

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Пензенский государственный университет»

Факультет вычислительной техники
Кафедра математики и суперкомпьютерного моделирования

ОТЧЕТ

по производственной практике

(научно-исследовательская работа)

«Решение интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода численным
методом»

Выполнил: студент гр. 19ВМ1

Симакова Е. А.

Руководитель: профессор,

д. ф.-м. н. Смирнов Ю. Г.

Пенза 2022

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Пензенский государственный университет»

«УТВЕРЖДАЮ»

Зав. кафедрой МСМ, д.ф.-м.н.

_____ Ю.Г. Смирнов

ЗАДАНИЕ

на производственную практику

(6 семестр)

Вариант 5

1. Разработать алгоритм решения интегрального уравнения

$$u(x, y) - \int_Q (x + y - s^2 + 3t)u(s, t) ds dt = x^2y + \frac{1}{3}, \quad x, y \in [0, 1]^2$$

методом Галеркина. Разработать программное обеспечение для численного решения интегрального уравнения.

2. Дать краткое описание численного метода: выбрать сетку и базисные функции.

3. Провести сравнение точного и численного решений. Результаты решения представить в графической форме (предоставить графики полученных приближенных решений и точного решения модельной задачи). Провести сравнение полученных результатов для разных сеток, сделать вывод о сходимости численного метода.

Руководитель работы, профессор, д. ф.-м. н.

Смирнов Ю. Г.

Метод Галеркина:

Рассмотрим $Au = f$, где $A: X \rightarrow Y$ – непрерывно обратимый линейный оператор в банаховых пространствах. Рассмотрим наборы подпространств $X_n \subset X, Y_n \subset Y, \dim X_n = \dim Y_n = n$. Рассмотрим наборы проекторов $P_n: Y \rightarrow Y_n$ (для любых $\varphi_n \in Y_n$ справедливо $P_n \varphi_n = \varphi_n$).

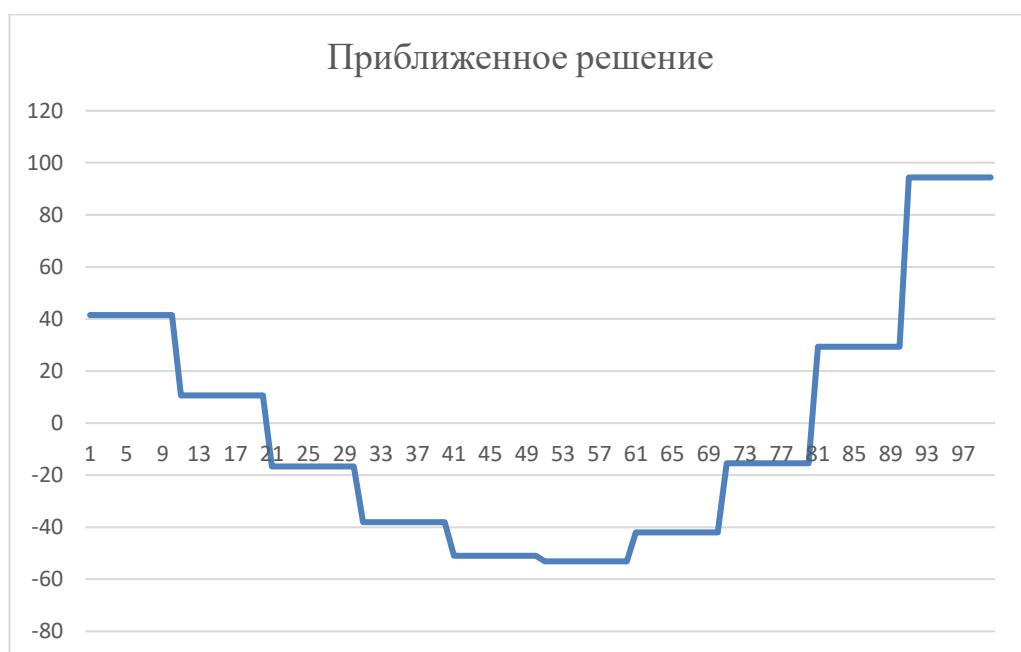
Проекционный метод: $P_n Au_n = P_n f$, где $u_n \in X_n$, и, следовательно, $Au_n \in Y, P_n Au_n \in Y_n, P_n f \in Y_n$.

Пусть X, Y – гильбертовы пространства со скалярным произведением (x, y) , и пусть P_n – ортопроекторы. $P_n Au_n - P_n f = 0$, тогда $P_n (Au_n - f) = 0$, а это выполняется тогда и только тогда, когда $Au_n - f \perp Y_n$, и, следовательно, для любого n существует базис $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n\} \subset X_n, \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n\} \subset Y_n$, а это выполняется тогда и только тогда, когда для любых i $(Au_n - f, \psi_i) = 0$, следовательно, $(Au_n, \psi_i) = (f, \psi_i)$.

