МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Методические аспекты обучения решению уравнений с параметрами»

Студент 06.05.26 Авдеева Полина Владимировна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель 06.05.26 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр 15.06.26 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 01.06.26 № 10)

И.о. заведующего кафедрой 01.06.26 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 26.06.26 № 12)

Секретарь ГЭК 26.06.26 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ 5

1.1 Понятие уравнения с параметром и его виды 5

1.2 Методы решения уравнений с параметрами 7

1.3 Роль и место темы «Уравнения с параметрами» в школьном курсе математики……12

1.4 Анализ содержания теоретического материала по теме «Уравнения с параметрами» в школьных учебниках 16

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ 20

2.1 Организация подготовки обучающихся к решению уравнений с параметрами 20

2.2 Разработка рабочей тетради 23

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 87

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ 89

ВВЕДЕНИЕ

Задачи на уравнения с параметрами по праву считаются одним из самых содержательных и сложных разделов школьной математики. Их решение требует от обучающихся не только уверенного владения различными техниками решения уравнений и систем, но и способности выстраивать сложные логические цепочки, а также проявлять предельную концентрацию, чтобы не упустить ни одного из возможных решений.

Многие специалисты в области методики преподавания математики отмечают, что умение решать подобные задачи имеет большое практическое значение. Это связано с тем, что задания с параметрами регулярно входят в состав как Единого государственного экзамена (ЕГЭ), так и олимпиад разного уровня.

Задачи с параметрами представляют собой особый класс заданий, вызывающий трудности у многих учащихся. Для большинства школьников они непривычны по своей структуре, а для некоторых представляют серьезную сложность. Успешное решение таких задач требует не просто механического применения формул, а глубокого понимания закономерностей и умения анализировать частные случаи через общие свойства математических объектов. Ключевыми факторами успеха являются системный подход и строгая последовательность в рассуждениях.

Нагрузка на обучающихся по математике постоянно растет: объем материала для изучения увеличивается, а количество учебных часов не меняется. Эта проблема затрагивает многие разделы алгебры и геометрии, включая такую сложную тему, как «Уравнения и неравенства с параметром».

Чтобы успешно сдать ЕГЭ на высокий балл, ученики вынуждены заниматься дополнительно. Однако найти качественные и понятные учебные материалы по задачам с параметром оказывается непросто. Большинство пособий в интернете либо устарели, либо представляют собой лишь

разрозненные примеры без необходимой теоретической базы и системного подхода.

Проблема исследования состоит в выявлении методических особенностей обучения решению уравнений с параметрами в курсе алгебры основной школы.

Цель исследования – разработка рабочей тетради по обучению решению уравнений с параметрами.

Объект исследования – процесс обучения математике в средней общеобразовательной школе.

Предмет исследования – методические особенности обучения решению уравнений с параметрами в школе.

Задачи исследования:

1. Раскрыть понятие уравнения с параметром и его виды.
2. Рассмотреть основные методы решений уравнений с параметрами.
3. Определить роль и место темы «Уравнения с параметрами» в школьном курсе математики.
4. Провести сравнительный анализ содержания в учебниках теории и задач по рассматриваемой теме.
5. Выявить методические основы обучения решению уравнений с параметрами.
6. Разработать рабочую тетрадь по теме «Уравнения с параметрами».
7. Проанализировать задачи с параметрами из вариантов ЕГЭ профильного уровня.

Рабочая тетрадь станет ценным инструментом для учителей, студентов во время прохождения практики, а также для обучающихся, стремящихся к успешной сдаче экзаменов через самостоятельное обучение.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

1.1 Понятие уравнения с параметром и его виды

Прежде чем приступить к рассмотрению уравнений, содержащих параметр, давайте сначала разберемся, что такое уравнение вообще и какие его основные виды изучаются в школе. Слово "уравнение" – это очень важное понятие в математике, и его можно определить по-разному. Рассмотрим несколько таких определений.

Согласно М. И. Башмакову «традиционное понимание понятия *«уравнение»* – это запись постановки некоторой реальной задачи. Буквы в уравнении – это неизвестные. Главное в решении уравнения – поиск способа его решения». Учебники математики трактуют уравнение как: 1) равенство с неизвестным числом; 2) равенство с переменной. Следует различать понятия "переменная" и "неизвестное": переменная может принимать разные значения, а неизвестная – это просто буква, которая обозначает какое-то одно конкретное число.

Изучение методической литературы продемонстрировало, что отсутствует общепринятое определение уравнения с параметром. Поэтому проанализируем, как это понятие раскрывается в различных публикациях.

В своей статье Э.С. Белямова пишет, что «параметр (от греческого слова *parametron* – отмеривающий) – величина, значение которой служит для различения некоторого множества между собой. Под *областью определения* уравнения $f(x;a)=0$ с параметром a понимают все такие системы значений x и a, при которых $f(x;\ a)$ имеет смысл».

С. В. Арюткина пишет, что под *задачей с параметрами* в методических пособиях понимается «задача, в которой технический и логический ход зависят от входящих в условие величин, численные значения которых не заданы, но считают известными; эти величины называют *параметрами*, и они могут

принимать, вообще говоря, произвольные значения» [8].

В пособии А. А. Прокофьева [15] мы встречаем следующее определение *уравнения с параметром*: «Пусть дано уравнение с двумя переменными: $F(x, a) = 0$. Если в задаче сформулирована цель: «Для каждого значения переменной a из некоторого числового множества A решить уравнение относительно x», то выражение $F(x, a) = 0$ называют уравнением с переменной x и параметром a, а множество A – областью изменения параметра a» [16].

Ю.Н. Макарычев отмечает: «*Решить уравнение с параметром* – это значит установить соответствие, с помощью которого для каждого значения параметра указывается множество корней соответствующего уравнения» [5].

В рамках школьной программы по математике для решения уравнений с параметрами применяются преимущественно два подхода: аналитический и графический.

А.А. Прокофьев приводит *алгоритм решения* уравнения с параметром: «Определить ограничения, налагаемые на значения неизвестного x и параметра a. Затем определяют формальные решения, записываемые без учета ограничений. Если при решении возникают контрольные значения, то их наносят на координатную прямую. Такие значения разбивают ОДЗ параметра на подмножества. На каждом подмножестве решают заданное уравнение. После этого исключают значения параметра, при которых формальные решения не удовлетворяют полученным ограничениям. Выписывают ответ».

В дополнительных главах своего учебника алгебры для 8 класса, Ю.Н. Макарычев предлагает следующий подход к решению уравнений с параметром: «в зависимости от допустимых значений параметра находится соответствующее *множество корней уравнения…* В ответе должно быть указано для *каждого значения параметра*, сколько корней имеет это уравнение и какого вида». Следует подчеркнуть, что правильное оформление ответа при решении данных уравнений имеет первостепенное значение, поскольку является неотъемлемой составляющей всего процесса решения. Обучающиеся закрепляют

предложенный подход к решению уравнений с параметром, осваивая определённые виды таких уравнений.

С.А. Шестаков отмечает: «Для решения многих заданий с параметрами не требуются специальные знания, алгоритмы или идеи – достаточно устойчивых навыков решения основных типов уравнений, умения выполнять алгебраические преобразования и делать логический перебор».

В методической литературе отсутствует унифицированное определение понятия «уравнение с параметром». Тем не менее, можно выделить следующие основные классы таких уравнений: линейные и квадратные уравнения с параметром, дробно-рациональные уравнения с параметром, и иррациональные уравнения с параметром.

1.2 Методы решения уравнений с параметрами

Буквенные обозначения, которые заменяют точные числа в математических выражениях (уравнениях или неравенствах), называются параметрами. Соответственно, сами выражения, содержащие эти параметры, классифицируются как параметрические. Для успешного решения уравнений или неравенств с параметрами требуется придерживаться следующего алгоритма действий:

1. Выделить особое значение – это такое его значение, при котором происходит качественное изменение структуры или множества решений уравнения или неравенства.

2. Определить допустимые значения – это значения параметра, при которых уравнение или неравенство имеет смысл.

Решение уравнений или неравенств, содержащих параметры, подразумевает два ключевых этапа:

1. Установление условий существования решений в зависимости от значений параметров.

2. Для каждой выявленной допустимой совокупности значений параметров, определение соответствующего множества решений.

При решении уравнений с параметрами могут применяться как аналитические, так и графические методы.

Аналитический метод – это своего рода "силовой" или "наглый" (в положительном смысле) подход к решению, который предполагает прямое вычисление ответа, минуя обходные пути. Однако, это самый трудоемкий метод, требующий высокого уровня математической культуры и значительных усилий для его освоения.

Графический метод предполагает визуализацию решения путем построения графиков. В зависимости от специфики задачи (с переменной x и параметром a), эти графики могут быть представлены либо в плоскости xOy, либо в плоскости xOa.

Решение относительно параметра. В данном случае переменные x и a взаимозаменяемы. Стратегия решения заключается в выборе той переменной, которая позволяет получить наиболее простое аналитическое выражение на этапе вычислений. После выполнения всех упрощений, мы возвращаемся к исходному значению переменных, чтобы завершить решение задачи.

Ключевая идея решения параметрических уравнений заключается в следующем: мы должны разделить диапазон возможных значений параметра на такие части, чтобы на каждом из них уравнение поддавалось решению одним и тем же алгоритмом. Затем, для каждого такого участка, мы находим корни уравнения, которые будут зависеть от параметра. Применяемые при этом методы ничем не отличаются от стандартных методов решения уравнений с постоянными коэффициентами. Поскольку каждый метод представляет собой набор шагов, которые могут варьироваться в зависимости от конкретного значения параметра, то изначально выделенные участки могут быть дополнительно разделены, если это необходимо для унификации рассуждений

на каждом подэтапе. Окончательный ответ формируется как список интервалов изменения параметра, где для каждого интервала указаны все найденные корни уравнения.

Пример 1. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{3x - 9 - 2a} = 0$$

имеет два различных решения.

Решим аналитически.

$$\frac{9x^2 - a^2}{3x - 9 - 2a} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - a^2 = 0 \\ 3x - 9 - 2a \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x - a)(3x + a) = 0 \\ 3x \neq 9 + 2a \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x - a = 0 \\ 3x + a = 0 \end{array}\right. \\ x \neq \dfrac{9 + 2a}{3} \end{cases}$$

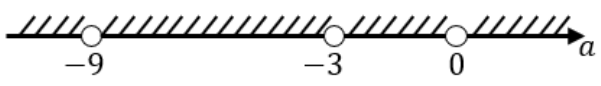
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{a}{3} \\ x_2 = -\dfrac{a}{3} \end{array}\right. \\ x \neq 3 + \dfrac{2}{3}a \end{cases}$$

x_1 и x_2 должны быть различны $\Rightarrow \frac{a}{3} \neq -\frac{a}{3} \Rightarrow a \neq 0$.

x_1 не должен быть равен $3 + \frac{2}{3}a \Rightarrow \frac{a}{3} \neq 3 + \frac{2}{3}a \Rightarrow a \neq -9$.

x_2 не должен быть равен $3 + \frac{2}{3}a \Rightarrow -\frac{a}{3} \neq 3 + \frac{2}{3}a \Rightarrow a \neq -3$.

Найдём пересечение:



Ответ: $(-\infty; -9) \cup (-9; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; +\infty)$.

Решим графически.

$$\frac{9x^2 - a^2}{3x - 9 - 2a} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - a^2 = 0 \\ 3x - 9 - 2a \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = 3x \\ a = -3x \end{array}\right. \\ a \neq \frac{3}{2}x - \frac{9}{2} \end{cases}$$

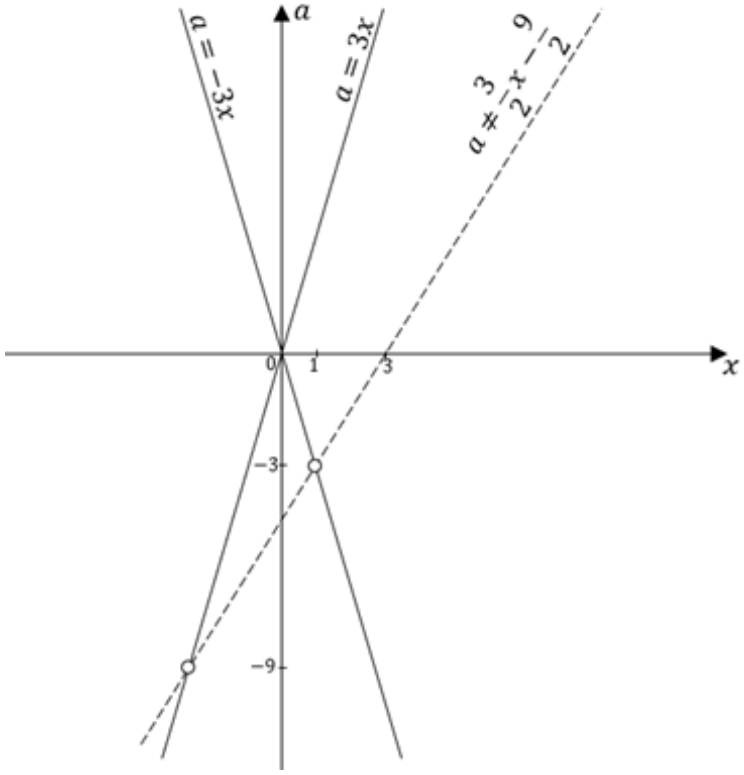


Рисунок 1 - Применение графического метода в примере 1

При $a < -9$ *– 2 решения*

При $a = -9$ *– 1 решение*

При $-9 < a < -3$ *– 2 решения*

При $a = -3$ *– 1 решение*

При $-3 < a < 0$ *– 2 решения*

При $a = 0$ *– 1 решение*

При $a > 0$ *– 2 решения*

Ответ:$(-\infty; -9) \cup (-9; -3) \cup (-3; 0) \cup (0; +\infty)$.

Пример 2. Найдите все значения параметра а, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$$

имеет ровно три различных корня.

Решим двумя способами, сначала аналитическим.

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - a \geq 0 & (1) \\ x^4 - x^2 + a^2 = (x^2 + x - a)^2 & (2) \end{cases}$$

Решим уравнение (2):

$$x^4 - x^2 + a^2 = (x^2 + (x - a))^2$$

$$x^4 - x^2 + a^2 = x^4 + 2 \cdot x^2 \cdot (x - a) + (x - a)^2$$

$$-x^2 + a^2 = 2x^3 - 2ax^2 + x^2 - 2ax + a^2$$

$$-2x^3 - 2x^2 + 2ax^2 + 2ax = 0 \mid : 2$$

$$-x^3 - x^2 + ax^2 + ax = 0$$

$$-x^2(x + 1) + ax(x + 1) = 0$$

$$(x + 1)(ax - x^2) = 0$$

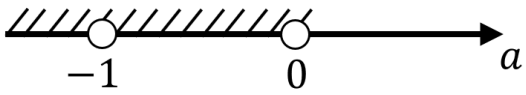
$$x(x + 1)(a - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = a$$

Значит, что $a \neq 0$ и $a \neq -1$, так как иначе не получим 3 различных корня.

Найдём, при каких a каждый из трёх корней удовлетворяет неравенству (1):

- $x_1 = 0 \Rightarrow 0^2 + 0 - a \geq 0 \Rightarrow a \leq 0$;
- $x_2 = -1 \Rightarrow (-1)^2 - 1 - a \geq 0 \Rightarrow a \leq 0$;
- $x_3 = a \Rightarrow a^2 + a - a \geq 0 \Rightarrow a^2 \geq 0 \Rightarrow a -$ любое.

Получаем: $\begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq -1. \\ a \leq 0 \end{cases}$



Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$.

Решим графически.

$$x(x + 1)(a - x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = a$$

Рассмотрим плоскость xOa, где построим прямые $x = 0,\ x = -1,\ x = a$ и область $a \leq x^2 + x$.

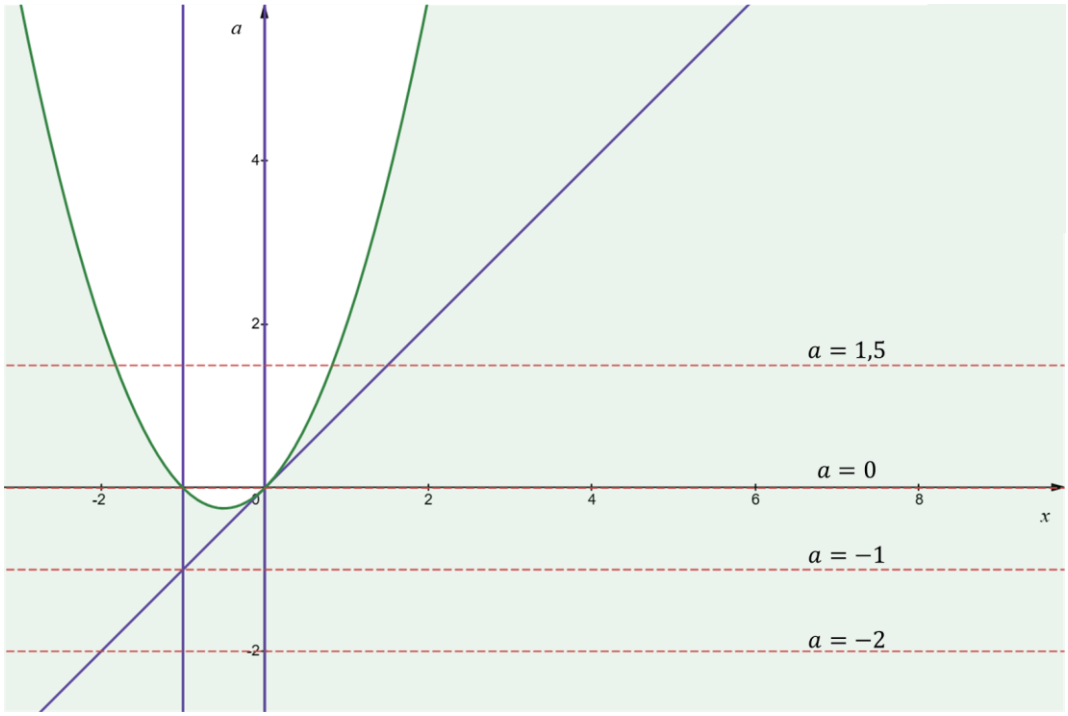


Рисунок 2 - Применение графического метода в примере 2

Получим, что при

- $a < -1$ – 3 решения,
- $a = -1$ – 2 решения,
- $-1 < a < 0$ – 3 решения,
- $a = 0$ – 2 решения,
- $a > 0$ – 1 решение.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$.

1.3 Роль и место темы «Уравнения с параметрами» в школьном курсе математики

Сегодня в школьной математике главное – развивать учеников. Поэтому особенно важно научить их проводить исследования и решать трудные, нестандартные задачи. Одним из лучших способов развить у учеников способность находить оригинальные решения (эвристическое мышление) является работа с уравнениями и неравенствами, содержащими параметры. Решение этих задач позволяет не только закрепить базовые математические

знания, но и развивает логическое мышление, а также тренирует навыки самостоятельного исследования. Ими давно интересуются ведущие математики и педагоги. Многие из них, включая М. И. Башмакова, Г. В. Дорофеева и других [6], отмечают, что решение таких задач – это настоящая исследовательская деятельность, требующая глубокой логики и отточенных навыков.

Задачи с параметрами стали систематически включаться в школьную программу в 1970-х годах благодаря реформе под руководством А. Н. Колмогорова. Тогда параметр начали рассматривать как переменную, которая временно считается постоянной, и поняли, насколько такие задачи полезны для развития мышления [11].

Сначала они встречались в учебниках редко, но со временем их роль росла. В современных учебниках для углублённого изучения математики (например, у Мордковича или Никольского) работе с параметрами посвящён целый раздел. Это произошло потому, что учителя и методисты осознали: решение таких задач — это не просто отработка навыков, а настоящее мини-исследование, которое по силам старшеклассникам.

С точки зрения психологии, эти задачи идеально подходят для обучения. Они заставляют ученика анализировать, обобщать и работать с математическими символами, что соответствует теории учебной деятельности Эльконина и Давыдова. Кроме того, они находятся в «зоне ближайшего развития» по Выготскому: они достаточно сложны, чтобы стимулировать рост, но опираются на уже известные знания. Решая их, школьники развивают важные навыки: моделирование, планирование, логическое мышление и умение доказывать свою точку зрения, что полностью соответствует современным образовательным стандартам.

Освоение уравнений с параметрами предоставляет учащимся мощный набор инструментов, которые найдут применение не только в математике, но и в других науках. Эти задачи являются кульминацией изучения таких фундаментальных разделов школьной программы, как решение уравнений и

неравенств, а также тождественные преобразования [9]. Ценность таких заданий для развития мышления школьников проявляется в формировании умений определять область допустимых значений, анализировать существование и количество решений, выражать одну переменную через другую, а также использовать как словесные, так и графические методы обоснования.

Задачи с параметрами способствуют развитию аналитических способностей, умения строить алгоритмы, работать с переменными, запоминать и применять широкий спектр формул и методов, а также эффективно использовать различные виды аргументации.

Задачи с параметрами являются традиционным элементом профильного ЕГЭ по математике, относясь к алгебраическим заданиям повышенной трудности. Анализ данных с 2012 года показывает, что более 80% выпускников не решаются браться за них. Это объясняется тем, что для их успешного решения требуется владение целым арсеналом методов и навыков, которые, к сожалению, не формируются систематически в рамках обычного школьного обучения. Следовательно, вопрос о месте задач с параметрами в школьной математике по-прежнему очень важен. Эти навыки нужны не только на уроках математики, но и в физике, химии, экономике, а также для специалистов в самых разных областях.

