

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**

**«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

**«Методические аспекты обучения доказательству неравенств в рамках
учебного курса «Алгебра» на уровне основного общего образования»**

Студент

Апенкина Елена Сергеевна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель

Сорокина М.В.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 01.06.26 № 10)

И.о. заведующего кафедрой

Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой хорошо (протокол заседания ГЭК от 25.06.26 № 1)

Секретарь ГЭК

Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «НЕРАВЕНСТВА» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ.....	5
1.1 Сравнение действительных чисел.....	5
1.2 Различные способы доказательства неравенств. Классические неравенства	8
1.3 Место темы в школьной программе (анализ рабочих программ базовый и профильный уровень).....	10
1.4 Содержание школьных учебников по рассматриваемой теме.....	17
1.5 Анализ заданий по теме в олимпиадах разного уровня.	34
ГЛАВА 2 ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС ПО ТЕМЕ «НЕРАВЕНСТВА».....	39
2.1 Факультативный курс по алгебре в 8-9 классах на тему «Доказательства неравенств».....	39
2.2 Конспекты факультативных занятий	43
2.2.1 Неравенства о средних	43
2.2.2 Неравенство Коши-Буняковского-Шварца	52
2.2.3 Транснеравенство	61
2.2.4 Неравенство Бернулли	70
2.2.5 Неравенство Чебышева	75
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	82
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	84

ВВЕДЕНИЕ

Изучение неравенств – это один из самых сложных и одновременно интересных этапов школьного курса алгебры. Если в начальной школе дети просто сравнивают числа на интуитивном уровне, то к 7-9 классам от них требуется абстрактное мышление и понимание аналитических методов.

Очевидно, что процесс образования должен быть направлен на развитие логического и нестандартного мышления школьников, умения обосновывать свои суждения и строить цепочки рассуждений. Эти навыки важны не только для успешного освоения школьной программы, но и для участия в олимпиадах и более глубокого изучения математики. Доказательство неравенств является одним из важных факторов для формирования дедуктивного мышления.

При этом наблюдается дефицит учебного времени для глубокого изучения неравенств на уроках. Как правило, в учебниках рассматриваются простейшие свойства неравенств и стандартные методы сравнений. Однако олимпиадные задачи и задачи повышенной сложности требуют владения большим количеством инструментов для их решения: неравенства о средних, транснаравенство, неравенство Бернулли, неравенство Чебышева и другие. В существующей школьной программе этот материал либо отсутствует, либо вынесен в дополнительные номера, которые учителя часто вынуждены пропускать из-за нехватки времени. Это приводит к тому, что учащиеся 7-9 классов, особенно мотивированных на участие в олимпиадах, не получают достаточно знаний о способах доказательств неравенств повышенной сложности.

Недостаточность учебного материала в учебниках и возрастающий интерес учащихся к математическим олимпиадам показывают необходимость организации внеурочной деятельности, в частности, разработки факультативного курса. Он позволит углубленно изучить материал, который выходит за пределы школьной программы.

Все вышесказанное обуславливает актуальность данной работы.

Цель исследования: изучение методических аспектов темы «Доказательство неравенств» и разработка факультативного курса по этой теме для учащихся 8-9 классов.

Исходя из темы исследования можно выделить следующие задачи:

1. Провести анализ содержания школьных учебников алгебры для 8-9 классов на предмет содержания темы «Неравенства» и глубины представленного в них материала.

2. Проанализировать федеральные рабочие программы учебного курса «Алгебра» базового и углубленного уровней в 8-9 классах.

3. Проанализировать олимпиадные задачи по математике для 8-9 классов и выделить неравенства, которые не входят в обязательную школьную программу, но необходимы для успешного участия в олимпиадах.

4. Разработать структуру и содержание факультативного курса «Доказательства неравенств».

Объект исследования: процесс обучения алгебре учащихся 8-9 классов основной общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика обучения учащихся 8-9 классов методам доказательства и применения классических неравенств в рамках факультативного курса.

При выполнении работы использовались следующие методы исследования: изучение и анализ учебной литературы, нормативной документации и предметной базы по изучаемой теме.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, списка литературы и заключения. В первой главе изложен теоретический материал, касающийся сравнения действительных чисел, проведен анализ федеральных рабочих программ, школьных учебников, олимпиадных задач по теме «Доказательство неравенств». Во второй главе разработан

факультативный курс для учащихся 8-9 классов по теме выпускной квалификационной работы.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ ТЕМЫ «НЕРАВЕНСТВА» В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1.1 Сравнение действительных чисел

Сравнение чисел – одно из основных понятий не только школьной алгебры, но и всей математики. Интуитивно умение определять, какое число больше, а какое меньше, формируется ещё в начальной школе на множестве натуральных чисел.

Сравнение действительных чисел – это алгебраическое действие, которое основано на понятии отношения порядка.

Линейное отношение порядка – это возможность определить «соотношение большего и меньшего» для элементов абстрактного множества или поля, которое обладает основными свойствами хорошо известного отношения большего и меньшего для чисел.

Определение. Бинарное отношение R на множестве A называется отношением порядка, если R антисимметрично и транзитивно, т.е. выполняются следующие условия:

1. $\forall (x, y \in A)$ из условия $xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$.

2. $\forall (x, y, z \in A)$ из условия $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Определение. Отношение порядка R на A называется строгим, если R антирефлексивно и нестрогим, если R рефлексивно, т.е. $\forall (a \in A) aRa$.

Так как из антирефлексивности и транзитивности бинарного отношения R следует антисимметричность R , то дадим следующее определение строгого порядка.

Определение. Бинарное отношение R на A называется отношением строгого порядка, если оно антирефлексивно и транзитивно [12].

Таким образом, можно дать следующее определение.

Определение. Бинарное отношение $\leq$ на множестве A называется отношением линейного порядка, если выполнены следующие аксиомы:

1. $\forall a, b \in M, a \leq b$ или $b \leq a$.
2. $\forall a \in M, a \leq a$ (рефлексивность).
3. $\forall a, b \in M, a \leq b$ и $b \leq a \Rightarrow a = b$ (антисимметричность).
4. $\forall a, b, c \in M, a \leq b$ и $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ (транзитивность) [14].

В качестве примера определим отношение строгого порядка на множестве положительных действительных чисел.

Определение. Пусть $a, b, c \in R^+$. Число a меньше числа b ($a < b$), если существует такое $c \neq 0$, что $a + c = b$.

Очевидно, что для отношения «меньше» выполнены аксиомы порядка:

1. Для любых чисел $a, b \in R^+, a \neq b$ справедливо одно из двух отношений: либо « $a < b$ », либо « $a > b$ ».
2. Антирефлексивное (поскольку неверно, что $a < a$).
3. Антисимметричное (поскольку если $a < b$, то неверно, что $b < a$).
4. Транзитивное (поскольку если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$).

Поэтому отношение «меньше» на множестве R^+ является отношением линейного порядка. Таким образом, R^+ – линейно упорядоченное множество.

Рассмотрим некоторые свойства отношения «меньше» ($\forall a, b, c \in R$):

- сложение: $((a < b) \rightarrow (a + c < b + c))$;
- умножение: $(a < b \rightarrow ac < bc)$ [3].

Операция сравнения действительных чисел изучается в школе. Сравнение чисел лежит в основе решения неравенств (линейных, квадратных), исследования функций на монотонность, оценки величин в задачах с параметрами и выполнения заданий ОГЭ и ЕГЭ. Однако, строгое определение отношения сравнения действительных чисел в курсе математики дать нельзя. Так как в современных учебниках математики для пятого класса после знакомства с натуральными числами ученики переходят к изучению

натурального ряда – множества всех натуральных чисел, расположенных по возрастанию. На основе этого вводится правило сравнения: большим считается то число, которое в этом ряду находится правее. Далее изучается сравнение дробей, рациональных чисел. И только после этого сравниваются действительные числа.

По правилу сравнения целых чисел, если $a > b$, то для некоторого натурального числа c выполняется равенство $a = b + c$. Следовательно, на числовой прямой число a располагается правее числа b .

Если число a на числовой прямой располагается правее числа b на c единиц, то согласно определению сложения целых чисел справедливо равенство $a = b + c$ для натурального числа c . Тогда по правилу сравнения целых чисел справедливо неравенство $a > b$.

Кроме того, любое положительное целое число больше любого отрицательного целого числа, и из двух отрицательных целых чисел больше то, модуль которого меньше.

В школьном курсе математики дается следующее определение, позволяющее сравнивать действительные числа.

Определение. Говорят, что число a больше числа b , если разность $a - b$ является положительным числом, а число a меньше числа b , если разность $a - b$ есть число отрицательное [6].

Кроме определения рассматриваются некоторые приемы сравнения чисел, использующиеся в нестандартных заданиях:

1. Сравнение двух положительных чисел путём сравнения их отношения с единицей.

В основе применения данного метода лежит следующее утверждение:

- если $a > 0, b > 0$ и $\frac{a}{b} > 1$, то $a > b$;
- если $a > 0, b > 0$ и $\frac{a}{b} < 1$, то $a < b$.

2. Сравнение чисел посредством сравнения их степеней.

При использовании этого метода основополагающими являются следующие утверждения:

- для любых a и b справедливо:

$$a > b \leftrightarrow a^{2n+1} > b^{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N};$$

- для любых неотрицательных a и b справедливо:

$$a > b \leftrightarrow a^{2n} > b^{2n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

3. Сравнение данных чисел с промежуточным числом.

Необходимо найти такое число, которое лежит между двумя данными числами и легко сравнивается с ними, после чего применяется следующее свойство чисел: если $a < c$ и $c < b$, то $a < b$.

1.2 Различные способы доказательства неравенств. Классические неравенства

Одним из типов задач, связанных со сравнением чисел, являются задания на доказательство неравенств. Основными приемами, используемыми при решении таких задач, являются:

1. Доказательство неравенств по определению.

Для доказательства неравенства достаточно исследовать знак соответствующей разности и показать, что он является положительным или отрицательным. Например, чтобы доказать неравенство $a > b$, надо составить разность $a - b$, и путем тождественных преобразований выражений показать, что данная разность положительна [13].

2. Доказательство с использованием свойств числовых неравенств [6].

Этот метод доказательства неравенств опирается на их свойства. Среди этих свойств можно выделить следующие:

- если $a > b$, то $b < a$; если $a < b$, то $b > a$;
- если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$;
- если $a < b$ и c – любое число, то $a + c < b + c$;

- если $a < b$ и c – положительное число, то $ac < bc$. Если $a < b$ и c – отрицательное число, то $ac > bc$;

- если a и b – положительные числа и $a < b$, то $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

3. Сведение неравенств к уже известным.

Этот метод доказательства неравенств основывается на уже известных неравенствах. Вместо того чтобы каждый раз исследовать разность с нулём, доказываемое неравенство с помощью равносильных преобразований приводят к виду одного из известных неравенств. Если в результате преобразований получается заведомо верное неравенство, то и исходное утверждение считается доказанным.

В последнем случае на помощь приходят методы, основанные на использовании классических неравенств, которые могут существенно расширить математический кругозор учащихся. Под классическими неравенствами мы будем понимать утверждения, часто используемые при доказательстве неравенств. Они играют ключевую роль в доказательстве неравенств определенного типа. Большинство классических неравенств являются именными и имеют большое историческое значение.

В таблице представлены некоторые из этих неравенств, использование которых возможно при изучении алгебры учащимися 8-9 классов.

Таблица 1 – Классические неравенства

№ п/п	Название	Неравенства
1	Неравенства о средних	$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n}}$
2	Неравенство Коши-Буняковского-Шварца	$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2$
3	Транснеравенство	$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$

4	Неравенство Бернулли	Если $x \geq -1$, то $(1+x)^n \geq 1+nx$, для всех $n \in N$.
5	Неравенство Чебышева	$n(x_1m_1 + x_2m_2 + \dots + x_nm_n) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(m_1 + m_2 + \dots + m_n)$

1.3 Место темы в школьной программе (анализ рабочих программ базовый и профильный уровень)

Работа с простейшими числовыми неравенствами начинается в начальной школе на уроках математики в сочетании с изучением арифметического материала. Выполняемые задачи сводятся к сравнению чисел и выражений. Ученики учатся правильно определять отношения больше, меньше или равно и читать их.

В начальной школе задания могут сводиться к сравнению количества изображенных предметов. Затем, изучаются и сравниваются числа, после изучения арифметики сравнивают простые выражения, также могут появляться задачи со сравнением различных величин и проверки правильности знака отношений. Изучение и решение множества различных упражнений на сравнение чисел и выражений, с одной стороны, способствуют формированию понятий о равенствах и неравенствах простых чисел, с другой стороны усвоению знаний о нумерации и арифметических действиях, а также выработке вычислительных навыков.

В 5-7 классах изучение неравенств выходит на новый уровень по сравнению с начальной школой. В младших классах задания в основном сводились к сравнению количества предметов, затем чисел и простейших выражений. В средней школе акцент смещается с конкретных чисел на выражения, содержащие переменные. В 5 классе учащиеся знакомятся с правилами сравнения обыкновенных и десятичных дробей, а также с координатным лучом, где неравенство вида $a < b$ получает понятное геометрическое представление. В 6 классе вводится понятие отрицательных чисел, и правило сравнения значительно расширяется. В 7 классе неравенства

используются при решении текстовых задач на сравнение величин, при оценке значений выражений.

Сравнительный анализ учебных программ по алгебре для 8 и 9 классов показывает последовательное усложнение материала при переходе от базового к углубленному уровню. В восьмом классе на базовом уровне закладывается фундамент: учащиеся знакомятся с неравенствами, изучают их свойства, равносильность неравенств, линейные неравенства с одной переменной и их системы [8].

Таблица 2 – Базовый уровень 8 класс

Название раздела (темы) курса	Количество часов	Основное содержание	Основные виды деятельности обучающихся
Уравнения и неравенства. Неравенства	12	Числовые неравенства и их свойства. Неравенство с одной переменной. Линейные неравенства с одной переменной и их решение. Системы линейных неравенств с одной переменной и их решение.	Формулировать свойства числовых неравенств. иллюстрировать их на координатной прямой, доказывать алгебраически. Применять свойства неравенств в ходе решения задач. Решать линейные неравенства с одной переменной, изображать решение неравенства на числовой прямой. Изображение решения линейного неравенства и их систем на числовой прямой. Решать системы линейных неравенств, изображать решение системы неравенств на числовой прямой.

Углубленный уровень в этот же период значительно расширяет теоретическую базу, добавляя понятия строгих и нестрогих неравенств, правила

их сложения и умножения, а также методику оценки значений выражений. Важным отличием углубленной программы является введение темы доказательства неравенств и изучение не только систем, но и совокупностей линейных неравенств, что подкрепляется решением текстовых задач [9].

Таблица 3 – Углубленный уровень 8 класс

Название раздела (темы) курса	Количество часов	Основное содержание	Основные виды деятельности обучающихся
Уравнения и неравенства. Неравенства	20	Числовые неравенства. Свойства числовых неравенств. Доказательство неравенств. Неравенство с переменной. Строгие и нестрогие неравенства. Сложение и умножение числовых неравенств. Оценивание значения выражения. Понятие о решении неравенства с одной переменной. Множество решений неравенства. Равносильные неравенства. Неравенство-следствие. Числовые промежутки. Линейное неравенство с одной переменной и множество его решений. Решение линейных неравенств с одной переменной. Системы линейных неравенств с одной переменной. Решение текстовых задач с помощью линейных неравенств с одной переменной.	Формулировать свойства числовых неравенств, иллюстрировать их на координатной прямой, доказывать алгебраически. Оценивать значения выражения, используя неравенства. Применять свойства неравенств в ходе решения задач. Определять равносильные неравенства. Приводить примеры решений неравенств. Решать линейные неравенства с одной переменной, системы линейных неравенств, изображать решение на числовой прямой, доказывать неравенства. Решать текстовые задачи с помощью линейных неравенств с одной переменной. Исследовать линейное неравенство с одной переменной с параметром. Знакомиться с историей развития алгебры.

