосредственно реализация дифференцированного подхода к ученикам.

При распределении обучающихся на группы, можно выделить следующие.

1. Ученики с высокой успеваемостью. Они как правило более самостоятельные, трудолюбивые, имеют высокий уровень познавательной активности. При работе с ними следует предусмотреть четкую организацию деятельности, подбор заданий высокого уровня сложности.

2. Ученики со средними учебными возможностями. Главное в работе с такими обучающимися – развитие их познавательных способностей, решение возникших проблемных ситуаций.

3. Ученики с низкой успеваемостью. При работе с ними важно помогать усваивать базовые понятия и решать типичные упражнения.

Уровень знаний учителем может быть выявлен посредством анализа предметных результатов, которые обучающиеся демонстрируют во время написания проверочных и контрольных работ. Результаты контрольной работы дают представления о знаниях и умениях. По теме «Тригонометрические уравнения» можно выделить следующие элементы знаний: понятие простейшего тригонометрического уравнения; типы тригонометрических уравнений; формулы для нахождения корней тригонометрического уравнения; элементы умений: умение решать простейшие тригонометрические уравнения; уравнения сводящиеся к квадратным; однородные уравнения; умение находить корни тригонометрического уравнения. В соответствии с демонстрируемыми элементами учителю предоставлена возможность включить дифференцированную форму работы на различных типах уроков математики [9].

ГЛАВА 2 ОРГАНИЗАЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРОВАННОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОБУЧАЮЩИХСЯ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ В СТАРШЕЙ ШКОЛЕ

2.1 Анализ содержания задачного материала школьных учебников по теме «Тригонометрические уравнения»

В учебнике «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы» Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, М.В. Ткачёва [1], который входит в федеральный перечень учебников 2025-2026 учебного года в разделе «Тригонометрические уравнения» представлены задания на вычисления, сравнения чисел, непосредственное решение уравнений, доказательство равенств, упрощение выражений, нахождение корней на заданном промежутке, наименьшего положительного и наибольшего отрицательного корня. Общего количество задач раздела составляет 193. Проанализируем содержание материала для каждого типа задач (Таблица 2).

Таблица 2 – Анализ задачного материала в учебнике «Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы» Ш.А. Алимова, Ю.М. Колягина, М.В. Ткачёва

Типы уравнений	Количество	%
Общее количество заданий	193	100
Простейшие тригонометрические уравнения	64	33,1
Уравнения, сводящиеся к квадратным	20	10,3
Уравнение $a\sin x + b\cos x = c$	4	2
Однородные уравнения	14	7,2
Уравнения, решаемые разложением левой части на множители	20	10,3
Уравнения, решаемые с помощью	65	33,6

Продолжение таблицы 2

тригонометрических формул		
Уравнения, содержащие другие функции	6	3,1

Таким образом, решению простейших тригонометрических уравнений уделяется наибольшее внимание, поскольку любое тригонометрическое уравнение сводится к решению простейшего.

Способ замены переменной является знакомым для обучающихся, так как данный метод применим для решения других видов уравнений, изучаемых ранее в школьном курсе. Такой способ решения является одним из основных при решении тригонометрических уравнений, поэтому также автором представлены уравнения для отработки метода.

Наименьшее внимание уделяется типу уравнений $a\sin x + b\cos x = c$, в учебнике предложены 2 способа их решения.

Наибольший объём заданий представлен для отработки уравнений, которые решаются с применением тригонометрических формул, а именно: формул приведения, двойного угла, сложения тригонометрических функций и т.д. Обуславливается это тем, что обучающимся необходимо запомнить достаточно большое количество тригонометрических формул, а сделать это лучше всего решая практические задания.

Примерами заданий на каждый тип уравнения могут служить следующие задания, предложенные автором учебника:

1. Простейшие тригонометрические уравнения.

В начале каждого параграфа автор приводит примеры таких уравнений, демонстрируя их решение с использованием тригонометрической окружности.

Пример 1. Решить уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

Автор напоминает, что $\cos x$ является абсциссой точки единичной окружности, которая получена поворотом точки $P(1;0)$ вокруг начала координат

на некоторый угол x . Таким образом две точки на ней имеют координату $\frac{1}{2}$ (Рисунок 5).

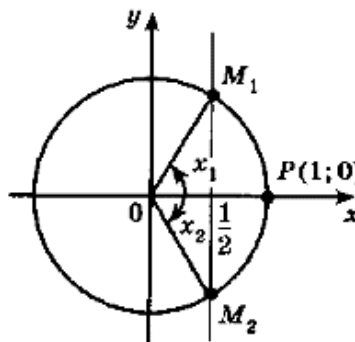


Рисунок 5 – Решение уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$

Значит, корни уравнения можно найти по формулам: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$,
 $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Вместо двух формул обычно записывают одну:

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Уравнения, сводящиеся к квадратным.

Пример 2. Решить уравнение $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$.

Предложенное автором уравнение является квадратным относительно $\sin x$. Заменив $\sin x$ на t , получим: $t^2 + t - 2 = 0$. Корнями являются $t_1 = 1$ и $t_2 = -2$. Следовательно, исходное уравнение сводится к решению двух простейших тригонометрических уравнений: $\sin x = 1$ и $\sin x = -2$. Таким образом, первое уравнение имеет решение $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, второе уравнение решений не имеет.

3. Уравнение $a \sin x + b \cos x = c$.

Пример 3. Решить уравнение $2 \sin x - 3 \cos x = 0$.

Поделим уравнение на $\cos x$, получим уравнение $2 \operatorname{tg} x - 3 = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow x = \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Автор обращает внимание, что при делении обеих частей уравнения на $\cos x$, могут быть потеряны корни, чтобы этого избежать нужно проверить, не являются ли корни уравнения $\cos x = 0$ корнями исходного уравнения.

4. Уравнения, решаемые с помощью метода введения вспомогательного угла.

Пример 4. Решить уравнение $4\sin x + 3\cos x = 5$.