Чтобы разобраться, почему эти задачи такие сложные, нужно понять, как они устроены: какие бывают, как их делят и как их решают.

Во-первых, задачи можно классифицировать по тому, как именно параметр включен в уравнение. Самые простые случаи — когда параметр является слагаемым или множителем (линейные уравнения). Сложнее, когда параметр влияет на тип уравнения (например, превращает квадратное уравнение в линейное), находится под знаком модуля, корня, логарифма или в тригонометрической функции. У каждой такой группы свои особенности и методы решения — от аналитических до графических.

Во-вторых, задачи различаются по поставленной цели. Бывает три

основных типа заданий:

1. Решить для всех значений параметра: найти решение для каждого возможного случая.

2. Найти нужные значения параметра: определить, при каких параметрах решение соответствует заданным условиям (например, имеет один корень или принадлежит определенному интервалу).

3. Комбинированный тип: совмещает оба предыдущих подхода. Такое деление выстраивает логику обучения: от простого нахождения корней до полноценного исследования функций.

Однако даже знание типов задач не гарантирует успеха — ключевую роль играет систематичность обучения. Изучение параметров должно быть распределено по всем годам школьной математики. Все начинается в 7 классе с линейных уравнений с буквенными коэффициентами, продолжается в 8 классе с квадратными уравнениями (где ученики знакомятся с анализом дискриминанта и теоремой Виета), и усложняется в старших классах, охватывая все типы функций и добавляя графические методы.

Проблема в том, что в большинстве школ этот процесс прерывается. Темы изучаются поверхностно и отрывочно, а сложные задачи остаются только для факультативов. Из-за этого у выпускников возникают трудности, и они не видят, что задачи с параметрами — это логичное и естественное завершение всего курса алгебры.

Исходя из сказанного, приоритетными задачами при обучении решению уравнений с параметрами в общеобразовательной школе становятся: развитие умения выстраивать разветвлённые алгоритмы и логические цепочки; воспитание аккуратности и внимательности, необходимых для успешного решения; формирование способности применять параметрические уравнения как инструмент для решения прикладных задач из реальной жизни; совершенствование графической культуры учащихся как неотъемлемого компонента математического исследования.

1.4 Анализ содержания теоретического материала по теме «Уравнения с параметрами» в школьных учебниках

Для успешного проектирования методики обучения решению уравнений с параметрами недостаточно определить только теоретические основы и место темы в программе. Ключевое значение имеет анализ того, как эта тема представлена в основных учебно-методических комплексах, поскольку именно учебник является главным источником знаний для учащихся и ориентиром для учителя при планировании уроков.

Чтобы понять, насколько важна тема уравнений с параметрами в школьной программе по математике, был проведён анализ федеральной рабочей программы среднего общего образования [1].

Результаты показывают, что в программе для 10-11 классов базового уровня эта тема, а также связанные с ней задачи, полностью отсутствуют [2].

В федеральной рабочей программе по математике для 10-11 классов углубленного уровня наблюдается существенное отличие. Здесь уравнения, неравенства и их системы с параметрами выделены как ключевой элемент содержательной линии "Уравнения и неравенства". Программа детально охватывает следующие аспекты: изучение уравнений, неравенств и систем с параметрами, а также применение графических методов для решения задач, содержащих параметры.

Заложенные в программе предметные результаты обучения служат ориентиром для достижения конкретных образовательных целей. Выпускники, в частности, должны быть готовы к решению широкого спектра уравнений и неравенств (рациональных, иррациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических) с параметрами, а также к эффективному использованию графических инструментов для их анализа и нахождения решений.

Для удобства ознакомления, информация представлена в формате таблицы.

Таблица 1 – Место темы «Уравнения и неравенства с параметрами» в ФРП СОО по математике

Уровень изучения	***Наличие темы в содержании***	***Планируемые предметные результаты***	***Вывод о значимости темы***
Базовый	Отсутствует. Понятие параметра и соответствующие задачи не упоминаются.	Не предусмотрены.	Тема не входит в обязательный минимум содержания базового курса.
Углубленный	Присутствует в содержательной линии «Уравнения и неравенства». Изучаются: • Уравнения, неравенства и системы с параметрами; • Графические методы решения.	Выпускник научится решать с параметрами: • рациональные; • иррациональные; • показательные; • логарифмические; • тригонометрические уравнения и неравенства; владеть графическими методами.	Тема является важной и обязательной частью углубленного курса, формирует вариативное мышление.

При подробном изучении учебников для 10-11 классов становится очевидным, что они, как правило, не включают отдельного, систематизированного раздела, посвященного уравнениям и неравенствам с параметром. Даже если такой раздел и существует, он страдает от отсутствия полноценного теоретического обоснования методов решения.

Исследование содержания учебников по математике для 10-11 классов, широко используемых в общеобразовательных учреждениях, выявило значительные вариации в методике изложения темы уравнений, неравенств и систем с параметрами. В учебнике Ш. А. Алимова (10-11 классы) [3], одобренном в соответствии с ФГОС, данная проблематика присутствует, однако

ее репрезентация носит фрагментарный характер и интегрирована в существующие тематические блоки без выделения в отдельный параграф. Так, раздел "Уравнения" содержит примеры линейных, квадратных, логарифмических и тригонометрических уравнений с параметром, с указанием конкретных номеров заданий и страниц. Аналогично, в разделе "Системы уравнений" представлены системы логарифмических уравнений и системы с участием тригонометрических уравнений, содержащие параметры. Раздел "Неравенства" охватывает дробно-рациональные, модульные, иррациональные и логарифмические неравенства с параметром. Таким образом, несмотря на наличие задач с параметрами в различных классах уравнений и неравенств, отсутствует единая теоретическая база, способствующая обобщению методов решения, классификации случаев и анализу зависимости решений от параметра. Такая фрагментарная подача материала существенно затрудняет формирование у учащихся целостного вариационного мышления и системного подхода к анализу параметрических задач, ограничивая глубину понимания влияния параметра на характеристики решений.

При сравнительном анализе пособия А. Г. Мордковича для 10–11 классов (базовый уровень) и учебника Ш. А. Алимова, обнаруживается существенное различие в подходе к теме уравнений и неравенств с параметрами. У А. Г. Мордковича [13] эта тема представлена как самостоятельный структурный блок. В первой части учебника (§60 «Уравнения и неравенства с параметрами», стр. 383–390) дается теоретическая вводная и детально разбираются четыре примера решения уравнений различными методами. Вторая часть продолжает эту линию разделом «Задачи с параметрами» (упражнения 60.1–60.19, стр. 202), который предлагает широкий спектр заданий для закрепления и развития умений в разнообразных ситуациях. Следовательно, даже на базовом уровне, учебник А. Г. Мордковича предлагает целенаправленное и последовательное освоение уравнений с параметрами, обеспечивая как теоретическую подготовку, так и достаточное количество практического материала [14].

Таблица 2 – Сравнительный анализ учебников по теме «Уравнения и неравенства с параметрами» в учебниках 10-11 классов общеобразовательной школы

Критерий сравнения	***Ш. А. Алимова и др.***	***А. Г. Мордковича и др.***
Наличие структурного блока	Отсутствует отдельный параграф. Материал фрагментарно распределен по тематическим разделам.	Присутствует самостоятельный структурный блок (§60 «Уравнения и неравенства с параметрами»).
Теоретическая база	Отсутствует обобщающая теория, классификация и обоснование методов.	Присутствует краткая теоретическая справка и разбор методов решения (4 примера).
Характер задачного материала	Задачи с параметрами интегрированы в традиционные разделы (линейные, квадратные, логарифмические уравнения и т.д.) без специальной системы.	Выделен практический блок «Задачи с параметрами» (упр. 60.1–60.19), направленный на отработку навыков.
Методический аппарат	Затрудняет формирование целостного представления из-за разрозненности номеров.	Обеспечивает системное освоение темы даже в рамках базового курса.

Сравнительное изучение двух учебников продемонстрировало разный уровень проработки темы в школьной литературе. Учебник Ш. А. Алимова (по ФГОС) лишь изредка включает задачи с параметрами, встраивая их в уже пройденные темы, без отдельного обобщения. Учебник же А. Г. Мордковича, напротив, выделяет эту тему в самостоятельный блок, обеспечивая тем самым основу для ее системного изучения уже на базовом уровне.

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ

2.1 Организация подготовки обучающихся к решению уравнений с параметрами

Оптимальным временем для знакомства с параметрами является 7 класс, когда ученики уже уверенно работают с линейными уравнениями [12]. Такой ранний старт не только предотвращает сложности с параметрами в будущем, но и активно развивает у школьников логику, внимательность и память. На этом этапе ключевым становится переход от «решить уравнение» к «исследовать уравнение при всех возможных значениях параметра» [4]. Первые задания должны строиться на базе уже хорошо знакомого общего вида линейного уравнения $ax = b$, где a и b – выражения, содержащие параметр. Например, рассмотрим уравнение $(m-2)x = m^2 - 4$. При $m = 2$ оно превращается в $0 \cdot x = 0$, где бесконечно много решений. Подставим $m = -2$ и получим $-4 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$. А при всех остальных значениях m уравнение имеет единственный корень $x = m + 2$. Таким образом, с самого начала можно ввести понятие контрольных значений параметра, при которых происходит изменение уравнения.

Когда школьники сталкиваются с уравнениями и неравенствами, где есть параметры, им нужно научиться проводить собственное исследование. Это означает, что они должны уметь:

- понимать, к какому типу относится задача, и как параметр влияет на ее формулировку (например, определять, является ли уравнение линейным или сводится к линейному после преобразований);

- разбираться, как вид уравнения или неравенства, а также его коэффициенты, меняются в зависимости от параметра (в частности, обращение в ноль старшего коэффициента, знака дискриминанта и т. п.);

- четко определять, при каких значениях параметра задача имеет решения, а при каких – нет (например, уравнение $(a+1)x = a - 3$ не имеет решений при $a = -1$ и $a \neq 3$, что важно проговаривать отдельно);

- если решения существуют, то понимать, сколько их будет при разных значениях параметра (один, два, бесконечно много корней и т. д.).

Учитывая тесную взаимосвязь данной темы с линейными уравнениями, целесообразно при первоначальном изучении простейших уравнений с параметрами продемонстрировать их аналогию с базовым уравнением вида $ax = b$, где a и b выступают в роли параметров. Аналитическое решение такого уравнения предполагает рассмотрение отдельных случаев:

- $a \neq 0$ – уравнение имеет единственный корень $x = \frac{b}{a}$;
- $a = 0, b = 0$ – корнем является любое число (бесконечное множество решений);
- $a = 0, b \neq 0$ – решений нет.

Важно объяснить учащимся, что анализ частных случаев развивает понимание возможных исходов, что необходимо для обоснованных выводов при решении стандартных уравнений. Для закрепления этих знаний можно предложить подобные задания: «При каком значении параметра p уравнение $px + 5 = 2x - 3$ имеет корень $x = 4$?».

Когда ученики только начинают знакомиться с параметрами, у них часто возникают сложности. Им бывает трудно понять, когда параметр нужно считать меняющейся величиной, а когда – фиксированной. Для преодоления этого барьера рекомендуется с самого начала использовать двойную запись, то есть сначала фиксировать параметр в рамках одного случая (пусть $a = 2$, тогда уравнение принимает вид…), а затем переходить к общему анализу. Очень помогает, если мы будем как можно чаще показывать им графическое представление результатов.

На следующем этапе обучения в 8 классе, после освоения стандартных квадратных и дробно-рациональных уравнений и неравенств, важно развивать

навыки решения задач с параметрами [7]. Отличный способ сделать это – взять уже знакомые ученикам задания и заменить в них числа на параметры, тем самым усложняя и обогащая материал. Конкретный прием: обычное квадратное уравнение $x^2 - 5x + 6 = 0$ трансформируется в $x^2 - (a+1)x + a = 0$. Далее ставится задача: «Найти все a, при которых уравнение имеет два различных положительных корня». Такое задание требует одновременного применения теоремы Виета (сумма и произведение корней) и анализа дискриминанта $D = (a+1)^2 - 4a = (a-1)^2$, что позволяет наглядно показать, как дискриминант, не зависящий от параметра, не гарантирует автоматически положительность корней, и почему нужны дополнительные условия.

По завершении изучения темы "Квадратичная функция" целесообразно перейти к рассмотрению квадратных уравнений с параметрами. На данном этапе рекомендуется предлагать учащимся задания, включающие применение теоремы Виета, анализ дискриминанта полного квадратного уравнения и решение неполных квадратных уравнений. Практика показывает, что эффективна такая последовательность: сначала отработка нахождения дискриминанта, содержащего параметр (например, $D = (2m-3)^2 - 8(m-1)$), затем решение неравенств $D > 0$, $D = 0$, $D < 0$ относительно параметра, и только потом – полное исследование квадратного уравнения с записью ответа. Параллельно вводятся задачи, где корни не требуется находить явно, а нужно, используя теорему Виета, выразить через параметр сумму квадратов корней, их взаимное расположение или условие $x_1 = 2x_2$. Так, в уравнении $x^2 + (p-3)x + p = 0$ условие $x_1^2 + x_2^2 = 5$ приводит к уравнению $(p-3)^2 - 2p = 5$, которое после решения и проверки существования корней (дискриминант ≥ 0) даёт искомые значения параметра. Этот раздел учебной программы, как правило, изучается в конце 8-го или начале 9-го класса.

Для успешного освоения задач с параметрами в основной школе необходимо интегрировать их изучение в курс уравнений и неравенств [17]. На данном этапе первостепенной задачей является формирование у школьников

ясного представления о том, что представляет собой уравнение с параметром и как его решать. Следует акцентировать внимание на многообразии методов, применимых к решению одного уравнения (или неравенства) с параметром. Например, одно и то же уравнение $|x-a|=2x+1$ можно решать аналитически, раскрывая модуль на промежутках относительно a, а можно – графически в системе координат $(x;y)$, рассматривая семейство «уголков» и прямую. Важно показывать, что выбор метода зависит от вопроса задачи: если требуется найти количество корней, удобен графический метод с параметром как осью ординат, а если нужны конкретные формулы корней – аналитический. Качественно заложенные основы в основной школе (умение выделять контрольные значения параметра, проводить классификацию, фиксировать смену типа уравнения, проверять особые точки и записывать ответ, разбитый по значениям параметра) станут прочным фундаментом для углубленного изучения темы в старших классах, где появятся задачи с тригонометрическими, показательными и логарифмическими функциями [10].

2.2 Разработка рабочей тетради

Рабочая тетрадь посвящена уравнениям с параметрами — одной из немногих тем школьного курса, где аналитическое мышление встречается с необходимостью перебирать случаи, видеть структуру и выбирать инструмент. При подготовке тетради мы ориентировались на реальную сложность, с которой сталкиваются учащиеся при решении задачи №18 профильного ЕГЭ, и на потребность в единой, обозримой системе действий.

Логика тетради построена на трёх последовательных шагах.

Первый параграф выполняет роль инструментальной базы. В него вынесены те понятия, без которых работа с параметром становится опасной: область допустимых значений, модуль, поведение квадратного трёхчлена, уравнение окружности, графики основных функций и их сдвиги и т. д.

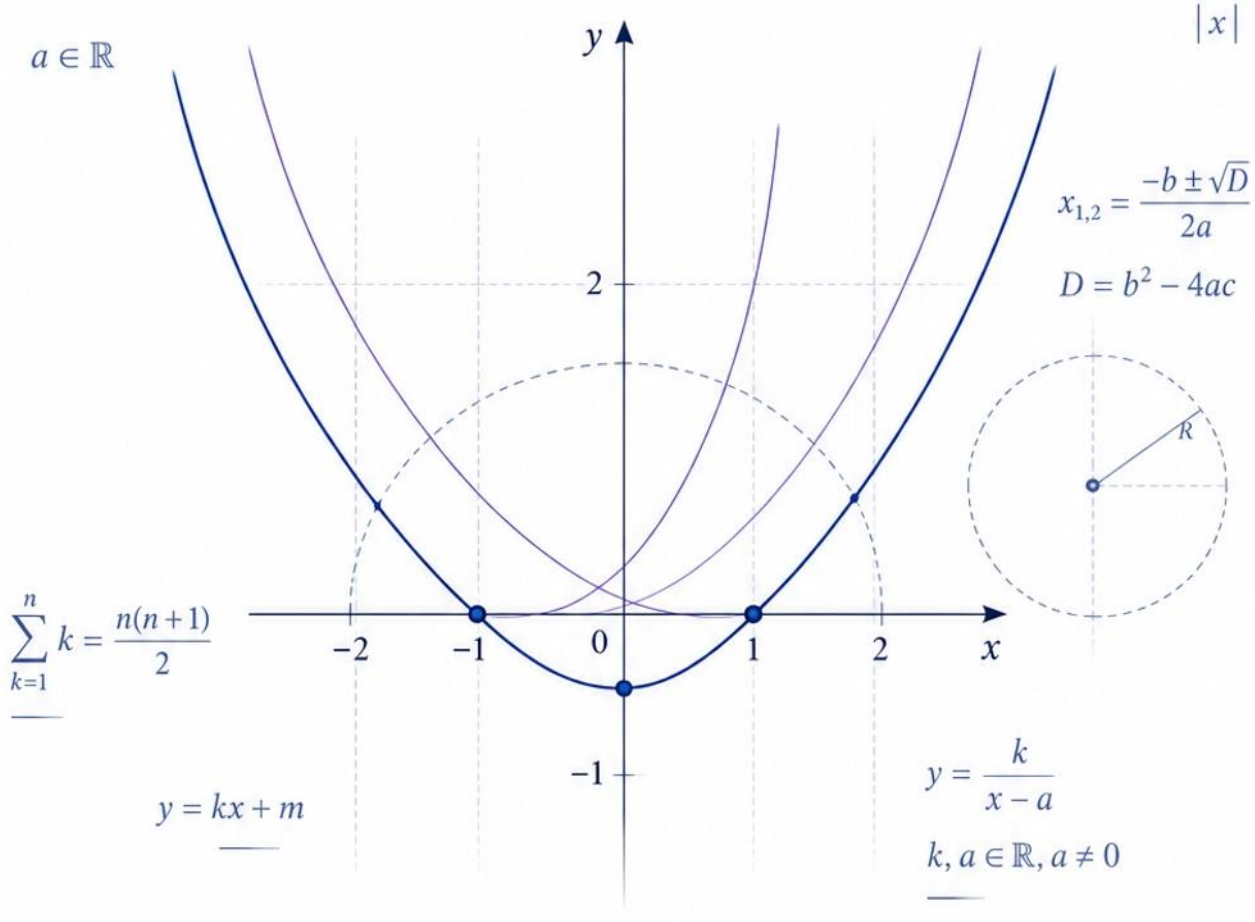
Второй параграф — основной. В нём разобраны два подхода к решению. Алгебраический метод проведён последовательно: линейные, квадратные, дробно-рациональные, иррациональные уравнения, уравнения с модулем и замена переменной. Каждый тип снабжён подробным примером, где видно, как параметр влияет на решение. Графический метод представлен как альтернатива: разобраны плоскости xOa и xOy, условие касания, работа с окружностями, а также характерные приёмы для решения уравнений с модулем. Такое деление позволяет не заучивать шаблоны, а осмысленно выбирать путь решения.

Третий параграф выводит ученика на экзаменационный уровень. Здесь разобраны реальные задания ЕГЭ 2021–2025 годов с акцентом на то, почему выбран тот или иной метод. Завершают параграф упражнения для самостоятельной работы, а в конце тетради даны ответы.

В результате получилось пособие, которое можно использовать и для планомерной подготовки, и для точечной отработки проблемных мест. Основной акцент сделан не на количестве примеров, а на формировании подхода: как увидеть параметр, не испугаться его и решить уравнение вне зависимости от того, в какой форме оно представлено.

Рабочая тетрадь

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ



Пенза 2026

Предисловие

Данная рабочая тетрадь посвящена одной из самых сложных и важных тем школьного курса математики — уравнениям с параметрами. Тетрадь может помочь старшеклассникам овладеть некоторыми приемами решений уравнений с параметрами.

§1. Справочный материал — систематизация необходимых сведений: степени, корни, логарифмы, модуль числа, свойства квадратного трёхчлена, уравнение окружности, графики элементарных функций и их преобразования.

§2. Решение уравнений с параметрами — основная часть, где подробно разобраны два метода.

- *Аналитический метод*: линейные, квадратные, дробно-рациональные, иррациональные уравнения, уравнения с модулем, метод замены переменной.
- *Графический метод*: плоскости $x0a$ и $x0y$, условие касания, семейства прямых и окружностей, уравнения с модулем.

В конце параграфа приведены упражнения для самостоятельной работы.

§3. Типовые задачи из ЕГЭ — разбор реальных экзаменационных заданий последних лет (2021–2025) с подробными решениями и тренировочными упражнениями.

Каждый раздел содержит необходимую теорию, примеры решений и задания для отработки. Тетрадь поможет старшеклассникам овладеть некоторыми приемами решений уравнений с параметрами, а учителям – планомерно организовать работу по данной теме в классе на уроках или факультативных занятиях.

