

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Методика формирования математических понятий в средней школе»

Студент

Сотина 04.05.23
(подпись, дата)

Сотина Алина Андреевна
(ФИО полностью)

Руководитель

Никитина 04.06.23
(подпись, дата)

Никитина О.Г.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Журавлева 15.06.23
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 24.05.2023 № 12)

Заведующий кафедрой

Паньженский 24.05.23
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 22.06.23 № 8)

Секретарь ГЭК

Журавлева 22.06.23
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2023

Оглавление

Введение.....	3
Глава 1. Теоретические сведения о введении понятий в школьном курсе математики.....	5
1.1 Понятие как форма мышления.....	5
1.2 Определение понятий, виды определений.....	6
1.3 Классификация понятий.....	8
1.4 Этапы введения понятий.....	8
Глава 2. Методика введения математических понятий с 5 по 9 классы.....	10
2.1 Методика работы с математическими понятиями в 5 классе.....	10
2.2 Методика работы с математическими понятиями в 6 классе.....	23
2.3 Методика работы с математическими понятиями в 7 классе.....	33
2.4 Методика работы с математическими понятиями в 8 классе.....	44
2.5 Методика работы с математическими понятиями в 9 классе.....	53
Заключение.....	60
Список литературы.....	62

Введение

Понятия – основа любой науки. В федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования отмечены требования к предметным результатам освоения программы математики. Среди них «сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий» [16]. Формирование понятийного аппарата является важнейшей задачей обучения математике. Изучение математических понятий предполагает крайне внимательное отношение к процессу их формирования. Задачи на формирование понятий способствуют мотивации их введения, направлены на выявление существенных признаков понятия, способствуют усвоению определений, овладению объемом понятия, обучению применения понятий. Актуальность темы работы обусловлена сложившимися противоречиями между формированием математических понятий и недостаточной разработанностью методической базы по их формированию.

Проблема исследования заключается в ответе на вопрос: «Возможно ли создание полной единой методической разработки по формированию всех математических понятий в средней школе?»

Цель исследования: разработка методической базы по формированию некоторых математических понятий в средней школе.

Объект исследования: процесс обучения математике в общеобразовательной школе.

Предмет исследования: процесс формирования математических понятий в средней школе.

Задачи исследования:

1. Проанализировать методическую литературу, связанную с изучением математических понятий в средней школе.

2. Выявить особенности организации обучения математическим понятиям в каждом классе основной ступени общего образования.

3. Разработать методику изучения математических понятий в каждом классе основной ступени образования на примере некоторых понятий.

Теоретическая значимость исследования: результаты моей работы могут неограниченно дополняться методическими рекомендациями по формированию любых математических понятий в школьном курсе математики.

Практическая значимость исследования: результаты моей работы могут быть использованы учителями для быстрой подготовки к урокам введения некоторых математических понятий.

Новизна исследования: мной разработана авторская методика по формированию некоторых математических понятий в 5-9 классах.

Методы исследования:

- анализ методической литературы по теме исследования;
- анализ школьных учебников и пособий;
- обобщение и систематизация математической литературы по теме исследования.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. Во введении сформулированы: актуальность, проблема, цель, объект, предмет, задачи, значимость и новизна исследования. Глава 1 посвящена теоретическим основам формирования понятий в курсе математики средней школы. В ней рассмотрены основные характеристики понятий, виды определений, их классификация, определены требования к формированию математических понятий. В Главе 2 рассмотрены особенности обучения математике и приведены примеры формирования некоторых математических понятий в основной общей ступени образования в виде фрагментов урока. В заключении сформулированы основные выводы проведенного исследования. Список литературы содержит 18 наименований.

Глава 1. Теоретические сведения о введении понятий в школьном курсе математики

1.1 Понятие как форма мышления

Существует множество математических понятий, которые обучающиеся должны распознавать, различать и уметь использовать при устной и письменной речи.

Понятия являются формой логического мышления. В них отражены отличительные признаки изучаемого объекта и отношения между ними. Выделяют существенные и несущественные признаки понятий. Существенные (отличительные) признаки отличают понятийный класс от других классов и являются необходимой принадлежностью объектов к своему классу. Несущественные признаки могут присутствовать у других объектов того же класса, но, в отличие от существенных, не являются отличительной чертой этого класса от других.

Например, для понятия «прямоугольник» существенные признаки:

- наличие четырех сторон и четырех углов;
- наличие равных противоположных сторон;
- наличие равных диагоналей.

Несущественные признаки понятия «прямоугольник»:

- четыре равные стороны;
- стороны длиной 5 см и шириной 8 см и т.д.

Каждое понятие включает в себя объем и содержание. Совокупность всех существенных признаков и есть содержание понятия.

Например, содержание понятия «параллелограмм» следующее:

- четырехугольник;
- противоположные стороны попарно равны и параллельны.

Объемом понятия является множество всех объектов, обладающих данными существенными признаками. Объем понятия «параллелограмм» – всевозможные параллелограммы.

Необходимо выделить зависимость между объемом и содержанием понятия: чем шире содержание, тем уже объем.

Рассмотрим соотношение между объемами понятий.

1. Соотношение включения. Пример: понятие «параллелограмм» включает в себя понятие «квадрат».
2. Соотношение пересечения. Пример: понятия «треугольник» и «равнобедренный треугольник» пересекаются по понятию «правильный треугольник».
3. Соотношение непересечения. Пример: понятия «окружность» и «прямоугольник» не пересекаются.
4. Соотношение совпадения. Пример: понятия «квадрат» и «правильный четырехугольник».

1.2 Определение понятий, виды определений

Любое понятие определяется. Определение понятия – перечисление минимального количества необходимых и достаточных признаков, объединенных в связанное предложение.

К определениям предъявляется ряд требований:

1. Соразмерность, т.е. отсутствие лишних признаков. Пример ошибки в определении: параллелограмм – четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны и равны. Равенство сторон – лишний признак.
2. Отсутствие порочного круга, т.е. понятия не должны определяться друг через друга. Пример: окружность – это граница круга; круг – это плоская фигура, ограниченная окружностью.

3. Указание ближайшего родового понятия. Пример: прямоугольник – четырехугольник, у которого все углы прямые. Ближайшее родовое понятие «параллелограмм».

4. Отсутствие тавтологии. Пример: подобными треугольниками называются треугольники, которые получены с помощью преобразования подобия.

Определения разделяют на виды:

1. Вид = род + видовое отличие. Пример: квадратом называется прямоугольник, имеющий равные стороны.

2. Конструктивные определения (описывают способ построения). Пример: медианой называют отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны [7].

3. Показ объекта в общем виде. Пример: квадратичной функцией называется функция, которую можно задать формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где x – независимая переменная, a, b, c – некоторые числа, причем $a \neq 0$ [9].

4. Определение-соглашение. Пример: тангенсом угла α называют отношение $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ [7].

5. Косвенные определения. Пример: точка, прямая, плоскость (основные понятия аксиоматики).

6. Рекурсивные (индуктивные) определения (формула + текст). Пример: арифметической прогрессией называется последовательность, любой член которого, начиная со второго, равен предыдущему члену, сложенному с одним и тем же числом $a_{n+1} = a_n + d$ [10].

7. Отрицательные определения. Пример: параллельными прямыми на плоскости называются прямые, которые не пересекаются.

8. Определение-описание. Пример: цилиндром называют прямоугольник OO_1A_1A , который вращается вокруг стороны OO_1 [12].

1.3 Классификация понятий

Классификация понятий – это разбиение любого данного понятия на виды по некоторому признаку. К классификации предъявляются требования:

1. Признак, по которому идет разделение понятия, остается неизменным в процессе классификации.
2. Полученные классификации не должны пересекаться.
3. Сумма объемов видов понятий равна объему исходного понятия.

Пример ошибки при классификации понятия «четырехугольник» (*рисунок 1*):

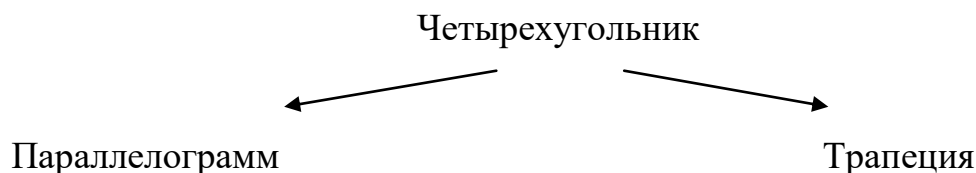


Рисунок 1

Объем понятия «четырехугольник» включает также «произвольный четырехугольник».

1.4 Этапы введения понятий

В школьном курсе математики выделяют два пути введения понятий: абстрактно-дедуктивный и конкретно-индуктивный.

Первый тип основан на передаче главной роли непосредственно учителю. Он сам мотивирует обучающихся к введению понятия, вводит определение, сопутствующие понятия, рассматривает частные случаи и иллюстрирует всё примерами. Второй тип организует деятельность непосредственно обучающихся. Они сами приводят примеры, формулируют определение. Учитель лишь направляет их деятельность.

Абстрактно-дедуктивный путь занимает гораздо меньше времени, позволяет увеличить время на решение заданий, однако не дает активизировать познавательную деятельность учеников. Данный тип используется при вве-

дении либо сложных и абстрактных понятий, либо очень простых. Пример возможных понятий: «квадратное уравнение», «логарифм», «натуральное число». Конкретно-индуктивный путь максимально активизирует деятельность школьников, но занимает гораздо больше времени. Пример возможных понятий: простые и составные числа, «геометрическая последовательность» (после изучения арифметической последовательности).

Несмотря на различие путей введения понятий, есть строгая последовательность работы с понятиями (этапы):

1. Мотивация введения понятия. Данный этап крайне важен. Он подчеркивает значимость изучения понятия, побуждает обучающихся к активной познавательной деятельности на уроке, пробуждает интерес к математике. Учитель вместе с учениками отыскивает яркие практические примеры понятия. Также учитель дает определенные упражнения, которые невозможно решить с уже имеющимися знаниями.

2. Выявление существенных и несущественных признаков понятия. Этот этап осуществляется различными приемами:

- через решение задач на построение объектов, принадлежащих объему данного понятия;
- через рассмотрение объектов с их противоположностью;
- через конструирование модели;
- через решение специальных задач.

3. Формулировка определения понятия. Обучающиеся должны усвоить объем и содержание понятия.

4. Упражнения на распознавание понятия. Среди множества предложенных понятий ученики должны отобрать нужные. Используются задачи, основанные на варьировании существенных (в первую очередь) и несущественных признаков.

5. Упражнения на закрепление понятия. Возможны следующие задания: построение объекта, принадлежащего объему данного понятия, выведение следствий из определения, классификация объема понятия и др.

Глава 2. Методика введения математических понятий с 5 по 9 классы

В практической части моей работы будет подробно изложена методика введения выборочных понятий по программе обучения математике в 5-9 классах.

Необходимо отметить, что не для всех понятий можно подобрать практические примеры из жизни. Однако этап мотивации упускать нельзя, он является наиважнейшим, так как от него зависит степень заинтересованности и готовности детей к принятию необходимости изучить новое понятие. Также крайне важными для усвоения материала являются упражнения на распознавание понятий. У детей не должно быть сформировано поверхностное представление о понятиях. Они должны распознавать их неявные признаки, понимать, какие ошибки нельзя допускать, уметь выполнять различные действия с понятиями (разбивать на группы, осуществлять замену эквивалентным понятием и др.)

Также важно отметить необходимость этапа актуализации на каждом уроке. Однако в предложенной мной методике этот этап опускается, делается упор именно на открытие нового понятия.

2.1 Методика работы с математическими понятиями в 5 классе

Переход от начальной школы в среднее звено часто сопровождается нехваткой подготовки обучающихся для изучения вопросов математики. Предварительной подготовки, полученной в начальной школе, бывает недостаточно. Для понимания уровня подготовленности учителю желательно проводить тестовые срезы. В начале 5 класса повторяется и углубляется пройденный материал, корректируются вычислительные навыки.

При подготовке к уроку учителю необходимо понимать, что, в первую очередь, важно заинтересовать детей в открытии новых математических зна-

ний. Используя всевозможные приемы, учитель должен увлечь детей интересными заданиями, так как интерес к предмету – самый действенный стимул изучения математики в 5 классе. Можно выделить несколько способов: необычные формы урока, новизна содержания материала, доброжелательный настрой урока.