В данном уравнении $a = 4, b = 3, \sqrt{a^2 + b^2} = 5$. Необходимо поделить обе части уравнения на 5, получим: $\frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x = 1$, φ – вспомогательный угол, что $\cos \varphi = \frac{4}{5}, \sin \varphi = \frac{3}{5}$. Исходное уравнение примет вид: $\sin x \cos \varphi + \cos x \sin \varphi = 1 \Rightarrow \sin(x + \varphi) = 1 \Rightarrow x + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $\varphi = \arccos \frac{4}{5} \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{4}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

5. Уравнения, решаемые разложением левой части на множители.

Пример 5. Решить уравнение $\sin 2x - \sin x = 0$.

Применив формулу синуса двойного угла, получим следующее уравнение: $2\sin x \cos x - \sin x = 0$. Вынесем $\sin x$ за скобки: $\sin x(2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ 2\cos x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

2.2 Дифференцированный подход при изучении тригонометрических уравнений

Тригонометрические уравнения – одна из сложных тем в школьном курсе алгебры, поскольку работа с данной темой связана с многовариантностью решений, так как результатом служат серии корней, абстрактностью мышления, так как необходимо работать с единичной окружностью, знанием различных тригонометрических формул. При объяснение темы учителем должна быть проведена сложная детальная работа, необходимо произвести отбор уравнений по принципу «от простого к сложному».

На уроках по изучению тригонометрических уравнений может быть применена следующая система уровневой дифференциации:

– 1 уровень – базовый уровень, в рамках которого изучаются самые простые типы тригонометрических уравнений и типичные способы их решений. Умениями этого уровня должны овладеть все обучающиеся.

– 2 уровень – повышенный уровень, в рамках которого рассматриваются основные типы уравнений и способы их решений, а также комбинации методов.

– 3 уровень – высокий уровень, в рамках которого рассматриваются тригонометрические уравнения, содержащие другие функции, а также задания прикладного характера.

Переход на каждый последующий уровень осуществляется только после освоения предыдущего. Обучающиеся с низкими способностями должны освоить 1 и 2 уровни. Ученики с высоким уровнем подготовки осваивают все уровни. По итогу освоения каждого этапа проводится контрольная работа, фиксирующая степень усвоения знаний.

Использование такого подхода удобно и при подготовке к единому государственному экзамену по математике, так как к основным предметным требованиям, которые проверяются на экзамене относится умение решать тригонометрические уравнения и их системы.

Каждый уровень содержит в себе несколько подуровней, которые способствуют более детальному изучению темы.

Рассмотрим содержание каждого уровня.

1. Базовый уровень.

1.1 Подуровень 1.

К уравнениям данного уровня отнесем простейшие тригонометрические уравнения. Такие уравнения являются основными, так как к ним сводится любое тригонометрическое уравнение. Решение дополнительных заданий на данном уровне не предусматривается. На данном этапе важно рассмотреть различные типы, в том числе частные случаи и уравнения, которые решений не имеют.

Примерами уравнений на данном уровне могут служить следующие.

1. Решить уравнение $\sin x = 1$:

$$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

2. Решить уравнение $\cos x = -1$:

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

3. Решить уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$:

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow x = \pm \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

4. Решить уравнение $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow x_1 = \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x_2 = \pi - \arcsin \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, x_2 = \pi + \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

5. Решить уравнение $\cos x = \frac{3}{4}$:

$$\cos x = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \pm \arccos \frac{3}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

6. Решить уравнение $\sin x = -5$.

Уравнение решений не имеет, так как $-1 \leq \sin x \leq 1$.

1.2 Подуровень 2.

Уравнения данного уровня могут содержать простейшие тригонометрические уравнения, аргумент которых не является односложным. Такие уравнения служат основой для подготовки к решению самых сложных заданий 1 уровня.

1. Решить уравнение $\sin 2x = \frac{1}{2}$:

$$\sin 2x = \frac{1}{2},$$

$$2x = \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$2x = \pi - \arcsin \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

$$2x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z$$

$$2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{5\pi}{12} + \pi k, k \in Z$$

2. Решить уравнение $tg \frac{x}{2} = 1$:

$$tg \frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z.$$

3. Решить уравнение $2\cos x \left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4} \right) = \sqrt{3}$:

$$2\cos x \left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4} \right) = \sqrt{3} \Rightarrow \cos x \left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4} = -\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

$$\frac{x}{4} = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$

$$\frac{x}{4} = -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$

$$\frac{x}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

$$\frac{x}{4} = -\frac{3\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$$

$$x = -\frac{3\pi}{2} + 8\pi k, k \in Z$$

$$x = -2\pi + 8\pi k, k \in Z$$

4. Решить уравнение $\sqrt{3}tg \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = 3$:

$$\sqrt{3}tg \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = 3 \Rightarrow tg \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{3}{\sqrt{3}} \Rightarrow tg \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} = \arctg \sqrt{3} + \pi k, k \in Z \Rightarrow \frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z \Rightarrow$$

$$\frac{x}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 3\pi k, k \in Z$$

1.3 Подуровень 3.

К содержанию данного уровня относятся простейшие тригонометрические уравнения с усложненным аргументом. На данном этапе

необходимо не только решить уравнение, но и выполнить дополнительное задание, например, найти наибольший отрицательный или наименьший положительный корень, то есть обучающимся необходимо решить предложенное уравнение, а позже произвести отбор корней в соответствии с предложенным условием. Уравнение такого типа входят в ЕГЭ, который предстоит сдавать каждому обучающемуся.

1. Решить уравнение $\sin \frac{\pi x}{3} = 0,5$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

$$\sin \frac{\pi x}{3} = 0,5,$$

$$\frac{\pi x}{3} = \arcsin 0,5 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \qquad \frac{\pi x}{3} = \pi - \arcsin 0,5 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi x}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \qquad \frac{\pi x}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{1}{2} + 6k, k \in \mathbb{Z} \qquad x = \frac{5}{2} + 6k, k \in \mathbb{Z}$$

при $k = 0 \Rightarrow x = 0,5$ и $x = 2,5$.