Содержание

§1 Справочный материал **4**

1.1 Степени и корни **4**

1.2 Логарифмы **4**

1.3 Модуль числа **5**

1.4 Квадратный трёхчлен **6**

1.5 Окружность **7**

1.6 Графики основных элементарных функций **8**

1.7 Преобразования графиков **12**

§2 Решение уравнений с параметрами **14**

2.1 Аналитический метод решения уравнений с параметрами **14**

2.1.1 Решение линейных уравнений с параметрами **14**

2.1.2 Решение квадратных уравнений с параметрами **15**

2.1.3 Решение дробно-рациональных уравнений с параметрами **17**

2.1.4 Решение иррациональных уравнений с параметрами **18**

2.1.5 Решение уравнений с модулем **20**

2.1.6 Замена переменной **22**

2.2 Графический метод решения уравнений с параметрами **24**

2.2.1 Плоскость xOa **24**

2.2.2 Плоскость xOy **25**

2.2.3 Касание графиков **27**

2.2.4 Уравнения с модулем **27**

2.2.5 Окружности и их пересечения **28**

Упражнения для самостоятельной работы **30**

§3 Типовые задачи из ЕГЭ **36**

Упражнения для самостоятельной работы **58**

Ответы **60**

Лист для самостоятельного решения **63**

§1. Справочный материал

1.1 Степени и корни

Определение. Степенью числа a с натуральным показателем n называется произведение n множителей, каждый из которых равен a: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}}$, где $n \in \mathbb{N}$.

Определение. Арифметическим корнем n-й степени из неотрицательного числа a (где n — чётное число) называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a.

Арифметический корень чётной степени $\sqrt[2k]{a}$, где $k \in \mathbb{N}$ – это неотрицательное число b, такое что $b^{2k} = a$.

Арифметический корень нечётной степени $\sqrt[2k+1]{a}$, где $k \in \mathbb{N}$ – это число b, такое что $b^{2k+1} = a$. Знак b совпадает со знаком a.

Свойства

Степени	Корни
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	
$a^n : a^m = a^{n-m}$	
$(ab)^n = a^n b^n$	
$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$(a^n)^m = a^{nm}$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	
$a^0 = 1$	

1.2 Логарифмы

Определение. Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени c, в которую нужно возвести a, чтобы получить b:

$$\log_a b = c \;\Leftrightarrow\; a^c = b, \text{ где } a > 0, a \neq 1, b > 0.$$

Натуральный логарифм: $\ln a = \log_e a$, где $e \approx 2{,}718$.

Десятичный логарифм: $\lg a = \log_{10} a$.

Свойства логарифмов

- $a^{\log_a b} = b$ – *основное логарифмическое тождество*;
- $\log_a(b \cdot c) = \log_a b + \log_a c$;
- $\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c$;
- $\log_a b^m = m \log_a b$;
- $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$;
- $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$;
- $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$;
- $\log_a 1 = 0$.
-

1.3 Модуль числа

Определение. Модулем (абсолютной величиной) числа x называется расстояние от точки x до начала координат на числовой прямой.

Обозначение: $|x|$.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

При раскрытии модуля в уравнениях и неравенствах нужно учитывать знак выражения, стоящего под модулем.

Раскрытие модуля в уравнениях

Тип уравнения	*Как раскрыть*
$\lvert f(x)\rvert = c$, *где* c *– число*	$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = c, \text{если } c > 0 \\ f(x) = -c, \text{если } c > 0 \end{array}\right. \\ f(x) = 0, \text{если } c = 0 \\ \text{нет решений, если } c < 0 \end{cases}$
$\lvert f(x)\rvert = g(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{array}\right.$
$\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert$	$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$

Алгоритм решения уравнения с несколькими модулями (метод интервалов)

1. Найти нули каждого подмодульного выражения.
2. Разбить числовую прямую на интервалы этими точками.
3. На каждом интервале определить знак каждого из подмодульных выражений и раскрыть модули.
4. Решить полученные уравнения на каждом из интервалов.
5. Проверить, принадлежит ли корень рассматриваемому интервалу.
6. Объединить ответы.

1.4 Квадратный трёхчлен

Определение. Квадратным трёхчленом называется выражение вида

$$ax^2 + bx + c,$$

где $a \neq 0, x -$ переменная, $a, b, c -$ действительные числа.

Стандартный вид квадратного уравнения: $ax^2 + bx + c = 0$.

Решение квадратного уравнения

Дискриминант	*Теорема Виета*
$D = b^2 - 4ac$	$x^2 + px + q = 0$ – *приведённое квадратное уравнение* $\begin{cases} x_1 + x_2 = -p \\ x_1 \cdot x_2 = q \end{cases}$
Если $D > 0$ *– два различных действительных корня:* $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ *Если* $D = 0$ *– один корень:* $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$ *Если* $D < 0$ *– нет действительных корней*	$ax^2 + bx + c = 0$ – *общий вид (при* $D \geq 0$*)* $\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$

Разложение квадратного трёхчлена на множители

Если $D > 0$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
Если $D = 0$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_0)^2$

1.5 Окружность

Определение. Окружностью называется множество точек плоскости, равноудалённых от заданной точки (центра) на расстояние, называемое радиусом.

Уравнение окружности с центром в точке $(x_0; y_0)$ и радиусом R $(R > 0)$:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Если центр совпадает с началом координат, уравнение принимает вид:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Взаимное расположение окружностей

Для двух окружностей с радиусами R_1, R_2 и расстоянием между центрами d:

- $d > R_1 + R_2$ – не пересекаются (внешнее расположение);
- $d = R_1 + R_2$ – внешнее касание (одна общая точка);
- $| R_1 - R_2 | < d < R_1 + R_2$ – две точки пересечения;
- $d = | R_1 - R_2 |$ – внутреннее касание;
- $d < | R_1 - R_2 |$ – одна окружность лежит внутри другой без касания.

Взаимное расположение окружности и прямой

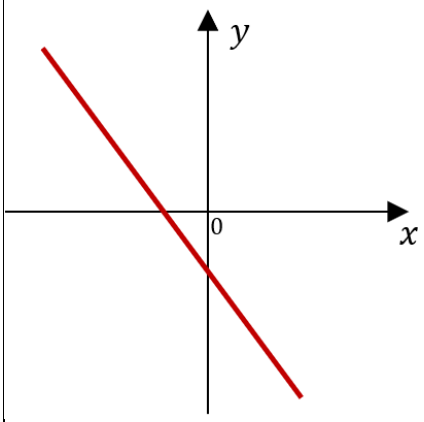
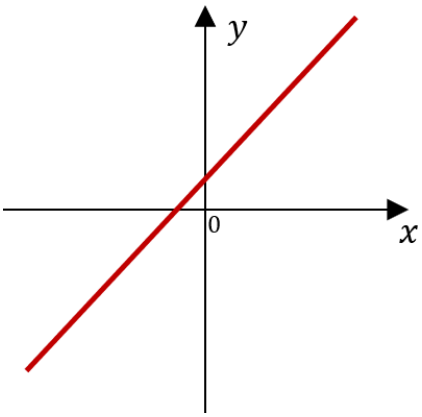
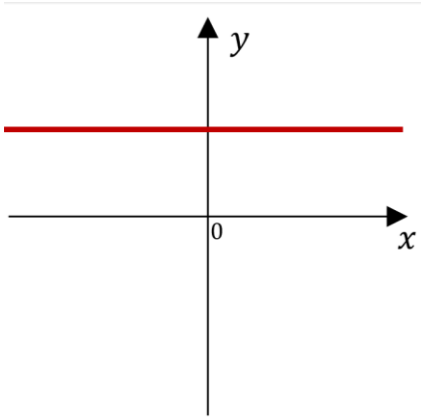
Прямая $y = kx + b$ и окружность $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$, если расстояние от центра до прямой

- больше R – нет общих точек;
- равно R – касание (одна точка);
- меньше R – две точки пересечения.

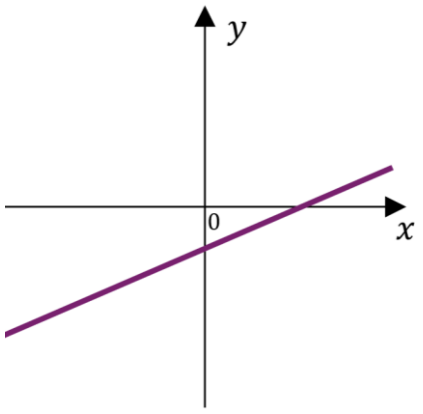
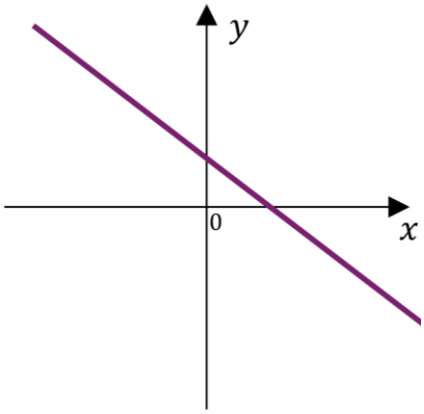
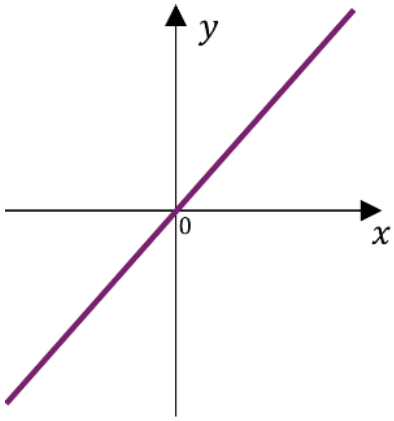
1.6 Графики основных элементарных функций

1) $\boldsymbol{y = kx + b}$ – линейная функция.

- *Угловой коэффициент* k определяет наклон графика линейной функции:

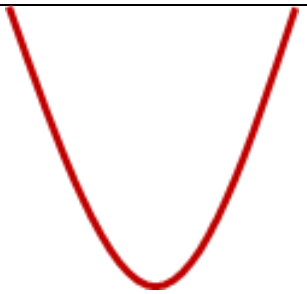
$k < 0$	$k > 0$	$k = 0$
Функция убывает	Функция возрастает	Функция постоянна
		

- *Свободный член* b показывает, в какой точке график пересекается с осью Oy, и сдвигает его вверх или вниз:

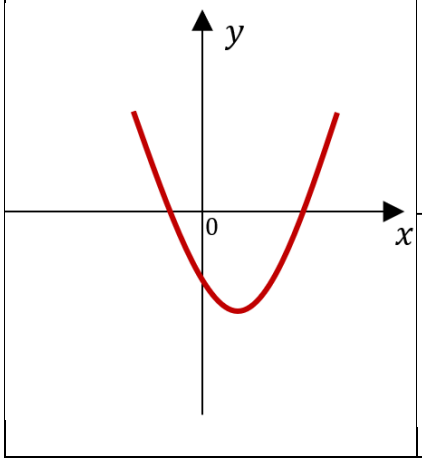
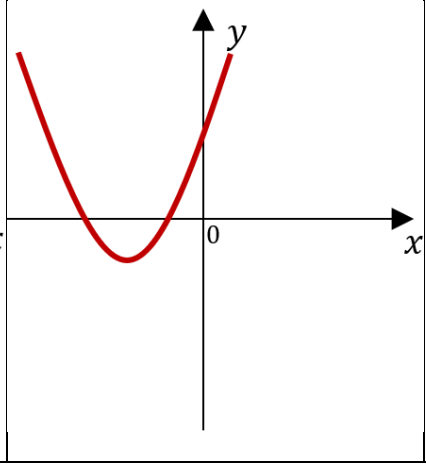
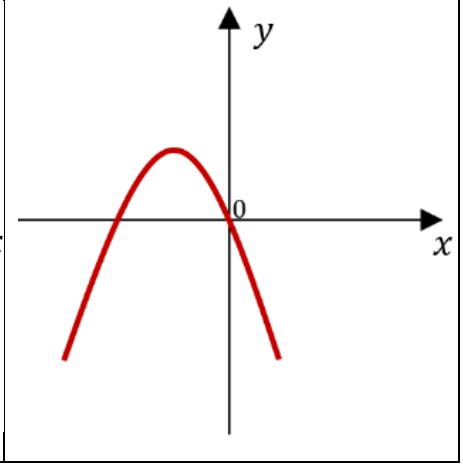
$b < 0$	$b > 0$	$b = 0$
Прямая пересекает ось Oy ниже начала координат	Прямая пересекает ось Oy выше начала координат	Функция принимает вид $y = kx$. График проходит через начало координат.
		

2) $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$ – квадратичная функция, $a \neq 0$.

- *Коэффициент a* задает направление ветвей параболы (если $a > 0$, то ветви направлены вверх, если $a < 0$, то вниз) и ее ширину: чем больше а, тем шире, чем меньше — тем уже.

$a < 0$	$a > 0$
	

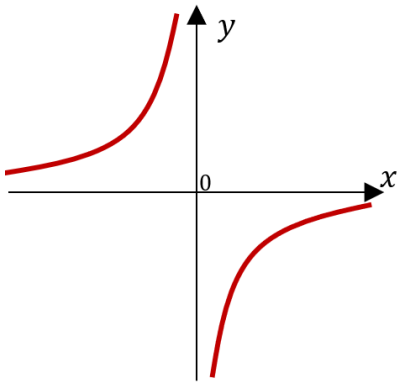
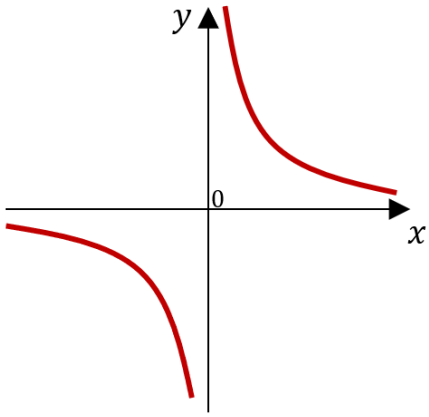
- *Коэффициент c* определяет точку пересечения параболы с осью Oy; изменение c смещает график вертикально, не меняя формы.

$c < 0$	$c > 0$	$c = 0$
		

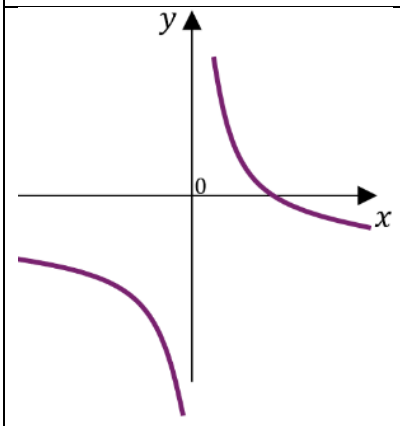
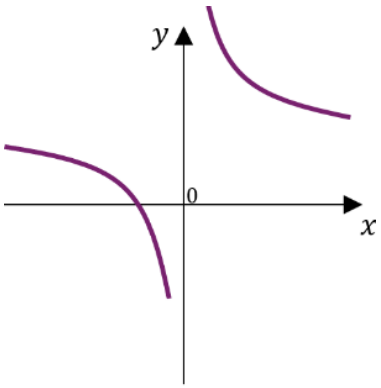
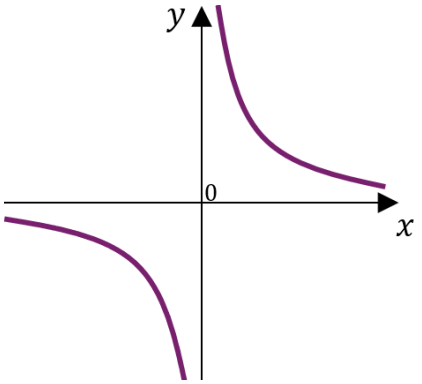
- *Коэффициент b* влияет на смещение вершины по оси Ox (при $b = 0$ вершина лежит на оси Oy). b напрямую по графику не видно, но его можно посчитать с помощью формулы вершины параболы: $x_{\text{вершины}} = \frac{-b}{2a}$.

3) $\boldsymbol{y = \frac{k}{x} + b}$ – обратная пропорциональность, $k \neq 0, x \neq 0$.

- *Коэффициент k* определяет «пологость» и направление графика: чем больше модуль k, тем дальше от начала координат располагается гипербола, и тем менее круто она «поворачивает»; а также влияет на расположение ветвей гиперболы в координатной плоскости.

$k < 0$	$k > 0$
Ветви гипербол расположены во II и IV координатных четвертях	Ветви гиперболы расположены в I и III координатных четвертях
	

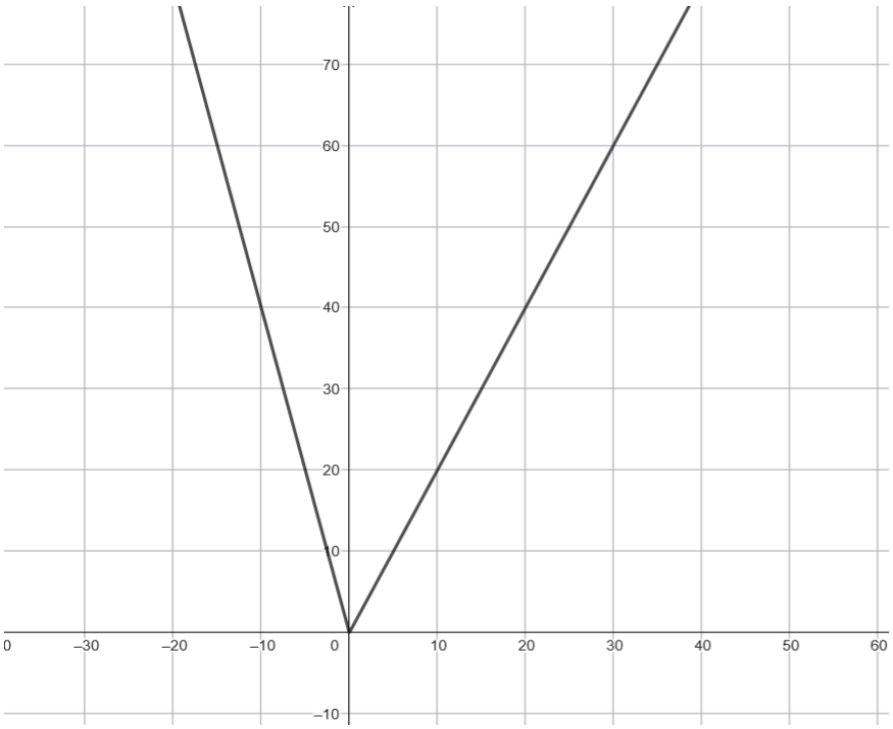
- *Коэффициент* b отвечает за смещение графика функции вверх или вниз. Если $b > 0$, то график смещается на b единиц вверх; если $b < 0$, то на b единиц вниз.

$b < 0$	$b > 0$	$b = 0$
Гипербола смещается на b единиц вниз	Гипербола смещается на b единиц вверх	Гипербола не смещается
		

4) Графики функций с **модулем** имеют особый вид: модуль делает значения неотрицательными и отражает часть графика относительно осей, но форма зависит от самой функции.

Пример 1. Построим график функции $y = 3|x| - x$.

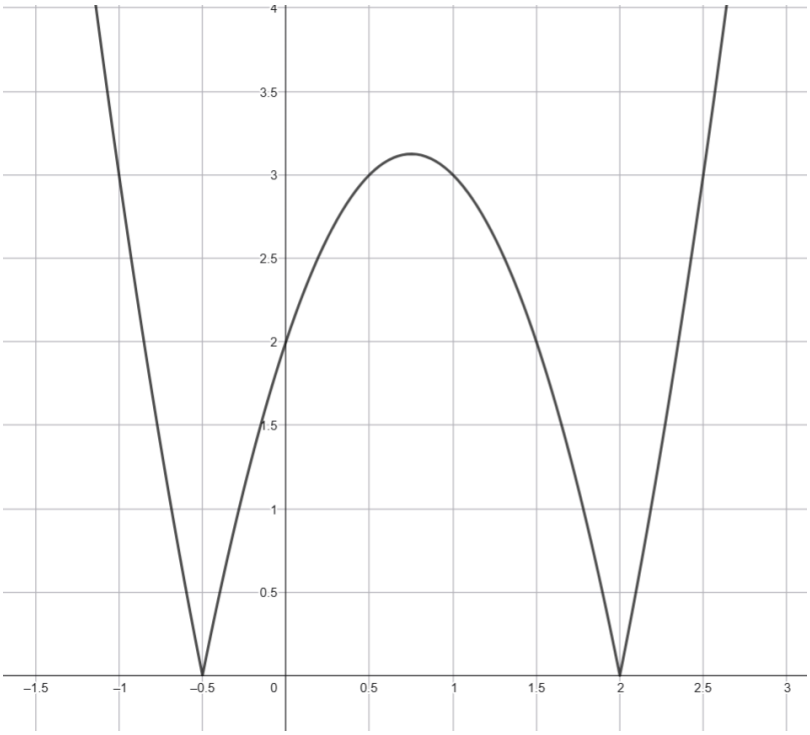
$$y = \begin{cases} 2x \text{ при } x \geq 0, \\ -4x \text{ при } x < 0. \end{cases}$$



Пример 2. Построим график функции $y = |2x^2 - 3x - 2|$ – отраженная парабола.

1) Найдем вершину параболы $x_в = \frac{3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{4}$, $y_в = \left|2 \cdot \frac{9}{16} - 3 \cdot \frac{3}{4} - 2\right| = \left|-\frac{25}{8}\right| = \frac{25}{8}$.