Что касается возрастных особенностей, то ученики 5 класса требуют включения работы органов чувств, разнообразия видов деятельности на уроке. Долговременная мыслительная деятельность может спровоцировать усталость, отсутствие интереса к обучению. Поэтому важно использовать больше наглядных, технических средств, игровых форм организации урока. Значительное место должны занимать задания, в которых требуется начертить, нарисовать, измерить, найти на рисунке, вырезать и др.

Также необходимо отметить роль оценки знаний и умений обучающихся. Важное правило: «Учеников не стоит подавлять». Мотивацией должны быть не страх получить плохую отметку, а похвала за любое продвижение.

С учетом рассмотренных особенностей, мной разработана методика изучения некоторых математических понятий в 5 классе.

Понятие 1. «Натуральное число. Ряд натуральных чисел»

Этап мотивации

На слайде изображены объекты: 4 яблока, 7 конфет, 10 пчел.

Учитель: «Посчитайте вслух количество каждого объекта».

Ученики: «1, 2, 3, 4 яблока. 1, 2, ..., 7 конфет. 1, 2, ..., 10 пчел».

Учитель: «Какое действие вы сейчас выполняли?»

Ученики: «Счет».

Учитель: «Числа, которые вы использовали при счете предметов, называют натуральными».

Раскрытие содержания понятия

Учитель: «В какой из последовательностей даны натуральные числа?»

На слайде перечислены последовательности:

1. 5,6,7,8,9,10,...
2. 1,2,3,4,5,6,...
3. 1,2,10,9,8,7,6,...

Ученики: «В каждой из последовательностей выписаны натуральные числа».

Учитель: «Какую последовательность можно назвать особенной и почему?».

Ученики: «Последовательность 1,2,3,4,5,6,... особенная, в ней числа записаны по порядку».

Формулировка определения, усвоение понятия

Учитель: «Верно. Такая последовательность называется рядом натуральных чисел. Попробуйте сформулировать определение. Что такое ряд натуральных чисел?»

Ученики: «Рядом натуральных чисел называется последовательность натуральных чисел, записанных в порядке возрастания» [11].

Вопросы для закрепления понятия: Если ли среди натуральных чисел наименьшее? Наибольшее? Каждое ли натуральное число имеет последующее? Предыдущее? Являются ли числа 1 000 000, 123 456, 10 млрд натуральными?

Понятие 2. «Координатный луч»

Этап мотивации

На слайде представлены шкалы: термометр, радиоприемник, спидометр, часы, градусник, линейка.

Учитель: «Что общего у данных предметов?»

Ученики: «Они имеют деления, шкалу».

Учитель: «В математике также существует шкала. Она наносится на луч».

Задание: Изобразим луч с началом в т. О и соответствующее ему число 0. Отметим на нем т. Е и соответствующее ему число 1. Отрезок ОЕ будем называть единичным. Отложим от т. Е отрезок, равный отрезку ОЕ. Получим т. М. Таким же образом отметим т. N, K, R, S, ... и соответствующие им числа.

Учитель: «Полученная геометрическая фигура называется координатным лучом».

Раскрытие содержания понятия

Учитель: «Как думаете, наличие т. М, N, K, R, S, ... обязательно для существования координатного луча? А наличие т. О, Е?»

Ученики: «Обязательными являются т. О, Е, тогда другие точки всегда можно отметить».

Учитель: «С какой точки луча начинается отсчет? Что можно сказать о т. О, кроме того, что она является началом луча?»

Ученики: «т. О – начало отсчета».

Учитель: «В каком направлении увеличиваются числа? На что указывает стрелка на координатном луче?»

Ученики: «Направление луча совпадает с направлением увеличения чисел».

Учитель: «Тогда какие условия будут необходимы для существования координатного луча?»

Ученики: начало отсчета, единичный отрезок, направление увеличения чисел.

Формулировка определения, усвоение понятия

Учитель: «Верно. Давайте сформулируем определение координатного луча».

Ученики: «Координатным лучом называется луч с заданными: началом отсчета, единичным отрезком и направлением увеличения чисел».

Далее вводится понятие координаты точки, как число, соответствующее точке на координатном луче.

Задание: Среди представленных фигур найдите координатные лучи. (На слайде изображены ошибки при построении координатного луча: отсутствие направления, единичного отрезка, началом в точке с координатой 1, а также координатные лучи с единичным отрезком МР, единицами измерения).

Понятие 3. «Уравнение»

Этап мотивации

Учитель предлагает задачу. Найти массу первого арбуза, если на левой чаше весов лежит первый арбуз и гиря весом 5 кг, на правой – второй арбуз, вдвое тяжелее первого, и гиря весом 2 кг. Весы находятся в равновесии. (К задаче необходим рисунок для наглядности).

Учитель: «Как можно решить эту задачу? Что следует из равновесия весов?»

Ученики: «Можно приравнять вес левой и правой чаш».

Учитель: «Верно. Но для этого нам неизвестны массы арбузов. Как выйти из этой ситуации?»

Ученики: «Взять массу меньшего арбуза за x , массу большего – за $2x$ ».

Учитель: «Какое равенство получим?»

Ученики: « $x + 5 = 2x + 2$ ».

Учитель: «Верно. Полученное равенство будем называть уравнением».

Раскрытие содержания понятия

Учитель: «Можно было вместо x взять любую другую букву? Например, $y + 5 = 2y + 2$, $z + 5 = 2z + 2$, $n + 5 = 2n + 2$ ».

Учитель: «Чем являются буквы во всех этих уравнениях?»

Ученики: «Буквы – это то, что не известно».

Учитель: «Верно. Их мы будем называть неизвестными переменными».

Формулировка определения, усвоение понятия

Учитель: «Попробуйте сформулировать, что такое уравнение?»

Ученики: «Уравнением называется равенство, содержащее неизвестную переменную».

Учитель: «Верно. Кто может сформулировать другое определение? Из чего состоит уравнение?»

Ученики: «Уравнение состоит из выражения и неизвестного числа».

Учитель: «Правильно. Тогда уравнением будет называться совокупность математического выражения и неизвестного числа».

Задание на распознавание: Что из перечисленного можно назвать уравнением? А что не является уравнением? Почему?

$$x + 1 = 25$$

$$p - 13 = p$$

$$x = 8 - 2 = 25x$$

$$y(4 - y) + 7$$

$$0 = a + 78$$

Понятие 4. «Степень числа»

Этап мотивации

Задание. Запишите компактно следующие выражения:

$$4 + 4 + 4 + 4 + 4 =$$

$$10 + 10 + 10 =$$

$$6 + 6 + \dots + 6 =$$

$$9 \underbrace{\text{слагаемых}}$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 =$$

Ученики затрудняются записать последнее выражение.

Учитель: «Ребята, в таком случае тоже можно записать выражение компактно следующим образом $4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4^5$ ».

Учитель: «Давайте попробуем записать это равенство в общем (буквенном) виде для n множителей, каждый из которых равен a . Как это будет выглядеть?»

Ученики вместе с учителем: $\underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ множителей}} = a^n$.

Раскрытие содержания понятия

Учитель: «Давайте рассмотрим запись a^n . Какие компоненты можно выделить?»

Ученики: «Число a , число n ».

Учитель: «А сама запись a^n является числом?»

Ученики: «Да».

Учитель: «Значит, мы выделяем 3 числа: a, n, a^n . Они называются основанием степени, показателем степени и степенью соответственно».

Учитель приводит примеры разных степеней, указывает на каждый элемент.

Формулировка определения, усвоение понятия

Точного определения степени числа не даётся. Поэтому дети могут сформулировать его по-своему.

Учитель: «Как вы поняли, что такое степень числа?»

Ученики: «Степенью числа называется результат многократного умножения этого числа на себя».

Задание. Заполните таблицу (*таблица 1*).

Таблица 1 – Задание на тему «Степень числа»

Степень		x^4	43^y	
Показатель	3			x
Основание	15			y

Понятие 5. «Прямоугольный параллелепипед»

Этап мотивации

На слайде изображены: коробка конфет, коробка сока, спичечный коробок, кирпич, упаковочный ящик и др.

Учитель: «Чем схожи все предметы?»

Ученики: «Они имеют одинаковую форму».

Учитель: «Верно. Все фигуры, имеющие подобную форму, будем называть прямоугольными параллелепипедами. Давайте сделаем чертеж (рисунок 2)».

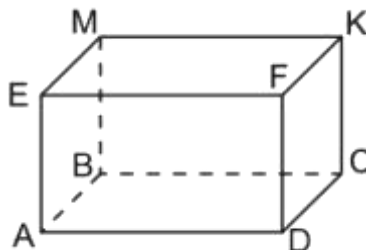


Рисунок 2

Учитель обговаривает план построения, дети повторяют чертеж в тетрадях. Учитель также должен продемонстрировать модель фигуры.

Раскрытие содержания понятия

На этом этапе необходимо усвоить элементы прямоугольного параллелепипеда: грани, вершины, ребра.

Учитель: «Давайте вспомним, какие элементы имеет треугольник?»

Ученики: «3 стороны и 3 вершины».

Учитель: «Верно. У прямоугольного параллелепипеда также есть свои элементы. Как будем называть т. А, В, С, D, E, M, K, F?»

Ученики: «Эти точки являются вершинами прямоугольного параллелепипеда».

Учитель: «Правильно. Какие отрезки для вас будут аналогичны сторонам треугольника?»

Ученики: «AB, BC, CD, AD, ..., EF».

Учитель: «Эти отрезки в прямоугольном параллелепипеде будем называть ребрами. Что еще осталось не рассмотренным?»

Ученики: «Стенки» прямоугольного параллелепипеда».

Учитель: «Их будем называть гранями. Назовите все грани прямоугольного параллелепипеда».

Ученики: «ABCD, ..., EMKF».

Формулировка определения, усвоение понятия

Определение прямоугольного параллелепипеда в 5 классе даётся через описание, поэтому дети могут иметь свою ассоциацию с прямоугольным параллелепипедом. Например, «прямоугольным параллелепипедом называется фигура, имеющая форму спичечного коробка».

Упражнения на распознавание и усвоение:

1. Среди изображенных фигур найдите прямоугольный параллелепипед (изображены пирамида, куб, прямоугольные параллелепипеды с высотой, намного меньшей/большей, чем другие измерения, прямоугольник, треугольная призма).
2. Приведите другие примеры прямоугольного параллелепипеда в жизни.
3. Среди выделенных элементов назовите грани (ребра/вершины).
4. Закрасьте все равные грани/ребра одним цветом.

Понятие 6. «Обыкновенная дробь»

Этап мотивации

Учитель: «У меня в руках пачка конфет. Каждый из вас должен взять себе не менее одной конфеты».

Учитель пускает пачку конфет по рядам.

Учитель: «Всего было 100 конфет. Я возьму 3 конфеты. Тогда могу сказать, что у меня 3 из 100 конфет. Сколько из 100 конфет у вас?»

Ученики: «1 из 100; 2 из 100; 5 из 100, ...»

Учитель: «Будем говорить, что пачка конфет – это «целое». Тогда как назовем количество конфет у каждого из нас?»

Ученики: «Часть от целого».

Учитель: «Верно. Рассмотрим другую задачу. Представьте, что у вас день рождения. Вы пригласили 9 друзей и купили 1 торт. Какая часть торта достанется каждому другу, если торт поделили поровну?»

Ученики: «Один кусок из девяти».

Учитель: «Верно. Существует еще множество примеров, иллюстрирующих понятие «часть от целого». Приведите свои примеры».

Ученики приводят примеры (количество пазлов, кусков пирога и т. д.).

Раскрытие содержания понятия

Учитель: «Молодцы. В математике существует запись, обозначающая часть от целого. Рассмотрим примеры (таблица 2)».

Таблица 2 – Чтение дробных выражений

Словесная формулировка	Математическая запись	Также читают
«3 из 100 конфет»	$\frac{3}{100}$	«Три сотых пачки конфет»
...	...	...
«1 из 10 кусков торта»	$\frac{1}{9}$	«Одна десятая торта»

Учитель: «Такая математическая запись называется обыкновенной дробью. А сами числа будем называть дробными».

Учитель: «Вернемся к задаче про торт. Каждый друг взял $\frac{1}{9}$ торта. Что показывают числа 1 и 9 в данной записи?»

Ученики: «Число 9 показывает, на сколько кусков порезали торт. Число 1 показывает, сколько кусков из всех взял каждый друг».

Учитель: «То, на сколько частей разделили «целое», будем называть знаменателем. То, сколько взяли частей от целого, будем называть числителем дроби. В общем виде обозначим числитель буквой m , знаменатель – буквой n ».