В 9 классе разрыв в сложности между уровнями становится более заметным. Базовый уровень повторяет свойства числовых неравенств, решение линейных неравенств с одной переменной и переходит к изучению квадратных неравенств, включая их графическую интерпретацию для случаев с двумя переменными [8].

Таблица 4 – Базовый уровень 9 класс

Название раздела (темы) курса	Количество часов	Основное содержание	Основные виды деятельности обучающихся
Уравнения и неравенства. Неравенства	16	Числовые неравенства и их свойства. Линейные неравенства с одной переменной и их решение. Системы линейных неравенств с одной переменной и их решение. Квадратные неравенства и их решение. Графическая интерпретация неравенств и систем неравенств с двумя переменными.	Читать, записывать, понимать, интерпретировать неравенства; использовать символику и терминологию. Выполнять преобразования неравенств, использовать для преобразования свойства числовых неравенств. Распознавать линейные и квадратные неравенства. Решать линейные неравенства, системы линейных неравенств, системы неравенств, включающих квадратное неравенство, и решать их; обсуждать полученные решения. Изображать решение неравенства и системы неравенств на числовой прямой, записывать решение с помощью символов. Решать квадратные неравенства, используя графические

			представления. Осваивать и применять неравенства при решении различных задач, в том числе практико- ориентированных.
--	--	--	---

На углубленном уровне в 9 классе школьники так же продолжают решать линейные неравенства и осваивают квадратные неравенства с одной переменной. Затем они начинают изучать более мощный инструмент, такой как метод интервалов, который применяется не только для квадратных, но и для рациональных неравенств. Кроме того, программа углубленного изучения включает в себя специфические темы, отсутствующие в базовом курсе: работу с простейшими неравенствами с параметрами и углубленное изучение неравенств и систем с двумя переменными [9].

Таблица 5 – Углубленный уровень 9 класс

Название раздела (темы) курса	Количество часов	Основное содержание	Основные виды деятельности обучающихся
Уравнения и неравенства: квадратные неравенства	15	Понятие о решении неравенства с одной переменной. Множество решений неравенства. Квадратные неравенства с одной переменной. Решение неравенств графическим методом и методом интервалов. Неравенства, содержащие знак модуля. Системы неравенств с одной переменной. Решение текстовых задач с помощью неравенств, систем неравенств.	Читать, записывать, понимать, интерпретировать неравенства; использовать символику и терминологию. Выполнять преобразования неравенств, использовать для преобразования свойства числовых неравенств. Распознавать квадратные неравенства с одной переменной. Решать квадратное неравенство графическим методом и методом интервалов.

		<p>Неравенство с двумя переменными.</p> <p>Решение неравенства с двумя переменными.</p> <p>Графический метод решения систем неравенств с двумя переменными.</p> <p>Системы неравенств с двумя переменными</p>	<p>Решать квадратные неравенства, используя графические представления.</p> <p>Решать неравенства, содержащие знак модуля.</p> <p>Изображать решение неравенства с одной переменной и системы неравенств на координатной прямой, записывать решение с помощью символов.</p> <p>Осваивать и применять неравенства при решении различных задач, в том числе практико-ориентированных.</p> <p>Распознавать неравенство с двумя переменными.</p> <p>Применять графический метод решения систем неравенств с двумя переменными.</p>
Уравнения и неравенства: уравнения, неравенства и их системы	25	<p>Биквадратные уравнения. Примеры применений методов равносильных преобразований, замены переменной, графического метода при решении уравнений 3-й и 4-й степеней. Решение дробно-рациональных уравнений и неравенств. Решение систем уравнений с двумя переменными. Решение простейших систем нелинейных</p>	<p>Решать биквадратные уравнения.</p> <p>Применять методы равносильных преобразований, замены переменной, графического метода при решении уравнений 3-й и 4-й степеней.</p> <p>Решать дробно-рациональные уравнения и неравенства.</p> <p>Распознавать линейные уравнения с двумя переменными.</p> <p>Строить графики уравнений, в том числе</p>

		уравнений с двумя переменными. Графический метод решения системы нелинейных уравнений с двумя переменными. Система двух нелинейных уравнений с двумя переменными как модель реальной ситуации. Система нелинейных уравнений с параметром. Простейшие неравенства с двумя переменными и их системы	используя цифровые ресурсы. Решать простейшие системы двух нелинейных уравнений с двумя переменными. Приводить графическую интерпретацию решения уравнения с двумя переменными и систем уравнений с двумя переменными. Решать текстовые задачи алгебраическим способом. Исследовать системы нелинейных уравнений с параметром. Решать простейшие неравенства с двумя переменными и их системы.
--	--	--	---

Сравнение предметных результатов по теме «Неравенства» показывает, что в восьмом классе требования для базового и углубленного уровней полностью совпадают. Учащиеся обоих направлений должны уметь применять свойства числовых неравенств для сравнения и оценки значений, решать линейные неравенства с одной переменной и их системы, а также наглядно представлять решение неравенств. На этом этапе закладывается фундаментальная техническая база, общая для всех школьников независимо от выбранного профиля обучения.

В девятом классе содержание программ начинает существенно различаться, хотя оба уровня предполагают освоение квадратных неравенств и систем. На базовом уровне школьники учатся решать линейные и квадратные неравенства, изображать их решения на числовой прямой и использовать символическую запись. Программа базового уровня также включает работу с

системами, в том числе содержащими квадратное неравенство, и требует умения использовать эти знания при решении различных задач.

Углубленный уровень в девятом классе значительно расширяет эти требования, переводя ученика от простого алгоритмического решения к исследовательской деятельности. Помимо стандартных методов, учащиеся должны решать неравенства и их системы с дополнительными ограничениями, например, искать решения только в целых числах. Программа углубленного уровня также предполагает проведение полноценных исследований систем уравнений для определения наличия и количества их решений, в том числе с использованием графических представлений. Особое внимание уделяется математическому моделированию: школьники учатся решать текстовые задачи и составлять модели реальных ситуаций с помощью систем неравенств, интерпретируя полученные результаты в заданном контексте.

1.4 Содержание школьных учебников по рассматриваемой теме

Рассмотрим перечень действующих учебников по алгебре на предмет наличия того, как авторы предоставляют теоретические знания о неравенствах, методах их решения, какие предлагают задания для проверки качества знаний обучающихся по этим темам.

1. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др. Алгебра. 8 класс [1].

В учебнике Алимова изучение темы «Неравенства» происходит в самом начале, т. е. в первой главе. Глава содержит десять параграфов. Начинается изучение темы с повторения рациональных, положительных и отрицательных чисел. Затем учащиеся знакомятся с числовыми неравенствами, основными свойствами числовых неравенств, узнают, что такое строгие и нестрогие неравенства. Также рассматривается понятие модуля числа, уравнения и неравенства, содержащие модуль.

В шестой главе учащиеся знакомятся с понятием квадратного неравенства и его решением. Они также начинают изучение решение квадратного неравенства с помощью графика квадратичной функции. Также в этой главе подробно рассматривается метод интервалов, который позволяет определить знак квадратного трехчлена на каждом из промежутков, разбитых его корнями. В учебнике уделяется внимание исследованию квадратичной функции.

На основе учебника алгебры для 8 класса можно выделить несколько ключевых групп заданий.

1) Доказательство утверждений и неравенств.

Здесь не нужно находить числовой ответ, важно логически обосновать, почему одно выражение всегда больше или меньше другого.

Формулировки: «доказать неравенство», «доказать, что при любом значении переменной верно неравенство», «доказать свойства».

Что развивают: умение рассуждать и пользоваться формулами сокращенного умножения для преобразований.

Примеры номеров: 11, 12, 25, 30, 32, 33, 35, 36, 38, 45, 46, 53, 54, 56, 57, 62, 65, 66, 69, 70-74, 81, 82, 83, 167-169, 173, 174, 175, 176, 177, 184, 192, 195.

2) Прямое решение неравенств.

Это «техническая» группа, где нужно выполнить четкий алгоритм действий, чтобы найти неизвестное.

Формулировки: «решить неравенство», «решить систему неравенств», «решить двойное неравенство».

Что развивают: навыки переноса слагаемых, раскрытия скобок и приведения к общему знаменателю.

Примеры номеров: 128, 133-140, 157-160, 162, 163, 178, 179, 183, 652-655, 660-664, 667-669, 687-696, 699.

3) Сравнение и оценка значений.

Задания на понимание того, как числа соотносятся друг с другом.

Формулировки: «сравнить числа/значения», «выяснить, положительно или отрицательно число/значение выражения», «может ли разность быть...», «верно ли, что...».

Что развивают: чувство числа и понимание правил знаков (плюс на минус дает минус и т.д.).

Примеры номеров: 13-15, 28, 29, 31, 39, 44, 52, 55, 58, 59, 79, 80, 165, 166, 172.

4) Работа с числовыми промежутками и графиками.

Это наглядная математика, где решение нужно не просто записать цифрами, а изобразить.

Формулировки: «изобразить на числовой оси множество решений», «записать с помощью обозначений числового промежутка», «построить график функции и найти значения x », «указать значения x по рисунку».

Что развивают: умение переводить абстрактные формулы в визуальные образы и наоборот.

Примеры номеров: 87-89, 121-123, 126, 127, 129-132, 142, 143, 154, 180, 181, 186, 656, 659, 665, 698.

5) Поиск целых решений и условий.

Более точные задачи, где из множества ответов нужно выбрать конкретные (например, только целые числа).

Формулировки: «найти наибольшее/наименьшее целое число», «найти все целые числа, являющиеся решением», «при каких значениях переменной верно неравенство/равенство».

Что развивают: внимательность к деталям и понимание ограничений.

Примеры номеров: 75, 76, 77, 86, 118, 119, 120, 141, 161, 164, 651, 657, 658, 670–673, 674, 683–686, 700.

6) Перевод заданий на «математический» язык (моделирование).

Задания, в которых нужно самому составить неравенство по словесному описанию.

Формулировки: «записать в виде неравенства утверждение», «записать, используя знаки неравенства», «записать неравенство с модулем в виде двойного и наоборот».

Что развивают: логическое мышление и навык формализации условий.

Примеры номеров: 40-43, 78, 84, 155, 156.

7) Текстовые задачи.

Реальные жизненные ситуации: движение машин, работа насосов в бассейне, стоимость покупок или концентрация растворов.

Формулировки: «с какой скоростью...», «сколько литров...», «какова должна быть длина...», «какой мальчик истратил больше?».

Что развивают: умение применять школьные знания для решения бытовых и технических проблем.

Примеры номеров: 34, 63, 64, 67, 68, 117, 144, 145, 146, 147, 148, 185, 188, 189, 190, 191, 193, 194, 697.

8) Задания с модулем.

Группа задач, связанных с понятием расстояния на числовой прямой.

Формулировки: «найти модуль числа», «решить неравенство, содержащее модуль».

Что развивают: гибкость мышления, так как модуль всегда требует рассмотрения двух случаев (положительного и отрицательного).

Примеры номеров: 149, 157-160, 183.

9) Вычисления и упрощения.

Базовые упражнения на закрепление навыков работы с дробями и степенями.

Формулировки: «вычислить», «упростить выражение», «умножить/разделить обе части неравенства на число».

Что развивают: аккуратность в расчетах и автоматизм в преобразованиях.

Примеры номеров: 26, 27, 47–50, 60, 61, 650.

Основные моменты главы посвящены решению неравенств и систем неравенств. Данная тема в учебнике описана подробно, оснащена различными заданиями и графиками, имеются дополнительные задачи к главе.

2. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н. Г., Нешков К. И. и др. Алгебра. 8 класс [6].

В учебнике Макарычева изучению неравенств посвящена четвертая глава. Глава состоит из двух параграфов, разделенных на пункты. В этой главе учащиеся знакомятся со свойствами числовых неравенств и учатся применять их для сравнения значений числовых выражений, при доказательстве неравенств. Основное содержание главы составляет решение неравенств, сводящихся к виду $ax + b > 0$ или $ax + b < 0$, и их систем.

В первом параграфе «Числовые неравенства и их свойства» учащиеся начинают изучение неравенств, знакомятся со свойствами числовых неравенств, а также осваивают сложение и умножение числовых неравенств. Во втором параграфе, посвященном неравенствам с одной переменной и их системам, школьники изучают пересечение и объединение множеств и числовые промежутки. Остальные два параграфа знакомят учащихся с решением неравенств с одной переменной и решением систем неравенств с одной переменной. В учебнике представлено большое количество рисунков и примеров, помогающих освоить материал.

На основе материалов учебника Макарычева для 8 класса задания можно разделить на несколько ключевых групп.

1) Сравнение чисел и выражений.

Это вводные задания, которые учат определять отношения между числами, используя базовое правило: число a больше b , если их разность положительна.

Формулировки: «сравните числа a и b », «что больше?», «может ли разность выражаться числом...», «расположите в порядке возрастания/убывания».

Что развивает: базовое понимание числовой прямой и универсального способа сравнения. Помогает развить «числовое чутье» и логику расположения точек: большее число всегда находится правее.

Примеры номеров: 838, 839, 840, 854, 861, 869, 875, 876.

2) Доказательство неравенств.

В этих задачах учащийся должен доказать неравенство и подтвердить, почему левая часть всегда больше или меньше правой.

Формулировки: «докажите неравенство», «докажите, что при любом значении переменной верно неравенство».

Что развивает: логическое мышление и навыки преобразования сложных выражений.

Примеры номеров: 842, 843, 845, 847, 848-850, 852, 853, 892, 1004-1012, 1015, 1017.

3) Оценка значений и границ.

Задания учат работать с границами. Если мы знаем, в каких границах находится число a , мы можем предсказать, в каких границах будет результат действий с ним.

Формулировки: «оцените значение выражения», «оцените периметр или площадь», «зная границы x и y , оцените их сумму/разность/произведение».

Что развивает: навыки прогнозирования и понимание того, как границы исходных данных влияют на конечный результат.

Примеры номеров: 871-874, 877, 884-889.

4) Множества и числовые промежутки.

Выполняя подобные задания, школьники учатся правильно изображать решения неравенств на числовой прямой и записывать их в виде промежутков или объединений множеств.

Формулировки: «изобразите на координатной прямой множество чисел, удовлетворяющих неравенству».

Что развивает: навыки графического представления абстрактных условий. Учит находить общие решения для нескольких условий (пересечение) и объединять разные наборы чисел.

Примеры номеров: 914, 915.

5) Решение неравенств с одной переменной.

Нужно найти все значения x , которые подходят под условие.

Формулировки: «решить неравенство», «изобразите множество решений на прямой», «при каких значениях x выражение принимает положительные/отрицательные значения?».

Что развивает: техническую грамотность и автоматизм. Включает правила переноса слагаемых и умножения обеих частей на число с учетом смены знака неравенства.

Примеры номеров: 934-956.

6) Решение систем неравенств.

Суть заданий с решением систем неравенств – найти все числа, которые одновременно удовлетворяют каждому неравенству, входящему в систему.

Формулировки: «решите систему неравенств», «решите двойное неравенство», «является ли число решением системы неравенств?».

Что развивает: решение систем неравенств развивает умение работать с несколькими условиями одновременно и находить их общую часть. Это тренирует логическое мышление, внимательность и способность выполнять несколько шагов рассуждения последовательно.

Примеры номеров: 973-981, 984-993.

7) Текстовые и прикладные задачи.

Перевод реальных жизненных ситуаций на язык математических формул.

Формулировки: «Миша шел со скоростью на 0,5 км/ч большей, чем Коля... Кто из них пришел первым на станцию?», «укажите наименьшее/наибольшее число предметов/книг».

Что развивает: текстовые и прикладные задачи развивают навык математического моделирования. Это развивает практическое мышление, умение анализировать условие, выделять главное и видеть математику за словами.

Примеры номеров: 856, 930, 964-968, 1013, 1061.

8) Область определения и свойства функций.

Задания на поиск условий, при которых выражение имеет смысл.

Формулировки: «при каких значениях переменной имеет смысл выражение?», «найдите область определения функции».

Что развивает: задания учат школьников учитывать ограничения и развивают аналитическое мышление.

Примеры номеров: 958, 959, 983.

9) Задачи на исследования.