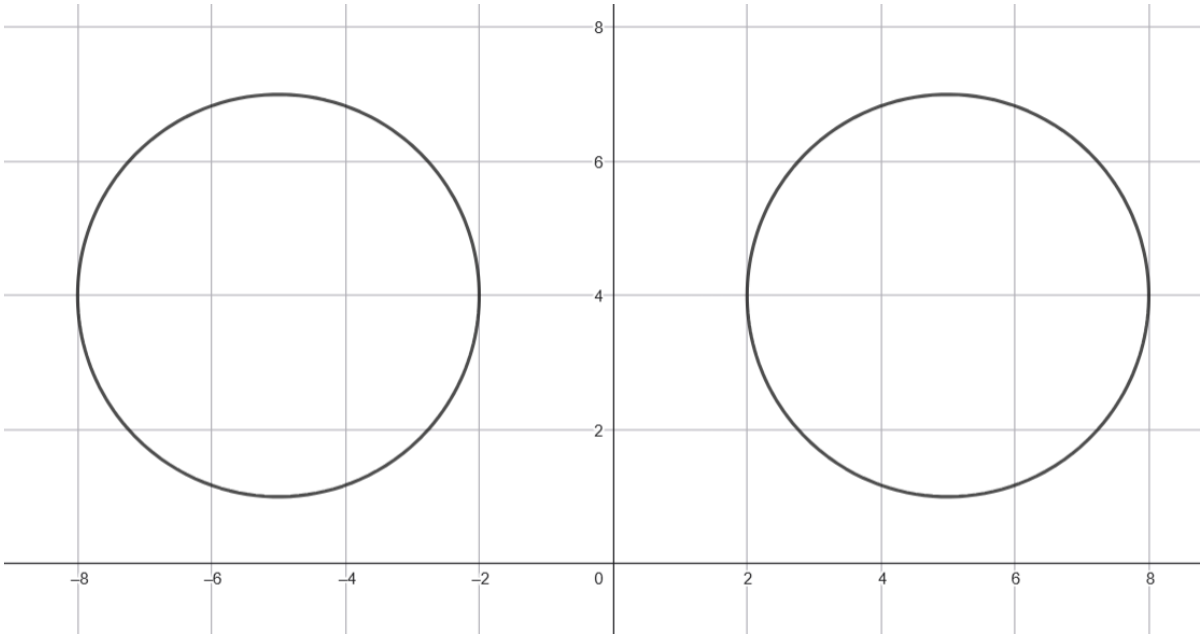
2) Если $y = 0$, то $2x^2 - 3x - 2 = 0 \ \Rightarrow \ x_1 = 2, x_2 = -\frac{1}{2}$.



Пример 3. $(|x|-5)^2+(y-4)^2=9$ – две окружности

$$\begin{bmatrix}(x-5)^2+(y-4)^2=9\\(-x-5)^2+(y-4)^2=9\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}(x-5)^2+(y-4)^2=3^2\\(x+5)^2+(y-4)^2=3^2\end{bmatrix}$$



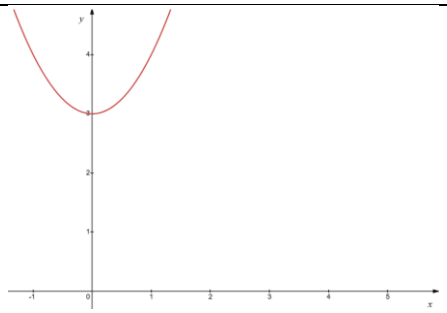
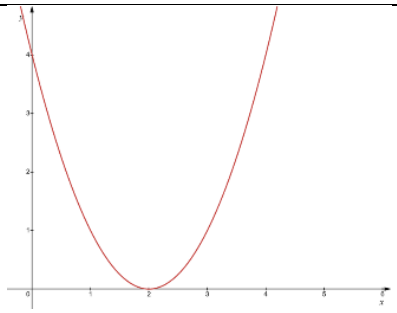
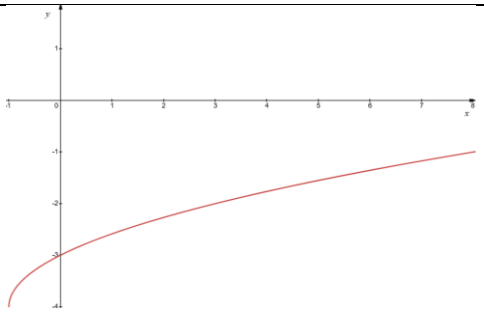
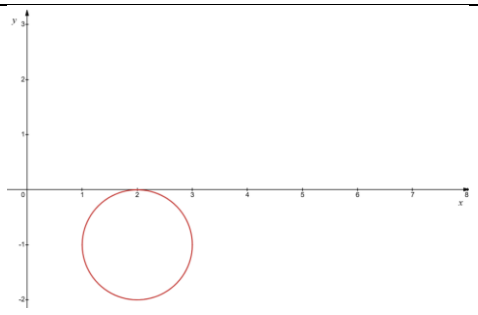
1.7 Преобразования графиков

Пусть на плоскости задан график функции $y=f(x)$.

Рассмотрим движение графика вдоль координатных осей.

Функция	Сдвиг
$y=f(x)+b$	Вдоль оси Oy ***вверх, если*** $b>0$; ***вниз, если*** $b<0$.
$y=f(x-a)$	Вдоль оси Ox ***вправо, если*** $a>0$; ***влево, если*** $a<0$.
$y=f(x-a)+b$	*Комбинация сдвигов, где их порядок не имеет значения*

Примеры

Исходная функция	*Сдвиг*	*Новая функция*	*Новый график*
$y = x^2$	По оси Oy вверх на 3	$y = x^2 + 3$	
$y = x^2$	По оси Ox вправо на 2	$y = (x-2)^2$	
$y = \sqrt{x}$	По оси Ox влево на 1, по оси Oy вниз на 4	$y = \sqrt{x+1} - 4$	
$x^2 + y^2 = 1$	Центр в $(2; -1)$	$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 1$	

§2. Решение уравнений с параметрами

2.1 Аналитический метод решения уравнений с параметрами

Аналитический метод решения уравнений с параметрами заключается в решении уравнения относительно x, при этом мы обращаемся с параметром a как с обычным числом (константой). Важно учитывать, что при изменении a меняются решения, из-за чего необходимо учитывать все возможные значения параметра, при которых уравнение меняет степень, нарушается ОДЗ, дискриминант квадратного уравнения меняет знак.

2.1.1 Решение линейных уравнений с параметрами

Определение. Линейным уравнением с параметром называется уравнение вида $A(a) \cdot x = B(a)$, где $A(a), B(a)$ – некоторые выражения, зависящие от параметра a.

Линейное уравнение легко отличить от всех прочих по первой степени у переменной х. Уравнение будет линейным даже, если в нем есть дроби, главное, чтобы х не было в знаменателе.

Алгоритм решения линейных уравнений с параметрами

Для решения такого уравнения необходимо рассмотреть 2 случая:

1 случай. Если $A = 0$, то $0 \cdot x = B \Rightarrow$ если $B = 0$, то $0 \cdot x = 0 \Rightarrow x -$ любое.

если $B \neq 0$, то $0 \cdot x = B \Rightarrow$ решений нет.

2 случай. Если $A \neq 0$, то $x = \frac{B}{A}$ – 1 корень.

Пример 1. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$\left(\frac{3}{4}a - 1\right)x = 3a - 4.$$

1) Приравняем коэффициент A к нулю: $\frac{3}{4}a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{4}{3}$

$0 \cdot x = 3 \cdot \frac{4}{3} - 4 \Rightarrow 0 \cdot x = 0 \Rightarrow x -$ любое.

2) Рассмотрим случай, когда коэффициент А не равен нулю:

$$\frac{3}{4}a - 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq \frac{4}{3}.$$

Получим, что $x = \frac{3a-4}{\frac{3}{4}a-1} = \frac{4(\frac{3}{4}a-1)}{\frac{3}{4}a-1} = 4$.

Ответ: при $a = \frac{4}{3}$ $x -$ любое; при $a \neq \frac{4}{3}$ $x = 4$.

Пример 2. При каких значениях параметра a уравнение $(a^2 - 4)x = a - 2$ имеет бесконечно много решений? Не имеет решений?

$A = a^2 - 4 = (a - 2)(a + 2)$; $B = a - 2$.

1) Линейное уравнение имеет бесконечно много решений, когда $A = 0$ и $B = 0$: $A = 0 \Rightarrow a = \pm 2$.

Проверяем B: при $a = 2$: $B = 0$ – подходит; при $a = -2$: $B = -4 \neq 0$ – не подходит (уравнение $0 \cdot x = 0$).

2) Линейное уравнение не имеет решений, когда $A = 0$ и $B \neq 0$: $a = -2$ (уравнение $0 \cdot x = -4$).

Получим, что бесконечно много решений при $a = 2$, нет решений при $a = -2$; при остальных a одно решение $x = \frac{1}{a+2}$.

Ответ: бесконечно много решений при $a = 2$, нет решений при $a = -2$.

2.1.2 Решение квадратных уравнений с параметрами

Квадратным уравнением с параметром называется уравнение вида $A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0$.

Алгоритм решения квадратных уравнений с параметрами

Находим контрольное значение $A(a) = 0$.

1 случай. Если $A = 0$, то уравнение становится линейным (см. п. 2.1.1).

2 случай. Если $A \neq 0$, то вычисляем дискриминант:

- $D(a) < 0$ – действительных корней нет;
- $D(a) = 0$ – один корень $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$;
- $D(a) > 0$ – два корня $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Пример 1. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$(a - 1)x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Найдём контрольное значение $a-1=0 \Rightarrow a=1$.

Случай 1. $a=1 \Rightarrow$ исходное уравнение становится линейным, получим: $2x+1=0$. Значит $x=-0{,}5$.

Случай 2. $a \neq 1 \Rightarrow$ исходное уравнение останется квадратным.

Найдём дискриминант: $\mathrm{D}=4-4(\mathrm{a}-1)\cdot 1=4(2-\mathrm{a})$.

Рассмотрим все три случая значений дискриминанта:

- если $D<0 \Rightarrow 4(2-a)<0 \Rightarrow$ при $a>2$ действительных корней нет;
- если $D=0 \Rightarrow 4(2-a)=0 \Rightarrow a=2$, значит при $a=2$ $x=\frac{-2}{2}=-1$;
- если $D>0 \Rightarrow 4(2-a)>0 \Rightarrow$ при $a<2$ и $a\neq 1$ $x_{1,2}=\frac{-2\pm 2\sqrt{2-a}}{2(a-1)}=$

$=\frac{-1\pm\sqrt{2-a}}{a-1}$.

Ответ: при $a>2$ действительных корней нет; при $a=2$ $x=-1$; при $a<2$ и $a\neq 1$ $x=\frac{-1\pm\sqrt{2-a}}{a-1}$.

Пример 2. Найдите все значения a, при которых корни уравнения

$$x^2-2(a-1)x+a^2-2a-3=0$$

принадлежат отрезку $[-1;3]$.

Квадратное уравнение имеет действительные корни при $D\geq 0$:

$$a=1; b=-2(a-1); c=a^2-2a-3.$$

$D=4(a-1)^2-4(a^2-2a-3)=16>0$ – всегда два различных корня.

Корни: $x_{1,2}=\frac{2(a-1)\pm 4}{2}=(a-1)\pm 2$. Получим $x_1=a+1$, $x_2=a-3$.

Корни уравнения должны принадлежать отрезку $[-1;3]$:

$$-1\leq a-3\leq 3 \text{ и } -1\leq a+1\leq 3.$$

Первое: $-1\leq a-3 \Rightarrow a\geq 2$; $a-3\leq 3 \Rightarrow a\leq 6 \Rightarrow a\in[2;6]$.

Второе: $-1\leq a+1 \Rightarrow a\geq -2$; $a+1\leq 3 \Rightarrow a\leq 2 \Rightarrow a\in[-2;2]$.

Пересечение: $a=2$. При $a=2$ корни: $x_1=3$, $x_2=-1$ – оба на концах отрезка, условие выполнено.

Ответ: $a=2$.

2.1.3 Решение дробно-рациональных уравнений с параметрами

Определение. Дробно-рациональным уравнением с параметром называется уравнение вида $\frac{P(x,a)}{Q(x,a)} = 0$.

Дробь равна нулю тогда и только тогда, когда ***числитель равен нулю****, а* ***знаменатель не равен нулю****.*

Алгоритм решения дробно-рациональных уравнений с параметрами

1. Перепишем исходное уравнение в виде системы:

$$\frac{P(x,a)}{Q(x,a)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x,a) = 0 \\ Q(x,a) \neq 0 \end{cases}.$$

2. Решить уравнение $P(x,a) = 0$.

3. Решить неравенство $Q(x,a) \neq 0$, чтобы найти ограничения.

4. Исключить из найденных корней уравнения те, которые не удовлетворяют ограничениям.

5. Оставшиеся корни будут решением исходного уравнения.

Пример 1. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2-a}{x-1} = 0$ имеет ровно один корень?

$$\frac{x^2-a}{x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - a = 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{a} \\ x \neq 1 \end{cases}.$$

- Если $a < 0$ – решений нет.
- Если $a = 0 \Rightarrow x = 0$ (подходит) – один корень.
- Если $a > 0 \Rightarrow x_1 = \sqrt{a},\ x_2 = -\sqrt{a}$. Чтобы остался ровно один корень, один из них должен равняться 1.

Ответ: $a = 0, a = 1$.

Пример 2. При каких значениях a уравнение $\frac{x^2-2ax+a^2}{x^2-4} = 0$ имеет ровно один корень?

$$\frac{x^2 - 2ax + a^2}{x^2 - 4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-a)^2 = 0 \\ x^2 - 4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = a \\ x \neq \pm 2 \end{cases}.$$

Ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

2.1.4 Решение иррациональных уравнений с параметрами

Определение. Иррациональным уравнение с параметром называется уравнение вида $\sqrt{f(x,a)} = 0$.

При решении таких уравнений необходимо учесть ограничения, накладываемые на исходное уравнение.

Алгоритм решения иррациональных уравнений с параметрами

1. Записать ограничения.

2. Оставить корень $\sqrt{f(x,a)}$ в левой части, остальное перенести вправо.

3. Возвести обе части в квадрат.

4. Решить полученное уравнение.

5. Проверить каждый из полученных корней, подходят ли они под ограничение.

Равносильные переходы

Исходное уравнение	Равносильная система
$\sqrt{f(x,a)} = g(x,a)$	$\begin{cases} g(x,a) \geq 0 \\ f(x,a) = (g(x,a))^2 \end{cases}$
$\sqrt{f(x,a)} = \sqrt{h(x,a)}$	$\begin{cases} f(x,a) \geq 0 \\ h(x,a) \geq 0 \\ f(x,a) = h(x,a) \end{cases}$

Пример 1. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$\sqrt{x + 2a} = x.$$

Запишем равносильную систему $\sqrt{x + 2a} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x + 2a = x^2 \end{cases}$.

Решим уравнение $x + 2a = x^2$: $x^2 - x - 2a = 0 \Rightarrow D = 1 + 8a$.

Рассмотрим все три случая значений дискриминанта:

- если $D < 0 \Rightarrow 1 + 8a < 0 \Rightarrow$ при $a < -\frac{1}{8}$ действительных корней нет;
- если $D = 0 \Rightarrow 1 + 8a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{8}$. Значит при $a = -\frac{1}{8}$ $x = \frac{1}{2}$,

проверка: $x = \frac{1}{2} \geq 0 -$ подходит;

- если $D > 0 \;\Rightarrow 1 + 8a > 0 \;\Rightarrow$ при $a > -\frac{1}{8} \;\; x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8a}}{2}$,

проверка: $x_1 = \frac{1+\sqrt{1+8a}}{2}$ всегда положителен (при $a > -\frac{1}{8}$); $x = \frac{1}{2}$ (при $a = -\frac{1}{8}$).

$x_2 = \frac{1-\sqrt{1+8a}}{2} \geq 0$, если $\sqrt{1+8a} \leq 1 \Rightarrow a \leq 0$. $x_2 = 0$ (при $a = 0$) – подходит; $x_2 < 0$ (при $a > 0$) – не подходит.

Ответ: при $a < -\frac{1}{8}$ – нет решений; при $a = -\frac{1}{8}$ – $x = \frac{1}{2}$;

при $-\frac{1}{8} < a \leq 0$ два корня $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8a}}{2}$;

при $a > 0$ один корень $x = \frac{1+\sqrt{1+8a}}{2}$.

Пример 2. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$\sqrt{2x + a} = x - 2.$$

Запишем равносильную систему:

$$\sqrt{2x + a} = x - 2 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x + a = (x-2)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 6x + (4 - a) = 0 \end{cases}.$$

Решим уравнение $x^2 - 6x + (4 - a) = 0$.

$$D = 36 - 4(4 - a) = 36 - 16 + 4a = 20 + 4a = 4(5 + a).$$

Рассмотрим возможные значения D:

- если $D < 0$, то $4(5 + a) < 0 \;\Rightarrow\; a < -5$. Значит при $a < -5$ действительных корней нет;
- если $D = 0$, то $a = -5$, получаем один корень квадратного уравнения: $x = \frac{6}{2} = 3$, проверим условие $x \geq 2$: $3 \geq 2$ — выполняется;
- если $D > 0$, то $a > -5$, квадратное уравнение имеет два корня:

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{20 + 4a}}{2} = \frac{6 \pm 2\sqrt{5 + a}}{2} = 3 \pm \sqrt{5 + a}.$$

Теперь проверим, какие из этих корней удовлетворяют условию $x \geq 2$:

- $x_1 = 3 + \sqrt{5 + a}$. Так как $\sqrt{5 + a} \geq 0$, то $x_1 \geq 3 > 2$ — подходит при всех $a > -5$.
- $x_2 = 3 - \sqrt{5 + a}$. Нужно, чтобы $x_2 \geq 2$: $3 - \sqrt{5 + a} \geq 2 \;\Rightarrow 1 \geq \sqrt{5 + a} \;\Rightarrow$ $1 \geq 5 + a \;\Rightarrow\; a \leq -4$.

Также из $a > -5$ получаем $-5 < a \leq -4$.

При $a = -4$: $\sqrt{5-4} = 1$, $x_2 = 3 - 1 = 2$ — подходит (граница).

При $-5 < a < -4$: $\sqrt{5+a} < 1$, значит $x_2 > 2$ — подходит.

При $a > -4$: $\sqrt{5+a} > 1$, тогда $x_2 < 2$ — не подходит.

Тогда: при $a < -5$ нет решений; $x = 3$ (при $a = -5$); $x = 3 \pm \sqrt{5+a}$ (при $-5 < a \leq -4$); при $a > -4$: один корень $x = 3 + \sqrt{5+a}$ (так как x_2 не проходит по условию $x \geq 2$).

Ответ: при $a < -5$: нет решений;

при $a = -5$: $x = 3$;

при $-5 < a \leq -4$: $x = 3 \pm \sqrt{5+a}$;

при $a > -4$: $x = 3 + \sqrt{5+a}$.

2.1.5 Решение уравнений с модулем

Определение. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля (абсолютной величины), называются уравнениями с модулем. В общем случае для их решения необходимо раскрыть модуль, рассматривая разные знаки подмодульного выражения (обычно для этого числовую ось разбивают на промежутки знакопостоянства). Если в уравнении присутствует параметр, то знаки при раскрытии модуля могут зависеть от параметра, что требует перебора возможных случаев.

При решении важно проверять полученные корни на соответствие условиям раскрытия модуля, так как не все из них могут удовлетворять исходному уравнению.

Существует несколько типов уравнений с модулем, каждый из которых имеет свои особенности при решении. Рассмотрим их в виде таблицы.

Раскрытие модуля в уравнениях

Тип уравнения	*Как раскрыть*
$\lvert f(x)\rvert = c$, *где* c *– число*	$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) = c, \text{если } c > 0 \\ f(x) = -c, \text{если } c > 0 \end{array}\right. \\ f(x) = 0, \text{если } c = 0 \\ \text{нет решений, если } c < 0 \end{cases}$
$\lvert f(x)\rvert = g(x)$	$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ f(x) = -g(x) \end{cases} \end{array}\right.$
$\lvert f(x)\rvert = \lvert g(x)\rvert$	$\left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \end{array}\right.$

Пример 1. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $|x - a| = |x + 1|$ имеет ровно одно решение.

$$|x - a| = |x + 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - a = x + 1 \\ x - a = -(x + 1) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \cdot x = a + 1 \\ 2x = a - 1 \end{array}\right.$$

Из первого уравнения: при $a = -1$ – бесконечно много решений, так как получится $0 \cdot x = 0$, что верно при любом x, значит при $a \neq -1$ будет одно решение.

Из второго уравнения: $x = \frac{a-1}{2}$ имеет единственное решение при любом a.

Уравнение имеет единственное решение при $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

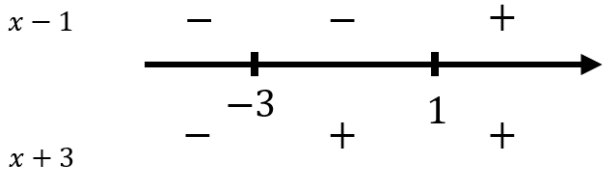
Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

Пример 2. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$| x - 1 | + | x + 3 | = a$$

имеет ровно два решения.