Учитель: «Какие числа используются при записи дробного числа?»

Ученики: «Натуральные».

Формулировка определения, усвоение понятия

Учитель: «Ребята, попробуйте сформулировать, что такое дробь».

Ученики: «Дробью называется запись вида $\frac{m}{n}$, где m и n – натуральные числа».

Задания на распознавание:

1. Укажите дроби: $\frac{1}{2}, \frac{15}{8}, \frac{0}{8}, \frac{3}{0}, \frac{l}{5}, \frac{a}{b}$.
2. Прочитайте дроби, назовите числители и знаменатели:
 $\frac{5}{7}, \frac{1}{9}, \frac{12}{12}, \frac{10}{4}, \frac{5}{3}$.
3. В саду растет 13 яблонь и 15 вишен. Какую часть из всех деревьев составляют: 1) вишни, 2) яблони?

Понятие 7. «Десятичная дробь»

Этап мотивации

На слайде представлены картинки, на которых изображены десятичные дроби: пачка творога массой в 0,1 кг, ковер длиной 1,5 м, цена 1 м³ газа в квитанции, результаты соревнования по челночному бегу в секундах и др.

Учитель: «Ребята, давайте посмотрим на картинки. Что общего есть на каждой из них?»

Ученики: «Числа с запятой».

Учитель: «Верно. А что они означают?»

Ученики выбирают картинку и высказывают свои предположения. Например, «На третьей картинке число 1,5 обозначает длину ковра», «На пятой картинке число 10,4 обозначает время участника соревнования по бегу в секундах».

Учитель: «Правильно. Попробуйте привести другие примеры из жизни, где можно встретить числа, в записи которых присутствует запятая».

Ученики приводят примеры, аналогичные данным.

Учитель: «Молодцы, ребята. Давайте еще раз обобщим, чем схожи все названные числа?»

Ученики: «Они записываются через запятую».

Учитель: «Итак, числа, в записи которых присутствует запятая, мы будем называть десятичными дробями. Числа 1,5; 0,1; 10,4; и т.д. – примеры десятичных дробей».

Раскрытие содержания понятия

Учитель: «Вам необходимо написать числа по словесной формулировке».

На слайде написано: одна целая семь десятых, восемьдесят четыре целых пять сотых, двести пятьдесят одна десятитысячная, пять целых одна тысячная, одна десятая.

Ученики выходят по цепочке и записывают числа $1\frac{7}{10}$, $84\frac{5}{100}$, $\frac{251}{10000}$, $5\frac{1}{1000}$, $\frac{1}{10}$.

Учитель: «Что общего у этих чисел?»

Ученики: «В знаменателе всех дробей числа, кратные десяти».

Учитель: «Верно. Все эти числа можно записать в виде десятичной дроби следующим образом 1,7; 84,05; 0,0251; 5,001; 0,1».

Учитель: «Что же отделяет запятая?»

Ученики: «Целую и дробную часть числа».

Учитель: «Что можно сказать о количестве цифр после запятой и количестве нулей в записи знаменателя соответствующей обыкновенной дроби?»

Ученики: «Они совпадают».

Также учитель дает памятку по названиям разрядов после запятой, объясняет на конкретном примере и фиксирует на доске.

Формулировка определения, усвоение понятия

Определения понятия «десятичная дробь» нет, но каждый ученик должен иметь представление об этих числах. Задания на усвоение могут быть в форме теста, таблицы, схемы и т.п.

Примеры заданий:

1. Прочитать десятичную дробь.
2. Записать обыкновенную дробь в виде десятичной и наоборот.

3. Соотнести словесную формулировку с соответствующим числом.
4. Определить разряд числа.
5. Выделить целую и дробную части.
6. Записать число, если даны разряды.

Понятие 8. «Среднее арифметическое»

Этап мотивации

Учитель предлагает ученикам измерить обложки своих тетрадей линейкой.

Ученики делают измерения, оглашают свои результаты.

Учитель выписывает результаты измерения на доске.

Учитель: «По результатам эксперимента заметим, что бывают обложки разного размера. У одних меньше, у других больше. А можно ли сказать, чему равна ширина обложки средних размеров?»

Ученики делают предположения.

Учитель: «Верно. А что еще бывает «средним?»»

Ученики: «Средняя температура, средняя цена, средняя заработная плата, средний возраст».

Учитель: «Для чего вообще нужны средние значения величин?»

Ученики: «Для статистики».

Учитель: «Верно. У чего в математике можно найти среднее?»

Ученики: «У чисел».

Учитель: «Сегодня мы поговорим о среднем арифметическом чисел».

Раскрытие содержания понятия

Учитель предлагает нескольким ученикам выйти к доске.

Учитель: «Давайте запишем рост каждого участника и определим среднее значение. Но как это сделать?»

Ученики делают предположения. Учитель может задавать наводящие вопросы. Например, сколько всего участников измерило свой рост?

Ученики определяют план нахождения среднего арифметического значения роста:

1. Найти рост всех участников в сумме.
2. Поделить полученное число на количество участников.

Формулировка определения, усвоение понятия

Учитель: «Так что же мы будем называть средним арифметическим нескольких чисел?»

Ученики: «Средним арифметическим чисел называют частное от деления суммы этих чисел на количество слагаемых».

Задания на усвоение (в качестве самостоятельной работы):

1. Найти свою среднюю оценку по математике за всю четверть.
2. Придумать задачу на нахождение среднего значения величины.
3. Найти и исправить ошибки в нахождении среднего арифметического чисел.

2.2 Методика работы с математическими понятиями в 6 классе

Особенности обучающихся в 5 и 6 классах схожи, однако можно выделить несколько различий. Одна из основных целей обучения математике в 6 классе – развитие логического мышления учеников. Прежде всего, развивается абстрактное мышление с помощью обобщенной терминологии, а также тренируется память, усиливается быстрота мышления. Наиболее естественным способом происходит изложение знаний от абстрактного к частному.

Однако возрастные особенности предполагают необходимость смены рода деятельности. Поэтому учителю также необходимо предлагать на уроке различные творческие задания, способствующие формированию познавательного интереса к обучению и самостоятельности.

Таким образом, учитель, желающий научить учеников решать задачи, должен показать, что от решения математической задачи можно получить такое же удовольствие, как от разгадывания кроссворда или ребуса. Решение

задач – не процесс получения правильного ответа, а средство обучения математике. Учителю необходимо подбирать целесообразные задачи для открытия новых знаний, что будет способствовать развитию мышления учеников и их заинтересованности в изучении математике.

С учетом рассмотренных особенностей, мной разработана методика изучения некоторых математических понятий в 6 классе.

Понятие 1. «Делители и кратные»

Этап мотивации

Учитель предлагает задачу: «Необходимо поделить 20 яблок на 6 гостей. Как это сделать?»

Ученики: «20 разделить на 6. То есть каждому гостю нужно дать по 3 яблока, а 2 яблока оставить нетронутыми».

Учитель: «А сколько должно быть гостей, чтобы 20 яблок поделить поровну между ними?»

Ученики: «Гостей может быть 20, 10, 5, 2, 1 человек».

Учитель: «А если всё-таки придет 6 человек, сколько яблок нужно купить, чтобы поделить их поровну?»

Ученики: «Яблоко может быть 6, 12, 18, 24, 30, ... штук».

Раскрытие содержания понятия

Учитель: «Что можно сказать о группах названных вами чисел?»

Ученики: «Первая группа – числа, на которые делится нацело число 20. Вторая группа – числа, которые можно поделить на число 6».

Учитель: «Верно. Такие группы чисел будем называть делителями и кратными соответственно».

Учитель: «Давайте выпишем все делители чисел 2, 5, 6, 7, 8. Какой вывод можно сделать, сравнив полученные группы делителей?»

Ученики: «Делителем каждого из этих чисел является 1».

Учитель: «Верно. Можем сформулировать данное правило для всех натуральных чисел?»

Ученики: «Да, 1 является делителем любого натурального числа».

Учитель: «Каждый из вас выбирает 3 числа и находит их наибольшие делители. Что можно сказать о наибольшем делителе любого числа?»

Ученики проводят исследование, обобщают полученные результаты.

Ученики: «Наибольшим делителем натурального числа a является само число a ».

Учитель: «Давайте вспомним задачу с яблоками. Какое максимальное (наибольшее) количество яблок нужно купить, чтобы поделить их поровну между 6 гостями? Какой вывод можно сделать о количестве кратных чисел некоторого числа?»

Ученики: «Наибольшего числа не существует, кратных чисел бесконечное множество».

Формулировка определения, усвоение понятия

Учитель: «Ребята, давайте еще раз сформулируем, когда число b будет делителем числа a ? И когда число a будет кратным числу b ?»

Ученики: «Если натуральное число a делится нацело на натуральное число b , то число a называют кратным числу b , а число b – делителем числа a » [12].

Задания на распознавание и усвоение:

1. Среди всех предложенных чисел выпишите делители/кратные числа a (кратные числу 3, делители 1, кратные 1 и т.п.).
2. Найдите делители/кратные каждого из двух/трех чисел и определите их общие делители/кратные.
3. Среди общих делителей/кратных найдите наибольший/наименьший.
4. Проверьте верность утверждения. Например, «если число a кратно 6, то оно кратно 2», «если число b кратно 7, то оно кратно 14».

Понятие 2. «Наибольший общий делитель»

Этап мотивации

Учитель предлагает задачу.

В городе А. проходит соревнование по приготовлению фруктовых салатов. Какое максимальное количество участников можно пригласить, чтобы разделить поровну все фрукты, среди которых 16 бананов, 8 груш и 40 мандаринов?

Ученики предлагают свои решения, делают вывод: «Необходимо найти наибольшее число, на которое будут делиться числа 16, 8 и 40 одновременно. Значит, максимально может быть 8 участников».

Раскрытие содержания понятия

Учитель: «Верно. Давайте выпишем все делители чисел 16, 8 и 40».

Ученики диктуют, учитель записывает на доске.

Делители 16: 1, 2, 4, 8, 16.

Делители 8: 1, 2, 4, 8.

Делители 40: 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20, 40.

Учитель: «Что можно сказать о числе 8?»

Ученики: «Число 8 – наибольший среди общих делителей чисел 16, 8 и 40».

Учитель: «Верно. Мы нашли наибольший общий делитель чисел 16, 8 и 40. Будем кратко обозначать $НОД(16, 8, 40) = 8$ ».

Учитель: «НОД многозначных чисел удобно находить, предварительно разложив их на простые множители. Давайте найдем $НОД(455, 770)$ ».

Ученики выполняют задание следующим образом:

$$455 = 5 \cdot 7 \cdot 13.$$

$$770 = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11.$$

$$НОД(455; 770) = 5 \cdot 7 = 35.$$

Учитель: «А теперь давайте найдем $НОД(180, 840)$ ».

Ученики совместно с учителем действуют по алгоритму.

$$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

$$840 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7.$$

$$\text{НОД}(180, 840) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

Формулировка определения, усвоение понятия

Учитель: «Давайте дадим четкое определение, что же такое наибольший общий делитель двух натуральных чисел?»

Ученики: «Наибольшим общим делителем двух натуральных чисел является наибольшее натуральное число, на которое нацело делится каждое из двух данных натуральных чисел» [12].

Задания и вопросы на усвоение:

1. Составьте план нахождения НОД двух натуральных чисел, используя разложение на простые множители.
2. Проверьте верность равенства, исправьте ошибки. Например, $\text{НОД}(45, 18) = 3$ (неверно, т.к. общий делитель 3 не является наибольшим), $\text{НОД}(210, 820) = 210$ (неверно, т.к. число 210 не является делителем числа 820).
3. Чему равен НОД двух чисел, одно из которых кратно другому?
4. Найти НОД трех и более чисел.

Понятие 3. «Наименьшее общее кратное»

Этап мотивации

Учитель предлагает задачу. Для наглядности можно разыграть сценку.

В коробке было некоторое количество конфет. Три одинаковых коробки конфет положили за три стола, на которых сидят 6, 7 и 3 человека соответственно. После чего гости начали разбирать конфеты. Оказалось, что за каждым столом у гостей было поровну конфет. Какое наименьшее количество конфет могло быть в коробке?

Ученики делают вывод: «Количество конфет должно делиться на 6, 7 и 3 одновременно. Это будет число 42. Значит, наименьшее количество конфет в коробке равно 42».