Таким образом, наименьшим положительным корнем является $x = 0,5$.

2. Решить уравнение $\operatorname{tg} \frac{\pi(x+2)}{3} = -\sqrt{3}$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

$$\operatorname{tg} \frac{\pi(x+2)}{3} = -\sqrt{3} \Rightarrow \frac{\pi(x+2)}{3} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\frac{\pi(x+2)}{3} = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+2 = -1 + 3k, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = -3 + 3k, k \in \mathbb{Z},$$

при $k = 0 \Rightarrow x = -3$.

Таким образом, наибольший отрицательный корень $x = -3$.

3. Решить уравнение $\cos \frac{\pi(x+2)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе напишите корни, корни принадлежат промежутку $[-\pi; 0]$.

$$\cos \frac{\pi(x+2)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\frac{\pi(x+2)}{2} = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x+2 = \frac{1}{2} + 4k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -1,5 + 4k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{\pi(x+2)}{2} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x+2 = -\frac{1}{2} + 4k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2,5 + 4k, k \in \mathbb{Z}$$

Корнями, принадлежащими промежутку $[-\pi; 0]$, являются $-2,5$ и $-1,5$.

2. Повышенный уровень.

2.1 Подуровень 1.

Уравнения данного уровня содержат уравнения, решаемые следующими методами: метод разложения на множители, замена переменной, однородные уравнения. Обучающиеся на этом уровне не применяют формулы тригонометрии, цель – освоить метод решения уравнения.

1. Решить уравнение $2\cos^2 5x - \cos 5x = 0$:

$$2\cos^2 5x - \cos 5x = 0 \Rightarrow \cos 5x(2\cos 5x - 1) = 0,$$

$$\begin{cases} \cos 5x = 0 \\ 2\cos 5x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 5x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{15} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

2. Решить уравнение $2\cos x \cos 2x = \cos x$:

$$2\cos x \cos 2x - \cos x = 0 \Rightarrow \cos x(2\cos 2x - 1) = 0,$$

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ 2\cos 2x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

3. Решить уравнение $3\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg} x - 4 = 0$.

Замена: $\operatorname{ctg} x = t$. Уравнение примет вид: $3t^2 + t - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -\frac{4}{3} \end{cases}$

Сделаем возврат к исходной переменной: $\begin{cases} \operatorname{ctg} x = 1 \\ \operatorname{ctg} x = -\frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = -\arctg \frac{4}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

4. Решить уравнение $\sin 4x + \cos 4x = 0$.

Разделим обе части уравнения на $\cos x \neq 0$. В силу основного тригонометрического тождества $\cos x$ не равен 0, так как при нуле $\sin x$ также обратится в нуль, что невозможно.

Следовательно, уравнение примет вид:

$$tg4x + 1 = 0 \Rightarrow 4x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \Rightarrow x = -\frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{4}, k \in Z.$$

5. Решить уравнение $\sin^2 x + 2\sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, получим уравнение:

$$tg^2 x + 2tgx - 3 = 0.$$

Замена, $tgx = t$:

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 1, \\ t_2 = -3. \end{cases}$$

$$\text{Тогда, } \begin{cases} tgx=1 \\ tgx=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k \in Z, \\ x=-arctg3+\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

2.2 Подуровень 2.

Для решения уравнений данного уровня обучающимся необходимо знать тригонометрические формулы: формулы приведения, двойного угла, суммы и разности аргумента, понижения степени. Каждое уравнение на этом уровне содержит одну из формул тригонометрии.

1. Решить уравнение $2\sin(\pi + x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$.

$$2\sin(\pi + x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x \Rightarrow -2\sin x \cos x - \sin x = 0 \Rightarrow$$

$$\sin x(-2\cos x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi k, k \in Z, \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

2. Решить уравнение $\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0$.

$$\sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0 \Rightarrow 2\sin x \cos x + \sqrt{3}\sin x = 0 \Rightarrow \sin x(2\cos x + \sqrt{3}) = 0,$$

$$\begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi k, k \in Z \\ x = \pm(\pi - \arccos \frac{\sqrt{3}}{2}) + 2\pi k, k \in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi k, k \in Z \\ x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}.$$

3. Решить уравнение $2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$.

$$2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \Rightarrow$$

$$2\sin^2 x + \sqrt{2}\left(\sin x \cos \frac{\pi}{4} + \cos x \sin \frac{\pi}{4}\right) = \cos x$$

$$\Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x + \cos x = \cos x \Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x(2\sin x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pi k, k \in Z \\ x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \\ x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z \end{cases}$$

2.3 Подуровень 3.

Уравнения этого уровня представляют собой обобщение знаний, полученных на двух предыдущих подуровнях, а именно решение уравнений, в которых встречаются различные тригонометрические формулы и комбинации методов нахождения корней. Также могут быть включены уравнения, которые требуют анализа области допустимых значений.

1. Решить уравнение $7\sin\left(2x - \frac{5\pi}{2}\right) + 9\cos x + 1 = 0$.

$$\begin{aligned} 7\sin\left(2x - \frac{5\pi}{2}\right) + 9\cos x + 1 = 0 &\Rightarrow -7\cos 2x + 9\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \\ -7(2\cos^2 x - 1) + 9\cos x + 1 = 0 &\Rightarrow 14\cos^2 x - 9\cos x - 8 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

Замена $\cos x = t$. Получим, $14t^2 - 9t - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -\frac{1}{2} \\ t_2 = \frac{32}{28} \end{cases}$.