Суть заданий найти все значения переменной, при которых неравенство выполняется, не выполняется или имеет определённое количество решений. Это требует от учащихся проанализировать зависимость ответа от меняющихся условий.

Формулировки: «найдите множество значений a , при которых уравнение не имеет корней/имеет два корня».

Что развивает: исследовательские навыки, учит анализировать, как изменение одного числа влияет на количество решений всей задачи.

Примеры номеров: 894, 962, 963, 995, 996, 1059, 1060.

Тема «Неравенства» в учебнике рассмотрена подробно, имеется множество задач разного уровня сложности. Кроме того, в учебнике содержится параграф «Для тех кто хочет знать больше», в котором изучаются приемы доказательства неравенств.

Один из приёмов доказательства неравенств состоит в том, что составляют разность левой и правой частей неравенства и показывают, что она сохраняет знак при любых указанных значениях переменных. Ещё один приём

доказательства неравенств состоит в том, чтобы показать, что данное неравенство следует из других неравенств, справедливость которых известна. Также указывается, что в отдельных случаях удаётся доказать неравенство, используя некоторые очевидные соотношения. Разбор всех трех способов доказательств рассматривается на одном примере для каждого приема.

3. Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др. Алгебра. 9 класс [2].

В учебнике Алимова за 9 класс в конце второй главы «Степень с рациональным показателем» рассматривается возведение в степень числового неравенства. Изучение темы начинается с повторения свойств числовых неравенств, понятий строгих и нестрогих неравенств, свойств степени с рациональным показателем, записи корня n -ой степени в виде степени с рациональным показателем. Уже после этого вводится новая тема. В учебнике также приведены доказательства свойств возведения в степень числовых неравенств.

В конце третьей главы, посвященной степенной функции изучаются неравенства, содержащие степень. В этом параграфе рассматривается применение графиков и свойств степенной функции для решения неравенств и уравнений, которые содержат степени. Перед знакомством с новой темой повторяются следующие вопросы:

- свойства степенной функции с чётным, нечётным натуральным показателем;
- алгоритм построения графики чётной функции, нечётной функции;
- построение графика квадратичной функции.

При изучении темы рассматривалось поведение степенной функции, которое зависит от знака показателя степени, а также были приведены доказательства, которые позволяли понять, чем обусловлено поведение функции. В учебнике представлено достаточное количество примеров, рисунков и задач, позволяющих лучше понять и освоить новую тему.

На рассмотрении учебника, можно заметить, что его упражнения можно разделить на несколько групп.

1) Сравнение чисел.

Эта группа учит понимать, как ведут себя числа при возведении в разные степени. Основное внимание уделяется свойствам неравенств: например, если основание больше 1, то при большей степени число растёт.

Формулировки: «сравнить числа».

Что развивает: математическую интуицию и чувство числа. Учащиеся учатся предсказывать результат, не прибегая к сложным вычислениям, и понимать, как меняется величина в зависимости от показателя степени.

Примеры номеров: 136, 137, 139.

2) Решение неравенств.

В этих заданиях целый набор чисел (промежуток), которые делают утверждение верным.

Формулировки: «решить неравенство».

Что развивает: логику и учит правильно работать со знаками. Кроме того, оно закладывает базу для успешного изучения более сложных тем в старшей школе.

Примеры номеров: 192, 200, 206, 214, 220, 221.

3) Геометрические и прикладные задачи.

Здесь математика встречается с реальной жизнью. Нужно использовать формулы площади и объёма, чтобы найти границы возможных размеров фигур.

Формулировки: «Какой может быть сторона квадрата, если его площадь больше 361 см^2 », «Каким может быть ребро куба, если его объем больше 343 дм^3 ».

Что развивает: Навык математического моделирования. Школьники учатся переводить слова на язык формул и находить решение для реальных физических объектов.

Примеры номеров: 193, 207.

4. Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К. И. и др. Алгебра (9 класс).

В данном учебнике [7] теме «Неравенства» посвящено две главы, каждая имеет два параграфа, в одном из которых рассматриваются уравнения, а в другом неравенства, параграфы разделены на пункты.

При изучении второго параграфа третьей главы учащиеся научатся решать неравенства второй степени с одной переменной, а также познакомятся с методом интервалов и некоторыми приемами решения целых уравнений, которые понадобятся для решения неравенств и в старших классах. В учебнике приведены и подробно рассмотрены примеры решения неравенств второй степени. Данная тема в учебнике рассмотрена полно, имеются различные задачи и дополнительные задания к главам.

В четвертой главе рассматриваются уравнения и неравенства с двумя переменными. Эта глава так же разделена на два параграфа, в одном из которых рассматриваются уравнения, а в другом – неравенства. Во втором параграфе школьники знакомятся с неравенствами с двумя переменными, рассматривают их системы и некоторые приемы решений систем уравнений второй степени с двумя переменными.

Рассмотрим основные группы заданий учебника.

1) Решение неравенств и их систем.

Это самая массовая группа заданий, где нужно найти все подходящие значения переменной.

Формулировки: «решите неравенство», «найдите множество решений неравенства», «решите систему неравенств».

Что развивает: навыки технического счета, внимательность к знакам и умение правильно записывать ответ в виде числовых промежутков.

Примеры номеров: 264, 265, 266, 268, 269, 272, 273, 280, 285-287, 289, 291, 294-298, 339, 347-349, 351-353, 356, 357.

2) Исследование функций и их свойств.

В таких заданиях нужно с помощью неравенств проанализировать поведение функции: найти область определения, определить участки возрастания и убывания (через знак производной) и установить, где график лежит выше или ниже оси x .

Формулировки: «найдите область определения функции», «при каких значениях x имеет смысл выражение?», «найдите координаты точек пересечения графика с осями».

Что развивает: аналитическое мышление. Учит понимать, при каких условиях математическая модель имеет смысл.

Примеры номеров: 267, 274, 281, 292, 293, 304, 341, 470.

3) Доказательства неравенств.

Суть таких заданий – не найти числовой ответ, а логически показать, что неравенство верно.

Формулировки: «докажите, что при любом значении переменной верно неравенство», «равносильны ли неравенства?».

Что развивает: логическое рассуждение и умение преобразовывать сложные выражения.

Примеры номеров: 275, 277, 340, 355, 471.

4) Работа с графиками.

Эти задания превращают формулы в наглядные изображения: круги, параболы, заштрихованные области.

Формулировки: «изобразите на координатной плоскости множество решений неравенства», «опишите неравенством множество точек координатной плоскости».

Что развивает: наглядное и пространственное мышление, учат видеть решение неравенства как область на плоскости или промежуток на оси.

Примеры номеров: 449-453, 455, 456, 457, 462-465, 515-522.

5) Задачи на исследование.

Задания для тех, кто хочет знать больше.

Формулировки: «при каких значениях k и b система неравенств задает на координатной плоскости полосу/угол/прямую?»

Что развивает: исследовательские навыки и гибкость ума. Учит рассматривать разные сценарии развития событий в зависимости от условий.

Примеры номеров: 466, 491.

6) Прикладные и текстовые задачи.

Задания, описывающие реальные жизненные или математические ситуации.

Формулировки: «одна сторона прямоугольника на 7 см больше другой...», «найдите двузначное число, которое в 4 раза больше суммы его цифр и в 2 раза больше произведения его цифр».

Что развивает: навык математического моделирования — умение записывать текст задачи в виде неравенства и решать его.

Примеры номеров: 278, 279, 506, 512.

Данная тема в учебнике рассмотрена полно. В учебнике представлены задания разного уровня сложности, что дает учащимся возможность постепенно переходить от простых примеров к более сложным. При объяснении темы используются графики, которые позволяют лучше усвоить материал.

5. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Алгебра. 8 класс [10].

В этом учебнике неравенства и их системы не рассматриваются.

6. Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С. Алгебра. 9 класс [11].

В учебнике тема «Неравенства» изучается в первой главе. Глава содержит шесть параграфов. В ходе изучения главы учащиеся знакомятся с понятием неравенства, учатся оценивать значения выражений, доказывать неравенства, решать линейные неравенства и системы линейных неравенств с одной переменной. Также в учебнике рассматриваются некоторые способы доказательства неравенств.

Во второй главе, посвященной квадратичной функции, рассматривается решение квадратичных неравенств. Тема объясняется с помощью примера графика функции. Сначала учащиеся знакомятся с графическим методом решения неравенств, а уже после этого начинают изучение квадратных неравенств. Объяснение темы сопровождается таблицей, показывающей схематическое расположение параболы $y = ax^2 + bx + c$ относительно оси абсцисс в зависимости от знаков чисел a и D .

На основе учебника алгебры для 9 класса, представленные задания можно разделить на несколько ключевых групп.

1) Сравнение чисел и выражений.

В этой группе заданий ученик учится определять отношения между величинами («больше», «меньше» или «равно»).

Формулировки: «сравните числа a и b », «какое из чисел больше?», «сравните с нулём значение выражения», «расположите в порядке возрастания/убывания».

Что развивает: базовое понимание числовой прямой и универсального способа сравнения: если разность $a - b$ положительна, то $a > b$.

Примеры номеров: 1, 3, 30, 40-44, 46, 47, 50, 86, 87.

2) Доказательство неравенств.

В этих заданиях необходимо обосновать верность утверждения для любых значений переменных.

Формулировки: «докажите неравенство», «докажите, что при любом значении переменной верно неравенство».

Что развивает: навыки алгебраических преобразований и логического вывода. Учит использовать метод «от противного» и классические неравенства, такие как неравенство Коши.

Примеры номеров: 8, 9, 11, 12, 13, 14, 21, 23-25, 28, 29, 73, 74, 81, 82, 84, 85.

3) Оценивание значений выражений.

Задания учат работать с интервалами в реальной жизни, когда точное значение неизвестно, но известны его границы.

Формулировки: «оцените значение выражения», «оцените периметр/площадь», «дано: границы a и b . Оцените их сумму/произведение».

Что развивает: умение почленно складывать и умножать верные неравенства одного знака. Это развивает навыки прогнозирования результата и понимание того, как границы исходных данных влияют на конечный расчет.

Примеры номеров: 62-70, 75.

4) Работа с числовыми промежутками и множествами.

Это визуальная группа заданий, соединяющая алгебраические условия с геометрическим изображением на прямой.

Формулировки: «изобразите на координатной прямой промежуток», «запишите промежуток, который задаётся неравенством», «найдите пересечение/объединение промежутков», «укажите наибольшее/наименьшее целое число в промежутке».

Что развивает: умение чётко фиксировать границы и правильно использовать скобки и знаки. Это развивает математическую аккуратность и внимание к деталям.

Примеры номеров: 172-176, 181, 182.

5) Решение неравенств и их систем.

Типовые задачи на поиск всех значений переменной, превращающих неравенство в верное утверждение.

Формулировки: «решите неравенство», «решите систему неравенств», «найдите множество решений», «решите двойное неравенство», «найдите наибольшее/наименьшее решение неравенства», «найдите наименьшее/наибольшее целое решение системы неравенств», «найдите целые решения системы неравенств».

Что развивает: техническую грамотность. Включает правила переноса слагаемых и умножения обеих частей на число (с переменной знака, если число

отрицательное). Решение квадратных неравенств (через график параболы) развивает умение анализировать функции.

Примеры номеров: 94-103, 105, 106, 117-121, 128, 129, 132-137, 183-195, 198-201, 203-206, 404-409.

6) Определение условий существования (Область определения).

Задания на поиск «смысла» выражения (например, под корнем не должно быть отрицательного числа).

Формулировки: «при каких значениях переменной имеет смысл выражение?».

Что развивает: навык анализа ограничений в математике. Часто сводится к составлению и решению систем неравенств, что приучает к комплексному подходу.

Примеры номеров: 90, 126, 127, 151, 152, 196, 197, 419, 420.

7) Задачи на исследование.

Задания повышенной сложности, где нужно изучить поведение выражения при изменении «скрытых» чисел (параметров).

Формулировки: «для каждого значения a решите неравенство», «существует ли такое значение $a...$ », «при каких значениях a имеет хотя бы одно решение система неравенств».

Что развивает: исследовательское мышление. Требуется разбор различных случаев (например, когда коэффициент при x равен нулю, положителен или отрицателен).

Примеры номеров: 162- 164, 207, 422, 423, 437, 438.

8) Текстовые и прикладные задачи.

Перевод реальных ситуаций на язык математических моделей.

Формулировки: «турист проплыл... какое наибольшее расстояние...», «в коробке находятся... какое наибольшее количество...».

Что развивает: навык математического моделирования. Учит применять аппарат неравенств для решения бытовых, экономических и геометрических задач.

Примеры номеров: 57, 144, 146-149.

В учебнике тема рассмотрена в полной мере. В нем имеются доказательства свойств числовых неравенств и теорем. Задания постепенно переходят от простых к более сложным. Кроме обычных упражнений, в учебник включены задания, подготавливающие учащихся к новой теме или направленные на развитие нестандартного мышления и логики. Некоторые задания и доказательства сопровождаются рисунками и таблицами, что позволяет структурировать знания.

Из трех рассмотренных учебников для 8 класса, только два – под редакцией Алимова Ш.А. и Макарычева Ю.Н. – содержат тему «Неравенства». Оба учебника раскрывают тему достаточно полно. В учебнике Мерзляк А. Г. Данная тема отсутствует.

У Алимова тема «Неравенства» вынесена в самую первую главу, которая включает целых десять параграфов. У Макарычева эта тема рассматривается позже – в четвёртой главе, которая состоит из двух крупных параграфов, разбитых на пункты.

Оба учебника охватывают ключевые элементы: свойства числовых неравенств, решение линейных неравенств и их систем. Однако у Алимова добавлены дополнительные темы: повторение рациональных и отрицательных чисел, понятие модуля числа, а также уравнения и неравенства, содержащие модуль. У Макарычева же отдельно выделены пересечение и объединение множеств, числовые промежутки.

В обоих учебниках представлены задачи разного уровня сложности и дополнительные задания к главе, что позволяет говорить о полноте раскрытия темы.

Сравним рассмотренные учебники за 9 класс. Все три учебника содержат тему «Неравенства» в 9 классе, однако подходы к её включению в курс существенно различаются. У Алимова неравенства не вынесены в отдельную главу, а рассматриваются внутри других тем: в конце первой главы («Степень с рациональным показателем») изучается возведение неравенств в степень, а во второй главе («Степенная функция») – решение неравенств, содержащих степень. У Макарычева теме неравенств посвящены сразу две отдельные главы: третья (неравенства второй степени с одной переменной) и четвёртая (неравенства с двумя переменными и их системы). У Мерзляка также выделены две главы: первая целиком посвящена неравенствам (линейные неравенства, системы, доказательства), а во второй главе («Квадратичная функция») рассматриваются квадратные неравенства.

Во всех трёх учебниках присутствуют рисунки, графики и примеры. В них отмечается достаточное количество примеров, рисунков и задач, помогающих освоить тему, а также приводятся доказательства, объясняющие поведение функции, представлены задания разного уровня сложности, используется графики для наглядности, а также включён дополнительный материал, расширяющий кругозор. В учебниках задания выстроены от простых к сложным, имеются доказательства свойств и теорем.

В учебнике Мерзляка представлены специальные задания, подготавливающие к новой теме или развивающие нестандартное мышление и логику; некоторые задания и доказательства сопровождаются рисунками и таблицами.

1.5 Анализ заданий по теме в олимпиадах разного уровня

1. Алгебраические преобразования.

(Всеросс., 1993, округ, 9) [5].

Докажите, что для любых действительных чисел a и b справедливо неравенство:

$$a^2 + ab + b^2 \geq 3(a + b - 1).$$

Доказательство.

Перенесем выражение из правой части в левую и раскроем скобки:

$$a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 3 \geq 0.$$

Сгруппируем члены, содержащие a :

$$a^2 + a(b - 3) + (b^2 - 3b + 3) \geq 0.$$

Решим полученное неравенство как квадратное относительно переменной a , применяя метод интервалов.

$$a^2 + a(b - 3) + (b^2 - 3b + 3) = 0.$$

Найдем дискриминант:

$$D = b^2 - 6b + 9 - 4b^2 + 12b - 12 = -3b^2 + 6b - 3 = -3(b - 1)^2.$$

Значит, $D \leq 0$, причем $D = 0$ тогда и только тогда, когда $b = 1$. Если $D < 0$, то трехчлен положителен при всех a . Если $D = 0$, то трехчлен имеет один корень.