Раскрытие содержания понятия

Учитель: «Верно. Давайте выпишем кратные чисел 6, 7 и 3».

Ученики диктуют, учитель записывает на доске.

Кратные 6: 6, 12, 18, 24, 30, 36, **42**, 48, 54, ...

Кратные 7: 7, 14, 21, 28, 35, **42**, 49, 56, 63, ...

Кратные 3: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, **42**, ...

Учитель: «Что можно сказать о числе 42?»

Ученики: «Число 42 общее кратное чисел 6, 7 и 3».

Учитель: «Число 84 также является общим кратным этих чисел. Можно ли указать это число в ответе к задаче? Если нет, почему?»

Ученики: «Нельзя, т.к. в задаче требуется найти именно наименьшее количество конфет».

Учитель: «Верно. Как думаете, какое понятие сегодня будем разбирать?»

Ученики: «Наименьшее общее кратное чисел».

Учитель: «Верно. Итак, мы нашли наименьшее общее кратное чисел 6, 7 и 3. Будем кратко обозначать $НОК(6, 7, 3) = 42$ ».

Учитель: «Часто для нахождения НОК используют разложение на простые множители. Чему равно $НОК(18, 30, 90)$?»

Ученики устно ответили на этот вопрос.

Учитель: «Правильно. А теперь попробуем выполнить это задание другим способом».

Ученики выполняют задание следующим образом:

$$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2.$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$$

$$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

Учитель: «Что можно сказать о разложении числа 90?»

Ученики: «Разложение числа 90 содержит все множители из разложения числа 18 и множитель 5 из разложения числа 30, которого нет в разложении числа 18».

Учитель дает другие готовые примеры, проводит аналогию (таблица 3).

Таблица 3 – Нахождение наименьшего общего кратного пары чисел

$18 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2.$	$84 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7.$	$24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3.$
$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5.$	$90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5.$	$32 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5.$
$\text{НОК}(18, 30) = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 90.$	$\text{НОК}(84, 90) = 2^2 \cdot 7 \cdot 3^2 \cdot 5 = 1260.$	$\text{НОК}(24, 32) = 2^5 \cdot 3 = 96.$

Формулировка определения, усвоение понятия

Учитель: «Давайте дадим четкое определение, что же такое наименьшее общее кратное двух натуральных чисел?»

Ученики: «Наименьшим общим кратным двух натуральных чисел является наименьшее натуральное число, которое нацело делится на каждое из двух данных натуральных чисел» [12].

Задания и вопросы на усвоение:

1. Составьте план нахождения НОК двух натуральных чисел, используя разложение на простые множители.
2. Проверьте верность равенства, исправьте ошибки. Например, $\text{НОК}(6, 8) = 48$ (неверно, т.к. общее кратное 48 не является наименьшим), $\text{НОК}(17, 117) = 117$ (неверно, т.к. число 117 не является кратным числа 17).
3. Чему равен НОК двух чисел, одно из которых является делителем другого?
4. Найти НОК трех и более чисел.
5. Как найти НОК взаимно простых чисел?

Понятие 4. «Положительные и отрицательные числа»

Этап мотивации

Учителю необходимо подобрать примеры из жизни, когда величина меняется в разных направлениях (влево/вправо, вверх/вниз). Среди них могут быть: термометр, горы и низменности, долг и т.п.

Учитель по очереди предлагает рассмотреть все варианты.

Учитель: «Перед вами два термометра (рисунок 3). Скажите, сколько градусов тепла или мороза они показывают?»



Рисунок 3

Ученики отвечают, используя словосочетания «градусов тепла/мороза» или «градусов ниже/выше нуля».

Учитель: «Верно. Температура может повышаться и понижаться, то есть происходит движение в противоположных направлениях».

Учитель: «Взгляните на следующий слайд (рисунок 4). Скажите, каковы размеры горы Эльбрус и Марианского жёлоба?»

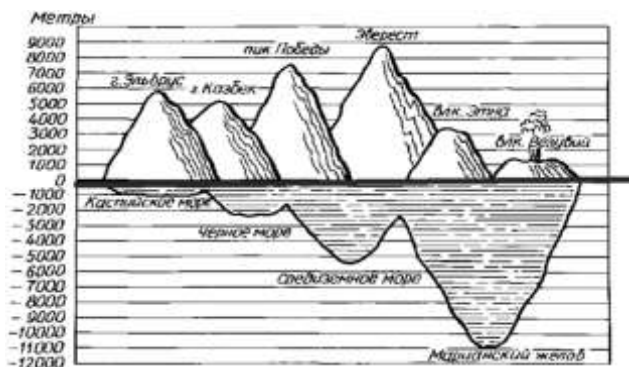


Рисунок 4

Ученики: «Высота горы Эльбрус равна 6000 м, а глубина Марианского жёлоба составляет 11000 м».

Учитель: «Правильно. В чем отличие между высотой горы и глубиной желоба?»

Ученики: «Они противоположно направлены».

Учитель: «Хорошо. Теперь рассмотрим задачу. Начинаящий бизнесмен положил на счет в банке 50 000 рублей. Позже он снял со счета все эти деньги и взял в долг 20 000 рублей. Каким числом можно оценить остаток на его счете?»

Ученики: «Бизнесмен задолжал банку 20000 рублей».

Учитель: «Правильно. Еще говорят, что «на счете осталось минус 20000 рублей».

Учитель: «Чем же схожи все рассмотренные примеры? Какой общий вывод можно сделать?»

Ученики: «Изменение некоторых величин может происходить в двух противоположных направлениях».

Учитель: «Верно. Получается, что знак « $\rightarrow$ » указывает на противоположное направление. Мы получили следующие значения: -14°C , -11000 м , -20000 руб . Это примеры отрицательных чисел».

Раскрытие содержания понятия

Учитель должен ввести другие сопутствующие понятия: положительные числа; ни положительное, ни отрицательное число; противоположные числа и др.

Учитель дает небольшое пояснение, какие числа будем называть положительными, какой знак они имеют.

Учитель предлагает задание. Необходимо разбить числа на группы: $-\frac{2}{3}$; 0,78; -1 ; 3,14; 0; π ; $-18,4$; 0,001; 18; $-5\frac{7}{9}$.

Ученики сразу выделяют две группы – положительные и отрицательные числа. Однако не могут определиться с числом 0.

Учитель: «Верно. Число 0 не будет входить ни в одну из названных групп. Оно не является положительным, а также не является отрицательным».

Отсюда и название третьей группы – ни положительное, ни отрицательное число».

Учитель: «В чем отличие между двумя первыми группами?»

Ученики: «Числа из первой группы имеют знак «+», из второй знак «-».

Учитель: «Если одно число положительное, а другое отрицательное, то говорят, что эти числа имеют разные знаки».

Учитель: «Что можно сказать о парах чисел 36 и -36 ; $\frac{1}{7}$ и $-\frac{1}{7}$; $0,45$ и $-0,45$? В чем их отличие?»

Ученики: «Эти числа отличаются только знаками».

Учитель: «Верно. Числа, отличающиеся друг от друга только знаками, называются противоположными».

Формулировка определения, усвоение понятия

Определения положительных и отрицательных чисел не дается. Однако дети должны усвоить эти понятия, подбирать примеры.

Задания на распознавание и усвоение:

1. Какие из чисел $\frac{5}{9}$; $-6,42$; $-\frac{4}{17}$; $10\frac{24}{25}$; 0 ; $-\pi^2$; $\frac{\pi}{2}$; $0,1758$; $-1\frac{1}{2}$ являются положительными; отрицательными; ни положительными, ни отрицательными?

2. Запишите с помощью знаков информацию: 18 градусов тепла; глубина Индийского океана 7729 м; 12 градусов ниже нуля; 5 градусов мороза; Гренландское море имеет глубину 5527 м; высота Гималаев 8585 м; долг Димы составил 501 рубль; Зина получила зарплату в 15000 рублей.

3. Запишите пять правильных отрицательных дробей с числителем (знаменателем) 5 .

4. Термометр показывает 6 градусов тепла. Какую температуру будет показывать термометр, если его столбик опустится на 5 делений; поднимется на 3 деления; станет холоднее на 8 градусов; температура понизится на 6 делений?

5. Определите числа, противоположные данным.

6. Обоснуйте, будут ли противоположны числа $-0,6$ и $\frac{3}{5}$; $1\frac{1}{8}$ и $-1,125$; $1,5$ и $\frac{3}{2}$; $-0,625$ и $\frac{1}{40}$?

2.3 Методика работы с математическими понятиями в 7 классе

В 7 классе обучающиеся впервые знакомятся с алгеброй и геометрией, как отдельными самостоятельными науками. У них формируется представление о различиях между данными дисциплинами. Основой построения курса математики 7 класса являются идеи развивающего обучения, сформулированные Л.С. Выготским и другими. Главными принципами такого обучения являются:

1. Обучение на высоком уровне трудности.
2. Ведущая роль теоретических знаний.
3. Проблемно-поисковое и исследовательское обучение.
4. Систематичность и последовательность.
5. Формирование теоретического мышления; новые понятия и алгоритмы вводятся с опорой на принцип наглядности.

При введении новых понятий или изучении свойств объектов обучающимся предлагается рассмотреть и описать рисунок, ответить на вопросы. Это способствует достижению формирования личности, способной воспринимать и критически анализировать большой поток информации. При этом акцент ставится на формирование способности анализировать информацию.

Изучение геометрии развивает логическое мышление учеников. Впервые дети знакомятся с понятием «доказательство» и его необходимостью при изучении математики. Также изучение геометрии развивает пространственное мышление, изобразительные умения.

С учетом рассмотренных особенностей, мной разработана методика изучения некоторых математических понятий в 7 классе.

Понятие 1. «Математический язык»

Этап мотивации

Учитель: «Ребята, какие языки вы изучаете в школе?»

Ученики: «Русский, английский, ...»

Учитель: «А почему не назвали математику?»

Ученики: «А разве это язык?»

Учитель: «Давайте разберемся».

Учитель: «Как выглядит переместительный закон сложения?»

Ученики: « $a + b = b + a$ ».

Учитель: «Сформулируйте его словами».

Ученики: «От перемены мест слагаемых сумма не меняется».

Учитель записывает формулу $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$.

Учитель: «Какое правило я записала?»

Ученики: «Чтобы сложить две дроби с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их числители, а знаменатель оставить неизменным».

Учитель: «Очевидно, запись в виде формулы удобнее».

Учитель: «А теперь переведите английское слово apple на русский язык».

Ученики: «Яблоко».

Учитель: «А теперь скажите по-английски «апельсин».

Ученики: «Orange».

Учитель: «Тем самым, мы понимаем, что для владения английским языком необходимо не только уметь переводить с английского на русский язык, но и формулировать русскую речь по-английски. В математике также необходимо, но недостаточно уметь давать словесную формулировку по формулам».

Учитель предлагает записать формулу по формулировке: «Чтобы умножить число на сумму двух чисел, нужно это число умножить на каждое слагаемое, а результаты сложить».

Ученики: « $a(b + c) = ab + ac$ ».

Учитель: «Как теперь считаете, можно ли выделить математический язык?»

Ученики: «Да».

Раскрытие содержания понятия

Учитель приводит примеры использования математического языка в таблице (таблица 4).

Таблица 4 – Чтение математических конструкций

Математический язык	Словесная формулировка
$3 + x$	Сумма чисел три и x
$7(a - b)$	Произведение числа семь на разность чисел a и b
$m^2 - n^2$	Разность квадратов чисел m и n
$y + 1 = 7$	Сумма чисел y и единицы равна семи

Учитель: «Из чего состоит язык математики?»

Ученики: «Числа, буквы, знаки арифметических действий, иные знаки».

Учитель: «Можно сказать, что формулы отражают письменную математическую речь. Что тогда назовем устной математической речью?»

Ученики: «Термины».

Учитель: «Приведите примеры, воспользовавшись таблицей».

Ученики: «Сумма, разность, произведение, квадрат числа».

Формулировка определения, усвоение понятия

Четкой формулировки определения данного понятия нет. Но ученики могут его сформулировать по-своему.

Учитель: «Скажите, что означает понятие «математический язык»?»

Ученики: «Математическим языком называют систему символов и терминов, используемых для передачи математического материала».

Задания на данную тему сводятся к приведению аналогичных примеров, чтению различных формул, сопоставлению со словесной формулировкой.