Следовательно, $\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

2. Решить уравнение $\frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\cos x + \sin 2x}{\cos 3x} = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \cos x + \sin 2x = 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x + 2\sin x \cos x = 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \cos x(1 + 2\cos x) = 0 \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{1}{2} \\ \cos 3x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом, корнями уравнения являются: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z, \\ x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$

3. Высокий уровень разделен на три подуровня, первый из них включает в себя задания, которые содержат тригонометрические уравнения с обязательным дополнительным заданием: поиск корней на заданном промежутке. Второй подуровень содержит комбинированные

тригонометрические уравнения, включающие в себя другие математические функции. Третий подуровень: уравнения с параметром и прикладные задачи.

3.1 Подуровень 1.

1. Решить уравнение $tg(\pi + x)\cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = tg \frac{5\pi}{4}$. Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-2\pi; -\frac{\pi}{2}]$.

$$tg(\pi + x)\cos(\frac{\pi}{2} - 2x) = tg \frac{5\pi}{4} \Rightarrow tg x \sin 2x = 1 \Rightarrow \frac{\sin x \cdot 2 \sin x \cos x}{\cos x} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z, \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z, \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in Z. \end{cases}$$

Объединим полученные серии решений: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k, k \in Z$.

Проведем отбор корней, используя двойное неравенство:

$$-2\pi \leq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k \leq -\frac{\pi}{2},$$

$$-2 \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}k \leq -\frac{1}{2},$$

$$-\frac{9}{4} \leq \frac{1}{2}k \leq -\frac{3}{4},$$

$$-\frac{9}{2} \leq k \leq -\frac{3}{2}.$$

$$k = -4; x = \frac{\pi}{4} - 2\pi = -\frac{7\pi}{4},$$

$$k = -3; x = \frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{2} = -\frac{5\pi}{4},$$

$$k = -2; x = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3\pi}{4}.$$

3.2 Подуровень 2.

1. Решить уравнение $\log_9(3^{2x} + 5\sqrt{2}\sin x - 6\cos^2 x - 2) = x$. Найти корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-\frac{3\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}]$.

$$\log_9(3^{2x} + 5\sqrt{2}\sin x - 6\cos^2 x - 2) = x \Rightarrow 3^{2x} + 5\sqrt{2}\sin x - 6\cos^2 x - 2 = 9^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5\sqrt{2}\sin x - 6\cos^2 x - 2 = 0 \Rightarrow 5\sqrt{2}\sin x - 6(1 - \sin^2 x) - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\sin^2 x + 5\sqrt{2}\sin x - 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{4\sqrt{2}}{3}, \\ \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{cases}$$

Первое уравнение решений не имеет, решением второго уравнения является: $\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Отбор корней на промежутке проведем с помощью двойного неравенства:

$$1. -\frac{3\pi}{2} \leq \frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq \frac{2\pi}{3} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq \frac{1}{4} + 2k \leq \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{7}{4} \leq 2k \leq \frac{5}{12} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{7}{8} \leq k \leq \frac{5}{24}.$$

$$k = 0; x = \frac{\pi}{4}.$$

$$2. -\frac{3\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq \frac{2\pi}{3} \Rightarrow -\frac{3}{2} \leq \frac{3}{4} + 2k \leq \frac{2}{3} \Rightarrow -\frac{9}{4} \leq 2k \leq -\frac{1}{12} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{9}{8} \leq k \leq -\frac{1}{24}.$$

$$k = -1; x = \frac{3\pi}{4} - 2\pi = -\frac{5\pi}{4}.$$

2. Решить уравнение $7^{2\log_2^2(\cos x)} = \frac{7}{7^{\log_2(\cos x)}}$. Найти корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$.

$$\cos x \geq 0, \quad 7^{2\log_2^2(\cos x)} = \frac{7}{7^{\log_2(\cos x)}} \Rightarrow 7^{2\log_2^2(\cos x)} = 7^{1-\log_2(\cos x)} \Rightarrow \\ \Rightarrow 2\log_2^2(\cos x) = 1 - \log_2(\cos x) \Rightarrow 2\log_2^2(\cos x) + \log_2(\cos x) - 1 = 0.$$

$$\text{Решая квадратное уравнение, получим: } \begin{cases} \log_2(\cos x) = -1 \\ \log_2(\cos x) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ \cos x = \sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Отбор корней проведем с помощью тригонометрической окружности (Рисунок 6):

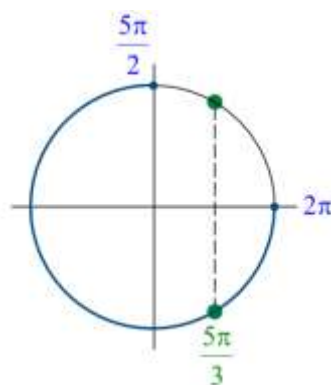


Рисунок 6 – Тригонометрическая окружность для отбора корней

3.3 Подуровень 3.

1. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{a \sin x + \cos x} = \sqrt{a \cos x + \sin x}$ имеет решения на отрезке $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$.

$$\sqrt{a \sin x + \cos x} = \sqrt{a \cos x + \sin x} \Rightarrow \begin{cases} a \sin x + \cos x = a \cos x + \sin x, \\ a \sin x + \cos x \geq 0. \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$\begin{aligned} a \sin x + \cos x &= a \cos x + \sin x \Rightarrow \sin x(a-1) - \cos x(a-1) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (a-1)(\sin x - \cos x) = 0. \end{aligned}$$

При $a=1$:

$$\sin x + \cos x \geq 0 \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{3\pi}{4} + 2\pi k.$$

Из неравенства данному промежутку принадлежат числа: $\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$.

$$\text{При } a \neq 0, \sin x = \cos x \Rightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Среди корней, полученной серии, принадлежит промежутку единственное число: $\frac{5\pi}{4}$.

Подставим значение в неравенство:

$$a \sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{5\pi}{4} \geq 0 \Rightarrow -a \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \geq 0 \Rightarrow a \leq -1.$$

Таким образом, $a \leq -1, a = 1$.

2.3 Конспекты уроков по теме «Тригонометрические уравнения»

1. Тема: «Простейшие тригонометрические уравнения».

Тип занятия: урок систематизации знаний.