Найдем значение a при $b = 1$:

$$a^2 + a(1 - 3) + (1 - 3 + 3) = 0,$$

$$a^2 - 2a + 1 = 0,$$

$$(a - 1)^2 = 0,$$

$$a = 1.$$

Поскольку коэффициент при a^2 положителен, то трёхчлен принимает только неотрицательные значения, следовательно, $a^2 + ab + b^2 \geq 3(a + b - 1)$ при любых значениях a и b . Равенство достигается в том случае, когда $a = b = 1$.

2. Умножение неравенств.

(Всеросс., 2014, регион, 9) [5].

Какое из чисел больше: $(100!)!$ или $99!^{100!} \cdot 100!^{99!}$? (Напомним, что $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$).

Решение.

Пусть $a = 99!$. Сравним числа $(100a)!$ и $a^{100a}(100!)^a$. Заметим, что $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot a < a^a$:

$$\begin{cases} (a+1)(a+2)(a+3)\dots 2a < (2a)^a, \\ (2a+1)(2a+2)(2a+3)\dots 3a < (3a)^a, \\ \dots, \\ (99a+1)(99a+2)(99a+3)\dots 100a < (100a)^a. \end{cases}$$

Теперь перемножим полученные неравенства. Слева получим $(100a)!$, а справа – $a^a(2a)^a(3a)^a\dots(100a)^a = a^{100a}(100!)^a$.

Ответ: Второе число больше.

3. Монотонность.

(Всеросс., 1999, округ, 9, 11) [5].

Произведение положительных чисел x , y и z равно 1. Докажите, что если:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z, \quad \text{то для любого натурального } k \text{ выполнено}$$

неравенство:

$$\frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \geq x^k + y^k + z^k.$$

Доказательство.

Поскольку $xyz = 1$, то неравенства $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z$ и

$(x-1)(y-1)(z-1) \leq 0$ равносильны.

Проверим это:

$$(x-1)(y-1)(z-1) \leq 0,$$

$$(xy - x - y + 1)(z - 1) \leq 0,$$

$$xyz - xz - yz + z - xy + x + y - 1 \leq 0,$$

$$-yz - xz - xy \leq -x - y - z,$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z.$$

Следовательно, эти неравенства действительно равносильны.

Мы можем заметить, что из равенств $\frac{1}{x} = yz, \frac{1}{y} = xz, \frac{1}{z} = xy$ и $xyz = 1$ следует, что оба неравенства равносильны неравенству $yz + xz + xy \geq x + y + z$. Кроме того, числа $t-1$ и t^k-1 имеют одинаковый знак при $k > 0$. Поэтому:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq x + y + z &\Leftrightarrow (x-1)(y-1)(z-1) \leq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x^k-1)(y^k-1)(z^k-1) \Leftrightarrow \frac{1}{x^k} + \frac{1}{y^k} + \frac{1}{z^k} \geq x^k + y^k + z^k. \end{aligned}$$

4. Неравенство Коши.

(ММО, 2008, окружной тур, 10) [4].

Произведение положительных чисел x, y и z равно 1. Докажите, что

$$(2+x)(2+y)(2+z) \geq 27.$$

Доказательство.

Согласно неравенству Коши

$$1 + 1 + x \geq 3\sqrt[3]{x}.$$

Аналогично $2 + y \geq 3\sqrt[3]{y}$ и $2 + z \geq 3\sqrt[3]{z}$.

Теперь перемножим три полученных неравенства:

$$\begin{aligned} (2+x)(2+y)(2+z) &\geq (3\sqrt[3]{x})(3\sqrt[3]{y})(3\sqrt[3]{z}), \\ (2+x)(2+y)(2+z) &\geq 27\sqrt[3]{xyz}. \end{aligned}$$

По условию $xyz = 1$, значит, $\sqrt[3]{xyz} = 1$. Подставляя это в неравенство, получаем:

$$(2+x)(2+y)(2+z) \geq 27.$$

5. Неравенство Чебышева [4].

Пусть $x_1 \leq x_2$ и $y_1 \leq y_2$. Докажите, что

$$2(x_1y_1 + x_2y_2) \geq (x_1 + x_2)(y_1 + y_2).$$

Доказательство.

Раскроем скобки:

$$2x_1y_1 + 2x_2y_2 \geq x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2.$$

Перенесем в левую часть выражение из правой части неравенства:

$$2x_1y_1 + 2x_2y_2 - x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_2 \geq 0.$$

Сложим подобные слагаемые:

$$x_1y_1 + x_2y_2 - x_1y_2 - x_2y_1 \geq 0.$$

Теперь сгруппируем левую часть неравенства:

$$x_1(y_1 - y_2) + x_2(y_2 - y_1) \geq 0,$$

$$-x_1(y_2 - y_1) + x_2(y_2 - y_1) \geq 0,$$

$$(y_2 - y_1)(x_2 - x_1) \geq 0.$$

Поскольку $x_1 \leq x_2$ и $y_1 \leq y_2$, то значения в скобках будут положительными, значит

$$2(x_1y_1 + x_2y_2) \geq (x_1 + x_2)(y_1 + y_2).$$

ГЛАВА 2 ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС ПО ТЕМЕ «НЕРАВЕНСТВА»

2.1 Факультативный курс по алгебре в 8-9 классах на тему «Доказательства неравенств»

1. Пояснительная записка.

В современной образовательной среде алгебраическая грамотность и умение доказывать свои суждения являются основными компонентами математической культуры. Данный факультативный курс направлен на расширение теоретической базы учащихся и формирование навыков поиска путей решения нестандартных задач. Содержание курса направленно на поддержание интереса учащихся к математике и развитие видов деятельности, выходящих за рамки школьной программы.

Раздел неравенств часто является одним из самых трудных в школьной алгебре. На экзаменах и олимпиадах задачи на доказательство и решение неравенств вызывают наибольшие трудности. Основная сложность заключается в необходимости подбора особого метода решения для каждого задания, а также важно видеть скрытые свойства выражений в нестандартных случаях.

Курс позволяет изучить классические неравенства, которые редко рассматриваются в школьной программе, но крайне востребованы в олимпиадах.

Программное содержание курса может осуществляться в соответствии со следующим намеченным алгоритмом:

- 1) Систематизация имеющихся знаний.
- 2) Изучение теоретических основ классических неравенств.
- 3) Разработка и внедрение практико-ориентированной деятельности учащихся по применению полученных знаний.

Цель курса: формирование у школьников системы знаний о методах доказательства классических неравенств и развитие навыков их применения

при решении олимпиадных и экзаменационных задач.

Достижение поставленной цели предполагает решение следующих задач:

- 1) Обеспечить понимание основ доказательства неравенств.
- 2) Отработать владение различными методами доказательства неравенств.
- 3) Повысить интерес к алгебре как к способу логического познания мира.
- 4) Способствовать формированию базы для успешного участия в олимпиадах.

5) Способствовать развитию трудолюбия, умения логически мыслить и навыков самостоятельного поиска информации.

2. Место курса в системе предпрофильной подготовки

Курс предназначен для учащихся 8-9 классов, стремящихся к углубленному изучению математики.

Общий объем: 12 часов.

Периодичность проведения занятий: 1 раз в неделю (2 часа).

3. Учебно-тематический план.

Таблица 6 – Учебно-тематический план

№ урока	Тема	Часы	Форма занятий
1	Неравенства о средних	2	Лекция, практикум
2	Неравенство Коши-Буняковского-Шварца	2	Лекция, практикум
3	Транснеравенство	2	Лекция, практикум
4	Неравенство Чебышева	2	Лекция, практикум
5	Неравенство Бернулли	2	Лекция, практикум
6	Итоговый зачет (теоретическая и практическая части)	2	Лекция, практикум

4. Содержание программы

Тема 1. Неравенства о средних.

Неравенство о средних устанавливает соотношение между различными

видами средних величин для неотрицательных чисел: среднее гармоническое не превосходит среднее геометрическое, которое, в свою очередь, не превосходит среднее арифметическое, а среднее арифметическое не превосходит среднее квадратическое. Для двух чисел это соотношение принимает особенно простой и полезный вид: среднее геометрическое не больше среднего арифметического, причём равенство достигается только когда числа равны. Это неравенство широко применяется для нахождения наименьших и наибольших значений выражений.

Тема 2. Неравенство Коши-Буняковского-Шварца.

Неравенство Коши-Буняковского-Шварца утверждает, что квадрат суммы попарных произведений двух наборов чисел не превосходит произведения сумм квадратов этих чисел. Равенство в этом неравенстве достигается тогда и только тогда, когда соответствующие наборы чисел пропорциональны, то есть один получается из другого умножением на некоторую константу. На практике неравенство КБШ используется для оценки сумм произведений через суммы квадратов.

Тема 3. Транснеравенство.

Транснеравенство описывает, как сумма попарных произведений элементов двух последовательностей зависит от порядка их расположения. Наибольшая сумма достигается, когда последовательности одинаково упорядочены (обе по возрастанию или обе по убыванию), а наименьшая – когда они упорядочены противоположно (одна по возрастанию, другая по убыванию). Это неравенство является инструментом для доказательства симметричных неравенств.

Тема 4. Неравенство Чебышева.

Неравенство Чебышева связывает среднее арифметическое произведений двух последовательностей с произведением их средних арифметических, когда последовательности упорядочены одинаково или противоположно. Если обе последовательности монотонно возрастают или обе монотонно убывают, то

среднее арифметическое попарных произведений не меньше произведения средних арифметических (и наоборот, при разной монотонности знак меняется). Это неравенство часто применяется для доказательства других классических неравенств, а также для упрощения оценок сумм в олимпиадных задачах.

Тема 5. Неравенство Бернулли.

В теме «Неравенство Бернулли» изучается математическое правило, которое связывает рост числа при возведении в степень с обычным умножением. Затем рассматриваются различные частные случаи, например, когда исходное число равно нулю или единице.

Тема 6. Зачетное мероприятие.

На последнем занятии проводится обобщение изученного материала, систематизация основных методов доказательства неравенств. Организуется зачет, который включает теоретические вопросы, выявляющие знание учащимися классических неравенств и задачи, где требуется комбинация различных методов доказательства. Учащиеся должны переключаться между методами, распознавая, какое неравенство подходит для каждого случая.

5. Основные требования к уровню освоения курса.

Учащиеся должны знать:

- 1) Формулировку классических неравенств;
- 2) Ключевые алгоритмы работы с задачами на доказательства неравенств.

Учащиеся должны уметь:

- 1) Проводить детальный анализ условий задачи;
- 2) Оперировать имеющимися теоретическими знаниями при решении задач;
- 3) Обоснованно подбирать наиболее эффективный способ доказательства неравенств и аргументировать свой выбор;
- 4) Грамотно применять математическую символику при оформлении доказательств.

Формы работы: индивидуальная, коллективная, групповая.

Формы деятельности на занятиях: лекция, беседа, практикум.

2.2 Конспекты факультативных занятий

2.2.1 Неравенства о средних

Пусть $a > 0, b > 0$. Тогда справедливы неравенства между средними:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}},$$

причём эти неравенства обращаются в равенства в том и только в том случае, когда $a = b$. Четыре выписанные величины называются соответственно средним гармоническим, средним геометрическим, средним арифметическим и средним квадратическим чисел a и b .

1. Докажите неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим.

Само неравенство выглядит следующим образом:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Доказательство.

Так как обе части неравенства положительны ($a > 0, b > 0$), мы можем возвести их в квадрат, не меняя знак неравенства:

$$\begin{aligned} \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &\leq \frac{a^2 + b^2}{2}, \\ \frac{(a+b)^2}{4} &\leq \frac{a^2 + b^2}{2}. \end{aligned}$$

Умножим обе части на 4, чтобы избавиться от знаменателей:

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2).$$

Раскроем скобки в левой части:

$$a^2 + 2ab + b^2 \leq 2a^2 + 2b^2.$$

Перенесем все слагаемые в правую часть:

$$0 \leq 2a^2 - a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2,$$

$$0 \leq a^2 - 2ab + b^2.$$

Свернем полный квадрат:

$$0 \leq (a - b)^2.$$

Поскольку квадрат любого действительного числа всегда неотрицателен, полученное неравенство верно для любых a и b . Следовательно, исходное неравенство также верно.

2. Пусть $x > 1$. Что больше: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}$ или $2\sqrt{x}$?

Для положительных чисел a и b справедливо неравенство:

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

причем равенство достигается только при $a = b$.

Решение:

Пусть $a = \sqrt{x-1}$ и $b = \sqrt{x+1}$. Так как по условию $x > 1$, оба этих числа положительны и $a \neq b$.

Подставим эти значения в неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим:

$$\frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{2} < \sqrt{\frac{(\sqrt{x-1})^2 + (\sqrt{x+1})^2}{2}}.$$

(Мы используем знак строгого неравенства «<», так как $a \neq b$).

Упростим выражение под корнем в правой части:

$$\frac{(\sqrt{x-1})^2 + (\sqrt{x+1})^2}{2} = \frac{(x-1) + (x+1)}{2} = \frac{2x}{2} = x.$$

Таким образом, получаем:

$$\frac{\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1}}{2} < \sqrt{x}.$$

Умножив обе части на 2, приходим к окончательному сравнению:

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} < 2\sqrt{x}.$$

Ответ: Выражение $2\sqrt{x}$ больше.

3. Докажите неравенство между средним гармоническим и средним геометрическим.

Неравенство выглядит так:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}.$$

Доказательство.

Упростим выражение для среднего гармонического в левой части:

$$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{2}{\frac{a+b}{ab}} = \frac{2ab}{a+b}.$$

Теперь нам нужно доказать, что:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}.$$

Так как $a, b > 0$, мы можем разделить обе части на $\sqrt{ab}$:

$$\frac{2\sqrt{ab}}{a+b} \leq 1.$$

Умножим обе части на $(a+b)$, так как эта сумма положительна:

$$2\sqrt{ab} \leq a+b.$$

Перенесем всё в правую часть:

$$0 \leq a - 2\sqrt{ab} + b.$$

Заметим, что в правой части стоит квадрат разности корней:

$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2.$$

Так как квадрат любого действительного числа не может быть отрицательным, полученное неравенство верно для любых положительных a и b . Следовательно, исходное неравенство между средним гармоническим и средним геометрическим также верно.

4. Докажите, что при $a, b, c \geq 0$ верно неравенство:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

Доказательство.

Неравенство Коши для трех чисел $x, y, z \geq 0$ утверждает, что их среднее арифметическое не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{x + y + z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Сделаем замену переменных. Пусть:

$$\begin{cases} x = a^3, \\ y = b^3, \\ z = c^3. \end{cases}$$

Так как $a, b, c \geq 0$, то и $a^3, b^3, c^3 \geq 0$. Подставим их в неравенство Коши:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3 \cdot b^3 \cdot c^3}.$$

Извлечем кубический корень в правой части:

$$\sqrt[3]{a^3 \cdot b^3 \cdot c^3} = abc.$$

Получаем:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq abc.$$

Умножив обе части неравенства на 3, получаем искомое утверждение:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc.$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $x = y = z$, то есть $a = b = c$.

5. При каких x дробь $\frac{81+16x^4}{x^2}$ принимает наименьшее значение?

Для положительных чисел a и b справедливо неравенство:

$$\frac{a + b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

откуда следует, что сумма чисел $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. Равенство (и, следовательно, наименьшее значение суммы) достигается тогда и только тогда, когда $a = b$.