Понятие 2. «Функция»

Этап мотивации

Учитель предлагает рассмотреть зависимости некоторых величин с наглядным изображением (в презентации):

- 1) Что будет с площадью круга, если его радиус увеличить на 2? уменьшить в 3 раза? изменить на n ?
- 2) Что станет с массой металлического бруска, если изменить плотность металла? его объем?

Учитель: «Ребята, мы рассмотрели некоторые зависимые величины. Попробуйте сами привести другие примеры различных зависимостей».

Ученики приводят примеры.

Раскрытие содержания понятия

Учитель: «Молодцы. А сейчас более подробно рассмотрим следующие зависимости».

Пример 1. Дан квадрат со стороной a (рисунок 5). Чему равна площадь квадрата, если: 1) $a = 7$; 2) $a = 1,2$; 3) $a = 19$; 4) $a = n$ (таблица 5)?



Рисунок 5

Таблица 5 – Зависимость величины S от a

$a = 7$	$a = 1,2$	$a = 19$	$a = n$
$S = 49$	$S = 1,44$	$S = 361$	$S = n^2$

Пример 2. Автобус едет с постоянной скоростью $v = 50$ км/ч. Какое расстояние в км/ч он проедет через t часов, если: 1) $t = 5$; 2) $t = 1,1$; 3) $t = 20$; 4) $t = n$ (таблица 6)?

Таблица 6 – Зависимость величины S от t

$t = 5$	$t = 1,1$	$t = 20$	$t = n$
$S = 250$	$S = 55$	$S = 1000$	$S = 50n$

Пример 3. В киноконцертном зале места распределены по зонам. Стоимость m одного места из каждой зоны n представлена в таблице (таблица 7).

Таблица 7 – Зависимость величины m от n

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m	1000	1200	1500	2000	2500	3000	4000	5000	7500

Укажите стоимость места, если: 1) $n = 2$; 2) $n = 7$; 3) $n = 9$

Учитель: «Что общего у этих примеров?»

Ученики: «Наличие зависимости».

Учитель задает вопросы:

1. Назовите независимые и зависимые переменные величины в каждом примере.
2. Сколько значений зависимой переменной соответствует значению независимой переменной?

Ученики отвечают на вопросы.

Учитель делает вывод: «Такие величины называются функциями».

Формулировка определения, усвоение понятия

Учитель: «Что такое функция?»

Ученики: «Функцией называют зависимость между величинами, при которой любому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной» [1].

Учитель вводит сопутствующие понятия: «Независимую переменную x будем называть аргументом, а зависимую $f(x)$ – функцией. Все значения, ко-

которые принимает аргумент, называют областью определения. Все значения, которые принимает функция – областью значений».

Задания на распознавание и усвоение:

1. В рассмотренных примерах скажите, что является аргументом/функцией, чему равны области определения и значения.
2. В примерах 1 и 2 выразите зависимости формулой ($S(a) = a^2$, $S(t) = 50t$).
3. В примере 3 постройте график функциональной зависимости стоимости от номера зоны.
4. Укажите функции среди предложенных графиков (рисунок 6):

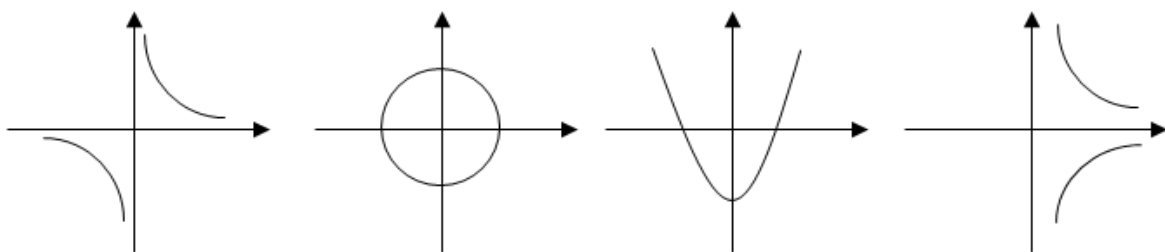


Рисунок 6

Понятие 3. «Треугольник»

Этап мотивации

На слайде изображены предметы, имеющие форму различных треугольников: угольник, флажок, дорожный знак, кусок пиццы, вешалка и т.д.

Учитель: «Ребята, чем схожи эти предметы?»

Ученики: «Они имеют одинаковую форму».

На слайде выделяются треугольники на каждом предмете для наглядности.

Учитель: «Как можно описать такую форму предмета? И она чего состоит?»

Ученики: «Из трёх точек и трёх отрезков».

Учитель: «Как связаны точки и отрезки?»

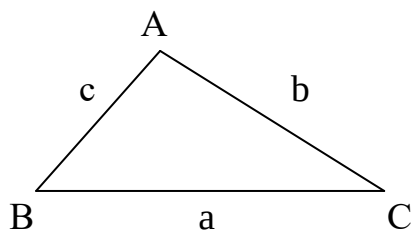
Ученики: «Отрезки соединяют эти точки».

Учитель: «Верно. Фигуры, имеющие такую форму, называют треугольниками. Попробуйте сформулировать определение треугольника».

Ученики: «Треугольником называют фигуру, состоящую из трёх точек и трёх отрезков, соединяющих эти точки» [6].

Раскрытие содержания понятия

Учитель на доске и ученики в тетради строят треугольник по определению. Учитель вводит обозначение и понятия вершин и сторон треугольника (рисунок 7).



$\triangle ABC$

A, B, C – вершины треугольника

AB, BC, AC – стороны треугольника

Рисунок 7

Учитель: «Какие еще элементы в треугольнике можно выделить?»

Ученики: «Углы».

Учитель вводит возможные обозначения углов треугольника ABC (с помощью одной вершины, трех вершин, греческих букв).

Учитель: «Из пятого класса вы знаете понятие периметра многоугольника. Давайте вспомним определение и напомним формулу нахождения периметра треугольника».

Ученики: «Периметром треугольника называют сумму длин его трёх сторон. $P = a + b + c$ ».

Далее необходимо ввести понятие равных треугольников. У учителя заготовлен треугольник из бумаги, известны все его элементы.

Учитель: «Можно ли на доске изобразить такой же треугольник? Как это сделать?»

Ученики предлагают варианты (обвести или другие способы).

Учитель обводит треугольник и предлагает измерить все элементы треугольника, изображенного на доске.

Учитель: «Какой вывод можно сделать?»

Ученики: «Все соответствующие элементы двух треугольников равны между собой».

Учитель: «Можно ли сказать, что треугольники равны?»

Ученики: «Да, т.к. они совпадают при наложении».

Учитель: «Сформулируйте понятие равных треугольников».

Ученики: «Треугольники называют равными, если их соответственные элементы равны».

Далее учитель предлагает задание. Необходимо каждому ученику нарисовать произвольный треугольник и измерить транспортиром все углы. результаты измерения заносятся учителем в таблицу. Учениками делается вывод, что сумма углов любого треугольника равна 180° .

Формулировка определения, усвоение понятия

Определение было сформулировано в начале урока.

Задания на распознавание:

1. Назвать треугольники и их элементы.
2. Найти угол треугольника, если известны два других угла. В качестве пропедевтики можно предложить найти углы в треугольнике с тремя/двумя равными углами.
3. Среди данных треугольников найти равные и доказать их равенство. Предлагается несколько треугольников, среди которых есть равные (треугольники должны быть по-разному направлены), ученики должны измерить все их элементы и соотнести между собой.
4. Дан треугольник, необходимо назвать большую/меньшую сторону, больший/меньший угол, угол, лежащий против большей/меньшей стороны и т.п.
5. Начертить треугольник, если известны все/некоторые его элементы. Провести исследование о количестве треугольников по данным измерения.

Понятие 4. «Прямоугольный треугольник»

Этап мотивации

Учитель предлагает множество треугольников, среди которых есть прямоугольные.

Учитель: «Ребята, какие треугольники можно выделить в одну группу? По какому признаку?»

Ученики: «Группа треугольников, имеющих прямой угол».

Учитель: «Верно. Давайте подумаем, где в окружающем мире можно встретить предметы, похожие на эти фигуры?»

Ученики: «В архитектуре, ...»

Учитель представляет картинки, на которых изображены: парус, столб с тенью, сооружения, угольник, салфетница, кронштейн и другие предметы формы прямоугольного треугольника.

Учитель: «Как думаете, как называются такие фигуры, имеющие прямой угол?»

Ученики: «Прямоугольные треугольники».

Раскрытие содержания понятия

Учитель: «Давайте сделаем чертеж в тетради и назовем треугольник – ABC (с прямым углом C)».

Ученики выполняют задание.

Учитель: «Что можно сказать о стороне АВ относительно угла С? О двух других сторонах?»

Ученики: «Сторона АВ лежит против прямого угла. Стороны АС и ВС образуют прямой угол».

Учитель: «Верно. У сторон треугольника есть свои названия. Он имеет два катета и гипотенузу. Выделите их разными цветами на своем чертеже».

Учитель предлагает задачи на открытие свойств п/у треугольника.

Задача 1. Найти углы С, F, K, N следующих треугольников (рисунок 8):

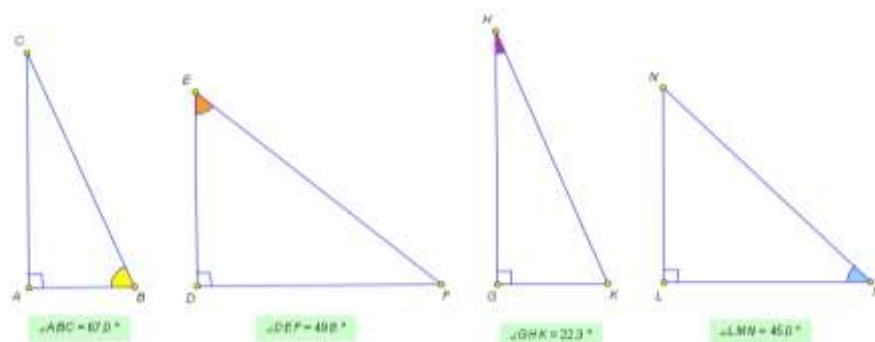
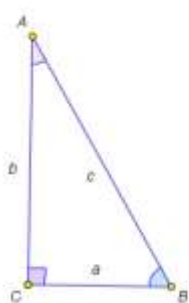


Рисунок 8

Учитель: «Найдите связь между острыми углами п/у треугольника».

Ученики: «Сумма острых углов прямоугольного треугольника всегда будет равна 90° ».

Задача 2. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Угол A равен 30° (рисунок 9). Найдите длину катета BC, если а) гипотенуза равна 6 см; б) в общем виде. Обобщите результаты и сформулируйте свойство.



- Задание:
1. Измерьте элементы треугольника.
 2. Найдите взаимосвязь между наименьшим углом п/у треугольника и его сторонами.
 3. Сформулируйте свойство п/у треугольника.
 4. Покажите его выполнимость для всех типов таких треугольников (с помощью "движения" точек).

$$|a| = 4,36 \text{ см}$$

$$|b| = 7,55 \text{ см}$$

$$|c| = 8,72 \text{ см}$$

$$\angle CAB = 30,0^\circ$$

$$\angle CBA = 60,0^\circ$$

Рисунок 9

Ученики проводят исследовательскую работу, формулируют свойство.

Учителю необходимо также ввести теорему о равенстве двух прямоугольных треугольников по гипотенузе и катету.

Учитель предлагает построить прямоугольный треугольник, зная длины гипотенузы и одного из катетов с помощью специальной программы – Математический конструктор. Дети выполняют практическую работу под контролем учителя. Учитель может делать работу вместе с учениками, показывая, что и как необходимо построить (рисунок 10).