Цель: закрепить алгоритм решения простейших тригонометрических уравнений.

Этап I. Организационный этап.

Приветствие, проверка готовности к учебному занятию.

Этап II. Актуализация опорных знаний.

Учитель: На прошлом уроке мы узнали, какие уравнения в математике называются тригонометрическими и вывели алгоритм решения простейших тригонометрических уравнений. Прежде, чем сегодня приступить к решению, повторим изученную ранее теорию. Обратим внимание на доску. Необходимо вычислить значений аркфункций и сопоставить полученный ответ букве в таблице. Вы получите слово и узнаете фамилию великого математика, благодаря которому появился первый учебник по предмету.

Задание. Установите соответствие

- | | |
|--|--|
| 1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, | 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, |
| 2) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, | 7) $\arcsin 0$, |
| 3) $\arcsin(-1)$, | 8) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$, |
| 4) $\arctg(-1)$, | 9) $\arcsin 1$. |
| 5) $\arctg\sqrt{3}$, | |

$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	0	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
н	а	и	к	м	ц	и	г	й

(Обучающиеся работают самостоятельно, вычислив значение каждого выражения получают фамилию: Магницкий)

Учитель: отлично! Какие уравнения называют тригонометрическими?

(Тригонометрическим уравнением называется уравнение, в котором переменная содержится только под знаком тригонометрической функции.)

Что означает решить тригонометрическое уравнение?

(Решить уравнение — значит найти все его корни или доказать, что корней удовлетворяющих уравнению нет.)

Какие уравнения относятся к простейшим?

(Уравнения вида: $\sin x = a, \cos x = a, \operatorname{tg} x = a, \operatorname{ctg} x = a$ называются простейшими)

Обратимся к таблице. Ваша задача найти ошибки в решении простейших тригонометрических уравнений и исправить их.

Уравнение	Ответ с ошибкой	Правильный ответ
$\cos x = \frac{1}{2}$	$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$	$x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$
$\cos x = \frac{\sqrt{10}}{3}$	$x = \pm \arccos \frac{\sqrt{10}}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$	Нет корней

(Учитель фронтально работает с обучающимися. Совместно устраняют ошибки при решении простейших уравнений.)

Этап III. Организация практической деятельности обучающихся по закреплению знаний

Учитель: У каждого на парте лежит рабочий лист, на котором предложены тригонометрические уравнения разного уровня. Ваша задача самостоятельно определить уровень, который будете решать, важно, чтобы за партой были решены уравнения различных уровней.

Задание: Решить тригонометрические уравнения:

1 уровень

1) $\sin x = 0,$

3) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2},$

5) $\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3},$

2) $\sin x + \frac{1}{2} = 0,$

4) $\cos x + 1 = 0,$

6) $\operatorname{tg} x - 1 = 0.$

2 уровень

1) $\sin 2x = \frac{1}{2},$

3) $\cos 3x + 2 = 0,$

5) $2\cos x \left(\frac{\pi}{3} + \frac{x}{4} \right) = \sqrt{3},$

2) $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1,$

4) $\operatorname{ctg} 3x - 1 = 0,$

6) $\sqrt{3}\operatorname{tg} \left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6} \right) = 3.$

3 уровень

1) $\sin \frac{\pi x}{3} = 0,5,$

2) $\cos \frac{\pi(x+2)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$

3) $\operatorname{tg} \frac{\pi(x+2)}{3} = -\sqrt{3}.$

В ответе укажите наибольший отрицательный и наименьший положительный корень.

(Обучающиеся решают выбранные задания. После решения обмениваются работами с соседом по парте и выполняют взаимопроверку, комментируя ошибки друг друга. Обращаются к учителю, в случае несогласия с решением друг друга.)

Этап IV Рефлексия

Учитель: На сегодняшнем уроке мы вспомнили как находить значение аркфункций, алгоритм решения простейших тригонометрических уравнений, применили алгоритм на практике. Чтобы оценить свою деятельность на уроке, заполним лист.

Целевая установка	
Научиться решать: простейшие тригонометрические уравнения	
Пообщаться с одноклассниками	
Получить оценку	
Достиг ли я цели	
Какую оценку я заработал на уроке?	

2. Тема: «Методы решения тригонометрических уравнений»

Тип занятия: урок систематизации знаний (урок–практикум).

Цель: закрепить и систематизировать изученные методы решения тригонометрических неравенств.

Этап I. Организационный этап.

Приветствие, проверка готовности к учебному занятию.

Этап II. Актуализация опорных знаний.

Учитель: Как мы уже знаем любое тригонометрическое уравнение сводится к решению простейшего, поэтому необходимо быстро и правильно их решать. Разделимся на три группы (по количеству рядов). Задача каждого решить простейшее тригонометрическое уравнение. У первого сидящего в ряду на парте лежит карточка с заданием, решив уравнение, начиная с первого, учащемуся нужно передать лист следующему. Таким образом, решим все предложенные уравнения. Ученик с последней парты передают решению на проверку учителю. Задание выполняется на время. Победителем станет та команда, которая решит большее количество уравнений правильно и за лучшее время.

Задания для актуализации знаний:

$\sin x = 0$	$\cos x = \frac{1}{2}$	$\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$	$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{ctg} x = 1$	$\sin x = 1$
$\cos x = -1$	$\sin x = 4$	$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cos x = -\frac{1}{2}$	$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\operatorname{tg} x = \frac{3}{4}$

Этап III. Организация практической деятельности обучающихся по закреплению знаний

Учитель: На сегодняшнем уроке отрабатывать знания о методах решения тригонометрических уравнениях будем в небольших группах.

Выбор групп осуществляется самостоятельно.

Группа 1 «Базовый». Группа работает под контролем учителя.

Цель: научиться разбираться в применении методов и не путать их.

1. $\sin^2 x + \sin x - 2 = 0$.
2. $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$.
3. $\sin 4x + \cos 4x = 0$.

Группа 2 «Повышенный». Группа работает, выполняя парную работу с взаимопроверкой.