Решение:

Преобразуем исходное выражение, почленно разделив числитель на знаменатель (при условии $x \neq 0$):

$$\frac{81 + 16x^4}{x^2} = \frac{81}{x^2} + \frac{16x^4}{x^2} = \frac{81}{x^2} + 16x^2.$$

Пусть $a = \frac{81}{x^2}$ и $b = 16x^2$. Заметим, что при любом $x \neq 0$ оба этих числа положительны. Применим к ним неравенство о средних:

$$\frac{81}{x^2} + 16x^2 \geq 2 \sqrt{\frac{81}{x^2} \cdot 16x^2},$$

$$\frac{81}{x^2} + 16x^2 \geq 2\sqrt{81 \cdot 16} = 2 \cdot 9 \cdot 4 = 72.$$

Таким образом, наименьшее значение дроби равно 72.

Найдем значение x , при котором достигается этот минимум. Это происходит при $a = b$:

$$\frac{81}{x^2} = 16x^2,$$

$$81 = 16x^4,$$

$$x^4 = \frac{81}{16},$$

$$x^2 = \frac{9}{4},$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{9}{4}} = \pm \frac{3}{2} = \pm 1,5.$$

Ответ: Дробь принимает наименьшее значение при $x = 1,5$ и $x = -1,5$.

6. Для произвольных действительных чисел x и y докажите неравенство:

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 \geq 4xy(x^2 + y^2).$$

Доказательство.

Преобразуем левую часть неравенства. Заметим, что выражение $x^4 + 6x^2y^2 + y^4$ можно представить через квадрат суммы x^2 и y^2 :

$$x^4 + 6x^2y^2 + y^4 = (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + 4x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 + (2xy)^2.$$

Выполним подстановку. Пусть $A = x^2 + y^2$ и $B = 2xy$. Тогда исходное неравенство принимает вид:

$$A^2 + B^2 \geq 2 \cdot A \cdot B.$$

Здесь $2AB = 2(x^2 + y^2)(2xy) = 4xy(x^2 + y^2)$, что соответствует правой части исходного выражения.

Свернем полный квадрат. Перенесем всё в одну сторону:

$$A^2 - 2AB + B^2 \geq 0,$$

$$(A - B)^2 \geq 0.$$

Вернемся к исходным переменным. Подставив значения A и B обратно, мы получаем:

$$((x^2 + y^2) - 2xy)^2 \geq 0.$$

Внутри скобок снова можно свернуть полный квадрат:

$$((x - y)^2)^2 \geq 0,$$

$$(x - y)^4 \geq 0.$$

Так как любая четная степень действительного числа (в данном случае четвертая) всегда неотрицательна, полученное неравенство верно для любых x и y . Следовательно, исходное неравенство также доказано.

7. Для любых действительных чисел x, y, z докажите неравенство:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz.$$

Доказательство.

Вспомним базовое неравенство. Для любых двух чисел a и b справедливо, что $(a - b)^2 \geq 0$. Если свернуть полный квадрат, мы получим известное неравенство:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab.$$

Применим это неравенство трижды для каждой пары переменных из нашей задачи:

$$\text{— для } x \text{ и } y: x^2 + y^2 \geq 2xy;$$

$$\text{— для } y \text{ и } z: y^2 + z^2 \geq 2yz;$$

$$\text{— для } x \text{ и } z: x^2 + z^2 \geq 2xz.$$

Сложим полученные неравенства (метод суммирования):

$$(x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (x^2 + z^2) \geq 2xy + 2yz + 2xz.$$

Разделим обе части на 2, чтобы прийти к искомому виду:

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz.$$

Неравенство доказано.

8. Докажите неравенство для положительных значений переменных:

$$(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c).$$

Обозначим $x = ab$, $y = bc$, $z = ac$. Тогда неравенство примет вид:

$$(x + y + z)^2 \geq 3(xz + xy + yz).$$

Это неравенство после раскрытия скобок и приведения подобных превращается в неравенство $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$, которое мы доказали в задаче 7.

9. Докажите неравенство для положительных значений переменных:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e).$$

Доказательство.

Раскроем скобки в правой части:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq ab + ac + ad + ae.$$

Чтобы применить метод суммирования, нужно разбить a^2 на четыре части, по одной для каждой пары с другими переменными (b, c, d, e) . Представим a^2 как сумму четырех слагаемых:

$$a^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}.$$

Для любых чисел x и y верно, что $\frac{x^2 + y^2}{4} \geq xy$, или в форме выделенного полного квадрата: $\left(\frac{x}{2} - y\right)^2 \geq 0$, что равносильно $\frac{x^2}{4} + y^2 \geq xy$. Составим четыре таких неравенства:

$$\begin{cases} \frac{a^2}{4} + b^2 \geq ab, \\ \frac{a^2}{4} + c^2 \geq ac, \\ \frac{a^2}{4} + d^2 \geq ad, \\ \frac{a^2}{4} + e^2 \geq ae. \end{cases}$$

Сложим эти четыре неравенства (метод суммирования):

$$\left(\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}\right) + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq ab + ac + ad + ae,$$

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq ab + ac + ad + ae.$$

Неравенство доказано.

10. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то их сумма больше четырех.

Воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим. Пусть a и b - два положительных числа. По условию задачи: $a > 0, b > 0, ab > a + b$ (произведение больше суммы).

Доказательство.

Для любых положительных чисел всегда выполняется соотношение между их средним геометрическим и средним арифметическим:

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}.$$

Возведем обе части этого неравенства в квадрат, чтобы получить выражение для произведения ab :

$$ab \leq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = \frac{(a + b)^2}{4}.$$

Теперь объединим это с условием задачи ($ab > a + b$) в одну цепочку:

$$a + b < ab < \frac{(a + b)^2}{4}.$$

Сосредоточимся на крайних частях полученного неравенства:

$$a + b < \frac{(a + b)^2}{4}.$$

Так как по условию a и b - положительные числа, их сумма $(a + b)$ также больше нуля. Это позволяет нам разделить обе части неравенства на $(a + b)$, не меняя направление знака:

$$1 < \frac{a + b}{4}.$$

Умножив обе части на 4, получаем искомый результат:

$$a + b > 4.$$

Вывод: было доказано, что если для положительных чисел произведение превышает их сумму, то их сумма обязательно будет больше четырех. Равенство $a + b = 4$ и $ab = 4$ могло бы быть достигнуто только при $a = b = 2$, но так как по условию неравенство строгое ($ab > a + b$), то и сумма должна быть строго больше четырех.

11. Пусть $x + y = 1$. Докажите, что $x^8 + y^8 \geq \frac{1}{128}$.

Для любых чисел справедливо соотношение:

$$\frac{a + b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}.$$

Если возвести обе части в квадрат, мы получим удобную форму для оценки суммы квадратов через квадрат суммы:

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geq \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{(a + b)^2}{2}.$$

Доказательство.

Данное неравенство нужно применить трижды, последовательно переходя от суммы первых степеней к восьмым.

Шаг 1 (от x, y к x^2, y^2): так как по условию $x + y = 1$, то:

$$x^2 + y^2 \geq \frac{(x + y)^2}{2} = \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2}.$$

Шаг 2 (от x^2, y^2 к x^4, y^4): применим неравенство к числам $a = x^2$ и $b = y^2$:

$$x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2}.$$

Подставим результат из первого шага ($x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$):

$$x^4 + y^4 \geq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2} = \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

Шаг 3 (от x^4, y^4 к x^8, y^8): применим неравенство к числам $a = x^4$ и $b = y^4$:

$$x^8 + y^8 \geq \frac{(x^4 + y^4)^2}{2}.$$

Подставим результат из второго шага ($x^4 + y^4 \geq \frac{1}{8}$):

$$x^8 + y^8 \geq \frac{\left(\frac{1}{8}\right)^2}{2} = \frac{1}{64} = \frac{1}{128}.$$

Неравенство доказано.

2.2.2 Неравенство Коши-Буняковского-Шварца

Рассмотрев квадратное уравнение $(a_1x - b_1)^2 + (a_2x - b_2)^2 + \dots + (a_nx - b_n)^2 = 0$ и задумавшись о его дискриминанте, мы получаем, что для любых действительных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ справедливо неравенство (неравенство Коши-Буняковского-Шварца):

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

1. Для любых чисел докажите неравенство:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n}.$$

Воспользуемся неравенством Коши-Буняковского-Шварца. Для любых действительных чисел $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ и $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ справедливо неравенство:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2.$$

Доказательство.

Возьмем в качестве чисел $b_1 + b_2 + \dots + b_n$ единицы:

$$b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1.$$

Подставим эти значения в левую часть неравенства КБШ:

$$(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) = (1^2 + 1^2 + \dots + 1^2) = n.$$

Подставим эти же значения в правую часть неравенства:

$$(a_1 \cdot 1 + a_2 \cdot 1 + \dots + a_n \cdot 1)^2 = (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2.$$

Запишем итоговое выражение:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) \cdot n \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2.$$

Разделим обе части неравенства на n (так как $n > 0$):

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n}.$$

Неравенство доказано.

2. Известно, что $3x - 4y + 5z = 5$. Найдите наименьшее значение выражения: а) $x^2 + y^2 + z^2$; б) $3x^2 + 4y^2 + 5z^2$.

а) Применим неравенство КБШ для наборов чисел (x, y, z) и $(3, -4, 5)$:

– левая часть: $(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (3^2 + (-4)^2 + 5^2)$;

– правая часть: $(3x + (-4)y + 5z)^2$.

Согласно КБШ:

$$(x^2 + y^2 + z^2) \cdot (9 + 16 + 25) \geq (3x - 4y + 5z)^2.$$

Подставим известное значение суммы $3x - 4y + 5z = 5$:

$$(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 50 \geq 5^2,$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) \cdot 50 \geq 25,$$

$$(x^2 + y^2 + z^2) \geq \frac{25}{50} = 0,5.$$

Ответ для пункта а): наименьшее значение равно 0,5.

б) Чтобы найти минимум этого выражения, подберем коэффициенты в КБШ так, чтобы в правой части снова получилось выражение $3x - 4y + 5z$. Пусть первый набор чисел будет $(\sqrt{3}x, \sqrt{4}y, \sqrt{5}z)$, тогда сумма их квадратов даст искомое выражение $3x^2 + 4y^2 + 5z^2$. Чтобы при умножении на второй набор (b_1, b_2, b_3) получилось $3x - 4y + 5z$, положим:

$$\begin{cases} b_1 = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \\ b_1 = \frac{-4}{\sqrt{4}} = -2 \\ b_1 = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \end{cases}$$

Применим КБШ:

$$\begin{aligned} & \left((\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{4}y)^2 + (\sqrt{5}z)^2 \right) \cdot \left((\sqrt{3})^2 + (-2)^2 + (\sqrt{5})^2 \right) \geq \\ & \geq \left(\sqrt{3}x \cdot \sqrt{3} + \sqrt{4}y \cdot (-2) + \sqrt{5}z \cdot \sqrt{5} \right)^2, \\ & (3x^2 + 4y^2 + 5z^2) \cdot (3 + 4 + 5) \geq (3x - 4y + 5z)^2. \end{aligned}$$

Подставим значение суммы:

$$(3x^2 + 4y^2 + 5z^2) \cdot 12 \geq 5^2,$$

$$(3x^2 + 4y^2 + 5z^2) \cdot 12 \geq 25,$$

$$3x^2 + 4y^2 + 5z^2 \geq \frac{25}{12}$$

Ответ для пункта б): наименьшее значение равно $\frac{25}{12}$.

3. Сумма чисел a, b, c равна 1. Найдите максимальное значение выражения: $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1}$.

Решение:

Применим КБШ для двух наборов чисел:

– первый набор: $(\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1})$;

– второй набор: $(1, 1, 1)$.

Согласно формуле:

$$\begin{aligned} & \left(\sqrt{4a+1} \cdot 1 + \sqrt{4b+1} \cdot 1 + \sqrt{4c+1} \cdot 1 \right)^2 \leq \\ & \leq \left((\sqrt{4a+1})^2 + (\sqrt{4b+1})^2 + (\sqrt{4c+1})^2 \right) (1^2 + 1^2 + 1^2). \end{aligned}$$

Упростим правую часть:

Сумма квадратов корней: $(4a+1) + (4b+1) + (4c+1) = 4(a+b+c) + 3$.

Сумма единиц: $1 + 1 + 1 = 3$.

Подставим условие задачи ($a + b + c = 1$):

$$4 \cdot 1 + 3 = 7.$$

Следовательно, правая часть равна: $7 \cdot 3 = 21$.

Таким образом:

$$(\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1})^2 \leq 21.$$

Извлекая корень из обеих частей, получаем:

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}.$$

Ответ: Максимальное значение выражения равно $\sqrt{21}$.

4. Известно, что $a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 4b + 6c$. Найдите наибольшее значение: $6a + 4b + 2c$.

Решение:

Преобразуем условие. Уравнение $a^2 + b^2 + c^2 = 2a + 4b + 6c$ можно переписать, выделив полные квадраты:

$$(a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 4b + 4) + (c^2 - 6c + 9) = 1 + 4 + 9.$$

Сделаем замену переменных.

Пусть:

$$\begin{cases} x = a - 1 \Rightarrow a = x + 1, \\ y = b - 2 \Rightarrow b = y + 2, \\ z = c - 3 \Rightarrow c = z + 3. \end{cases}$$

Тогда условие принимает вид: $x^2 + y^2 + z^2 = 14$.

Преобразуем искомое выражение. Нам нужно найти максимум $6a + 4b + 2c$. Подставим наши переменные:

$$\begin{aligned} & 6(x+1) + 4(y+2) + 2(z+3) = \\ & = 6x + 6 + 4y + 8 + 2z + 6 = (6x + 4y + 2z) + 20. \end{aligned}$$

Применим неравенство КБШ для наборов (x, y, z) и $(6, 4, 2)$:

$$(6x + 4y + 2z)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(6^2 + 4^2 + 2^2).$$

Подставим значения:

$$\begin{aligned} (6x + 4y + 2z)^2 & \leq 14 \cdot (36 + 16 + 4), \\ (6x + 4y + 2z)^2 & \leq 14 \cdot 56, \end{aligned}$$

$$(6x + 4y + 2z)^2 \leq 784.$$

Найдем ограничение для суммы. Извлекая квадратный корень, получаем:

$$-28 \leq 6x + 4y + 2z \leq 28.$$

Следовательно, максимальное значение выражения $(6x + 4y + 2z)$ равно 28.

Вычислим итоговый результат. Максимальное значение исходного выражения:

$$Max = 28 + 20 = 48.$$

Ответ: наибольшее значение выражения $6a + 4b + 2c$ равно 48.

5. (КБШ в форме дробей, лемма Титу). Для действительных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и положительных $y_1, y_2, \dots, y_n$ докажите неравенство:

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}.$$

Доказательство.

Пусть нам даны действительные числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ и положительные числа $y_1, y_2, \dots, y_n$.

Выполним следующую подстановку в классическое неравенство КБШ:

– пусть $a_i = \frac{x_i}{\sqrt{y_i}}$ (это возможно, так как $y_i > 0$);

– пусть $b = \sqrt{y_i}$.

Теперь вычислим компоненты неравенства КБШ с этими значениями:

– сумма квадратов a_i : $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 = \frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n}$;

– сумма квадратов b_i : $b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2 = y_1 + y_2 + \dots + y_n$;

– сумма произведений $a_i b_i$: $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \frac{x_1}{\sqrt{y_1}} \cdot \sqrt{y_1} + \dots + \frac{x_n}{\sqrt{y_n}} \cdot \sqrt{y_n} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Подставим эти выражения в исходную формулу КБШ:

$$\left(\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \right) (y_1 + y_2 + \dots + y_n) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2.$$

Так как все $y_i > 0$, их сумма также положительна. Разделим обе части на $(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$:

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \dots + \frac{x_n^2}{y_n} \geq \frac{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2}{y_1 + y_2 + \dots + y_n}.$$

Неравенство доказано.

6. Сумма квадратов чисел a , b и c равна 3. Докажите, что

$$\frac{1}{2-a} + \frac{1}{2-b} + \frac{1}{2-c} \geq 3.$$

Доказательство.