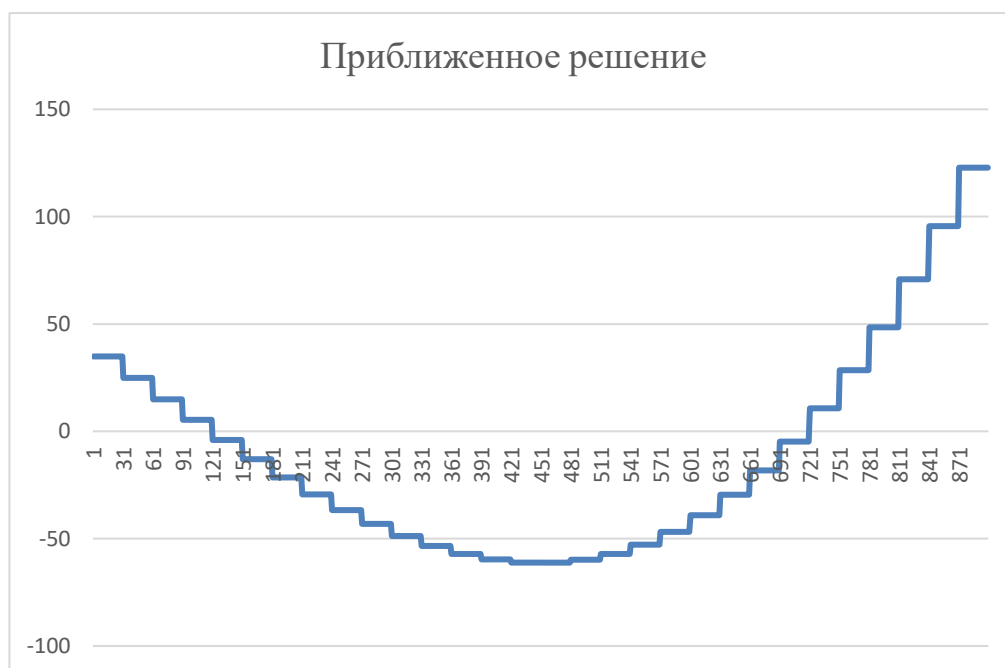
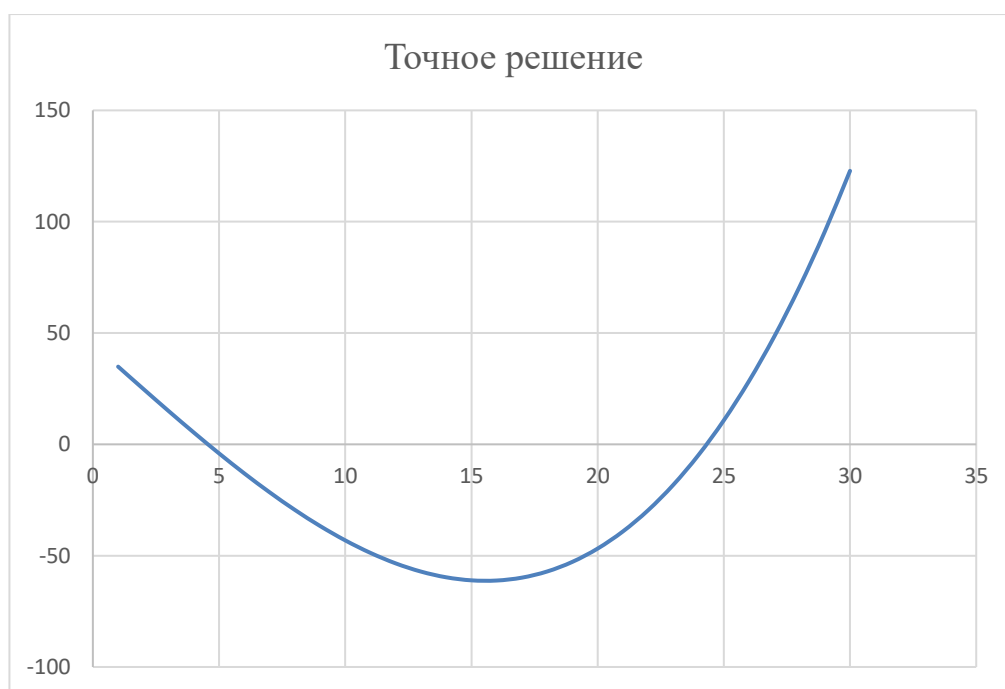
$u_n \in X_n$, следовательно, $u_n = \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j$, где c_j – неизвестные коэффициенты. Из $(A(\sum_{j=1}^n c_j \varphi_j), \psi_i) = (f, \psi_i)$ следует, что: $\sum_{j=1}^n c_j (A\varphi_j, \psi_i) = (f, \psi_i)$, где $i = \overline{1, n}$. И получаем, что $A\vec{c} = \vec{f}$.

Результаты решения:

При $n_1 = 10, n_2 = 10$:



При $n_1 = 30, n_2 = 30$:



Вывод: при выполнении практической работы была реализована программа для решения интегрального уравнения Фредгольма II-го рода на заданной области методом Галеркина с выбором сетки, тестовых и базисных функций.

Результат решения был представлен в графической форме, а именно в виде графиков точного и приближенного решений для разных сеток. При увеличении числа разбиений области точность метода и сходимость последовательно вычисляемых приближенных решений к точному решению увеличиваются.