Нули подмодульных выражений: $x = 1$ и $x = -3$.



1) $x \leq -3$: $-(x - 1) - (x + 3) = a$.

Получим: $-2x-2=a \Rightarrow x=-\frac{a+2}{2}$.

Учитывая, что $x \leq -3$: $-\frac{a+2}{2} \leq -3 \Rightarrow -a-2 \leq -6 \Rightarrow -a \leq -4 \Rightarrow a \geq 4$.

При $a=4$: $x=-3$ — подходит; при $a>4$: $x<-3$ — один корень.

2) $-3<x<1$: $-(x-1)+(x+3)=a$.

Получим: $4=a$.

- Если $a=4$, то любое $x \in (-3;1)$ — бесконечно много решений.
- Если $a \neq 4$ — решений нет.

3) $x \geq 1$: $(x-1)+(x+3)=a$.

Получим: $2x+2=a \Rightarrow x=\frac{a-2}{2}$.

Учитывая, что $x \geq 1$: $\frac{a-2}{2} \geq 1 \Rightarrow a-2 \geq 2 \Rightarrow a \geq 4$.

При $a=4$: $x=1$ — подходит; при $a>4$: $x>1$ — один корень.

Объединим результаты: $a<4$ – решений нет; $a=4$: из (1): $x=-3$, из (2): все $x \in (-3;1)$, из (3): $x=1$, получаем бесконечно много решений на отрезке $[-3;1]$; $a>4$: из (1): $x_1=-\frac{a+2}{2}\,(<-3)$, из (3): $x_2=\frac{a-2}{2}\,(>1)$ – ровно два различных решения.

Ответ: $(4;+\infty)$.

2.1.6. Замена переменной

Метод замены переменной используется, если в уравнении несколько раз встречается одно и то же выражение, его обозначают новой буквой, чаще всего t, решают получившиеся уравнение, а затем возвращаются к исходной переменной.

Алгоритм решения уравнений с помощью замены переменной

1. Выбрать замену $t=\varphi(x,a)$. Записать ограничения для t.
2. Решить полученное уравнение относительно t.
3. Вернуться к замене.
4. Объединить решения.

Пример 1. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$(x+a)^2+x+a-2=0.$$

Заметим, что $(x+a)$ встречается дважды. Сделаем замену.

Пусть $(x+a)=t$. Ограничений на t нет.

Получим: $t^2+t-2=0 \Rightarrow (t+2)(t-1)=0 \Rightarrow t_1=-2,\ t_2=1.$

Вернёмся к замене. При любом значении параметра a получим два решения $x=1-a$ и $x=-2-a$.

Ответ: при любом a $x=1-a$ и $x=-2-a$.

Пример 2. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$4^x-(a+1)\cdot 2^x+a=0.$$

Пусть $t=2^x$, $t>0$.

Получим: $t^2-(a+1)t+a=0$.

$$D=(a+1)^2-4a=(a-1)^2 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{(a+1)\pm|a-1|}{2}.$$

Раскроем модуль:

1) если $a\geq 1$, то $|a-1|=a-1$, тогда $t_1=\frac{a+1+a-1}{2}=a$, $t_2=\frac{a+1-(a-1)}{2}=1$.

2) если $a<1$, то $|a-1|=1-a$, тогда $t_1=\frac{a+1+1-a}{2}=1$, $t_2=\frac{a+1-(1-a)}{2}=a$.

В обоих случаях получаем $t=1$ и $t=a$.

Вернёмся к замене $2^x=t$ с учётом $t>0$:

$2^x=1\Rightarrow x=0$; $2^x=a\Rightarrow x=\log_2 a$ — существует только при $a>0$.

Теперь рассмотрим возможные значения a:

- $a\leq 0$: корень $2^x=a$ не существует (так как $a\leq 0$, а $2^x>0$). Остаётся только $x=0$ — одно решение.
- $0<a<1$: $x=\log_2 a$, $x=0$ — два различных корня.
- $a=1$: $2^x=1$ и $2^x=1$ — корни совпадают, остаётся $x=0$ — одно решение.
- $a>1$: $a>0$, $\log_2 a>0$, также $x=0$ — два различных решения.

Ответ: при $a\leq 0$: $x=0$; при $0<a<1$: $x=0$ и $x=\log_2 a$; при $a=1$: $x=0$; при $a>1$: $x=0$ и $x=\log_2 a$.

2.2 Графический метод решения уравнений с параметрами

Графический метод – это способ исследования уравнения, при котором алгебраическая задача переводится на язык геометрии.

Он заключается в сведении задачи к исследованию взаимного расположения графиков функций на координатной плоскости, где одна из осей соответствует переменной, а другая – параметру. Альтернативным способом является представление уравнения в виде $f(x) = g(x, a)$ и построение на плоскости xOy неподвижного графика $y = f(x)$ и семейства графиков $y = g(x, a)$, зависящих от параметров. Но метод не является универсальным. Если в уравнении можно выразить параметр или разбить на две простые функции, то используем графический метод, в противном случае – алгебраический.

Как решить, какую плоскость выбрать?

Выбор плоскости зависит от того, как проще представить уравнение. Если параметр можно выразить через переменную, то выбираем плоскость xOa; если уравнение удаётся записать как равенство двух функций, то есть $f(x) = f(x, a)$, где $f(x)$ не содержит параметра, а $f(x, a)$ образует простое семейство – плоскость xOy.

2.2.1 Плоскость xOa

Алгоритм для плоскости xOa

1. Выразить параметр: $a = \varphi(x)$.

2. Построить график $a = \varphi(x)$ с учётом ограничений.

3. Для каждого интересующего значения a провести прямую $a = const$.

4. Сосчитать количество точек пересечения прямой с графиком, это число решений.

5. Записать ответ в зависимости от задачи: при каких a сколько решений или сами корни.

Пример. Определить, при каких значениях параметра a уравнение

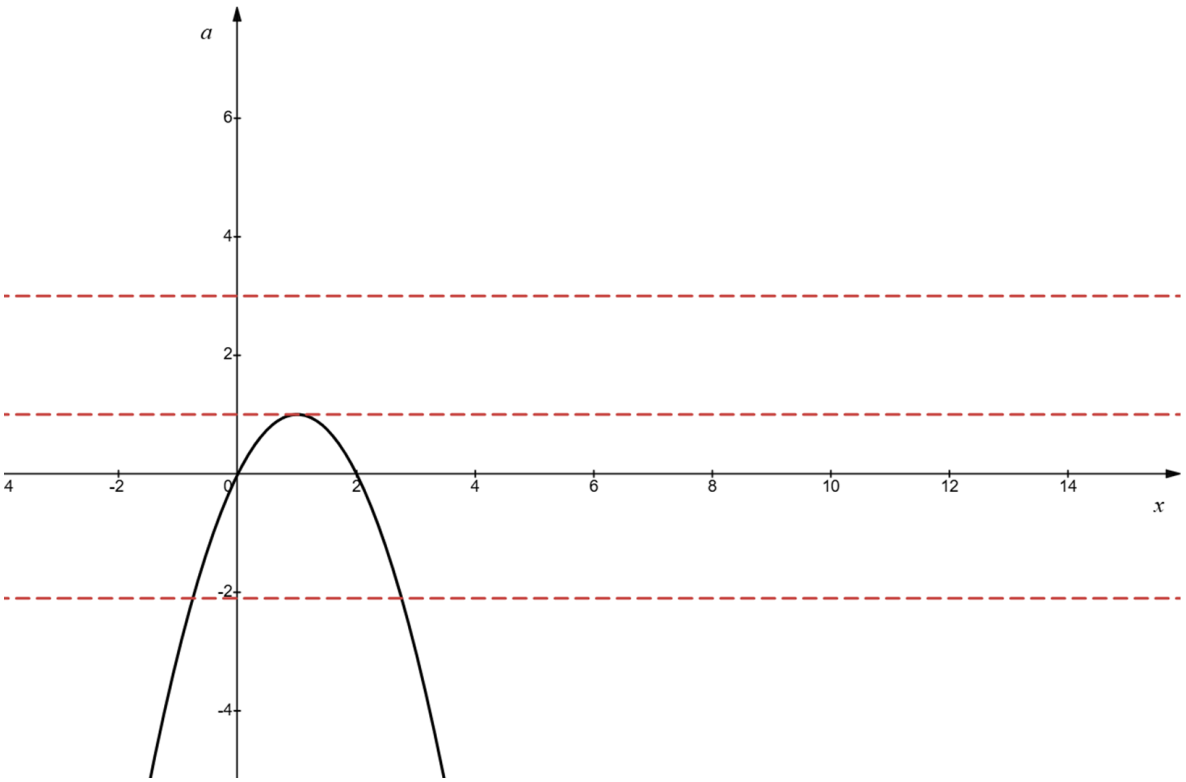
$$x^2 - 2x + a = 0$$

имеет ровно один корень.

1. Выразим параметр a: $a = -x^2 + 2x$.

2. Построим график функции $a(x) = -x^2 + 2x$.

3. Проведём горизонтальные прямые $a = \text{const}$.



4. Анализируем пересечения: при $a > 1$ – 0 решений; при $a = 1$ – 1 решение ($x = 1$); при $a < 1$ – 2 решения;

Ответ: $a = 1$.

2.2.2 Плоскость xOy

Алгоритм для плоскости xOy

1. Привести уравнение к виду $f(x) = g(x, a)$, где левая часть должна быть без параметра.

2. Построить график $y = f(x)$.

3. Построить семейство кривых $y = g(x, a)$ для различных значений параметра a (схематично).

4. Найти точки пересечения графиков функций, что и будет решениями.

Пример. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$x^2 = a - x$$

имеет ровно одно решение.

1. Приводим к виду $f(x) = g(x, a)$: $x^2 = a - x$.

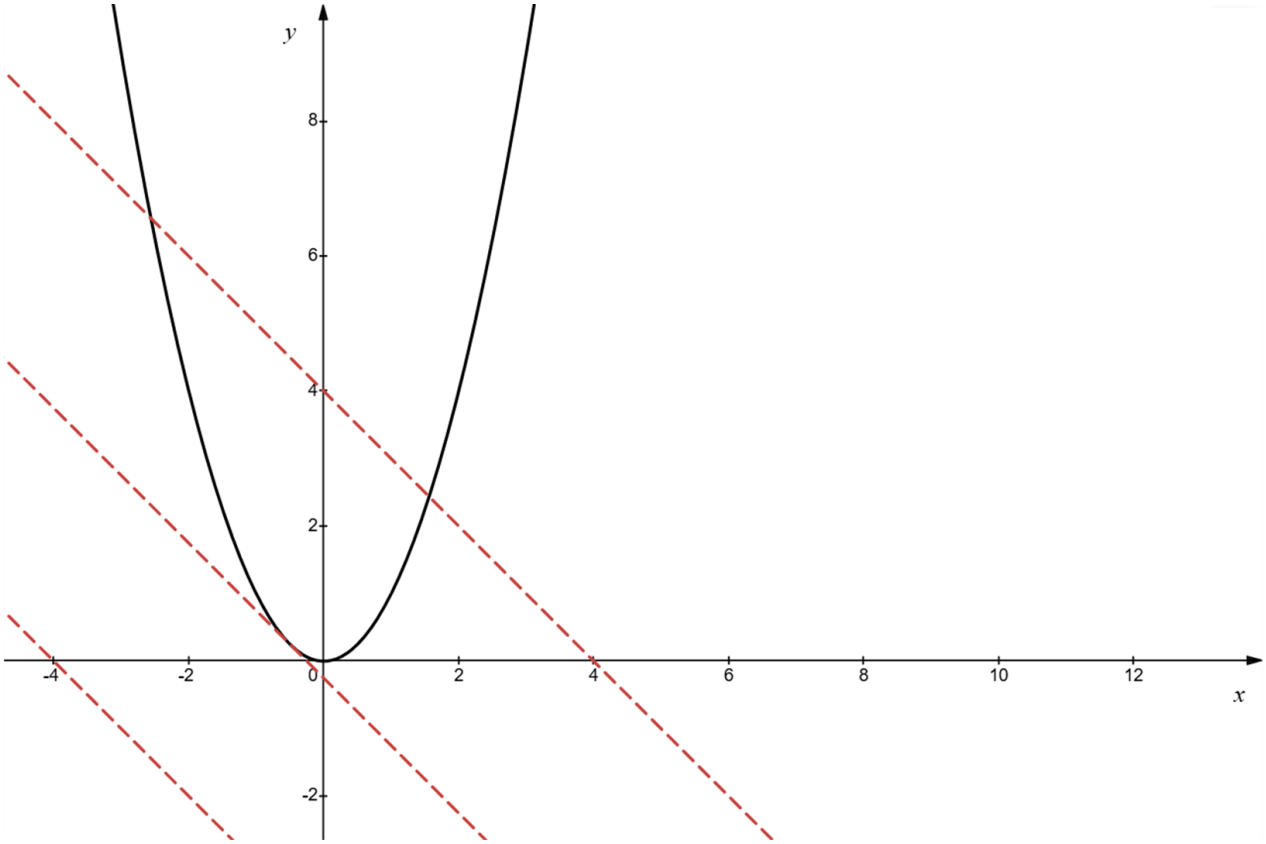
2. Строим графики: график $y = x^2$ — фиксированная парабола; пучок прямых $y = a - x$.

3. Находим условие касания: приравниваем правые части:

$$x^2 = a - x \Rightarrow x^2 + x - a = 0,$$

это квадратное уравнение относительно x. Оно имеет единственное решение, когда дискриминант равен нулю: $D = 1 + 4a = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$.

При этом $x = -\frac{1}{2}$ (точка касания).



4. Анализируем рисунок: при $a < -\frac{1}{4}$ прямая $y = a - x$ лежит ниже точки касания и не пересекает параболу – 0 решений; при $a = -\frac{1}{4}$ прямая

касается параболы – 1 решение; при $a > -\frac{1}{4}$ прямая пересекает параболу в двух точках – 2 решения.

Ответ: $a = -\frac{1}{4}$.

2.2.3 Касание графиков

Касание графиков – это случай, когда графики имеют ровно одну общую точку.

Алгоритм

1. Приравнять правые части, то есть $f(x) = g(x, a)$.
2. Получить квадратное уравнение относительно x.
3. Потребовать $D = 0$.
4. Решить полученное уравнение относительно a.
5. Проверить, что точка касания подходит под ограничение.

Пример. Найти все значения параметра a, при которых прямая $y = ax + 1$ касается параболы $y = x^2 - 2x + 2$.

Приравняем правые части $ax + 1 = x^2 - 2x + 2$. Получим уравнение

$$x^2 - (a + 2)x + 1 = 0.$$

Найдём дискриминант и приравняем его к нулю:

$$D = (a + 2)^2 - 4 = a(a + 4) = 0 \Rightarrow a = 0 \text{ или } a = -4.$$

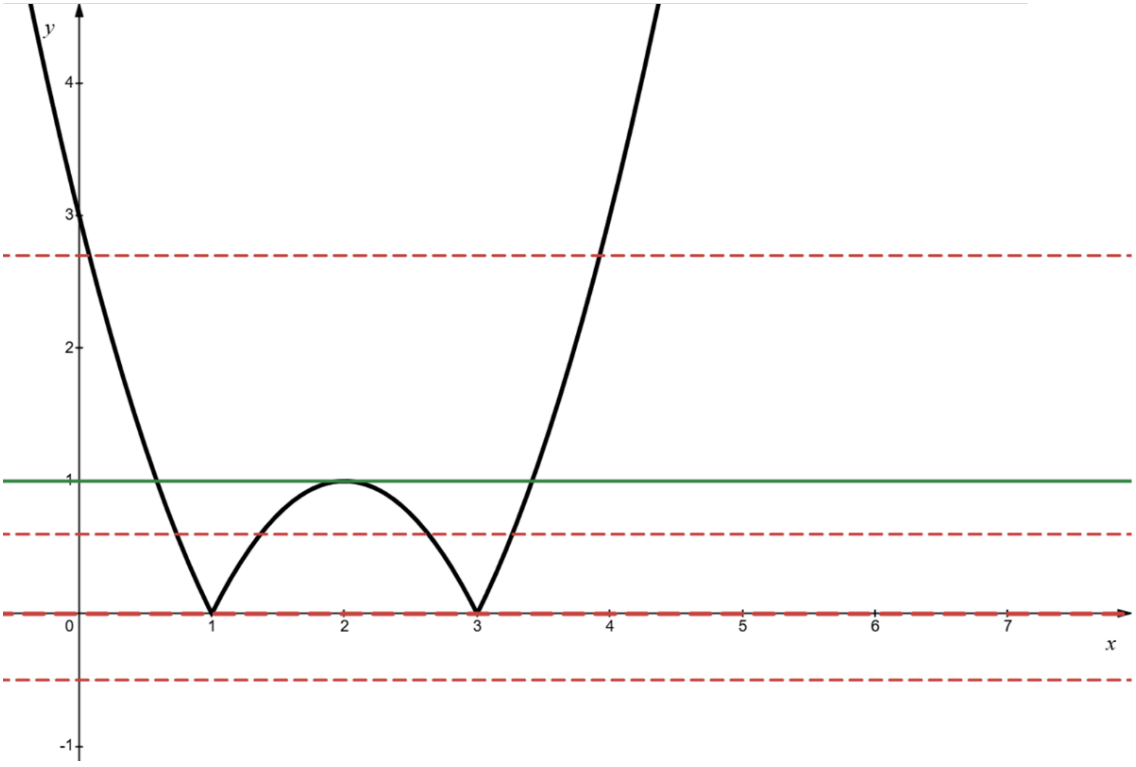
2.2.4 Уравнения с модулем

Графический метод особенно эффективен для решения уравнений с модулями, так как график функции с модулем легко строится отражением части графика, лежащей ниже оси Ox.

Так, чтобы построить график $y = |f(x)|$, нужно взять график $y = f(x)$ и часть, лежащую ниже оси Ox, отразить симметрично вверх.

Пример. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2 - 4x + 3| = a$ имеет ровно 3 решения?

Строим параболу $y = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1$. Её вершина $(2; -1)$, корни $x = 1, x = 3$. Затем отражаем часть параболы, где $y < 0$ (между корнями), вверх. Получаем «впадину», поднятую над осью. Теперь проводим горизонтальные прямые $y = a$.



Количество пересечений:

- $a < 0$ – нет решений;
- $a = 0$ – два решения (корни $x = 1, x = 3$);
- $0 < a < 1$ – четыре решения (два на отражённой дуге и два на боковых ветвях);
- $a = 1$ – три решения (вершина отражённой части + две точки на ветвях);
- $a > 1$ – два решения (только боковые ветви).

2.2.5 Окружности и их пересечения

Окружность задаётся уравнением вида $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Параметр может входить как в координаты центра, так и в радиус окружности.

Рассмотрим, как две окружности могут располагаться относительно друг друга.

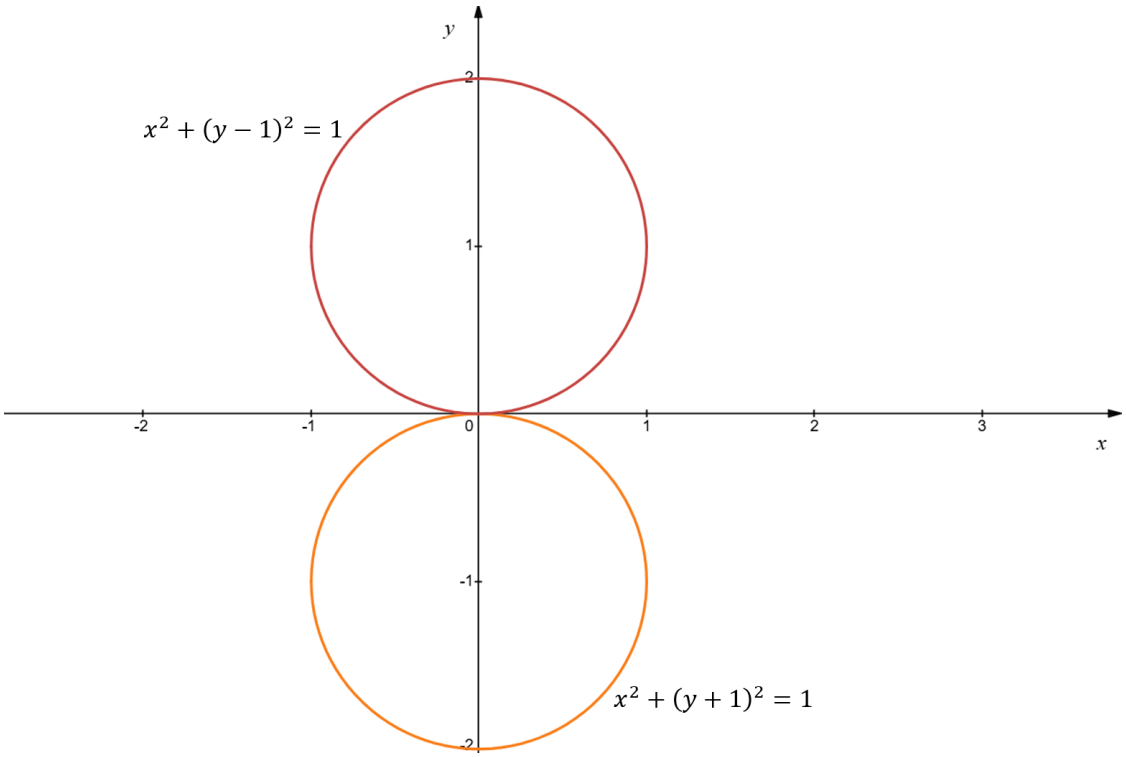
Пусть R_1, R_2 – радиусы окружностей, d – расстояние между их центрами.