Применим лемму Титу. Согласно этому неравенству:

$$\frac{x_1^2}{y_1} + \frac{x_2^2}{y_2} + \frac{x_3^2}{y_3} \geq \frac{(x_1 + x_2 + x_3)^2}{y_1 + y_2 + y_3}.$$

Положим $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, а $y_1 = 2 - a$, $y_2 = 2 - b$, $y_3 = 2 - c$ (заметим, что так как $a^2 \leq 3$, то $a \leq \sqrt{3}$, значит знаменатели положительны). Получаем:

$$\frac{1^2}{2-a} + \frac{1^2}{2-b} + \frac{1^2}{2-c} \geq \frac{(1+1+1)^2}{(2-a) + (2-b) + (2-c)} = \frac{9}{6 - (a+b+c)}.$$

Оценим сумму $(a+b+c)$. Для этого используем другое следствие из КБШ, доказанное ранее в задаче 1:

$$a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \geq \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2}{n}.$$

Для трех чисел a, b, c при $n = 3$:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3}.$$

Подставим условие $a^2 + b^2 + c^2 = 3$:

$$3 \geq \frac{(a+b+c)^2}{3} \Rightarrow (a+b+c)^2 \leq 9 \Rightarrow a+b+c \leq 3.$$

Завершим доказательство. Так как сумма $a+b+c$ не превышает 3, мы можем оценить знаменатель полученной дроби:

$$6 - (a+b+c) \geq 6 - 3 = 3.$$

Следовательно:

$$\frac{9}{6 - (a + b + c)} \geq \frac{9}{3} = 3.$$

Неравенство доказано.

7. Докажите неравенство Несбитта для положительных x, y, z :

$$\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \geq \frac{3}{2}.$$

Доказательство.

Подготовим выражение для применения леммы Титу. Чтобы в числителях появились квадраты, умножим числитель и знаменатель каждой дроби на числитель:

$$\frac{x^2}{x(y+z)} + \frac{y^2}{y(x+z)} + \frac{z^2}{z(x+y)} \geq \frac{3}{2}.$$

Применим лемму Титу, согласно которой сумма дробей вида $\frac{x_i^2}{y_i}$ не меньше квадрата суммы числителей, деленного на сумму знаменателей:

$$\frac{x^2}{x(y+z)} + \frac{y^2}{y(x+z)} + \frac{z^2}{z(x+y)} \geq \frac{(x+y+z)^2}{x(y+z) + y(x+z) + z(x+y)}.$$

Упростим знаменатель полученной дроби:

$$\begin{aligned} x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) &= \\ &= xy + xz + yx + yz + zx + zy = 2(xy + yz + zx). \end{aligned}$$

Преобразуем все выражение. Теперь нам нужно доказать, что:

$$\frac{(x+y+z)^2}{2(xy+yz+xz)} \geq \frac{3}{2}.$$

Раскроем квадрат суммы в числителе:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + xz)}{2(xy + yz + xz)} \geq \frac{3}{2}.$$

Разделим почленно:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2(xy + yz + xz)} + \frac{2(xy + yz + xz)}{2(xy + yz + xz)} &\geq \frac{3}{2}. \\ \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2(xy + yz + xz)} + 1 &\geq \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Это равносильно доказательству того, что:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2(xy + yz + xz)} \geq \frac{1}{2}.$$

Используем ранее доказанное неравенство: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$.

Следовательно:

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2(xy + yz + xz)} \geq \frac{xy + yz + xz}{2(xy + yz + xz)} = \frac{1}{2}.$$

Добавив обратно единицу, мы получаем искомое значение $\frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

Неравенство Несбитта доказано.

8. Для положительных чисел x, y, z таких, что $xyz = 1$, докажите неравенство:

$$\frac{1}{x^3(y+z)} + \frac{1}{y^3(x+z)} + \frac{1}{z^3(y+x)} \geq \frac{3}{2}.$$

Доказательство.

Преобразуем каждое слагаемое. Чтобы применить лемму Титу, нам нужно, чтобы в числителях стояли квадраты. Запишем каждое слагаемое следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{1}{x^3(y+z)} = \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{x(y+z)}, \\ \frac{1}{y^3(x+z)} = \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^2}{y(x+z)}, \\ \frac{1}{z^3(y+x)} = \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{z(x+y)}. \end{cases}$$

Применим лемму Титу. Сумма дробей вида $\frac{x_i^2}{y_i}$ не меньше квадрата суммы числителей, деленного на сумму знаменателей:

$$\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{x(y+z)} + \frac{\left(\frac{1}{y}\right)^2}{y(x+z)} + \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^2}{z(x+y)} \geq \frac{\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)^2}{x(y+z) + y(x+z) + z(x+y)}.$$

Упростим знаменатель. Раскроем скобки в нижней части дроби:

$$\begin{aligned}
 & x(y+z) + y(x+z) + z(x+y) = \\
 & = xy + xz + yx + yz + zx + zy = 2(xy + yz + zx).
 \end{aligned}$$

Упростим числитель. Приведем сумму в скобках к общему знаменателю:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + xz}{xyz}.$$

Так как по условию задачи $xyz = 1$, выражение в числителе упрощается до: $(xy + yz + xz)^2$.

Подставим упрощенные выражения в неравенство:

$$\frac{(xy + yz + xz)^2}{2(xy + yz + xz)} = \frac{xy + yz + xz}{2}.$$

Используем неравенство о средних. Для положительных чисел xy, yz и zx справедливо:

$$\frac{xy + yz + xz}{3} \geq \sqrt[3]{xy \cdot yz \cdot xz} = \sqrt{(xyz)^2}.$$

Так как $xyz = 1$, то $\sqrt{1} = 1$, а значит:

$$xy + yz + zx \geq 3.$$

Итоговый результат: Возвращаясь к нашему выражению:

$$\frac{xy + yz + xz}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Неравенство доказано.

9. Для положительных чисел x, y, z докажите неравенство:

$$\frac{x}{2x+y} + \frac{y}{2y+z} + \frac{z}{2z+x} \leq 1.$$

Доказательство.

Преобразуем левую часть неравенства. Заметим, что каждое слагаемое можно представить в следующем виде:

$$\frac{x}{2x+y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{2x+y} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+y) - y}{2x+y} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{y}{2x+y} \right).$$

Просуммируем все три слагаемых:

$$\sum \frac{x}{2x+y} = \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{y}{2x+y} \right) + \left(1 - \frac{z}{2y+z} \right) + \left(1 - \frac{x}{2z+x} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(3 - \left(\frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x} \right) \right).$$

Сформулируем эквивалентную задачу. Чтобы доказать, что вся сумма не больше 1, нам достаточно показать, что вычитаемое выражение в скобках не меньше 1:

$$\frac{1}{2}(3 - S) \leq 1 \Leftrightarrow 3 - S \leq 2 \Leftrightarrow S \geq 1.$$

где $S = \frac{y}{2x+y} + \frac{z}{2y+z} + \frac{x}{2z+x}$.

Применим лемму Титу. Для этого представим числители дробей в S как квадраты:

$$S = \frac{y^2}{y(2x+y)} + \frac{z^2}{z(2y+z)} + \frac{x^2}{x(2z+x)}.$$

Согласно лемме, сумма этих дробей не меньше квадрата суммы числителей, деленного на сумму знаменателей:

$$S \geq \frac{(y+z+x)^2}{y(2x+y) + z(2y+z) + x(2z+x)}.$$

Упростим знаменатель:

$$\begin{aligned} 2xy + y^2 + 2yz + z^2 + 2zx + x^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx = \\ &= (x+y+z)^2. \end{aligned}$$

Завершим оценку:

$$S \geq \frac{(x+y+z)^2}{(x+y+z)^2} = 1.$$

Так как $S \geq 1$, то исходное выражение:

$$\frac{1}{2}(3 - S) \leq \frac{1}{2}(3 - 1) = 1.$$

Неравенство доказано.

2.2.3 Транснеравенство

Пусть $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$ и $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \geq \dots \geq b_n$. И пусть $c_1, c_2, \dots, c_n$ – некоторая перестановка чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$. Тогда $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq a_1 c_1 + a_2 c_2 + \dots + a_n c_n \geq a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1$.

Суть транснаравенства заключается в том, что для двух одинаково упорядоченных последовательностей чисел сумма их попарных произведений будет максимальной, если они умножаются «соответственно» (самое большое на самое большое и т. д.), и уменьшается при любой другой перестановке множителей.

1. Докажите, что для произвольных чисел:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3 b + b^3 c + c^3 a.$$

Доказательство.

Упорядочим переменные. Без потери общности предположим, что числа a, b, c упорядочены следующим образом:

$$a \geq b \geq c.$$

Составим две последовательности.

– первая последовательность: a^3, b^3, c^3 . Так как функция $f(x) = x^3$ является возрастающей на всей числовой прямой, порядок чисел сохранится: $a^3 \geq b^3 \geq c^3$;

– вторая последовательность: a, b, c . Она уже упорядочена нами выше: $a \geq b \geq c$.

Применим транснаравенство. Сумма произведений будет наибольшей при одинаковом порядке множителей. Максимальная сумма (соответствующая расстановке):

$$a^3 \cdot a + b^3 \cdot b + c^3 \cdot c = a^4 + b^4 + c^4.$$

Любая другая расстановка (перестановка c_1, c_2, c_3):

$$a^3 c_1 + b^3 c_2 + c^3 c_3.$$

Сравним выражения. Рассмотрим перестановку (b, c, a) для множителей второй последовательности. Транснаравенство утверждает, что:

$$a^3 \cdot a + b^3 \cdot b + c^3 \cdot c \geq a^3 \cdot b + b^3 \cdot c + c^3 \cdot a,$$

что в точности соответствует искомому неравенству:

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^3b + b^3c + c^3a.$$

2. Докажите, что для положительных чисел a, b, c :

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Доказательство.

Упорядочим переменные. Без потери общности предположим, что положительные числа a, b, c упорядочены по убыванию:

$$a \geq b \geq c > 0.$$

Составим две последовательности чисел:

– первая последовательность: a^3, b^3, c^3 . Так как функция $f(x) = x^3$ возрастает для положительных чисел, порядок сохраняется: $a^3 \geq b^3 \geq c^3$;

– вторая последовательность: $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$. Поскольку при инвертировании положительных чисел порядок меняется на противоположный, получаем:

$$\frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}.$$

Вычислим минимальную сумму. В нашем случае последовательности (a^3, b^3, c^3) и $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$ как раз упорядочены противоположно. Следовательно, их «соответствующее» произведение дает минимально возможную сумму для данных чисел:

$$S_{min} = a^3 \cdot \frac{1}{a} + b^3 \cdot \frac{1}{b} + c^3 \cdot \frac{1}{c} = a^2 + b^2 + c^2.$$

Сравним с искомым выражением. Любая другая перестановка множителей второй последовательности даст сумму, которая будет больше или равна минимальной. Рассмотрим циклическую перестановку $(\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{a})$:

$$a^3 \cdot \frac{1}{b} + b^3 \cdot \frac{1}{c} + c^3 \cdot \frac{1}{a} \geq S_{min},$$

что в привычной записи выглядит как:

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq a^2 + b^2 + c^2.$$

Неравенство доказано.

3. Докажите, что для положительных чисел a, b, c

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Доказательство.

Упорядочим переменные. Без потери общности предположим, что положительные числа a, b, c упорядочены по убыванию:

$$a \geq b \geq c > 0.$$

Составим две последовательности чисел.

– первая последовательность: $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$. Она упорядочена: $x_1 \geq x_2 \geq x_3$;

– вторая последовательность состоит из величин, обратных суммам пар переменных. Сравним суммы:

1) $a + b$: сумма двух наибольших чисел (самая большая).

2) $a + c$: сумма наибольшего и наименьшего (средняя).

3) $b + c$: сумма двух наименьших (самая маленькая).

Следовательно: $a + b \geq a + c \geq b + c$.

Для обратных величин порядок будет противоположным:

$$\frac{1}{b+c} \geq \frac{1}{a+c} \geq \frac{1}{a+b}.$$

Обозначим их как $y_1 = \frac{1}{b+c}, y_2 = \frac{1}{a+c}, y_3 = \frac{1}{a+b}$. Получаем вторую упорядоченную последовательность: $y_1 \geq y_2 \geq y_3$.

Применим транснеравенство. Сумма произведений двух одинаково упорядоченных последовательностей будет максимальной, если они умножаются «соответственно» ($x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$). Любая другая перестановка множителей даст меньшую или равную сумму.

Сравним суммы. Максимальная сумма (правая часть неравенства):

$$S_{max} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = a \cdot \frac{1}{b+c} + b \cdot \frac{1}{a+c} + c \cdot \frac{1}{a+b} =$$

$$= \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}.$$

Смешанная сумма (левая часть неравенства): рассмотрим перестановку (y_3, y_1, y_2) :

$$\begin{aligned} S_{mixed} &= x_1 y_3 + x_2 y_1 + x_3 y_2 = a \cdot \frac{1}{a+b} + b \cdot \frac{1}{b+c} + c \cdot \frac{1}{c+a} = \\ &= \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}. \end{aligned}$$

Вывод: так как по теореме о транснаравенстве $S_{max} \geq S_{mixed}$, то получаем:

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

Неравенство доказано.

4. Докажите, что для положительных чисел a, b, c

$$\frac{a}{b(b+c)} + \frac{b}{c(c+a)} + \frac{c}{a(a+b)} \geq \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a}.$$

Доказательство.

Упорядочим переменные. Без потери общности предположим, что:

$$a \geq b \geq c > 0.$$

Рассмотрим разность между частями неравенства. Перенесем все члены в левую часть и сгруппируем их:

$$\left(\frac{a}{b(b+c)} - \frac{1}{b+c} \right) + \left(\frac{b}{c(c+a)} - \frac{1}{c+a} \right) + \left(\frac{c}{a(a+b)} - \frac{1}{a+b} \right) \geq 0.$$

После приведения к общему знаменателю в каждой скобке получаем:

$$\frac{a-b}{b(b+c)} + \frac{b-c}{c(c+a)} + \frac{c-a}{a(a+b)} \geq 0.$$

Используем свойство суммы разностей. Заметим, что $(a-c) = (a-b) + (b-c)$. Подставим это в третье слагаемое:

$$\frac{a-b}{b(b+c)} + \frac{b-c}{c(c+a)} - \frac{(a-b) + (b-c)}{a(a+b)} \geq 0.$$

Группируем по множителям $(a-b)$ и $(b-c)$:

$$(a - b) \left[\frac{1}{b(b + c)} - \frac{1}{a(a + b)} \right] + (b - c) \left[\frac{1}{c(c + a)} - \frac{1}{a(a + b)} \right] \geq 0.$$

Анализируем знаки выражений (так как $a \geq b \geq c$, то $(a - b) \geq 0$ и $(b - c) \geq 0$):

– первая скобка: сравним знаменатели. Так как $a > b$, то $a(a + b) > b(b + c)$. Следовательно, $\frac{1}{b(b + c)} > \frac{1}{a(a + b)}$, и скобка положительна;

– вторая скобка: аналогично, $a > c$ и $(a + b) > (c + a)$, значит $a(a + b) > c(c + a)$. Следовательно, $\frac{1}{c(c + a)} > \frac{1}{a(a + b)}$, и эта скобка также положительна.

Вывод: сумма двух произведений положительных чисел всегда неотрицательна. Это доказывает, что левая часть исходного выражения всегда больше или равна правой.

5. Докажите, что для положительных чисел a, b, c

$$\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd} \leq \frac{3}{2}(a + b + c + d).$$

Доказательство.

Связь с трансервенством. Возьмем два положительных числа, например a и b . Рассмотрим две идентичные последовательности: $(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ и $(\sqrt{a}, \sqrt{b})$. Согласно трансервенству, сумма их произведений в одинаковом порядке (максимальная) всегда не меньше суммы в любом другом порядке:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{b} \geq \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} + \sqrt{b} \cdot \sqrt{a}.$$

Это упрощается до:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Rightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}.$$

(Это классическое неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим для двух чисел).