Цель: Решить уравнение, применив тригонометрическую формулу и определить метод решения.

$$1. 2\sin(\pi + x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x.$$

$$2. \sin 2x + \sqrt{3}\sin x = 0.$$

$$3. \sin^2 x - 5\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 0.$$

Группа 3 «Высокий». Группа работает в мини- группах по 3-4 человека.

Цель: Решить уравнения, в которых представлена комбинация нескольких методов.

$$1. 7\sin\left(2x - \frac{5\pi}{2}\right) + 9\cos x + 1 = 0.$$

$$2. \cos 2x + \sin(-x) - 1 = 0.$$

3. «Найди ошибку» в решении уравнения из ЕГЭ.

$$\begin{aligned} & \sqrt{13} \\ & \text{а) } 1 - \cos 2x + \sqrt{2}\sin x = \sqrt{2} - 2\sin(x + \pi) \\ & 1 - 1 + 2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x = \sqrt{2} - 2\sin(\pi + x) \\ & 2\sin^2 x + \sqrt{2}\sin x = \sqrt{2} - 2\sin x \\ & 2\sin^2 x - 2\sin x + \sqrt{2}\sin x - \sqrt{2} = 0 \\ & 2\sin x(\sin x - 1) + \sqrt{2}(\sin x - 1) = 0 \\ & (\sin x - 1)(2\sin x + \sqrt{2}) = 0 \\ & \sin x - 1 = 0 \quad \text{или} \quad 2\sin x + \sqrt{2} = 0 \\ & \sin x = 1 \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ & x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ & \quad \quad \quad x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Решив уравнения, один представитель каждой группы на доске решает задание. Остальные записывают решение в тетрадях. На данном этапе происходит обсуждение трудных мест, учитель акцентирует на них внимание.

Этап IV. Самостоятельная работа с самопроверкой.

Цель: каждый обучающийся должен решить любое уравнение, предложенное учителем.

$$1. 2\cos^2 x + \cos x = 0.$$

$$2. 3\cos 2x + 11\sin x = 7.$$

$$3. \sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 2\cos x + \sqrt{2}.$$

Решив, ученик проверяет ответ и сам ставит оценку.

Этап V. Рефлексия.

Учитель: На полях тетради нарисуйте лестницу, состоящую из 4 ступеней. Ваша задача поставить галочку на ступеньки, которая соответствует утверждению:

1 ступенька: «Путаю методы решения».

2 ступенька: «Понимаю, какой метод применить, но допускаю ошибки при решении».

3 ступенька: «Большинство уравнений решаю уверенно».

4 ступенька: «Трудности при решении уравнений не возникают».

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение тригонометрических уравнений одна из основных тем по математике в старших классах. Дифференцированный подход способствует урегулированию сразу нескольких проблем, которые возникают в результате освоения темы, а именно они могут быть связаны с разнообразием методом решений, применением множества тригонометрических формул.

В ходе проделанной работы были получены следующие результаты.

1. Изучены и проанализированы научная и учебно-методическая литература, связанная с организацией дифференцированного подхода на уроках математики.

2. Выявлены основные требования, которые предъявлены для освоения темы «Тригонометрические уравнения».

3. Разработана методическая система изучения тригонометрических уравнений, в основе которой лежит дифференцированный подход.

4. Разработаны конспекты уроков, при реализации которых применяется дифференцированный подход.

5. Составлена подборка тригонометрических уравнений, которая может быть использована на уроках.

Полученные результаты свидетельствуют о достижении поставленной цели, так как задачи, поставленные во введении, были решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Федеральная рабочая программа среднего общего образования. Математика. 10-11 классы (базовый уровень) : [утверждена приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 18 мая 2023 г.]. М. : Просвещение, 2025. 89 с.
2. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: [утвержден приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 31 мая 2021 г.]. М. : Просвещение, 2021. 62 с.
3. Федеральный перечень учебников, рекомендованных к использованию при реализации программ общего образования : [утвержден приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 26 июня 2025 г.]. М. : Просвещение, 2025. 810 с.
4. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Ткачёва М. В. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы: базовый и углублённый уровни : учебник. М. : Просвещение, 2023. 469 с.
5. Балк М. Б. Математика после уроков : пособие для учителей. М. : Просвещение, 2003. 462 с.
6. Гельфанд И.М., Львовский С.М., Тоом А.Л. Тригонометрия : учеб. пособие. М. : МЦНМО, 2002. 199 с.
7. Задачи. URL: <https://problems.ru>. Заглавие с экрана (дата обращения: 24.03.2026).
8. Ким Д. Х. Нестандартные способы решения тригонометрических уравнений // Юный учебный. 2023. № 4. С. 87-92.
9. Полянская Н.В. Обучение учащихся решению тригонометрических уравнений в условиях дифференциального подхода // Науч. журн. 2017. № 3. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?edn=yomisjd> (дата обращения: 25.11.2025).

10. Решу ЕГЭ. URL: <https://math-ege.sdamgia.ru>. Заглавие с экрана (дата обращения: 12.04.2026).
11. Селевко Г.К. Энциклопедия образовательных технологий. В 2-х т. Т.1. : учеб.-метод. пособие. М. : Народное образование, 2005. 556 с.
12. Хабибуллин К.Я. Систематизируем методы решения тригонометрических уравнений // Образование в современной школе. 2019. №9. С. 30-38.
13. Хуторской А. В. Педагогика : учебник для вузов. СПб: Питер, 2019. 608 с.
14. Шахмейстер А.Х. Тригонометрия : учеб. пособие. М. : МЦНМО, 2014. 750 с.