- Если $d > R_1 + R_2$ – окружности не пересекаются.
- Если $d = R_1 + R_2$ – окружности не пересекаются.
- Если $|R_1 - R_2| < d < R_1 + R_2$ – две точки пересечения.
- Если $d = |R_1 - R_2|$ – внутреннее касание.
- Если $d < |R_1 - R_2|$ – одна окружность лежит внутри другой.

Аналогично для пересечения окружности и прямой. Пусть d – расстояние между центром окружности и прямой, R – радиус окружности. Тогда прямая касается окружности, если $d = R$.

Пример. При каких a окружность $x^2 + (y - a)^2 = 1$ касается оси Ox?

Рассмотрим уравнение окружности $x^2 + (y - a)^2 = 1$. Центр находится в точке $(0; a)$, радиус окружности равен 1. Ось Ox – это прямая $y = 0$.



Значит расстояние от центра окружности до оси должно быть равно радиусу окружности, то есть $|a| = 1$. Следовательно, $a = 1$ или $a = -1$.

Ответ: $a = 1$ или $a = -1$.

Упражнения для самостоятельной работы

Решить аналитическим методом.

№1. Для всех значений параметра a решить уравнение:

а) $(a^2-1)x = a^3+1$;

б) $\frac{a}{a-1}x = a^2+a+1$;

в) $(a+4)x = 2a+1$;

г) $(3a-2)(a+1)x = a^2-4$.

№2. Для всех значений параметров a и b решить уравнение:

а) $(a-2)x = 4a+3b$;

б) $(a+2)x+b = a-3bx$;

в) $(a^2-b^2)x = a-b$

г) $(ab-1)x = a+b$.

№3. При каких значениях b уравнение имеет бесконечно много решений? Не имеет решений?

а) $(a^2-4)x = a-2$;

б) $(b^2-1)x = b-1$;

в) $(b^2-9)x = b-3$;

г) $(b^2-5b+6)x = b^2-4$;

д) $(b^2+b)x = b+1$.

№4. Для всех значений параметра p решить уравнение:

а) $(p-1)x^2+2x+1=0$;

б) $(p^2-1)x^2+2(p-1)x+1=0$;

в) $(p^2-p)x^2+(2p-1)x+1=0$;

г) $(p+2)x^2+2px+p-2=0$;

д) $px^2+2(p+1)x+p=0$.

№5. Найти все значения параметра m, при которых уравнение имеет ровно одно решение:

а) $mx^2+(m-1)x+1=0$;

б) $(m^2-4)x^2+(m-2)x+1=0$;

в) $(m+1)x^2+2mx+m=0$;

г) $mx^2+2(m-1)x+m-2=0$.

№6. При каких значений параметра q уравнение имеет два различных положительных корня?

а) $x^2+qx+q=0$;

б) $x^2+(q-4)x+q=0$;

в) $2x^2-(q+1)x+q-1=0$;

г) $qx^2-(q+2)x+2=0$.

№7. Для всех значений параметра n решить уравнение:

а) $\frac{x^2-2x+n}{x-1}=0$;

б) $\frac{nx-1}{x^2+1}=0$;

в) $\frac{x^2+nx-2n}{x-n}=0$;

г) $\frac{x^2-(n+1)x+n}{x^2-1}=0$.

№8. Найдите все значения параметра, при которых корни уравнения принадлежат заданному отрезку:

а) $x^2 - 2(a-1)x + a^2 - 2a - 3 = 0$ принадлежат $[-1; 3]$;

б) $x^2 - 2(p+1)x + p^2 - 1 = 0$ принадлежат $[-2; 4]$;

в) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 4m + 3 = 0$ принадлежат $[-1; 3]$.

№9. Для всех значений параметра w решите уравнение:

а) $\frac{x^2-w}{x-1} = 0$;

б) $\frac{x^2-2wx+w^2}{x^2-4} = 0$;

в) $\frac{x^2-w}{x+2} = 0$;

г) $\frac{x^2-2wx+w^2}{x^2-9} = 0$;

д) $\frac{wx-1}{x^2+1} = 0$.

№10. Найти все значения параметра b, при которых уравнение имеет ровно одно решение:

а) $\frac{x^2-b}{x+2} = 0$;

б) $\frac{x^2-4}{x-b} = 0$;

в) $\frac{x^2-b}{x+1} = 0$;

г) $\frac{|x|-b}{x-1} = 0$.

№11. Найти все значения параметра r, при которых уравнение имеет ровно два различных решения:

а) $\frac{x^2+r}{x+1} = 0$;

б) $\frac{x^2-r^2}{x^2-4} = 0$;

в) $\frac{x^2-(r+1)x+2r}{x-2} = 0$;

г) $\frac{x^2+r}{x^2-r} = 0$.

№12. Для всех значений параметра d решить уравнение:

а) $\sqrt{x+d} = x$;

б) $\sqrt{x^2+d} = x+1$;

в) $\sqrt{x-d} = \sqrt{x+1}$;

г) $\sqrt{x+d} = \sqrt{2x-d}$.

№13. Найти все значения параметра s, при которых уравнение имеет ровно одно решение:

а) $\sqrt{x+1} = s - x$;

б) $\sqrt{x+s} = 2 - x$;

в) $\sqrt{x^2-1} = x + s$;

г) $\sqrt{2x-s} = x - 1$.

№14. Для всех значений параметра t решить уравнение:

а) $|x-t| = 2$;

в) $|x-t| + |x+1| = 2$;

б) $|2x - t| = x + 1$; г) $|x - 2t| = t$.

№15. Найти все значения параметра c, при которых уравнение имеет ровно одно решение:

а) $|x + c| = |x - 1|$; в) $|x - 2| = |x + c|$;

б) $|x + 3| - |x - c| = 0$; г) $|2x - c| = x + 1$.

№16. Найдите все значения параметра h, при которых уравнение имеет ровно два различных решения:

а) $| x + 1 | + | x + 3 | = h$; в) $| x + h | = x + 1$;

б) $| x - 1 | + | x + 2 | = h$; г) $| 2x - h | = | x + 3 |$.

№17. Для всех значений параметра j решить уравнение:

а) $x^4 + (j - 1)x^2 + 1 = 0$;

б) $4^x + j \cdot 2^x + 1 = 0$;

в) $(x^2 + 2x)^2 + (j - 1)(x^2 + 2x) - j = 0$;

г) $(x + j)^2 + (x + j) - 2 = 0$.

№18. Найдите все значения параметра v, при которых уравнение имеет ровно один корень:

а) $4^x - (v + 3) \cdot 2^x + v + 2 = 0$; в) $\log_2^2 x - v \cdot \log_2 x + 1 = 0$;

б) $2^{2x} - (v + 1)2^x + v = 0$; г) $sin2x + v(sinx + cosx) = 0$.

Решить графическим методом.

№19. Постройте график в плоскости xOa. Используя построенный график, определите, при каких значениях a уравнение

а) $x^2 - 4x + a = 0$ имеет ровно один корень;

б) $|x| + 2x = a$ имеет ровно два различных корня;

в) $\frac{x^2-1}{x-2} = a$ не имеет решений;

г) $x^2 - 2|x| = a$ имеет ровно три корня;

д) $\sqrt{x + 2} = a$ имеет ровно один корень;

е) $\frac{x^2-3x+2}{x-1} = a$ имеет бесконечно много решений.

№20. С помощью плоскости xOa найдите все значения a, при которых уравнение

а) $a = \frac{x^2-3x+2}{x+1}$ имеет единственное решение;

б) $\sqrt{x+a} = x$ имеет два различных корня;

в) $a = \frac{x^2+x}{x-1}$ не имеет решений;

г) $a = |x-2| - |x+2|$ имеет ровно одно решение.

№21. Постройте график функции $y = x^2 - 2x$ и семейство горизонтальных прямых $y = a$. С помощью полученного чертежа найдите значения a, при которых

а) уравнение $x^2 - 2x = a$ имеет два различных решения;

б) при которых то же уравнение имеет ровно одно решение на отрезке [0;3];

в) при которых корни уравнения принадлежат отрезку [-1;2];

г) при которых уравнение имеет ровно один положительный корень.

№22. Используя плоскость xOy, найдите все значения параметра а, при которых уравнение

а) $\sqrt{x+2} = a - x$ имеет единственное решение;

б) $2^x = a - x$ имеет хотя бы одно решение;

в) $\cos x = a$ на отрезке $[0; \pi]$ имеет ровно два решения;

г) $|x^2 - 2x| = a$ имеет ровно три решения.

№23. Найдите все значения a, при которых прямая $y = ax$ касается параболы:

а) $y = x^2 + 2x + 1$;

б) $y = x^2 - 4x + 5$;

в) $y = 2x^2 - 3x + 1$;

№24. Определите значения a, при которых прямая $y = 2x + a$ является касательной к графику функции:

а) $y = x^3 - 3x$;

б) $y = e^x$;

в) $y = \ln x$;

г) $y = \sqrt{x}$.

№25. Постройте график функции $y = | x^2 - 4 |$ и определите при каких a уравнение $| x^2 - 4 | = a$

а) имеет ровно четыре решения;

б) имеет ровно два решения;

в) имеет ровно три решения;

г) не имеет решений.

№26. Определите при каких a уравнение

а) $| x - 2 | + | x + 1 | = a$ не имеет решений;

б) $| x^2 - 2 | x || = a$ имеет ровно три решения;

в) $| x - 1 | - | x + 2 | = a$ имеет бесконечно много решений;

г) $| \sin x | = a$ на отрезке $[0; 2\pi]$ имеет ровно четыре решения?

№27. Определите, при каких значениях a окружность касается указанной оси:

а) $x^2 + (y - a)^2 = 4$ касается оси Ox;

б) $(x - a)^2 + y^2 = 1$ касается оси Oy;

в) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = a^2$ касается оси Ox;

г) $x^2 + y^2 = a$ касается прямой $y = x$.

№28. Даны две окружности: $x^2 + y^2 = 1$ и $(x - 2)^2 + y^2 = a^2$. При каких значениях a они:

а) касаются внешним образом;

б) имеют ровно две общие точки;

в) одна окружность лежит внутри другой, не касаясь;

г) не пересекаются и не лежат одна внутри другой.

№29. Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2, \\ y = | x | + 1 \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

§3. Типовые задачи из ЕГЭ

2021 год.

Пример 1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x + a|\sqrt{4x + 3}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Решение.

$$|x^2 - a^2| - |x + a|\sqrt{4x + 3} = 0$$

$$|x - a||x + a| - |x + a|\sqrt{4x + 3} = 0$$

$$|x + a| \cdot (|x - a| - \sqrt{4x + 3}) = 0$$

Учитывая, что подкоренное выражение должно быть больше или равно нуля, получим ограничение: $4x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{4}$.

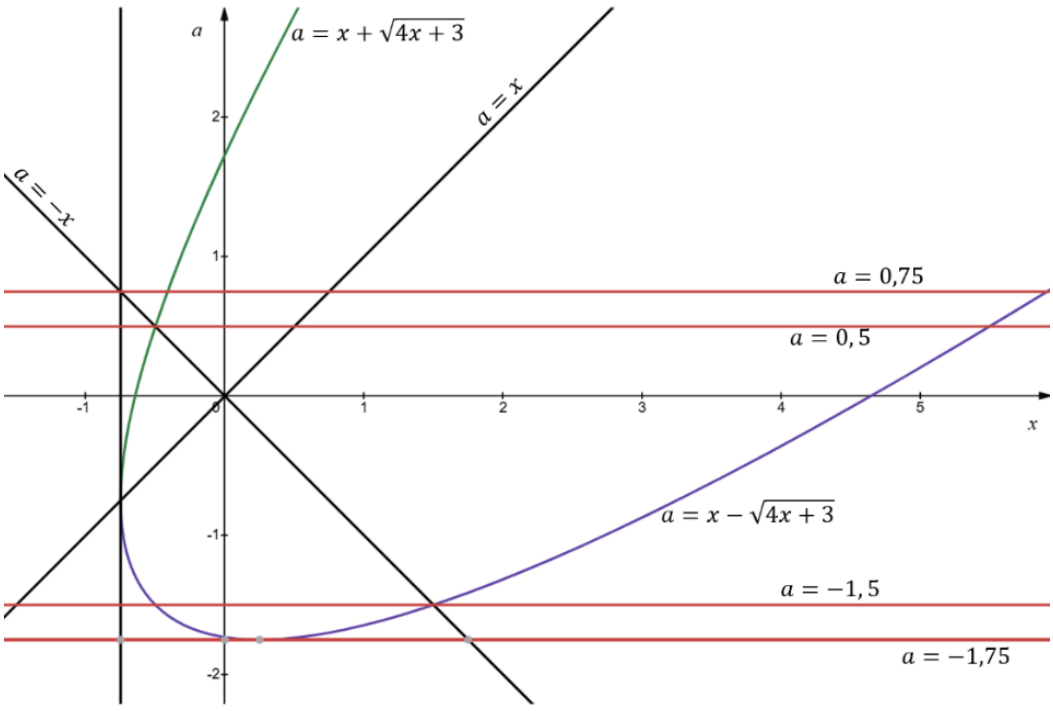
$$|x + a| \cdot \left(|x - a| - \sqrt{4x + 3}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} |x + a| = 0 & (1) \\ |x - a| - \sqrt{4x + 3} = 0 & (2) \end{array}\right.$$

(1): $x + a = 0 \Rightarrow x = -a \Rightarrow a = -x$

(2): если $x \geq a$, то $x - a - \sqrt{4x + 3} = 0 \Rightarrow a = x - \sqrt{4x + 3}$;

если $x < a$, то $-x + a - \sqrt{4x + 3} = 0 \Rightarrow a = x + \sqrt{4x + 3}$.

Решим графически в системе координат xOa.



Найдём пересечение графиков $a = x$ и $a = x + \sqrt{4x+3}$: $x = x + \sqrt{4x+3}$, значит $x = -\frac{3}{4}$.

Найдём пересечение графиков $a = x$ и $a = x - \sqrt{4x+3}$: $x = x - \sqrt{4x+3}$, значит $x = -\frac{3}{4}$.

- Найдём координаты точки A, которая является точкой минимума графика $f(x) = x - \sqrt{4x+3}$:

$f'(x) = 1 - \frac{4}{2\sqrt{4x+3}} \Rightarrow 1 = \frac{2}{\sqrt{4x+3}} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$.

Получим, что $a = f(x) = \frac{1}{4} - \sqrt{4} = -1{,}75 \Rightarrow A(0{,}25; -1{,}75)$.

- Найдём координаты точки B, которая является точкой пересечения графиков $a = -x$ и $a = x - \sqrt{4x+3}$: $-x = x + \sqrt{4x+3}$.

$2x - \sqrt{4x+3} = 0 \Rightarrow 2x = \sqrt{4x+3}$, возведём обе части в квадрат, учитывая, что $x \geq 0$.

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x - 3 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1{,}5;\ x_2 = -0{,}5 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1{,}5.$$

Получим, что $a = \frac{3}{2} - \sqrt{\frac{4}{2} \cdot \frac{3}{2} + 3} = -1{,}5 \Rightarrow B(1{,}5; -1{,}5)$.

- Найдём координаты точки C, которая является точкой пересечения графиков $a = -x$ и $a = x + \sqrt{4x+3}$: $-x = x + \sqrt{4x+3}$.

$2x = -\sqrt{4x+3}$, возведём обе части в квадрат, учитывая, что $x \leq 0$.

$$\begin{cases} 4x^2 - 4x - 3 = 0 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1{,}5;\ x_2 = -0{,}5 \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow x = -0{,}5.$$

Получим, что $a = -\frac{1}{2} + \sqrt{1} = 0{,}5 \Rightarrow C(-0{,}5; 0{,}5)$.

- Найдём координаты точки D, которая является точкой пересечения графиков $a = -x$ и $x = -\frac{3}{4}$.

Получим, что $a = -(-\frac{3}{4}) = 0{,}75 \Rightarrow D(-0{,}75; 0{,}75)$.

Таким образом, 2 решения будет при $a \in \{-1{,}75;\ -1{,}5; 0{,}5\} \cup (0{,}75; +\infty)$.

Ответ: $\{-1{,}75;\ -1{,}5; 0{,}5\} \cup (0{,}75; +\infty)$.

Пример 2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x + a|\sqrt{x^2 - 7ax + 8a}$$

имеет ровно 2 различных решения.

Решение.

$$|x^2 - a^2| - |x + a|\sqrt{x^2 - 7ax + 8a} = 0$$

$$|x - a||x + a| - |x + a|\sqrt{x^2 - 7ax + 8a} = 0$$

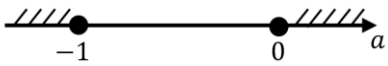
$$|x + a| \cdot (|x - a| - \sqrt{x^2 - 7ax + 8a}) = 0$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{c} |x + a| = 0 \\ |x - a| - \sqrt{x^2 - 7ax + 8a} = 0 \end{array}\right. \\ x^2 - 7ax + 8a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{c} x = -a \\ |x - a| = \sqrt{x^2 - 7ax + 8a} \end{array}\right. \\ x^2 - 7ax + 8a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{ll} x = -a & (1) \\ x = -\dfrac{a + 8}{5} & (2) \end{array}\right. \\ x^2 - 7ax + 8a \geq 0 \end{cases}$$

(1): найдём при каких значениях параметра существует первый корень $x = -a$.

$$\begin{cases} x = -a \\ x^2 - 7ax + 8a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (-a)^2 - 7a \cdot (-a) + 8a \geq 0 \Rightarrow a(a + 1) \geq 0.$$

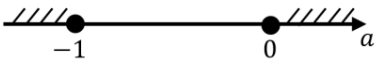


Значит при $a \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$ существует $x = -a$.

(2): найдём при каких значениях параметра существует второй корень $x = -\frac{a+8}{5}$.

$$\begin{cases} x = -\dfrac{a + 8}{5} \\ x^2 - 7ax + 8a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{a + 8}{5}\right)^2 - 7a \cdot \left(-\frac{a + 8}{5}\right) + 8a \geq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow (3a - 4)^2 \geq 0 \Rightarrow$ корень существует при любом значении a.



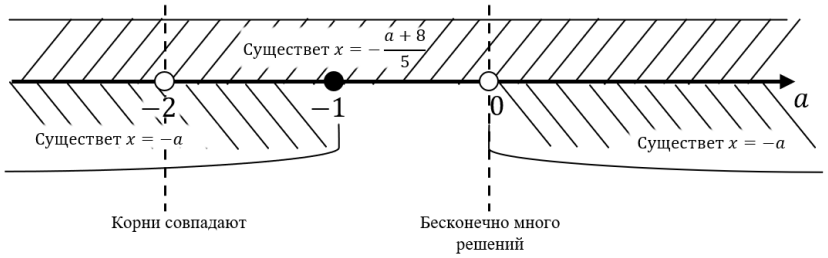
Значит при $a \in (-\infty; -1] \cup [0; +\infty)$ существует $x = -a$.

Рассмотрим случай совпадения первого и второго корней: $-a = -\frac{a+8}{5} \Rightarrow$ $a = -2$ – при этом значении параметра первый и второй корни совпадают.

Рассмотрим случай, когда $a = 0$:

$|x^2 - 0^2| = |x + 0|\sqrt{x^2 - 7 \cdot 0 \cdot x + 8 \cdot 0} \Rightarrow |x^2| = |x| \cdot \sqrt{x^2} \Rightarrow$ при $a = 0$ уравнение имеет бесконечно много решений.

Соединим все рассмотренные случаи.



Тогда два различных корня будет при $a \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup (0; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -2) \cup (-2; -1] \cup (0; +\infty)$.

Пример 3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| + 8 = |x + a| + 8|x - a|$$

имеет ровно 3 различных решения.

Решение.

$$|x - a||x + a| + 8 - (|x + a| + 8|x - a|) = 0$$

$$|x - a|(|x + a| - 8) - (|x + a| - 8) = 0$$

$$(|x + a| - 8)(|x - a| - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} |x + a| = 8 \\ |x - a| = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x + a = -8 \\ x + a = 8 \\ x - a = -1 \\ x - a = 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x = -a - 8 \\ x = 8 - a \\ x = a - 1 \\ x = a + 1 \end{bmatrix}.$$

Решения $-a - 8$ и $8 - a$ совпасть не могут, как и решения $a - 1$ и $a + 1$ рассмотрим случаи $8 - a = a + 1$, или $8 - a = a - 1$; или $-8 - a = a + 1$, или $-8 - a = a - 1$ найдем $a = \pm 3{,}5$ или $a = \pm 4{,}5$ Ясно, что две пары решений не могут совпасть ни при каких значениях параметра.

Ответ: $a = \pm 3{,}5$ или $a = \pm 4{,}5$.

2022 год.

Пример 1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + a^2 + x - 7a = |7x + a|$$

имеет более двух различных корней.