Применение оценки ко всем парам. В левой части искомого неравенства стоит сумма 6 пар корней. Применим результат первого шага к каждой паре:

$$\begin{cases} \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \\ \sqrt{ac} \leq \frac{a+c}{2}, \\ \sqrt{ad} \leq \frac{a+d}{2}, \\ \sqrt{bc} \leq \frac{b+c}{2}, \\ \sqrt{bd} \leq \frac{b+d}{2}, \\ \sqrt{cd} \leq \frac{c+d}{2}. \end{cases}$$

Суммирование неравенств. Сложим левые и правые части всех шести неравенств:

$$\sum \sqrt{ij} \geq \frac{(a+b) + (a+c) + (a+d) + (b+c) + (b+d) + (c+d)}{2}.$$

Упрощение правой части. Подсчитаем количество вхождений каждой переменной в числителе:

- переменная a встречается 3 раза (в комбинациях с b, c, d);
- переменная b встречается 3 раза (в комбинациях с a, c, d);
- переменная c встречается 3 раза (в комбинациях с a, b, d);
- переменная d встречается 3 раза (в комбинациях с a, b, c);

Таким образом, сумма в числителе равна $3a + 3b + 3c + 3d = 3(a + b + c + d)$.

Вывод: подставляя упрощенную сумму в общее неравенство:

$$\sqrt{ab} + \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd} + \sqrt{cd} \leq \frac{3}{2}(a + b + c + d).$$

Неравенство доказано.

6. Пусть $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ и $y_1 \leq y_2 \leq y_3$. Докажите, что

$$3(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) > (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3).$$

Доказательство.

Воспользуемся транснеравенством. Рассмотрим три суммы, полученные путем циклических перестановок элементов y :

$$\begin{cases} S_1 = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \\ S_2 = x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1, \\ S_3 = x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2. \end{cases}$$

Согласно транснаравенству, верны следующие соотношения:

$$\begin{cases} x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \geq x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \geq x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1, \\ x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 \geq x_1y_3 + x_2y_1 + x_3y_2. \end{cases}$$

Сложим эти три неравенства почленно:

$$3(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \geq (x_1y_1 + x_1y_2 + x_1y_3) + (x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3) + (x_3y_1 + x_3y_2 + x_3y_3).$$

Сгруппируем слагаемые в правой части, вынося x_i за скобки:

$$\begin{aligned} 3(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) &\geq \\ &\geq x_1(y_1 + y_2 + y_3) + x_2(y_1 + y_2 + y_3) + x_3(y_1 + y_2 + y_3), \\ 3(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) &\geq (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3). \end{aligned}$$

Таким образом, требуемое неравенство доказано.

7. Докажите, что для положительных чисел a, b, c

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a + b + c.$$

Доказательство.

Упорядочим переменные. Без потери общности предположим, что положительные числа a, b, c упорядочены по убыванию:

$$a \geq b \geq c > 0.$$

Первое применение транснаравенства. Рассмотрим две последовательности:

– первая: a^3, b^3, c^3 . Порядок: $a^3 \geq b^3 \geq c^3$;

– вторая: $\frac{1}{bc}, \frac{1}{ca}, \frac{1}{ab}$.

Сравним элементы: $\frac{1}{bc} = \frac{a}{abc}, \frac{1}{ca} = \frac{b}{abc}, \frac{1}{ab} = \frac{c}{abc}$. Поскольку $a \geq b \geq c$, то и $\frac{1}{bc} \geq \frac{1}{ca} \geq \frac{1}{ab}$.

Так как обе последовательности упорядочены одинаково, их «соответствующая» сумма произведений является максимальной:

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq a^3 \cdot \frac{1}{ab} + b^3 \cdot \frac{1}{bc} + c^3 \cdot \frac{1}{ca}.$$

Упростив правую часть, получаем:

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}.$$

Второе применение транснаравенства. Теперь докажем, что полученная сумма $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c$. Рассмотрим последовательности:

– первая: a^2, b^2, c^2 . Порядок: $a^2 \geq b^2 \geq c^2$;

– вторая: $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$. Порядок противоположный: $\frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$.

Согласно транснаравенству, сумма произведений двух противоположно упорядоченных последовательностей является минимальной при их умножении «навстречу друг другу»:

$$S_{min} = a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} = a + b + c.$$

Любая другая перестановка, включая циклическую $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a}$, будет больше или равна этому минимуму:

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

Вывод: объединяя результаты предыдущих шагов, получаем:

$$\frac{a^3}{bc} + \frac{b^3}{ca} + \frac{c^3}{ab} \geq \frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq a + b + c.$$

Неравенство доказано.

8. Докажите, что для положительных чисел a, b, c

$$\frac{a^2 + b^2}{2c} + \frac{b^2 + c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2}{2b} \geq a + b + c.$$

Доказательство.

Упорядочим переменные. Без потери общности предположим, что положительные числа a, b, c упорядочены следующим образом:

$$a \geq b \geq c > 0.$$

Составим две последовательности.

- первая: a^2, b^2, c^2 . Порядок: $a^2 \geq b^2 \geq c^2$;
- вторая: $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$. Порядок противоположный: $\frac{1}{c} \geq \frac{1}{b} \geq \frac{1}{a}$.

Определим минимальную сумму. Согласно транснаравенству, сумма произведений этих последовательностей будет минимальной, если умножать их элементы «навстречу» друг другу (самое большое на самое маленькое и т. д.):

$$S_{min} = a^2 \cdot \frac{1}{a} + b^2 \cdot \frac{1}{b} + c^2 \cdot \frac{1}{c} = a + b + c.$$

Преобразуем левую часть (ЛЧ) исходного неравенства. Разобьем каждую дробь на две части и перегруппируем их:

$$\text{ЛЧ} = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{b} \right).$$

Разделим это выражение на две суммы:

$$\text{ЛЧ} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \right) + \left(\frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{a^2}{b} \right) \right].$$

Применим транснаравенство. Каждая из сумм в скобках представляет собой перестановку произведений элементов наших последовательностей (a^2, b^2, c^2) и $(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c})$. Поскольку любая перестановка дает сумму не меньше минимальной:

$$\begin{cases} \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b} \geq S_{min} = a + b + c, \\ \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} + \frac{a^2}{b} \geq S_{min} = a + b + c. \end{cases}$$

Завершим доказательство. Сложив эти два неравенства и разделив результат на 2, получаем:

$$\frac{1}{2} [(a + b + c) + (a + b + c)] = a + b + c.$$

Следовательно, исходная сумма всегда больше или равна $a + b + c$.

Неравенство доказано.

2.2.4 Неравенство Бернулли

Для любого натурального числа n и любого действительного числа $x > -1$ справедливо неравенство Бернулли:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

1. Неравенство Бернулли. Докажите, что при $x \geq -1$ и натуральном n выполняется неравенство:

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx.$$

Доказательство.

Докажем неравенство индукцией по n .

База индукции: При $n = 1$ неравенство превращается в равенство.

Предположение индукции: Предположим, что неравенство верно для некоторого натурального числа n : $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Шаг индукции: Докажем, что неравенство будет верно и для $n + 1$, то есть:

$$(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x.$$

Умножим обе части предположения индукции на $(1 + x)$. Тогда:

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2.$$

Так как n это натуральное число ($n \geq 1$), а $x^2 \geq 0$ для любого действительного x , то слагаемое nx^2 всегда неотрицательно ($nx^2 \geq 0$). Следовательно:

$$1 + (n + 1)x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

2. Докажите, что неравенство из задачи 1 выполнено также при $-2 \leq x < -1$.

Доказательство.

База индукции. При $n = 1$ неравенство превращается в равенство: $(1 + x)^1 = 1 + 1 \cdot x \Rightarrow 1 + x = 1 + x$. Условие выполняется.

Шаг индукции. Разберем поведение левой и правой частей неравенства при $-2 \leq x < -1$:

– оценка правой части $(1 + nx)$: так как $x < -1$, то $nx < -n$. Следовательно, $1 + nx < 1 - n$. Для любого $n \geq 2$ выражение $1 - n \leq -1$. Таким образом, правая часть всегда меньше или равна -1 при $n \geq 2$;

– оценка левой части $(1 + x)^n$: если $-2 \leq x < -1$, то, прибавляя 1 ко всем частям, получаем: $-1 \leq 1 + x < 0$. Это значит, что по модулю $|1 + x| \leq 1$. При возведении числа, модуль которого не превышает 1, в натуральную степень n , результат по модулю также не превысит 1: $|(1 + x)^n| \leq 1^n = 1$. Следовательно, левая часть всегда больше или равна -1 (она находится в промежутке $[-1, 1]$).

Сравнение частей. Было установлено, что при $n \geq 2$ и $x \in [-2, -1]$:

- левая часть $(1 + x)^n \geq -1$;
- правая часть $1 + nx < 1 - n$.

Поскольку $n \geq 2$, то $1 - n \leq -1$. Отсюда следует:

$$(1 + x)^n \geq -1 \geq 1 - n > 1 + nx.$$

Вывод: неравенство $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ верно для всех $x \in [-2, -1]$ и натуральных n . Вместе с доказательством для $x \geq -1$ из источников , это подтверждает, что неравенство Бернулли справедливо для всех $x \geq -2$.

3. Докажите неравенство

$$2^n \geq 1 + n.$$

Доказательство.

Достаточно представить $2 = 1 + 1$ и применить неравенство Бернулли:

$$2^n = (1 + 1)^n \geq 1 + n.$$

4. Докажите, что $\sqrt[n]{1 + x} \leq 1 + \frac{x}{n}$ при $x \geq -1$.

Доказательство.

Возведем обе части неравенство в степень n :

$$1 + x = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Последнее неравенство справедливо в силу неравенства Бернулли при $\frac{x}{n} = z$, следовательно, верно и данное неравенство.

5. Докажите, что при $x \geq 0$ и натуральном n :

$$(1+x)^n \geq 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2.$$

Доказательство.

База индукции:

– при $n = 1$: $(1+x)^1 \geq 1 + 1 \cdot x + \frac{1(0)}{2}x^2 \Rightarrow 1+x \geq 1+x$ (верно);

– при $n = 2$: $(1+x)^2 \geq 1 + 2x + \frac{2(1)}{2}x^2 \Rightarrow 1 + 2x + x^2 \geq 1 + 2x + x^2$

(верно).

Предположение индукции: Пусть неравенство верно для некоторого натурального k :

$$(1+x)^k \geq 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2.$$

Шаг индукции: Докажем, что неравенство верно для $k+1$. Умножим обе части предположения на $(1+x)$, так как по условию $x \geq 0$, знак неравенства сохраняется:

$$(1+x)^{k+1} \geq \left(1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2\right)(1+x).$$

Раскроем скобки в правой части:

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{2}x^2 + x + kx^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3.$$

Сгруппируем слагаемые при x и x^2 :

$$1 + (k+1)x + \left(\frac{k^2-k}{2} + k\right)x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3.$$

Приведем выражение в скобках к общему знаменателю:

$$\frac{k^2 - k + 2k}{2} = \frac{k^2 + k}{2} = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Таким образом:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1 + (k+1)x + \frac{k(k+1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3.$$

Закключение: поскольку $x \geq 0$ и k это натуральное число, слагаемое $\frac{k(k-1)}{2}x^3$ всегда неотрицательно. Отбрасывая его, правая часть уменьшается:

$$1 + (k+1)x + \frac{k(k+1)}{2}x^2 + \frac{k(k-1)}{2}x^3 \geq 1 + (k+1)x + \frac{k(k+1)}{2}x^2.$$

Неравенство доказано для любого натурального n .

6. Докажите, что $\sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \dots + \sqrt[1993]{1993}}} < 2$.

Доказательство.

Согласно неравенству Бернулли $2^{n-1} = 2 \cdot (1+1)^{n-2} \geq 2(1+n-2) \geq n+1$ при $n \geq 3$. Отсюда следует, что $\sqrt[n-1]{n+1} \leq 2$ при $n \geq 3$. Заметим, что $2^{1993} > 1993$, откуда следует, что $\sqrt[1993]{1993} < 2$.

Теперь последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \dots + \sqrt[1993]{1993}}} &< \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \dots + \sqrt[1992]{1992 + 2}}} < \dots < \\ &< \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + \dots + \sqrt[k]{k + 2}}} \leq \dots \leq \sqrt{2 + \sqrt[3]{3 + 2}} < \sqrt{2 + 2} = 2. \end{aligned}$$

7. Докажите, что неравенство выполняется:

$$\sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}.$$

Доказательство.

Преобразуя левую часть неравенства, получим:

$$\sqrt[3]{3} \cdot \left(\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{3}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt[3]{3}}{3}} \right) < 2\sqrt[3]{3}.$$

Разделив на $\sqrt[3]{3}$ обе части неравенства, имеем:

$$\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{3}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt[3]{3}}{3}} < 2.$$

Теперь применим неравенство Бернулли к левой части:

$$\sqrt[3]{1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{3}} + \sqrt[3]{1 - \frac{\sqrt[3]{3}}{3}} < 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{3} + 1 - \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt[3]{3}}{3} = 2.$$

Исходное неравенство становится очевидным и выполняется.

2.2.5 Неравенство Чебышева

В решении неравенств важное место занимает неравенство Чебышева для сумм, которое используется для упорядоченных наборов чисел. Пусть даны две последовательности $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ и $m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_n$, обе возрастающие или обе убывающие. Для них справедливо неравенство Чебышева:

$$n(x_1 m_1 + x_2 m_2 + \dots + x_n m_n) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(m_1 + m_2 + \dots + m_n).$$

Если одна последовательность возрастает, а другая убывает, то знак неравенства меняется на противоположный. Это неравенство позволяет связать сумму попарных произведений с произведением сумм, усиливая неравенство Коши. На практике его используют для доказательства других классических неравенств.

0. (Неравенство Чебышева) Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ это возрастающие последовательности:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, \quad y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n.$$

Докажите, что

$$n(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

Доказательство.

Транснеравенство гласит: если последовательности $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ и $y_1 \leq y_2 \leq y_3$ упорядочены одинаково, то сумма их произведений максимальна при естественном порядке и уменьшается при любой другой перестановке. Это означает, что для любой перестановки $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ последовательности y верно неравенство:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \geq x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n.$$

Рассмотрение циклических перестановок: рассмотрим n таких неравенств, где в правой части используются все возможные циклические перестановки последовательности y :

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 0: x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \geq x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n, \\ k = 1: x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \geq x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_ny_1, \\ k = 2: x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \geq x_1y_3 + x_2y_4 + \dots + x_ny_2, \\ \dots, \\ k = n - 1: x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n \geq x_1y_n + x_2y_1 + \dots + x_ny_{n-1}. \end{array} \right.$$

Сложение неравенств: сложим все эти n неравенств почленно.

– левая часть: суммируем одно и то же выражение n раз, что дает:

$$n(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n);$$

– правая часть: при суммировании по всем циклическим перестановкам каждый элемент x_i будет умножен на каждый элемент y_j ровно один раз. Таким образом, сумма в правой части примет вид:

$$x_1(y_1 + y_2 + \dots + y_n) + x_2(y_1 + y_2 + \dots + y_n) + \dots + x_n(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

Вынося общую сумму $(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$ за скобки, получаем:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

Итог:

$$n(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

Неравенство доказано.

1. Пусть $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ и $y_1 \leq y_2 \leq y_3$. Докажите, что

$$3(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) > (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3).$$

Доказательство. Неравенство следует из неравенства Чебышева для $n = 3$.

2. Пусть последовательности $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ противоположно упорядочены:

$$x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n, \quad y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n.$$

Докажите, что

$$n(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) \leq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

Доказательство.

По условию задачи даны две последовательности, которые упорядочены противоположно:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq x_2 \leq \dots \leq x_n \text{ (неубывающая),} \\ y_1 &\geq y_2 \geq \dots \geq y_n \text{ (невозрастающая).} \end{aligned}$$

Согласно трансервенству, произведение двух последовательностей максимально, когда они упорядочены одинаково, и минимально, когда они упорядочены противоположно. В нашем случае последовательности уже упорядочены противоположно, следовательно, сумма $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ является минимально возможной среди всех возможных перестановок элементов последовательности y .