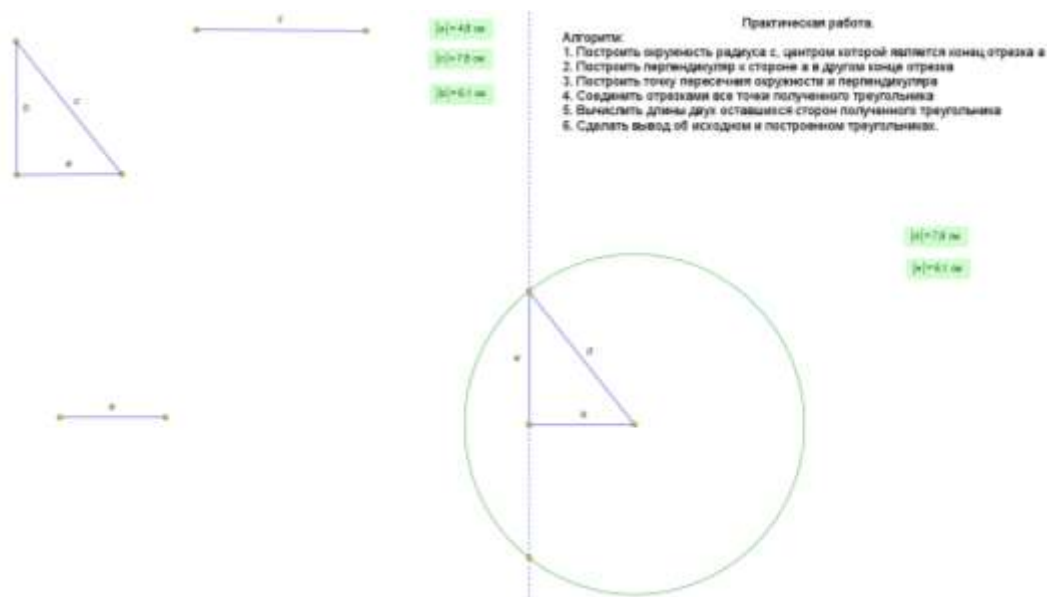


Рисунок 10

Ученики делают вывод и формулируют теорему: «Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны» [6].

Таким же образом можно ввести признаки равенства прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу, по катету и противолежащему углу.

Формулировка определения, усвоение понятия

Конструктивное определение было введено в начале урока.

Задания на усвоение свойств:

1. Докажите, что треугольник, углы которого равны $24,357^\circ$ и $65,643^\circ$ – прямоугольный.
2. Найдите углы п/у равнобедренного треугольника.
3. В равностороннем треугольнике проведена медиана. Найдите все образовавшиеся углы.
4. Найдите АН из треугольника АВС по данным чертежа (рисунок 11).

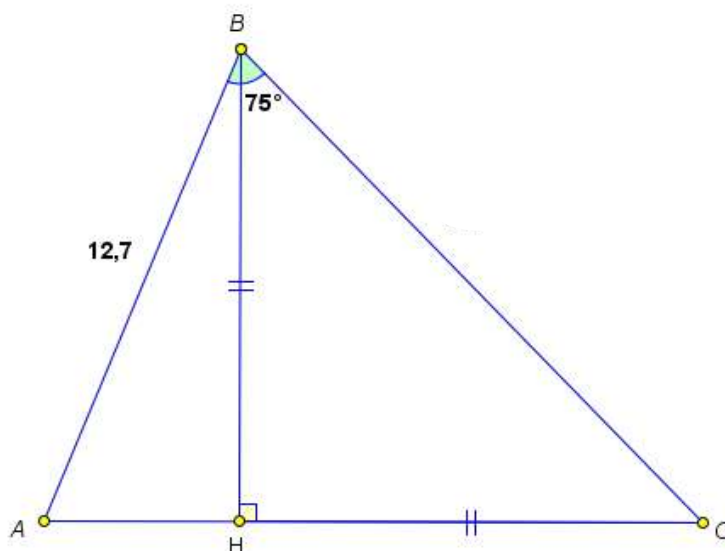


Рисунок 11

5. Тест на закрепление понятий и свойств прямоугольного треугольника, понимание различий и связи между видами треугольников (п/у, р/б, р/с). Ссылка на тест: <https://onlinetestpad.com/gt2jmshem6bkk>.

2.4 Методика работы с математическими понятиями в 8 классе

Курс математики в 8 классе отличается большим количеством сложных тем: дробные выражения и уравнения, квадратные корни, квадратные уравнения, неравенства и т.п. Курс геометрии также отличается высокой сложностью изучения тем. Многие из них включены в базу заданий ОГЭ. Поэтому необходимо уделять особое внимание усвоению всех понятий. На почве непонимания сложных тем может снизиться мотивация к изучению математики или даже развиться нелюбовь к предмету.

Также в 8 классе происходит тесное сплетение алгебры и геометрии. Дети должны усвоить их связь, но не забывать о том, что это разные дисциплины.

С учетом рассмотренных особенностей, мной разработана методика изучения некоторых математических понятий в 8 классе.

Понятие 1. «Многоугольник»

Этап мотивации

На слайде изображены произвольные: треугольник, четырехугольник, пятиугольник и т.д.

Учитель: «Скажите, что представлено на слайде, одним словом?»

Ученики затрудняются ответить. Тогда учитель предлагает заполнить таблицу, связывающую количество углов с названием фигуры (*таблица 8*).

Ученики, зная понятие треугольника, по аналогии смогут назвать остальные фигуры.

Таблица 8 – Многоугольники и их некоторые характеристики

Кол-во углов	3	4	5	6	...	n
Кол-во вершин	3	4	5	6	...	n
Кол-во сторон	3	4	5	6	...	n
Название фигуры	Треугольник	Четырехугольник	Пятиугольник	Шестиугольник	...	n-угольник

Раскрытие содержания понятия

Учитель: «Правильно. А n-угольник также называют многоугольником. Так что же такое многоугольник? Какие фигуры к нему относятся? Какие значения может принимать n?»

Учитель: «Давайте вспомним, что называют треугольником?»

Ученики: «Треугольником называют фигуру, состоящую из трёх точек и трёх отрезков, соединяющих эти точки».

Учитель: «Попробуем сформулировать определение многоугольника по аналогии».

Ученики: «Многоугольником называют фигуру, состоящую из n точек и n отрезков, соединяющих эти точки».

Учитель: «Проверим правильность этого утверждения».

На слайде изображены фигуры, не все из которых являются многоугольниками (*рисунок 12*). Учитель предлагает найти две лишние фигуры и обосновать свой выбор.

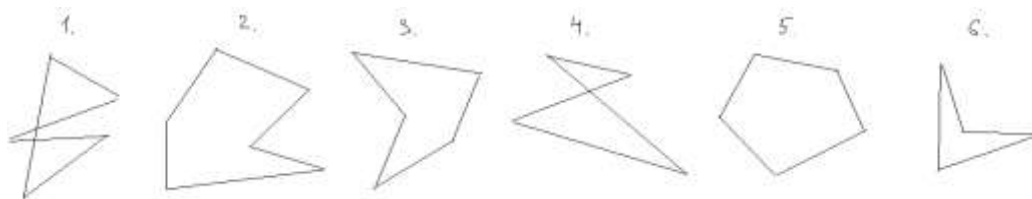


Рисунок 12

Ученики: «Фигуры под номерами 1 и 4 лишние, так как их несмежные стороны пересекаются между собой».

Учитель: «Верно. В таком случае, фигуры 1 и 4 нельзя назвать многоугольниками. Дополните ваше определение многоугольника».

Ученики: «Многоугольником называют фигуру, состоящую из n точек и n отрезков, соединяющих эти точки, причем несмежные отрезки не имеют общих точек» [7].

Учитель на доске и ученики в тетради строят многоугольник (его частный случай) по определению. Учитель при построении должен отметить еще один важный признак многоугольника: его стороны не должны лежать на одной прямой. Ученики совместно с учителем вводят обозначения вершин, сторон, углов, периметра по аналогии с элементами треугольника. Важно донести до учеников, как правильно называть многоугольники, какой порядок необходимо соблюдать.

Далее необходимо ввести понятия выпуклого и невыпуклого многоугольников.

На слайде представлены многоугольники. Учитель предлагает разбить на две группы многоугольники и обосновать критерий разбиения.

Ученикам тяжело сформулировать критерий, однако они правильно делят на группы.

Учитель: «Вы верно выделили группы. Назовем их выпуклые и невыпуклые многоугольники соответственно».

Далее учитель должен выделить две фигуры из каждой группы и предложить ученикам практическую работу.

Учитель: «Проведите через все стороны каждого многоугольника прямые. В чем отличие между полученными результатами?»

Ученики выполняют работу и вместе с учителем формулируют понятие выпуклого многоугольника: «Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины».

Осталось вывести формулу нахождения суммы углов многоугольника. Для этого необходимо заполнить таблицу, выводя закономерность (таблица 9).

Таблица 9 – Сумма углов многоугольника

Вид многоугольника	Кол-во углов	Кол-во треугольников, на которые можно разбить многоугольник	Сумма углов
Треугольник	3	1	$180 \cdot 1$
Четырехугольник	4	2	$180 \cdot 2$
Пятиугольник	5	3	$180 \cdot 3$
Шестиугольник	6	4	$180 \cdot 4$
...	...	...	...
n-угольник	n	n-2	$180(n - 2)$

Формулировка определения, усвоение понятия

Ученики совместно с учителем обобщают информацию и формулируют два определения (многоугольник, выпуклый многоугольник).

Задания:

1. Можно ли назвать многоугольником 1) треугольник; 2) четырехугольник?

2. Разделите фигуры на три группы и назовите их. Ученики должны уметь выделять выпуклые и невыпуклые многоугольники, а также фигуры, не являющиеся многоугольниками.

3. Начертите выпуклый/невыпуклый многоугольник, у которого 4/5/6/... вершин. Назовите его элементы.

4. Любой ли многоугольник можно назвать выпуклым? Наоборот?

5. Назовите все пары смежных сторон данного многоугольника.

6. Найдите сумму углов n -угольника, если: 1) $n = 3$; 2) $n = 4$; 3) $n = 5$ и т.д.

7. Найдите количество вершин/сторон/углов многоугольника, сумма углов которого равна: 1) 540° ; 2) 900° ; 3) 1440° .

Понятие 2. «Четырехугольник»

Этап мотивации

На слайде представлены: салфетка, поребрик, четырехугольная клумба, стол, значок марки машины Renault и т.д.

Учитель: «Какую форму имеют данные предметы?»

Ученики: «Форму многоугольников (четырехугольников)».

Учитель: «Верно. В окружающем нас мире часто встречаются предметы, имеющие форму четырехугольника. Предлагаю остановиться на этом многоугольнике и рассмотреть его».

Раскрытие содержания понятия

На слайде для наглядности представлены чертежи нескольких четырехугольников (рисунок 13).

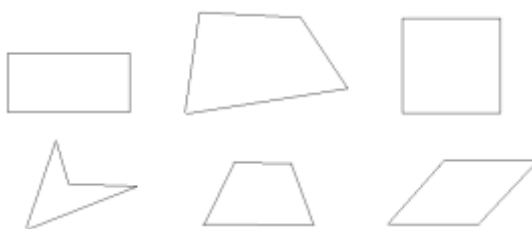


Рисунок 13

Учитель на доске и ученики в тетради строят выпуклый четырехугольник ABCD. Ученики совместно с учителем вводят обозначения вершин, сторон, углов, периметра по аналогии с элементами треугольника.

Также учителю необходимо ввести новое понятие – диагональ.

Учитель: «Достроим всевозможные отрезки через вершины нашего четырехугольника».

Ученики соединяют противоположные вершины.

Учитель: «Какие отрезки не являются сторонами четырехугольника?»

Ученики: «AC и BD».

Учитель: «Как можно назвать пары вершин A и C, B и D?»

Ученики: «Противоположными вершинами».

Учитель: «Верно. Отрезки AC и BD называют диагоналями четырехугольника. Попробуйте дать определение этому понятию».

Ученики: «Диагональю четырехугольника называют отрезок, соединяющий его противоположные вершины».

Формулировка определения, усвоение понятия

Учитель: «Сформулируйте определение четырехугольника. Назовите его отличительные признаки».

Ученики: «Четырехугольником называют фигуру, состоящую из 4 точек и 4 отрезков, соединяющих эти точки, причем несмежные отрезки не имеют общих точек, а смежные – не лежат на одной прямой. Отличительная черта – наличие диагоналей» [7].

Задания:

1. Назовите четырехугольники и их элементы, укажите вид четырехугольника.
2. Назовите противоположные стороны и вершины данного четырехугольника.
3. Найдите периметр четырехугольника, если одна сторона равна 5, вторая – на 3 больше третьей, третья – в 3,5 раз больше четвертой, а четвертая – в 2 раза меньше первой.

4. Найдите углы четырехугольника, если: 1) они равны между собой; 2) противоположные углы попарно равны, а смежные – отличаются вдвое; 3) они пропорциональны числам 1, 2, 4, 5.

Понятие 3. «Иррациональные числа. Действительные числа»

Этап мотивации

Задание: найти значения выражений.

$$\sqrt{16} + 7\sqrt{100} - 85\sqrt{4} =$$

$$250\sqrt{\frac{1}{4}} - 840\sqrt{\frac{9}{16}} =$$

$$\sqrt{2500} - 10 + \sqrt{7} - \sqrt{7} =$$

$$\sqrt{36 - 2^2 + 4} + \sqrt{2} =$$

Ученики затрудняются до конца вычислить последний пример.