Подборка тригонометрических уравнений, соответствующих каждому
уровню приведенной дифференцированной системы

1. Базовый уровень

1.1 Подуровень 1

$$1) \cos x = 1 \quad 6) \sin x = 1 \quad 11) \cos x = \frac{1}{2} \quad 16) \operatorname{tg} x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$2) \cos x = -1 \quad 7) \sin x = -1 \quad 12) \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 17) \operatorname{tg} x = \frac{4}{3}$$

$$3) \cos x = 0 \quad 8) \sin x = 0 \quad 13) \sin x = -\frac{1}{2} \quad 18) \operatorname{ctg} x = -\frac{2}{3}$$

$$4) \cos x = \frac{4}{5} \quad 9) \sin x = \frac{2}{3} \quad 14) \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 19) \operatorname{ctg} x = \sqrt{3}$$

$$5) \cos x = \frac{17}{12} \quad 10) \sin x = -3 \quad 15) \operatorname{tg} x = 1$$

1.2 Подуровень 2

$$1) \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad 6) \operatorname{tg}(3x - \frac{3\pi}{4}) = \sqrt{3}$$

$$2) \cos(2x + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \quad 7) \operatorname{ctg} 2x = 3$$

$$3) \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 8) \operatorname{ctg}(3x - \frac{5\pi}{6}) = -1$$

$$4) \sin(3x + \frac{\pi}{2}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad 9) \cos(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{3}) = 1$$

$$5) \operatorname{tg} 4x = 1 \quad 10) 2\sin(\frac{3x}{4} - \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}$$

1.3 Подуровень 3

1) Решить уравнение: $\cos \frac{\pi(2x+10)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

2) Решить уравнение: $\cos \frac{\pi(x-7)}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе запишите наибольший отрицательный корень.

3) Решить уравнение: $\sin \frac{\pi(x-3)}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

4) Решить уравнение: $\sin \frac{\pi x}{3} = \frac{1}{2}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

5) Решить уравнение: $\operatorname{tg} \frac{\pi(8x+5)}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

6) Решить уравнение: $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} = -1$. В ответе напишите наибольший отрицательный корень.

7) Решить уравнение: $\operatorname{ctg} \frac{\pi x}{3} = \sqrt{3}$. В ответе напишите наименьший положительный корень.

8) Решить уравнение: $\sin 4x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$. В ответ запишите сумму корней, принадлежащих $[0; \frac{\pi}{2}]$ отрезку, деленную на π .

9) Решить уравнение: $2\cos(\frac{\pi}{4} - 3x) = \sqrt{2}$. В ответе укажите произведение корней, входящих в промежуток $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, деленное на π^2 .

10) Решить уравнение: $\sqrt{3}\operatorname{tg}(\frac{1}{6}x + \frac{\pi}{3}) - 1 = 0$. В ответе укажите наименьший положительный корень, деленный на π .

2. Высокий уровень

2.1 Подуровень 1

1) $2\cos^2 x + \cos x = 0$

2) $2\cos^2 x + \sqrt{3}\cos x = 0$

3) $\operatorname{tg} 5x = \sin^2 x \cdot \operatorname{tg} 5x$

4) $\sin x \cos 3x - 1 = \sin x - \cos 3x$

5) $2x \cos x - 8 \cos x + x - 4 = 0$

6) $5\cos^2 x - 4\cos x - 1 = 0$

7) $\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2} = 0$

$$8) 8\sin^2 x - 3\sin x + 2 = 0$$

$$9) \sin^2 3x - 3\sin 3x + 2 = 0$$

$$10) \operatorname{tg}^4 x - 2\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$$

$$11) \sqrt{3}\sin 2x + 3\cos 2x = 0$$

$$12) \frac{2\sin x + 5\cos x}{3\sin x - 2\cos x} = 4$$

$$13) \sin^2 x - 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x = 0$$

2.2 Подуровень 2

$$1) \sin 2x = \sqrt{2}\sin x$$

$$2) \sin 2x + \sqrt{5}\cos x = 0$$

$$3) \cos 2x - 4\sqrt{2}\cos x + 4 = 0$$

$$4) 3\cos 2x + 11\sin x = 7$$

$$5) 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}\cos(2\pi - x)$$

$$6) 2\sin(\pi + x) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sin x$$

$$7) \sin 3x + \sin x = \sin 2x$$

$$8) \cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$$

$$9) 4\sin^4 x + 12\cos^2 x = 7$$

$$10) \sin^4 x + \cos^4 x = 1$$

2.3 Подуровень 3

$$1) \cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$2) \cos 2x + \sin(-x) - 1 = 0$$

$$3) \sin 2x + \sqrt{2}\sin x = 2\cos x + \sqrt{2}$$

$$4) \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\sin^2 x = \sin x + 2$$

$$5) \sin x + 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\sin 2x + 1$$

$$6) \frac{2\sin^2 x + 2\sin x \cos 2x - 1}{\sqrt{\cos x}} = 0$$

3. Повышенный уровень

3.1 Подуровень 1

1) $\sqrt{3}tg^2x - 4tgx + \sqrt{3} = 0$. Указать корни уравнения, которые принадлежат промежутку $\left[\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$

2) $\sin 2 - \sin(-x) + \cos(-x) - 1 = 0$. Указать корни уравнения, которые принадлежат промежутку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$

3) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \sin 2x = 0$. Указать корни уравнения, которые принадлежат промежутку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

4) $2\cos^3x + \sqrt{3}\cos^2x + 2\cos x + \sqrt{3} = 0$. Указать корни уравнения, которые принадлежат промежутку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$

5) $2\sin x \cdot \cos^2x + \sqrt{3} = \sqrt{3}\sin^2x$. Указать корни уравнения, которые принадлежат промежутку $\left[\frac{7\pi}{2}; 5\pi; \right]$

3.2 Подуровень 2

1) $\log_2(\cos x + \sin 2x + 8) = 3$

2) $2\log_3^2(2\cos x) - 5\log_3(2\cos x) + 2 = 0$

3) $\log_4(2^{2x} - \sqrt{3}\cos x - \sin 2x) = x$

4) $15^{\cos x} = 3^{\cos x} \cdot 5^{\sin x}$

5) $16^{\sin x} - 6 \cdot 4^{\sin x} + 8 = 0$

6) $\left(\frac{1}{49}\right)^{\sin(x+\pi)} = 7^{2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}$

7) $\frac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2\cos x + \sqrt{3}} = 0$

3.3 Подуровень 3

1) При всех значениях параметра a решить уравнение:

$$\sin(x-a) = \sin x + \sin a$$

2) Найдите значение параметра, при которых уравнение:

$$1 + p\sin x = p^2 - \sin^2 x$$

имеет решение.