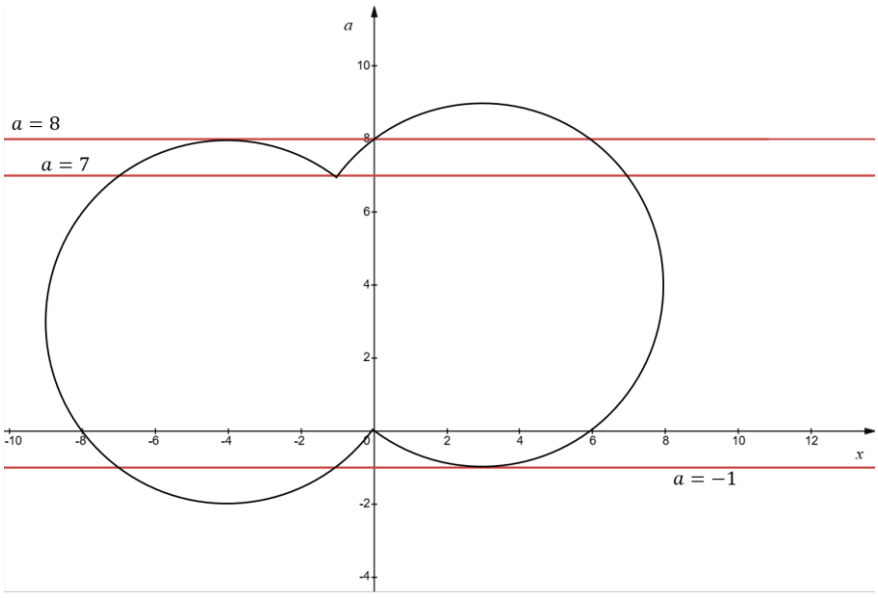
Решение.

$$x^2 + a^2 + x - 7a = |7x + a| \Leftrightarrow \left[\begin{cases} x^2 + a^2 + x - 7a = 7x + a \\ 7x + a \geq 0 \end{cases} \right. \left. \begin{cases} x^2 + a^2 + x - 7a = -7x - a \\ 7x + a < 0 \end{cases} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{cases} x^2 - 6x + a^2 - 8a = 0 \\ a \geq -7x \end{cases} \right. \left. \begin{cases} x^2 + 8x + a^2 - 6a = 0 \\ a < -7x \end{cases} \right. \Rightarrow \left[\begin{cases} x^2 - 6x + 9 + a^2 - 8a + 16 = 9 + 16 \\ a \geq -7x \end{cases} \right. \left. \begin{cases} x^2 + 8x + 16 + a^2 - 6a + 9 = 16 + 9 \\ a < -7x \end{cases} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{cases} (x-3)^2 + (a-4)^2 = 5^2 \\ a \geq -7x \end{cases} \right. \left. \begin{cases} (x+4)^2 + (a-3)^2 = 5^2 \\ a < -7x \end{cases} \right.$$

Таким образом, в системе координат xOa исходное уравнение задаёт объединение дуг окружностей радиуса 5 с центрами в точках $(3;4)$ и $(-4;3)$ лежащих выше и ниже прямой $a = -7x$ соответственно, пересекающихся в точках $A(-1;7)$ и $O(0;0)$ Количество корней равнения равно количеству точек пересечения графика уравнения с горизонтальной прямой при соответствующем значении a.



Получим, что:

— при $a < -2$ уравнение не имеет корней;

— при $a = -2$ уравнение имеет один корень;

— при $-2 < a < -1$ уравнение имеет два корня;

— при $a = -1$ уравнение имеет три корня;

— при $-1 < a < 0$ уравнение имеет четыре корня;

— при $a = 0$ уравнение имеет три корня;

— при $0 < a < 7$ уравнение имеет два корня;

— при $a = 7$ уравнение имеет три корня;

— при $7 < a < 8$ уравнение имеет четыре корня;

— при $a = 8$ уравнение имеет три корня;

— при $8 < a < 9$ уравнение имеет два корня;

— при $a = 9$ уравнение имеет один корень;

— при $a > 9$ уравнение не имеет корней.

Таким образом, уравнение имеет более двух различных корней при $-1 \leq a \leq 0$ или при $7 \leq a \leq 8$.

Ответ: $[-1; 0] \cup [7; 8]$.

Пример 2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 2ax - 4a - 3x^2 - 4x + 8|x| = 0$$

имеет ровно 4 различных решения.

Решение.

$$a^2 - 2ax - 4a - 3x^2 - 4x + 8|x| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2 - a(2x+4) - 3x^2 + 12x = 0 \ (1) \\ x \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 - a(2x+4) - 3x^2 - 4x = 0 \ \ (2) \\ x < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Исходное уравнение имеет 4 решения, когда уравнение (1) имеет 2 решения и уравнение (2) имеет 2 решения.

Преобразуем (1):

$$D = \big(-(2x+4)\big)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3x^2 + 12x) = (4x-4)^2 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_1 = \frac{2x+4+4x-4}{2} = 3x;\ a_2 = \frac{2x+4-4x+4}{2} = 4 - x.$$

Получим: $(a - 3x)(a - 4 + x) = 0.$

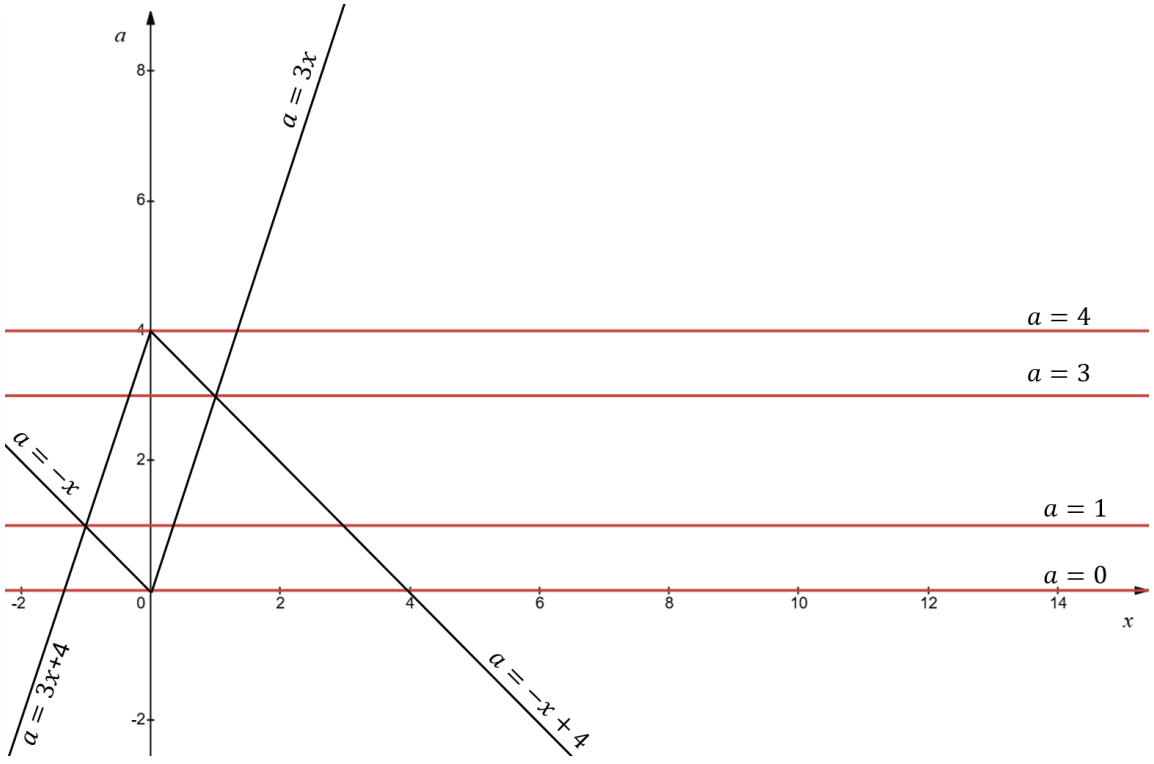
Преобразуем (2):

$$D = \left(-(2x+4)\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3x^2 - 4x) = (4x+4)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ a_1 = \frac{2x+4+4x+4}{2} = 3x + 4;\ a_2 = \frac{2x+4-4x-4}{2} = -x.$$

Получим: $(a - 3x - 4)(a + x) = 0.$

$$\left[\begin{cases}(a-3x)(a-4+x)=0\\ x \geq 0\end{cases}\right. \left.\begin{cases}(a-3x-4)(a+x)=0\\ x<0\end{cases}\right. \Rightarrow \left[\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=3x\\ a=-x+4\end{array}\right.\\ x \geq 0\end{cases}\right. \left.\begin{cases}\left[\begin{array}{l}a=3x+4\\ a=-x\end{array}\right.\\ x<0\end{cases}\right.$$



Получим, что:

— при $a < 0$ уравнение имеет 2 корня;

— при $a = 0$ уравнение имеет 3 корня;

— при $0 < a < 1$ уравнение имеет 4 корня;

— при $a = 1$ уравнение имеет 3 корня;

— при $1 < a < 3$ уравнение имеет 4 корня;

— при $a = 3$ уравнение имеет 3 корня;

— при $3 < a < 4$ уравнение имеет 4 корня;

— при $a = 4$ уравнение имеет 3 корня;

— при $a > 4$ уравнение имеет 2 корня.

Ответ: $(0; 1) \cup (1; 3) \cup (3; 4)$.

Пример 3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|2x^2 - 3x - 2| = a - 2x^2 - 8x$$

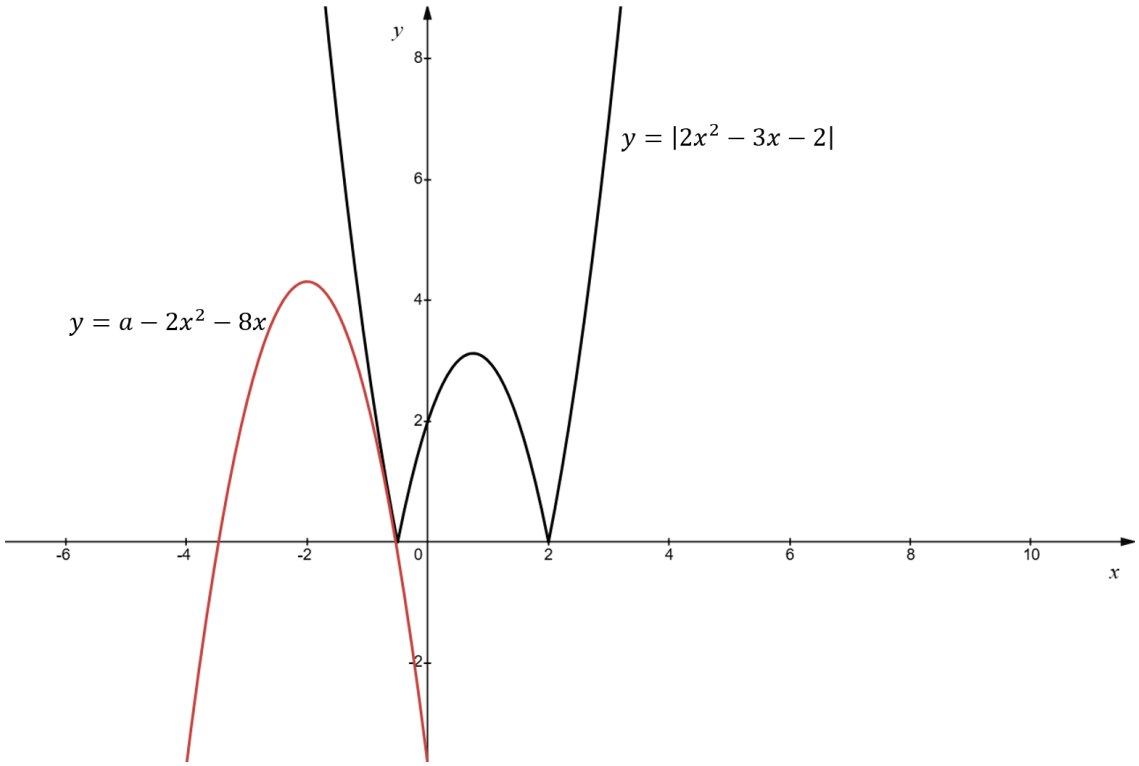
либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

Решение.

Построим $y = |2x^2 - 3x - 2|$. Для этого найдем координаты вершины параболы: $x_0 = \frac{3}{4}$; $y_0 = \left|2 \cdot \frac{9}{16} - 3 \cdot \frac{3}{4} - 2\right| = \left|-\frac{25}{8}\right| = \frac{25}{8}$.

Найдем при каких x $y = 0$: $|2x^2 - 3x - 2| = 0 \Rightarrow x_1 = 2$; $x_2 = -\frac{1}{2}$.

Построим $y = a - 2x^2 - 8x$. Найдем координаты вершины параболы: $x_0 = -2$; $y_0 = \left|2 \cdot \frac{9}{16} - 3 \cdot \frac{3}{4} - 2\right| = \left|-\frac{25}{8}\right| = \frac{25}{8}$.



Найдем точку касания парабол.

Парабола $y = a - 2x^2 - 8x$ касается $y = |2x^2 - 3x - 2|$ там, где ветви идут вверх.

Поэтому рассмотрим касание функций:

$y = 2x^2 - 3x - 2$ и $y = a - 2x^2 - 8x$.

Для этого приравняем правые части:

$2x^2 - 3x - 2 = a - 2x^2 - 8x \quad \Rightarrow \quad 4x^2 + 5x - 2 - a = 0.$

Чтобы графики касались друг друга уравнение $4x^2 + 5x - 2 - a = 0$ должно иметь один корень, то есть $D = 0 \Rightarrow D = 25 - 4 \cdot 4 \cdot (-2 - a) = 0 \Rightarrow a = -\frac{57}{16}$.

Проанализируем график:

— при $a < -\frac{57}{16}$ – нет решений;

— при $a = -\frac{57}{16}$ – 1 решение;

— при $a > -\frac{57}{16}$– более 1 решения.

Ответ: $\left(-\infty; -\frac{57}{16}\right]$.

2023 год.

Пример 1. Найдите все значения a, при каждом из которых система

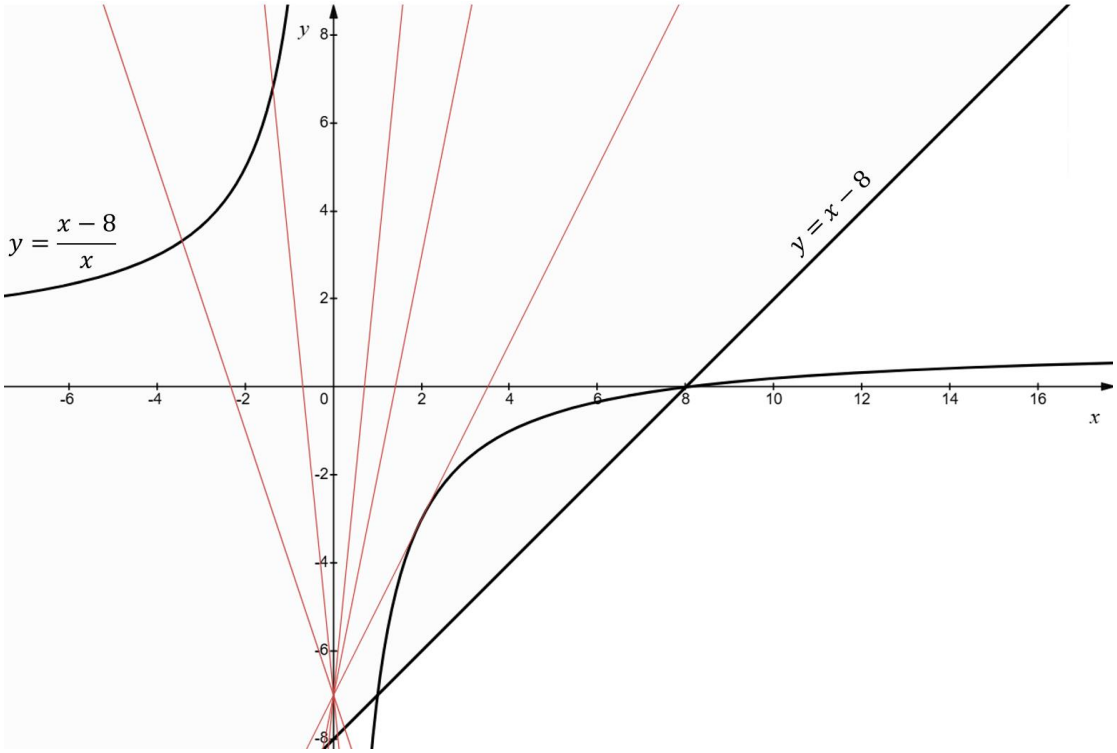
$$\begin{cases} (xy - x + 8) \cdot \sqrt{y - x + 8} = 0, \\ y = ax - 7 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} xy - x + 8 = 0 \\ y - x + 8 = 0 \end{array}\right. \\ y - x + 8 \geq 0 \\ y = ax - 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{x - 8}{x} \\ y = x - 8 \end{array}\right. \\ y \geq x - 8 \\ y = ax - 7 \end{cases}$$

Изобразим графически.



Найдем точку касания графиков $y = \frac{x-8}{x}$ и $y = ax - 7$:

$$\frac{x-8}{x} = ax - 7 \Rightarrow ax^2 - 8x + 8 = 0$$

Чтобы графики касались друг друга уравнение $ax^2 - 8x + 8 = 0$ должно иметь один корень, то есть $D = 0 \Rightarrow D = 64 - 32a = 0 \Rightarrow a = 2$.

Проанализируем график:

— при $a < 0$ – 2 решения;

— при $a = 0$ – 1 решение;

— при $0 < a < \frac{7}{8}$ – 2 решения;

— при $a = \frac{7}{8}$ – 2 решения;

— при $\frac{7}{8} < a < 1$ – 3 решения;

— при $a = 1$ – 2 решения;

— при $1 < a < 2$ – 3 решения;

— при $a = 2$ – 2 решения;

— при $a > 2$ – 1 решение.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{7}{8}\right] \cup \{1\} \cup \{2\}$.

Пример 2. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(y^2 - xy + x - 3y + 2)\cdot\sqrt{x+3} = 0,\\ a - x - y = 0\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{c} y^2 - xy + x - 3y + 2 = 0 \ \ (1)\\ x + 3 = 0\end{array}\right.\\ x + 3 \geq 0\\ y = -x + a\end{cases}$$

Упростим уравнение (1) и решим его относительно переменной y:

$$y^2 + (-x - 3)y + x + 2 = 0$$

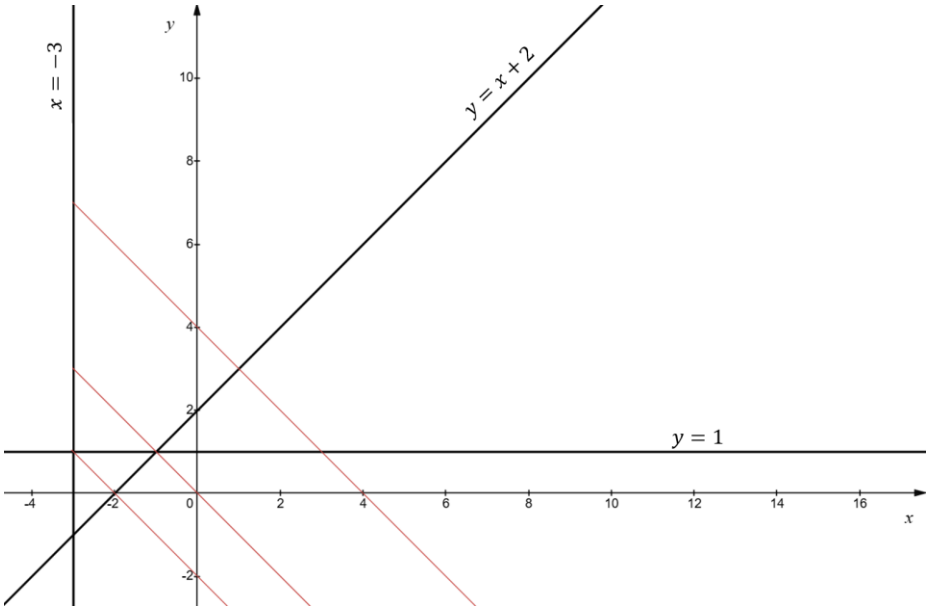
$$D = (-x-3) - 4\cdot 1\cdot(x+2) = (x+1)^2 \ \Rightarrow\ y_{1,2} = \frac{x + 3 \pm |x+1|}{2} \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ y_1 = x + 2;\ y_2 = 1.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{c}\big(y - (x+2)\big)(y-1) = 0\\ x + 3 = 0\end{array}\right.\\ x \geq -3\\ y = -x + a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{c} y = x + 2\\ y = 1\\ x = -3\end{array}\right.\\ x \geq -3\\ y = -x + a\end{cases}$$

Изобразим графически.



Проанализируем график:

— при $a < -4$ – 1 решение;

— при $a = -4$ – 1 решение;

— при $-4 < a < -2$ – 2 решения;

— при $a = -2$ – 2 решения;

— при $-2 < a < 0$ – 3 решения;

— при $a = 0$ – 2 решения;

— при $a > 0$ – 3 решения.

Ответ: $(-4; -2]$.

Пример 3. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{3x - 9 - 2a} = 0$$

имеет ровно два различных решения.

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель не равен нулю.