Раскрытие содержания понятия

Учитель: «Попробуем найти графически значение выражения $\sqrt{2}$. Построим решение уравнения $x^2 = a$ ».

Ученики строят график функции $x^2 = a$ (рисунок 14).

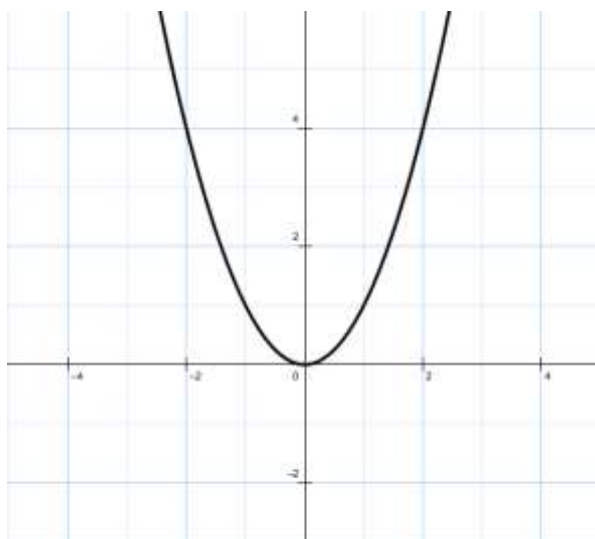


Рисунок 14

Учитель: «Найдем по графику значения x , при которых $a = 0$, $a = 1$, $a = 4$, $a = -2$, $a = 2$ ».

Ученики выполняют задание (таблица 10, рисунок 15)

Таблица 10 – Значения x для некоторых a

a	0	1	4	-2	2
$x_{1,2}$	0	± 1	± 2	$\emptyset$	$\pm\sqrt{2}$

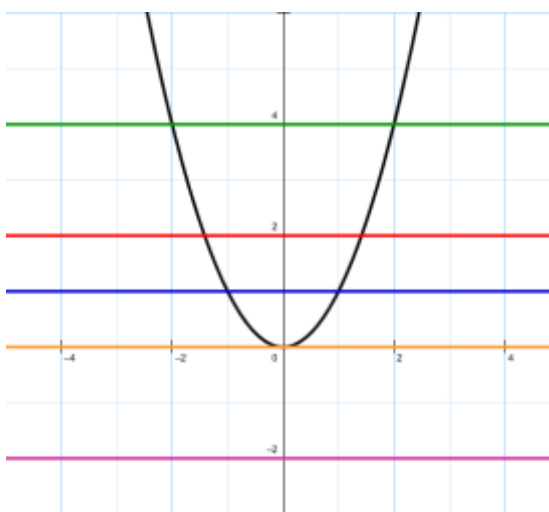


Рисунок 15

Учитель: «Мы видим, что значение $\pm\sqrt{2}$ действительно существует. Значит ли, что это число является рациональным?»

Ученики высказывают разные мнения.

Учитель: «Если $\sqrt{2}$ – рациональное число, то оно может быть представлено в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$. Проведем аналитическую работу».

Ученики совместно с учителем выполняют следующие действия. Пусть $\sqrt{2} \in Q$, тогда $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, где $m \in Z, n \in N$. Возведем обе части равенства в квадрат $2 = \frac{m^2}{n^2}$. Умножим на n^2 . Получим $2n^2 = m^2$, отсюда m^2 – четное, т.е. $m^2 = 2k$. Тогда $2n^2 = 4k^2$. Отсюда $n^2 = 2k^2$. Следовательно, n^2 – тоже четное. Делаем вывод, что дробь сократима. Таким образом, число $\sqrt{2}$ – не рациональное.

Учитель вводит понятие «иррационального числа» без определения.

Учитель: «В виде дроби мы не сможем записать это число. Поэтому оценим результат другим способом. Между какими целыми числами расположено число $\sqrt{2}$ на оси ОХ?»

Ученики: «Между 1 и 2».

Учитель предлагает рассмотреть двойное неравенство $1 < \sqrt{2} < 2$ и поработать с ним следующим образом.

$1 < x < 2$, $x^2 = 2$. Зададим значения переменной x с точностью до десятых и найдем квадраты этих значений.

$$1,1^2 = 1,21$$

$$1,2^2 = 1,44$$

$$1,3^2 = 1,69$$

$$1,4^2 = 1,96$$

$$1,5^2 = 2,25$$

Учитель: «Сделайте вывод и оцените значение числа $\sqrt{2}$ ».

Ученики: « $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ ».

Следующее	задание.	Разделите	числа
1,454545 ...; 20, (34); 17,12345 ...; 4,0(18); 0,12468423 ...	на	2	группы.

Обоснуйте свой выбор.

Ученики: «1,454545 ...; 20, (34); 4,0(18) - бесконечные периодические дроби. Числа 17,12345 ...; 0,12468423 ... не обладают периодом».

Учитель: «Верно. Их называют бесконечными непериодическими дробями. Их так же нельзя представить в виде обыкновенной дроби, в отличие от бесконечных периодических дробей. Поэтому они являются иррациональными числами».

Учитель приводит другие примеры иррациональных чисел, такие как π ; 1,010010001... и др.

Формулировка определения, усвоение понятия

Учитель: «Как понять, что перед нами иррациональное число? Сформулируйте определение, что называют иррациональным числом. Обратите

внимание, что число, находящееся под знаком радикала, не всегда является иррациональным».

Ученики: «Иррациональным числом называют бесконечную десятичную непериодическую дробь» [2].

Учитель: «Как назовем выражение, содержащее иррациональные числа?»

Ученики: «Выражение, содержащее иррациональные числа, называют иррациональным выражением».

Задания:

1. Среди чисел выделите иррациональные:
 $\sqrt{9}, \sqrt{45+2^2}, \sqrt{75}, \sqrt{1210}, 6 - \sqrt{2,25}, \sqrt{3,6}$.
2. Оцените значение числа $\sqrt{2}$ с точностью до сотых/тысячных.
3. Оцените до десятых значения чисел $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}$.
4. Сравните числа $\sqrt{8}$ и 2,6; $\sqrt{10}$ и 3,16; $\sqrt{1300}$ и 36.
5. Доказать, что сумма двух иррациональных чисел $3 - \sqrt{2}$ и $\sqrt{2} - 17$ является рациональным числом. Привести свои примеры, когда сумма/разность иррациональных чисел является рациональным/иррациональным числом. Сделать вывод о результате арифметических операций над иррациональными числами.
6. В результате каких арифметических операций над иррациональным и рациональным числами получается всегда иррациональное число? Приведите примеры и контрпримеры.
7. Пусть a – рациональное число, b – иррациональное. Рациональным или иррациональным является число $a^2 - b^2$?

2.5 Методика работы с математическими понятиями в 9 классе

Одна из основных особенностей преподавания математики в 9 классе – подготовка обучающихся к сдаче ОГЭ. Учителю необходимо удостовериться

в том, что ученики имеют полный багаж математических знаний за 5-9 классы. А также обучить детей новым знаниям и развить новые умения. Главный упор делается на систематизацию и обобщение пройденного материала. Учителю необходимо более тщательно проводить контроль знаний, иметь полное представление об уровне подготовленности каждого обучающегося.

Обучение математике в 9 классе направлено на достижение следующих целей:

1. Овладение системой математических знаний и умений, необходимых для применения их в практической деятельности, изучения смежных дисциплин, продолжения образования.
2. Интеллектуальное развитие, продолжение формирований ясности и точности мышления, критичности мышления, интуиции, логического мышления, элементов алгоритмической культуры, пространственных представлений, способности к преодолению трудностей.
3. Формирование представлений об идеях и методах математики как универсального языка.

Некоторые требования к уровню подготовки выпускников 9 класса:

1. Понимать существо понятия математического доказательства.
2. Знать понятие алгоритма.
3. Уметь пользоваться геометрическим языком для описания предметов окружающего мира.

С учетом рассмотренных особенностей, мной разработана методика изучения некоторых математических понятий в 9 классе.

Понятие 1. «Арифметическая прогрессия»

Этап мотивации

Учитель предлагает задачу №1: «В первом ряду кинозала 24 места, а в каждом следующем на 2 больше, чем в предыдущем. Сколько мест в шестом ряду?»

Ученики вычисляют и получают ответ: «34 места».

Учитель предлагает задачу №2: «Бассейн, температура воды в котором – 13 °С, решили нагреть с помощью специального оборудования, которое повышает температуру воды на 0,5 °С каждую минуту. Какой температуры будет вода в бассейне спустя 23 минуты?»

Ученики размышляют логически и решают задачу в одно действие:
 $13 + 0,5 \cdot 23 = 24,5$.

Учитель: «Проанализируем ваши решения в конце урока. А сейчас посмотрим на слайд».

Раскрытие содержания понятия

На слайде изображены числовые последовательности:

1. $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$
2. $1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$ – последовательность Фибоначчи
3. $1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots$ – последовательность квадратов N чисел
4. $3, 7, 11, 15, 19, 23, \dots$
5. $-17, 13, 43, 73, 103, 133, \dots$
6. $1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, \dots$

Учитель: «Ребята, посмотрите на эти числовые последовательности. Рассмотрим, как они получаются. Какие последовательности схожи?»

Ученики анализируют каждую последовательность и находят закономерность получения последующих членов последовательностей. Они замечают, что разница между соседними членами числовых последовательностей №1, 4 и 5 всегда фиксированная. То есть каждый раз прибавляется одно и то же число. Остальные же последовательности имеют иную закономерность.

Учитель еще раз обращает внимание на числовые последовательности №1, 4 и 5 и записывает схему получения каждого последующего числа.

$1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$

+1 +1

$3, 7, 11, 15, 19, 23, \dots$

+4 +4

$$\begin{array}{ccccccc} -17, & 13, & 43, & 73, & 103, & 133, & \dots \\ & \underbrace{\hspace{1em}} & \underbrace{\hspace{1em}} & & & & \\ & +30 & +30 & & & & \end{array}$$

Учитель: «Можем ли мы пронумеровать члены числовой последовательности? Каждому ли числу соответствует его порядковый номер?»

Ученики: «Да».

Учитель: «Тогда попробуйте записать эти последовательности в общем виде через букву a ».

Ученики: « $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ ».

Учитель: «Как получаются 2, 3, 4, ... члены последовательности?»

Ученики: «Путем прибавления к предыдущему члену последовательности фиксированного числа».

Учитель: «Это число обозначим через d . Его будем называть разностью. Выразим через d некоторые члены последовательности».

$$a_1 = a_1$$

$$a_2 = a_1 + d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d$$

...

$$a_n = ?$$

Учитель: «Найдите закономерность и запишите формулу для n -ого члена последовательности».

$$a_n = a_1 + (n - 1)d.$$

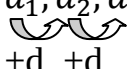
Учитель: «Мы получили формулу общего члена числовой последовательности $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ »

Формулировка определения, усвоение понятия

Учитель: «Последовательность, образованную рассмотренной закономерностью, будем называть арифметической прогрессией. Попробуйте дать определение этому понятию».

Ученики: «Арифметической прогрессией называют числовую последовательность, в которой каждый последующий член образован прибавлением к предыдущему члену одного и того же числа d , то есть $a_n = a_{n-1} + d$ » [4].

Учитель делает обобщенный вывод и делает краткую запись.

$a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, \dots$ – арифметическая прогрессия с разностью d


a_n – общий член арифметической прогрессии

$$a_n = a_{n-1} + d$$

$a_n = a_1 + (n - 1)d$ – формула n -ого члена арифметической прогрессии

Задания:

1. Среди множества числовых последовательностей укажите арифметические прогрессии.
2. Определите, в каком случае арифметическая прогрессия возрастает/убывает. Приведите примеры, иллюстрирующие предположение.
3. Решить задачу №1 и задачу №2, пользуясь формулами арифметической прогрессии. Проанализировать и сравнить решения.
4. Первый член арифметической прогрессии $a_1 = 5$, а разность $d = 2,1$. Найдите: $a_{10}, a_{27}, a_{100}, a_{116}, \dots$
5. Найдите первый член арифметической прогрессии b_1 , если разность $d = -4$, а $b_{21} = -23$.
6. Дана арифметическая прогрессия $3,9; 2,777; 1,654; \dots$ Укажите вид прогрессии. Найдите номер первого отрицательного члена прогрессии.