3) Решите уравнение: $\cos^4 x - (a + 2)\cos^2 x - (a + 3) = 0$ при всех значениях параметра.

4) Найдите все значения параметра, при которых уравнение:

$$x^2 - 2c \sin x (\cos x) + 2 = 0$$

имеет единственное решение.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
« 12 » 09 20 25
Паньженский В.И.

Задание

по ВКР студента Кудашевой Полины Витальевны
(ФИО полностью)

Тема работы «Изучение тригонометрических уравнений в школе»

Утверждена приказом по университету от « 25.09 » 20 25 г. № 1103/0

Срок сдачи студентом законченной работы « 30 » 04 20 26 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1	Изучение и анализ литературы по теме исследования	Ноябрь-декабрь 2026 г.	Выполнено <i>Никитина</i>
2	Изучение требований к освоению темы «Тригонометрические уравнения» в школьном курсе	Январь 2026 г.	Выполнено <i>Никитина</i>
3	Анализ содержания задачного материала школьных учебников по теме «Тригонометрические уравнения»	Февраль-март 2026 г.	Выполнено <i>Никитина</i>
4	Рассмотрение дифференцированного подхода при изучении тригонометрических уравнений	Март-апрель 2026 г.	Выполнено <i>Никитина</i>
5	Разработка конспектов уроков по теме «Тригонометрические уравнения»	Апрель 2026 г.	Выполнено <i>Никитина</i>
6	Оформление библиографического списка	Май 2026 г.	Выполнено <i>Никитина</i>
7	Оформление работы, подготовка презентации и выступления	Май-июнь 2026 г.	Выполнено <i>Никитина</i>

Дата выдачи задания «11» 09 2025 г.

Руководитель *Никитина* Никитина О.Г.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению
Кудашева Кудашева П.В.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Кудашевой Полины Витальевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Кудашева Полина Витальевна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Изучение тригонометрических уравнений в школе», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.



подпись
28.04.26

дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 30.04.2026
дд.мм.гггг

Руководитель ВКР 
подпись Никитина О.Г.
И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Изучение тригонометрических уравнений в школе»

студентки 4 курса Кудашевой Полины Витальевны

И.О. Фамилия

направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

профиля «Математика»

Руководитель ВКР Никитина Ольга Геннадьевна

И.О. Фамилия



Ссылка на портал системы «Антиплагиат»:
адрес: <http://www.antiplagiat.ru>



Отчет о проверке

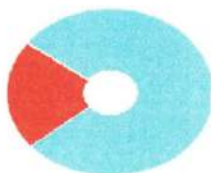
Автор: Кудашева Полина Витальевна

Название документа: ВКР Изучение тригонометрических уравнений в школе

Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Пензенский государственный университет

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
20.92%

Цитирование:
0%

Оригинальность:
79.08%

Самостихтование:
0%

ИИ-контент:
0%

1 «Совпадения», «Цитирование», «Самостихтование», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

1 Проверено: 85.94% текста документа, исключено из проверки: 14.06% текста документа. Разделы и элементы, отключенные пользователем: Титульный лист, Содержание, Библиография, Приложение, Таблицы.

- Совпадения – фрагменты проверяемого текста, полностью или частично совпадающие с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система определила как цитирование или самостихтование. Показатель «Совпадения» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям в общем объеме текста.
- Самостихтование – фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самостихтование» – это доля фрагментов текста, отнесенных к самостихтованиям, в общем объеме текста.
- Цитирование – фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. Цитированным относятся также шаблонные фразы библиографии, фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант, нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирование» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию в общем объеме текста.
- Текстовое порождение – фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- Источники – документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- Оригинальный текст – фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отнесенные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определяющим корректности и равномерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 131

Тип документа: Выпускная квалификационная работа

Дата проверки: 30.04.2026 16:07:04

Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 46

Словов в тексте: 57382

Слов в тексте: 7906

Число предложений: 1734

Комментарий: не указано

30.04.2026

ДД.ММ.ГГГГ.

подпись

Никитина О.Г.

И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Изучение тригонометрических уравнений в школе»
студентки Кудашевой Полины Витальевны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 22ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Кудашевой Полины Витальевны посвящена вопросам изучения тригонометрических уравнений в школьном курсе.

Актуальность темы исследования обусловлена тем, что изучение тригонометрических уравнений различных типов вызывает большие трудности у обучающихся. Так как для их решения недостаточно только уметь применять алгебраические преобразования, необходимо научиться работать с тригонометрической окружностью, знать свойства функций и различные формулы преобразования тригонометрических выражений.

Цель работы состоит в разработке методики изучения тригонометрических уравнений с использованием дифференцированного подхода, который позволит учитывать индивидуальные особенности учащихся.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, заключения, списка использованных источников и приложения.

Основная часть состоит из двух глав. В первой главе рассматриваются теоретические основы изучения тригонометрических уравнений в школьном курсе математики, в частности, требования к освоению этой темы и роль дифференцированного подхода к обучению учащихся при изучении данной темы.

Во второй главе проводится анализ задачного материала по данной теме, приводятся конспекты некоторых уроков по теме «Тригонометрические уравнения».

Работа Кудашевой П. В. является самостоятельным исследованием. Практическая значимость исследования состоит в том, что результаты работы могут быть использованы при проведении занятий в школе.

Выпускная квалификационная работа Кудашевой Полины Витальевны заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель ВКР Никитина Ольга Геннадьевна, доцент кафедры
«Математическое образование», к.ф.-м.н. 