Это означает, что для любой перестановки $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ последовательности y верно неравенство:

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n.$$

Рассмотрение циклических перестановок: рассмотрим n таких неравенств, где в правой части используются все возможные циклические перестановки последовательности y :

$$\left\{ \begin{array}{l} k = 0: x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n, \\ k = 1: x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq x_1 y_2 + x_2 y_3 + \dots + x_n y_1, \\ k = 2: x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq x_1 y_3 + x_2 y_4 + \dots + x_n y_2, \\ \dots, \\ k = n - 1: x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \leq x_1 y_n + x_2 y_1 + \dots + x_n y_{n-1}. \end{array} \right.$$

Сложение неравенств: сложим все эти n неравенств почленно.

– левая часть: суммируем одно и то же выражение n раз, что дает:

$$n(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n);$$

– правая часть: при суммировании по всем циклическим перестановкам каждый элемент x_i будет умножен на каждый элемент y_j ровно один раз.

Таким образом, сумма в правой части примет вид:

$$x_1(y_1 + y_2 + \dots + y_n) + x_2(y_1 + y_2 + \dots + y_n) + \dots + x_n(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

Вынося общую сумму $(y_1 + y_2 + \dots + y_n)$ за скобки, получаем:

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

Итог:

$$n(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n) \leq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

Неравенство доказано.

3. Для любых $a, b, c \in R$ докажите, что

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2.$$

Доказательство.

Пусть $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$ и $y_1 = a, y_2 = b, y_3 = c$.

Так как неравенство симметрично упорядочим последовательность: $a \leq b \leq c$, обе последовательности являются возрастающими.

Согласно неравенству Чебышева:

$$3(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3) \geq (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$$

Подставляя наши значения, получаем:

$$3(a \cdot a + b \cdot b + c \cdot c) \geq (a + b + c)(a + b + c),$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2.$$

4. Для любых $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Доказательство.

Для доказательства этого неравенства применим неравенство Чебышева несколько раз.

– первое применение: рассмотрим последовательности (a^3, b^3, c^3) и (a^5, b^5, c^5) . Они упорядочены одинаково, поэтому:

$$a^8 + b^8 + c^8 \geq \frac{1}{3}(a^3 + b^3 + c^3)(a^5 + b^5 + c^5);$$

– второе применение: рассмотрим последовательности (a^2, b^2, c^2) и (a^3, b^3, c^3) . Они также упорядочены одинаково:

$$a^5 + b^5 + c^5 \geq \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3).$$

Подставим второе выражение в первое:

$$a^8 + b^8 + c^8 \geq \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3)^2.$$

Известно, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$ (это было доказано в теме «Неравенства о средних»). Из неравенства Коши для $n = 3$ следует, что $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$.

Итоговая оценка:

$$a^8 + b^8 + c^8 \geq \frac{1}{9}(ab + bc + ca)(3abc)^2,$$

$$a^8 + b^8 + c^8 \geq \frac{1}{9}(ab + bc + ca) \cdot 9a^2b^2c^2 = a^2b^2c^2(ab + bc + ca).$$

Разделим обе части на $a^3b^3c^3$:

$$\frac{a^8 + b^8 + c^8}{a^3b^3c^3} \geq \frac{a^2b^2c^2(ab + bc + ca)}{a^3b^3c^3} = \frac{(ab + bc + ca)}{abc} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Неравенство доказано.

5. Пусть $a \geq b \geq c \geq 0$ и $0 < x \leq y \leq z$. Докажите, что

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{a + b + c}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \frac{3(a + b + c)}{x + y + z}.$$

Доказательство.

По условию имеем две последовательности $a \geq b \geq c \geq 0$ и $0 < x \leq y \leq z$, что влечет за собой $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{z} > 0$.

Так как последовательности (a, b, c) и $(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z})$ упорядочены одинаково (обе не возрастают), можем применить неравенство Чебышева:

$$3 \left(a \cdot \frac{1}{x} + b \cdot \frac{1}{y} + c \cdot \frac{1}{z} \right) \geq (a + b + c) \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

Разделив на 3, получаем:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{a + b + c}{3} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right).$$

Далее воспользуемся неравенством Коши для положительных чисел $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$.

$$\frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}}{3} \geq \sqrt[3]{xyz},$$

Следовательно,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Подставляя это в предыдущее выражение, находим:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{a+b+c}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{xyz}} = \frac{a+b+c}{\sqrt[3]{xyz}}.$$

Доказательство второй части: $\frac{a+b+c}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \frac{3(a+b+c)}{x+y+z}$

Так как $a + b + c \geq 0$, достаточно доказать, что

$$\frac{1}{\sqrt[3]{xyz}} \geq \frac{3}{x+y+z}.$$

Это неравенство эквивалентно следующему:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}.$$

Это классическое неравенство Коши для трех чисел x, y, z . Оно справедливо для любых положительных чисел, что и требовалось доказать.

6. Докажите неравенство Несбитта: для любых $a, b, c > 0$ верно:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

Доказательство.

Так как неравенство симметрично, можем без ограничения общности предположить, что $a \geq b \geq c > 0$. Тогда:

$$\begin{cases} b+c \leq a+c \text{ (так как } b \leq a), \\ a+c \leq a+b \text{ (так как } c \leq b). \end{cases}$$

Положим $x = b + c$, $y = a + c$, $z = a + b$. Тогда условия $0 < x \leq y \leq z$ выполнены. Воспользуемся правой частью доказанного выше неравенства из задания №5:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \geq \frac{3(a+b+c)}{x+y+z}.$$

Подставим выбранные значения x, y, z :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3(a+b+c)}{(b+c) + (c+a) + (a+b)}.$$

Заметим, что в знаменателе правой части $x + y + z = 2(a + b + c)$. Таким образом:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3(a+b+c)}{2(a+b+c)} = \frac{3}{2}.$$

Неравенство Несбитта доказано.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная работа была посвящена исследованию темы «Неравенства» в рамках школьного курса математики, а также разработке методических материалов для проведения факультативных занятий по математике в 8-9 классах.

В ходе теоретического исследования был проведен анализ рабочих программ по математике как базового и углубленного уровней. Сравнение программ показало, что если в 8 классе требования к результатам обучения по большей части совпадают и направлены на отработку базовых навыков, то в 9 классе пути обучения расходятся. На базовом уровне акцент делается на алгоритмическом решении линейных и квадратных неравенств. Углубленный же уровень требует от школьников исследовательской деятельности.

Анализ школьных учебников позволил упорядочить задачи по сложности. Выяснилось, что стандартный школьный курс формирует вычислительные навыки и автоматизм, однако в учебниках не хватает исследовательских задач и доказательств, основанных на математических соотношениях. Олимпиадные задачи и задания повышенной сложности из олимпиадных заданий включают в себя вопросы, требующие знания неравенств Коши, Коши-Буняковского, Чебышева и Бернулли. Без специальной подготовки школьникам будет достаточно трудно самим подобрать метод доказательства для подобных задач.

Для решения этой проблемы была спроектирована программа факультативного курса «Доказательства неравенства» объемом 12 часов, ориентированная на учащихся 8-9 классов. Курс выполняет функцию расширения школьной программы. В рамках исследования были расписаны тематические блоки, посвященные неравенствам о средних, неравенствам Коши-Буняковского, Чебышева, Бернулли и транснеравенствам. Практической ценностью работы является подбор и разбор цикла задач повышенной сложности, демонстрирующих применение этих методов. Разработанные

конспекты занятий и методические рекомендации могут быть непосредственно использованы учителями математики в практической деятельности для повышения уровня математической грамотности учащихся средней школы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алгебра. 8 класс : учебник / Ш.А. Алимов [и др.]. 19-е изд. М. : Просвещение, 2012. 255 с.
2. Алгебра. 9 класс : учебник / Ш.А. Алимов [и др.]. 17-е изд. М. : Просвещение, 2012. 287 с.
3. Лекция 3 курс. Множество действительных чисел. Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка. URL: <https://bspu.by/blog/pokalo/article/matematika-3-kurs-2020-2021-uch-g/lekciya-3-kurs-mnozhestvo-dejstvitel-nyh-chisel>. Заглавие с экрана (дата обращения 05.12.2025).
4. Доказательство неравенств. URL: <https://mathus.ru/math/doner.pdf> (дата обращения: 04.03.2026).
5. Задачи. URL: <https://problems.ru/>. (дата обращения 10.03.2026).
6. Математика. Алгебра. 8 класс : учебник / Ю. Н. Макарычев [и др.]. 17-е изд. М. : Просвещение, 2024. 319 с.
7. Математика. Алгебра. 9 класс : учебник / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под редакцией С. А. Теляковского. 15-е изд. М. : Просвещение, 2023. 255 с.
8. Математика. 5-9 классы (базовый уровень). М. : Институт содержания и методов обучения, 2025. 143 с.
9. Математика. 7-9 классы (углубленный уровень). М. : Институт содержания и методов обучения, 2025. 101 с.
10. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М. С. Алгебра. 8 класс : учебник. 7-е изд., стер. М. : Просвещение, 2022. 255 с.
11. Мерзляк А.Г., Полонский В.Б., Якир М. С. Алгебра. 9 класс : учебник. 7-е изд., стер. М. : Просвещение, 2022. 318 с.
12. Никитин Н.Д. Алгебра: учебное пособие. Пенза : Пензенский гос. пед. ун-т им. В.Г. Белинского, 2012. 100 с.

13. Устименко В.В., Молодечкина А.А. Методы доказательства неравенств // Современное образование Витебщины : науч.-практ. журн. 2023. № 2. С. 53-56.

14. Элементы математики в задачах (с решениями и комментариями). Часть 2 : учебное пособие / Т. И. Голенищева-Кутузова [и др.]. М. : МЦНМО, 2010. 160 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«12» 09 2025 г.
Паньженский В.И.

Задание

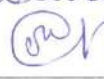
по ВКР студента Апенкиной Елены Сергеевны
(ФИО полностью)

Тема работы «Методические аспекты обучения доказательству неравенств в рамках
учебного курса «Алгебра» на уровне основного общего образования»

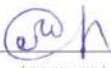
Утверждена приказом по университету от «25.09» 2025 г. № 1103/0

Срок сдачи студентом законченной работы «01» 06 2026 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение теоретических основ темы «Неравенства» в школьном курсе математики и различных способов доказательства классических неравенств.	Октябрь – ноябрь 2025	выполнено 
2.	Проведение сравнительного анализа рабочих программ (базового и углубленного уровней) и содержания школьных учебников по рассматриваемой теме.	Декабрь 2025	выполнено 
3.	Анализ заданий по теме в математических олимпиадах разного уровня для 8-9 классов.	Январь 2026	выполнено 
4.	Разработка структуры и содержания факультативного курса по алгебре в 8-9 классах на тему «Доказательства неравенств».	Февраль – март 2026	выполнено 
5.	Разработка конспектов факультативных занятий.	Апрель 2026	выполнено 
6.	Оформление текста выпускной квалификационной работы.	Май 2026	выполнено 
7.	Подготовка презентации и выступления для защиты.	Июнь 2026	выполнено 

Дата выдачи задания «11» 09 2026 г.

Руководитель  Сорокина М.В.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

 Апенкина Е.С.
(подпись) (Ф.И.О.)

И.о. ректора Пензенского
государственного университета
Васину С.М.
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Апенкиной Елены Сергеевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Апенкина Елена Сергеевна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Методические аспекты обучения доказательству неравенств в рамках учебного курса «Алгебра» на уровне основного общего образования», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


подпись
14.05.2026
дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 14.05.2026
дд.мм.гггг

Руководитель ВКР 
подпись М.В.Сорокина
И.О.Ф.

Протокол
проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ» выпускной
квалификационной работы на тему
«Методические аспекты обучения доказательству неравенств в рамках
учебного курса «Алгебра» на уровне основного общего образования»
студентки 4 курса Апенкиной Елены Сергеевны
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика»
Руководитель ВКР Сорокина Марина Валерьевна

Отчет о проверке

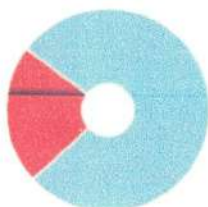
Автор: Апенкина Елена Сергеевна

Название документа: diplom (1)

Проверяющий: Сорокина Марина Валерьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Пензенский государственный университет»

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения
21.52%

Цитирования
0%

Оригинальность
78.48%

Самодитирование
0%

ИИ-контент
12.17%

«Совпадения», «Цитирования», «Самодитирование», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

Есть подозрения на следующие группы маскировки заимствований: Вставка на страницах: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20, 25, 29, 35... еще на 40 стр.; Замена символов на страницах: 2, 3, 4, 5, 6, 10, 20, 25, 29, 35... еще на 40 стр.; Сгенерированный текст на страницах: 7, 10, 11, 12, 15, 16, 25, 29, 30, 38... еще на 3 стр.

Проверено: 98.85% текста документа, исключено из проверки: 1.15% текста документа. Разделы и элементы, отключенные пользователем: Библиография, Таблицы.

- Совпадения** — фрагменты проверенного текста, полностью или частично совпадающие с фрагментами из копировки, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самодитированию. Показатель «Совпадения» — это доля фрагментов проверенного текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- Самодитирование** — фрагменты проверенного текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментами текста из копировки, заголовки или содержимое которых является авторским проверенного документа. Показатель «Самодитирование» — это доля фрагментов текста, отнесенных к самодитированию, в общем объеме текста.
- Цитирование** — фрагменты проверенного текста, которые не являются заголовками, но которые система отнесла к самодитированию, в общем объеме текста. Цитированные отсылки также являются фразами, библиографией, фрагментами текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант» нормально сформированной документацией. Показатель «Цитирование» — это доля фрагментов проверенного текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- Текстовое пересечение** — фрагменты текста проверенного документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментами текста из копировки.
- Источники** — документ, оригинал или копия, в котором содержится текст, по которому проводится проверка.
- Оригинальный текст** — фрагменты проверенного текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отнесенные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» — это доля фрагментов проверенного текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверенного документа с произведениями, размещенными в системе из копировки. При этом система является вспомогательным инструментом, определяющим корректность и оригинальность совпадений или цитирований, а также масштабы текстовых фрагментов проверенного документа, использующих в копировании произведения.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 109

Тип документа: Не указано

Дата проверки: 14.05.2026 21:36:24

Дата корректировки: 01.06.2026 08:35:25

Количество страниц: 24

Символов в тексте: 54713

Слов в тексте: 13573

Число предложений: 1598

14.05.26

(дата)


(подпись)

М. В. Сорокина

(ИОФ руководителя ВКР)

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методические аспекты обучения доказательству неравенств
в рамках учебного курса «Алгебра» на уровне
основного общего образования»
студентки Апенкиной Елены Сергеевны
факультета физико-математических и естественных наук направления
подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль подготовки
«Математика», гр. 22ФПМ1

Обучение школьников решению задач на доказательство неравенств является одним из самых сложных методических вопросов. Этой теме в настоящий момент необходимо уделять внимание учителей, работающих с одаренными детьми. В олимпиадах по математике задания, связанные с неравенствами, встречаются постоянно. Выпускная квалификационная работа Апенкиной Е.С. посвящена изучению методических аспектов обучения доказательству неравенств.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, списка литературы и заключения. В первой главе изложен теоретический материал, касающийся теории сравнения действительных чисел, проведен анализ федеральных рабочих программ по предмету «Математика» для базового и углубленного уровней. Выполнен детальный анализ различных школьных учебников по алгебре. Приведены примеры задач прошедших олимпиад по теме «Доказательство неравенств».

Вторая глава работы посвящена методическим разработкам по данной теме. Представлена рабочая программа факультативного курса «Доказательство неравенств», рассчитанного на учащихся 8-9 класса. Разработаны конспекты нескольких занятий данного курса. Представлена подборка задач, отражающая разные методы решения, используемые в заданиях подобного рода.

Работа Апенкиной Е.С. является самостоятельным исследованием. Текст работы, список литературы, доклад и презентация оформлены в соответствии с требованиями, предъявляемыми к выпускным квалификационным работам. Представленные результаты могут быть использованы в работе учителя математики при организации подготовки школьников к олимпиадам.

Выпускная квалификационная работа заслуживает оценки «хорошо».

Научный руководитель,
доцент кафедры «МО»,
к.ф.м.н., доцент



М.В. Сорокина