Понятие 2. «Геометрическая прогрессия»

Введение понятия геометрической прогрессии аналогично введению понятия арифметической прогрессии.

Этап мотивации

Учителем предлагается задача с иллюстрацией: «Бактерия, попав в живой организм, к концу 1-й минуты делится на две бактерии, каждая из них к

концу следующей минуты делится опять на две и т. д. Сколько бактерий окажется в организме через 20 минут?»

Ученики затрудняются ответить.

Учитель: «Выпишем в виде числовой последовательности количество бактерий после 1, 2, 3, 4, ... деления».

Ученики: «1, 2, 4, 8, ..., ».

Учитель: «Является ли эта последовательность арифметической? Объясните ответ».

Ученики: «Нет, так как каждый последующий член последовательности нельзя получить путем прибавления одного и того же числа».

Раскрытие содержания понятия

Рассмотрим следующие последовательности и найдем закономерность получения последующих членов:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, \dots$$

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots$$

$$4, 20, 100, 500, \dots$$

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots$$

$$b_1, b_1q, b_1q^2, b_1q^3, \dots$$

Ученики: «Каждый последующий член последовательности получен путем умножения предыдущего на одно и то же число».

Учитель: «Это число обозначим через q . Его будем называть знаменателем. Выразим через q некоторые члены последовательности и найдем формулу общего члена».

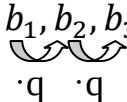
Ученики выполняют задание по аналогии с арифметической прогрессией.

Формулировка определения, усвоение понятия

Учитель: «Последовательности такого вида будем называть геометрическими. Попробуйте дать определение по аналогии с арифметической».

Ученики: «Геометрической прогрессией называют числовую последовательность, в которой каждый последующий член образован умножением предыдущего члена на одно и то же число q , то есть $b_n = b_{n-1}q$ » [4].

Учитель делает обобщенный вывод и делает краткую запись.

$b_1, b_2, b_3, b_4, \dots, b_n, \dots$ – геометрическая прогрессия с разностью d


b_n – общий член арифметической прогрессии

$$b_n = b_{n-1}q$$

$b_n = b_1 q^{n-1}$ – формула n -ого члена арифметической прогрессии

Задания должны быть аналогичны заданиям по теме «Понятие арифметической прогрессии». Также можно предложить следующие задания:

1. Решить задачу про деление бактерии с помощью формул геометрической прогрессии.
2. Составьте сравнительную таблицу «Арифметическая и геометрическая прогрессии».
3. Разделите числовые последовательности на три группы:
 - а) $1, -1, -2, -4, \dots$
 - б) $\frac{1}{856}, \frac{1}{107}, \frac{8}{107}, \frac{64}{107}, \dots$
 - в) $1^3, 2^3, 3^3, 4^3, \dots$
 - г) $\frac{1}{4}, -\frac{7}{4}, -\frac{15}{4}, -\frac{23}{4}, \dots$
 - д) $2^0, 2^{-1}, 2^{-2}, 2^{-3}, \dots$

Заключение

Процесс формирования понятий — это сложный постепенный процесс, состоящий из последовательных этапов, на которых необходимо учитывать методические и психологические особенности обучения детей определенного возраста и возможностей.

Целью работы была разработка методической базы по формированию некоторых математических понятий в средней школе. В первой главе я изучила основы методики изучения математических понятий. В их числе рассмотрены содержание и объём математических понятий, их классификация, ошибки при изучении понятия, требования к определению понятия, а также основные этапы изучения математических понятий в средней школе.

Формирование математических понятий осуществляется в несколько этапов: мотивация, раскрытие содержания понятия (выявление существенных свойств), формулировка определения, задания на распознавание и усвоение понятия. В соответствии с этим мной разработана методика формирования некоторых математических понятий в средней школе. Особое внимание я уделяла этапу мотивации изучения математического понятия. От этого этапа зависит, насколько дети будут заинтересованы в изучении нового понятия. В силу неоднозначного выбора мотивирующей задачи, заданий на усвоение понятия, различий в содержании учебных пособий на каждое понятие можно предложить не единственную разработку. Это говорит о том, что разработка единой методической базы по формированию математических понятий в средней школе невозможна в силу её субъективности.

Методика изучения математики тесно связана с педагогикой и психологией, поэтому во второй главе мной рассмотрены некоторые возрастные особенности детей с 5 по 9 классы, а также педагогические особенности организации обучения математике на уровне основной общей ступени образования. На основе этих данных приведены примеры введения математических понятий в каждом классе.

По результатам исследования можно сделать следующие выводы:

1. Совершенствование методик формирования математических понятий в средней школе возможно в контексте идей, учитывающих этапы процесса формирования понятий, средства и формы их реализации в соответствии с возможностями обучающихся определенных возрастов.
2. Использование разработанной методики позволит учителю технологизировать процесс формирования математических понятий в средней школе в рамках основного общего образования.

Таким образом, цель и задачи исследовательской работы достигнуты в полной мере.

Список литературы

1. Алгебра. 7 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; 4-е изд., М. : Просвещение, 2014. 256 с.
2. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ш. А. Алимов [и др.] ; 17-е изд., М. : Просвещение, 2010. 255 с.
3. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ш. А. Алимов [и др.] ; 16-е изд., М. : Просвещение, 2011. 287 с.
4. Алгебра. 9 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; 4-е изд., М. : Просвещение, 2017. 287 с.
5. Алгебра. Дидактические материалы. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / М. В. Ткачёва [и др.] ; 2-е изд., М. : Просвещение, 2016. 127 с.
6. Геометрия. 7-9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений / А. В. Погорелов [и др.] ; 2-е изд., М. : Просвещение, 2014. 240 с.
7. Геометрия. 7-9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян [и др.] ; 20-е изд., М. : Просвещение, 2014. 384 с.
8. Далингер В. А. Когнитивно-визуальный подход, его сущность и методические особенности в обучении математике // Наука об образовании. 2015. С. 28–32.
9. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений.; 3-е изд., М. : Вентана-Граф, 2019. 255 с.
10. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений.; М. : Вентана-Граф, 2014. 304 с.
11. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Математика. 5 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений. М. : Вентана-Граф, 2019. 304 с.
12. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Математика. 6 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений. 5-е изд., М. : Вентана-Граф, 2019. 304 с.

13. Методика и технология обучения математике. Курс лекций : пособие для вузов / Н. Л. Стефанова [и др.] ; под ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. 2-е изд., М. : Дрофа, 2010. 415 с.
14. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Ч. 1 : учеб. для общеобразоват. учреждений. 13-е изд., М. : Мнемозина, 2001. 160 с.
15. Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта среднего (полного) общего образования : Приказ Минобрнауки РФ от 17 мая 2012 г. № 413 (в ред. от 31 декабря 2015 г.). URL: <https://base.garant.ru/70188902/8ef641d3b80ff01d34be16ce9bafc6e0/>. Заглавие с экрана (дата обращения: 12.12.2022).
16. Суворова С. Б., Кузнецова Л. В., Минаева С. С. Методические рекомендации. 5 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций. 2-е изд., М. : Просвещение, 2017. 192 с.
17. Темербекова А. А., Чугунова И. В., Байгонакова Г. А. Методика обучения математике : учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений. Горно-Алтайск : РИО ГАГУ, 2013. 365 с.
18. Теория и методика обучения математике: общая методика : учеб. пособие / Е. А. Суховиенко [и др.] ; Челябинск : Образование, 2010. 65 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«20» 09 20 22 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента

Сотиной Алины Андреевны
(ФИО полностью)

Тема работы «Методика формирования математических понятий в средней школе»

Утверждена приказом по Университету от «28.09» 20 22 г. № 805/0

Срок сдачи студентом законченной работы «04» 05 20 23 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1	Рассмотреть теоретические аспекты понятия как формы мышления, подобрать методическую литературу.	Октябрь-ноябрь 2022	выполнено
2	Обобщить материал, содержащий определение, классификацию, элементы понятий, разобрать примеры понятий из курса математики.	Декабрь 2022	выполнено
3	Разработать методику введения математических понятий в 5-6 классах курса математики.	Январь-февраль 2023	выполнено
4	Разработать методику введения математических понятий в 7-9 классах курса алгебры и геометрии.	Март-апрель 2023	выполнено
5	Обобщить результаты проделанной работы.	Май 2023	выполнено
6	Подготовить презентацию и выступление к защите работы.	Июнь 2023	выполнено

Дата выдачи задания «20» 09 2022г.

Руководитель  Киреева О.Г.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

 Сидорова А.А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Сотиной Алины Андреевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Сотина Алина Андреевна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика», прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Методика формирования математических понятий в средней школе», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета»


подпись
10.05.2023
дата

ВКР представлена на проверку (дата) 10.05.2023

Руководитель ВКР  Никитина О.Г.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ»
выпускной квалификационной работы на тему: «Методика формирования
математических понятий в средней школе»
студентки 4 курса Сотиной Алины Андреевны направления подготовки
44.03.01 «Педагогическое образование», профиль подготовки «Математика»
Руководитель ВКР Никитина Ольга Геннадьевна



Отчет о проверке на заимствования №1



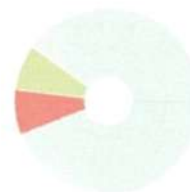
Автор: Сотина Алина
Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна
Организация: Пензенский государственный университет
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - <http://vuzs.antiplagiat.ru>

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 79
Начало загрузки: 10.05.2023 12:07:43
Длительность загрузки: 00:00:14
Имя исходного файла: Диплом (3).pdf
Название документа: Диплом 2
Размер текста: 80 кБ
Символов в тексте: 81788
Слов в тексте: 9711
Число предложений: 938

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 10.05.2023 09:07:59
Длительность проверки: 00:04:19
Комментарий: не указано
Поиск с учетом редактирования: да
Проверенные разделы: основная часть с. 1,3,5-62, титульный лист с. 2, содержание с. 4, библиография с. 63-64
Модули поиска: ИПС Адилет, Библиография, Сводная коллекция ЭБС. Интернет Плюс*, Сводная коллекция РГБ, Цитирование, Переводные заимствования (RuEn), Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu), Переводные заимствования по Интернету (EnRu), Переводные заимствования издательства Wiley, eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ: аналитика, СПС ГАРАНТ: нормативно-правовая документация, Медицина, Диссертации НЭБ, Коллекция НБХ, Перефразирования по eLIBRARY.RU, Перефразирования по СПС ГАРАНТ: аналитика, Перефразирования по Интернету, Перефразирования по Интернету (En), Патенты СССР, РФ, СНГ, Модуль поиска "ПГУ", СМИ России и СНГ, Шаблоны фразы, Кольцо вузов, Издательство Wiley, Переводные заимствования



Совпадения
7,76%

Самодетерминация
0%

Цитирования
8,33%

Оригинальность
83,91%

Дата

Никитина О.Г.

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методика формирования математических понятий в средней школе»
студентки Сотиной Алины Андреевны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 19ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Сотиной Алины Андреевны посвящена методике введения математических понятий в средней школе.

Актуальность данной темы состоит в том, что формирование понятийного аппарата является важнейшей задачей обучения математике. Изучение математических понятий предполагает крайне внимательное отношение к процессу их формирования. Задачи на формирование понятий способствуют мотивации их введения, направлены на выявление существенных признаков понятия, способствуют усвоению определений, овладению объемом понятия, обучению применения понятий.

Цель работы состоит в разработке методической базы по формированию некоторых математических понятий в средней школе.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, основной части, заключения и списка литературы.

Основная часть состоит из двух глав. Первая глава работы посвящена теоретическим основам формирования понятий в курсе математики средней школы. В ней рассмотрены основные характеристики понятий, виды определений, их классификация, определены требования к формированию математических понятий, рассмотрены основные этапы введения понятий.

Во второй главе приведены примеры формирования некоторых математических понятий в основной общей ступени образования в виде фрагментов урока.

Работа Сотиной А.А. является самостоятельным исследованием. Материал работы может неограниченно дополняться методическими рекомендациями по формированию любых математических понятий в школьном курсе математики. Практическая значимость исследования в том, что результаты работы могут быть использованы для быстрой подготовки к урокам введения некоторых математических понятий.

Выпускная квалификационная работа Сотиной Алины Андреевны заслуживает оценки «отлично».

Научный руководитель,
доцент кафедры «МО»,
к.ф.м.н., доцент



О.Г. Никитина