То есть уравнение равносильно системе:

$$\frac{9x^2-a^2}{3x-9-2a} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 9x^2 - a^2 = 0 \\ 3x - 9 - 2a \neq 0 \end{cases}.$$

Преобразуем систему: $\begin{cases} (3x - a)(3x + a) = 0 \\ 3x \neq 9 + 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3x-a=0 \\ 3x+a=0 \end{array}\right. \\ x \neq \frac{9+2a}{3} \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_1=\frac{a}{3} \\ x_2=-\frac{a}{3} \end{array}\right. \\ x \neq 3 + \frac{2}{3}a \end{cases}.$$

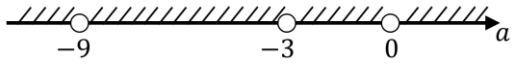
По заданию корни уравнения должны быть различны, значит:

x_1 и x_2 должны быть различны $\Rightarrow \frac{a}{3} \neq -\frac{a}{3} \Rightarrow a \neq 0$.

Также нужно учесть, что $x \neq 3 + \frac{2}{3}a$, значит:

$x_1 \neq 3 + \frac{2}{3}a \Rightarrow \frac{a}{3} \neq 3 + \frac{2}{3}a \Rightarrow a \neq -9$ и $x_2 \neq 3 + \frac{2}{3}a \Rightarrow -\frac{a}{3} \neq 3 + \frac{2}{3}a\ a \neq -3$.

Найдём пересечение:



Запишем значения параметра a: $a \in (-\infty;-9) \cup (-9;-3) \cup (-3;0) \cup (0;+\infty)$.

Ответ: $(-\infty;-9) \cup (-9;-3) \cup (-3;0) \cup (0;+\infty)$.

2024 год.

Пример 1. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4x - y + a = 0, \\ |y| - x^2 + 2x = 0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Решение.

$$\begin{cases} y = 4x + a \ (1) \\ |y| - x^2 + 2x = 0 \ (2) \end{cases}$$

Подставим (1) в (2): $|4x + a| - x^2 + 2x = 0$.

$$|4x + a| - x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x + a \geq 0 \\ 4x + a - x^2 + 2x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 4x + a < 0 \\ -4x - a - x^2 + 2x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a \geq -4x \\ a = x^2 - 6x \end{cases} \\ \begin{cases} a < -4x \\ a = -x^2 - 2x \end{cases} \end{array}\right.$$

Построим $a = x^2 - 6x$. Для этого найдем координаты вершины параболы: $x_0 = 3;\ a_0 = 3^2 - 6 \cdot 3 = -9$.

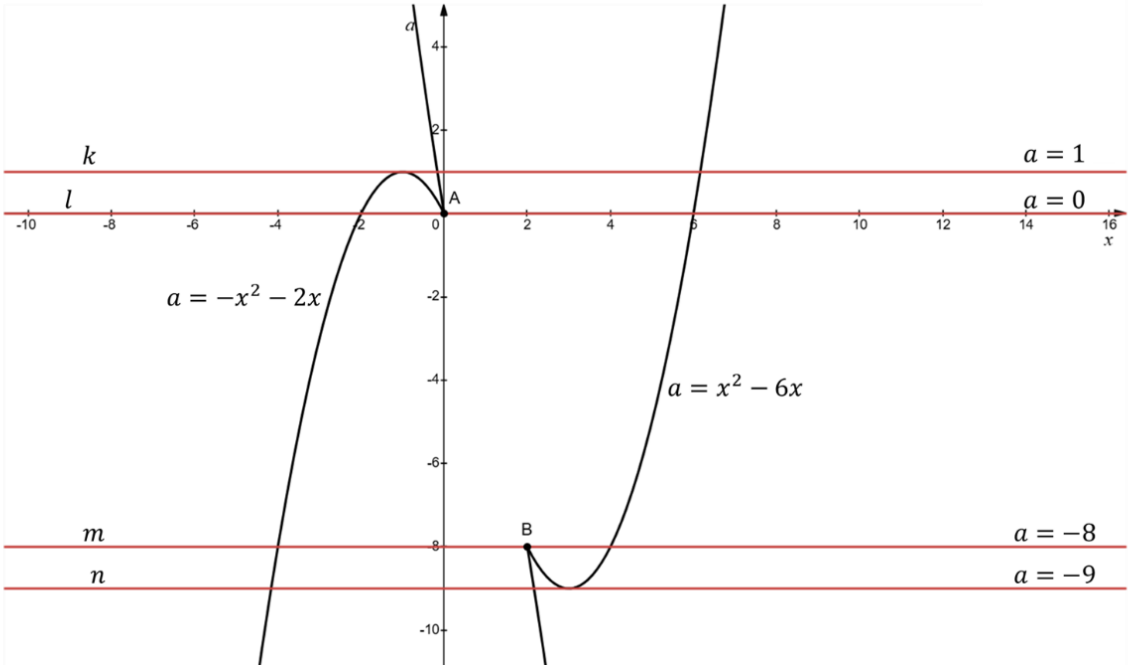
Найдем при каких a график $a = x^2 - 6x$ выше прямой $a = -4x$: $x^2 - 6x \geq -4x \Rightarrow$ при $x \in (0;2)$ парабола не существует.

Построим $a = -x^2 - 2x$. Для этого найдем координаты вершины параболы: $x_0 = -1;\ a_0 = -(-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 1$.

Найдем при каких a график $a = -x^2 - 2x$ ниже прямой $a = -4x$: $-x^2 - 2x < -4x \Rightarrow$ при $x \in [0;2]$ парабола не существует.

Найдем координаты точек, в которых параболы пересекаются:

$$\begin{cases} a = x^2 - 6x \\ a = -x^2 - 2x \end{cases} \Rightarrow A(0;0), B(2;-8).$$



Найдем значения a для прямых k, l, m, n:

k проходит через вершину $a = -x^2 - 2x \Rightarrow a = 1$;

l проходит через точку $A \Rightarrow a = 0$;

m проходит через точку $B \Rightarrow a = -8$;

n проходит через вершину $a = x^2 - 6x \Rightarrow a = -9$.

Проанализируем график:

— при $a < -9$ – 2 решения;

— при $a = -9$ – 3 решения;

— при $-9 < a < -8$ – 4 решения;

— при $a = -8$ – 3 решения;

— при $-8 < a < 0$ – 2 решения;

— при $a = 0$ – 3 решения;

— при $0 < a < 1$ – 4 решения;

— при $a = 1$ – 3 решения;

— при $a > 1$ – 2 решения.

Ответ: $(-\infty;-9)\cup(-8;0)\cup(1;+\infty)$.

Пример 2. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y=|x-a|-4, \\ 4|y|+x^2+8x=0 \end{cases}$$

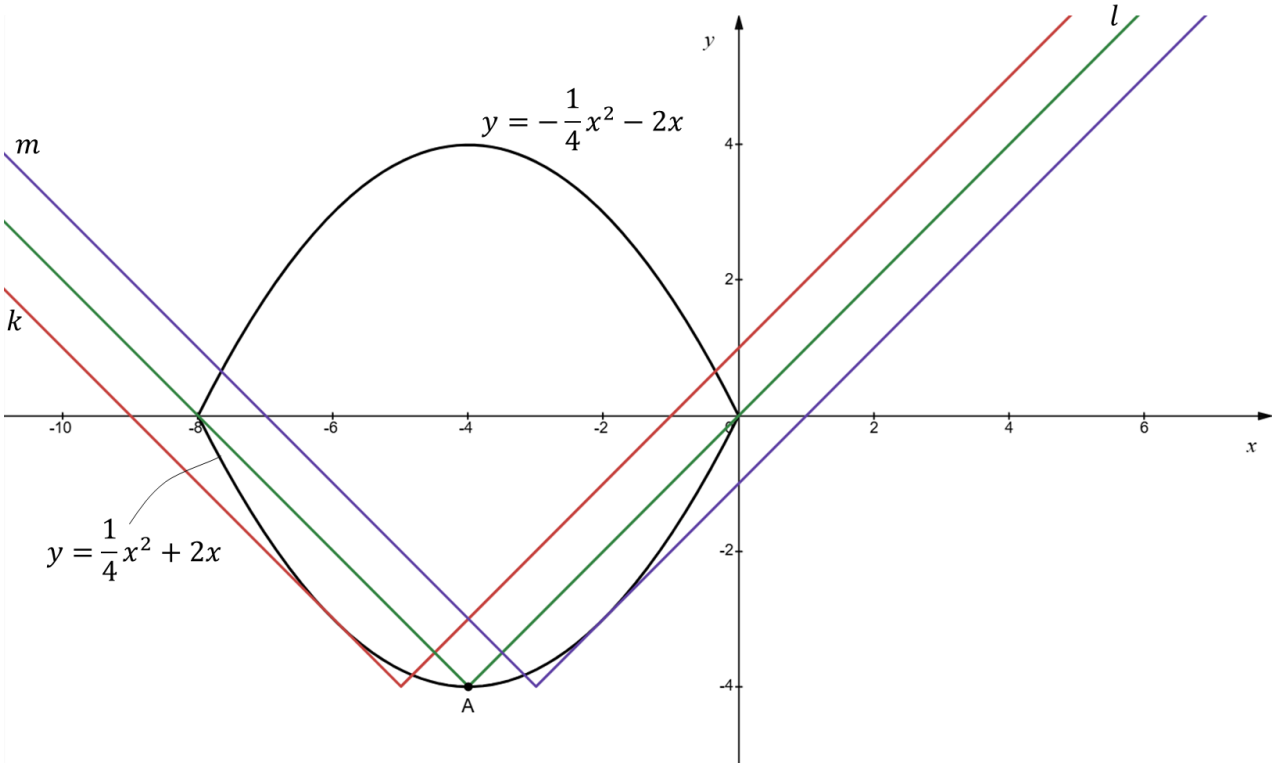
имеет ровно четыре различных решения.

Решение.

$$\begin{cases} y=|x-a|-4, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\geq 0 \\ y=-\frac{1}{4}x^2-2x \end{cases} \\ \begin{cases} y<0 \\ y=\frac{1}{4}x^2+2x \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

Построим $y=-\frac{1}{4}x^2-2x$. Для этого найдем координаты вершины параболы: $x_0=-4;\ y_0=4$.

Построим $y=\frac{1}{4}x^2+2x$. Для этого найдем координаты вершины параболы: $x_0=-4;\ y_0=-4$.



Найдем a для прямой k: прямая $y = -x + a - 4$ является касательной для параболы $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x$. Для этого приравняем их правые части и найдем дискриминант получившегося уравнения: $-x + a - 4 = \frac{1}{4}x^2 + 2x$.

Получим $x^2 + 12x + 16 - 4a = 0$. Чтобы графики касались друг друга уравнение должно иметь один корень, то есть $D = 0 \Rightarrow D = 16(5 + a) = 0 \Rightarrow a = -5$.

Найдем a для прямой l: прямая $y = -x + a - 4$ проходит через точку $A(-4; -4) \Rightarrow -4 = -4 - a - 4 \Rightarrow a = -4$.

Найдем a для прямой m: прямая $y = x - a - 4$ является касательной для параболы $y = \frac{1}{4}x^2 + 2x$. Для этого приравняем их правые части и найдем дискриминант получившегося уравнения: $x - a - 4 = \frac{1}{4}x^2 + 2x$.

Получим $x^2 + 4x + 16 + 4a = 0$. Касание графиков происходит, если $D = 16 - 4(16 + 4a) = 0 \Rightarrow a = -3$.

Проанализируем график:

— при $a < -5$ – 2 или меньше решений;

— при $a = -5$ – 3 решения;

— при $-5 < a < -4$ – 4 решения;

— при $a = -4$ – 3 решения;

— при $-4 < a < -3$ – 4 решения;

— при $a = -3$ – 3 решения;

— при $a > -3$ – 2 или меньше решений.

Ответ: $(-5; -4) \cup (-4; -3)$.

Пример 3. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x + y = a, \\ |y| = |x^2 + 2x| \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

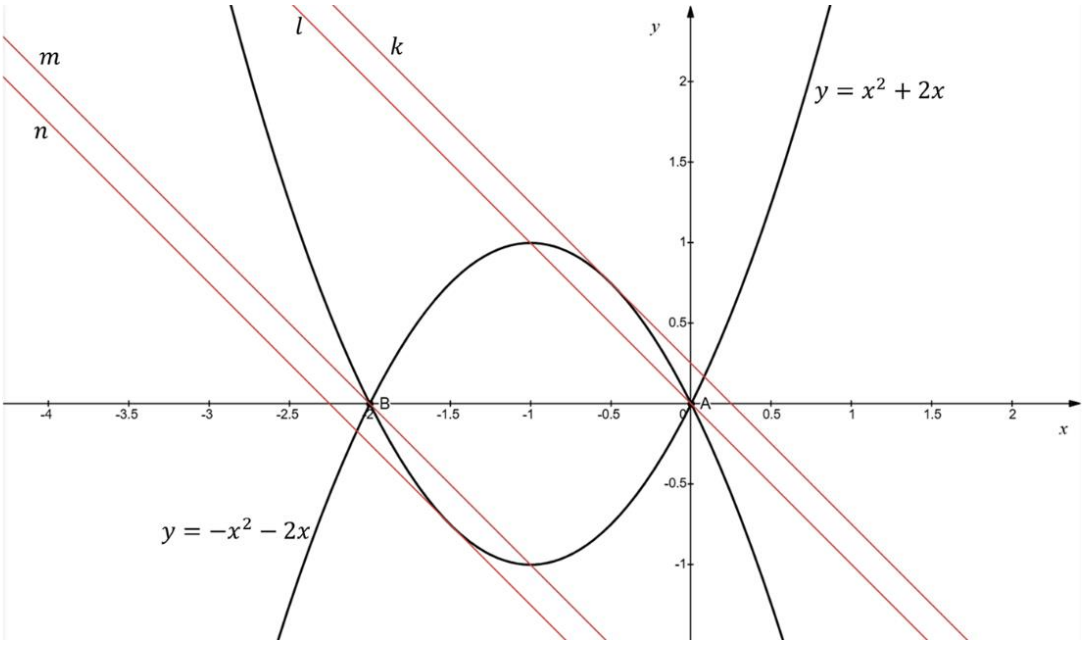
Решение.

$$\begin{cases} y = -x + a \ \ (1) \\ |y| = |x^2 + 2x| \ \ (2) \end{cases}$$

Решим уравнение (2): $|y| = |x^2 + 2x| \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} y=x^2+2x \\ y=-x^2-2x \end{matrix}\right.$.

Построим $y = x^2 + 2x$. Для этого найдем координаты вершины параболы: $x_0 = -1;\ y_0 = -1$.

Построим $y = -x^2 - 2x$. Для этого найдем координаты вершины параболы: $x_0 = -1;\ y_0 = 1$.



Найдем точку пересечения парабол: $x^2 + 2x = -x^2 - 2x \ \Rightarrow$ $A(0;0), B(-2;0)$.

Найдем a для прямой n: $y = -x + a$ касается $y = x^2 + 2x \Rightarrow$ $-x + a = x^2 + 2x \ \Rightarrow D = 9 + 4a = 0 \ \Rightarrow a = -\frac{9}{4}$.

Найдем a для прямой l: $y = -x + a$ проходит через т. $A(0;0) \Rightarrow a = 0$; для прямой m: $y = -x + a$ проходит через т. $B(-2;0) \Rightarrow a = -2$.

Проанализируем график:

— при $a < -\frac{9}{4}$ – 2 решения;

— при $a = -\frac{9}{4}$ – 3 решения;

— при $-\frac{9}{4} < a < -2$ – 4 решения;

— при $a = -2$ – 3 решения;

— при $-2 < a < 0$ – 4 решения;

— при $a = 0$ – 3 решения;

— при $0 < a < \frac{1}{4}$ – 4 решения;

— при $a = \frac{1}{4}$ – 3 решения;

— при $a > \frac{1}{4}$ – 2 решения.

Ответ: $(-\infty; -\frac{9}{4}) \cup (\frac{1}{4}; +\infty)$.

2025 год.

Пример 1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(|x+1| + |x-a|)^2 - 2(|x+1| + |x-a|) + 4a(1-a) = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Пусть $|x+1| + |x-a| = t$.

Тогда получим: $t^2 - 2t + 4a(1-a) = 0$.

$D = 4 - 4 \cdot 4a \cdot (1-a) = (4a-2)^2 \Rightarrow t = \frac{2 \pm |4a-2|}{2} = \frac{2 \pm (4a-2)}{2}$.

$t_1 = 1 + 2a - 1 = 2a; t_2 = 1 - 2a + 1 = 2 - 2a$.

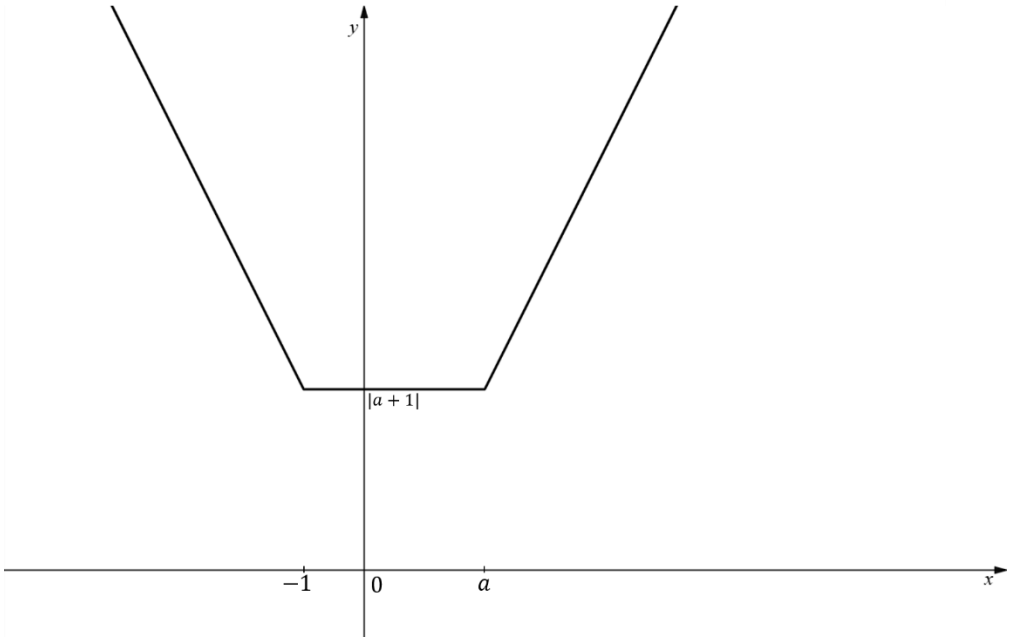
Вернемся к замене:

$|x+1| + |x-a| = 2a$ $\qquad\qquad$ $|x+1| + |x-a| = 2 - 2a$

Рассмотрим функцию $f(x) = |\, x+1 \,| + |\, x-a \,|$. Её график – ломаная линия. Наименьшее значение этой функции равно расстоянию между точками -1 и a:

$$f(-1) = f(a) = |\, a+1 \,|.$$

Оно достигается при всех x, лежащих между -1 и a (включая концы).



Рассмотрим 3 случая, при которых исходное уравнение имеет 2 решения.

1 случай. Когда прямые $y = 2a$ и $y = 2 - 2a$ совпадают и проходят выше $y = | a + 1 |$.

Найдем при каком a прямые $y = 2a$ и $y = 2 - 2a$ совпадают: $2a = 2 - 2a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$. Тогда получим график $y = 1$, который нам не подходит, так как не будет иметь пересечений с изначальным графиком. Значит $a \neq \frac{1}{2}$.

2 случай. Прямая $y = 2a$ проходит выше $y = | a + 1 |$, а $y = 2 - 2a$ – ниже:

$$\begin{cases} 2a > | a + 1 | & (1) \\ 2 - 2a < | a + 1 | & (2) \end{cases}.$$

$$(1): | a + 1 | < 2a \Rightarrow -2a < a + 1 < 2a \Rightarrow \begin{cases} -2a < a + 1 \\ a + 1 < 2a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > -\frac{1}{3} \\ a > 1 \end{cases} \Rightarrow a > 1.$$

$$(2): | a + 1 | > 2 - 2a \Rightarrow \begin{bmatrix} a + 1 > 2 - 2a \\ a + 1 < -(2 - 2a) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a > \frac{1}{3} \\ a > 3 \end{bmatrix} \Rightarrow a > \frac{1}{3}.$$

Найдем пересечение (1) и (2): $a > 1$.

3 случай. Прямая $y = 2 - 2a$ проходит выше $y = | a + 1 |$, а $y = 2a$ – ниже:

$$\begin{cases} 2 - 2a > | a + 1 | & (3) \\ 2a < | a + 1 | & (4) \end{cases}.$$

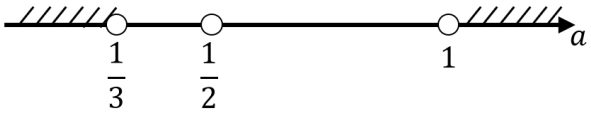
$(3): \mid a+1 \mid < 2-2a \Rightarrow 2a-2 < a+1 < 2-2a \Rightarrow \begin{cases} 2a-2 < a+1 \\ a+1 < 2-2a \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} a < 3 \\ a < \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow a < \frac{1}{3}.$

$(4): \mid a+1 \mid > 2a \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a+1 > 2a \\ a+1 < -2a \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a < 1 \\ a < -\frac{1}{3} \end{array}\right. \Rightarrow a < 1.$

Найдем пересечение (3) и (4): $a < \frac{1}{3}$.

Объединим все три рассмотренных случая:



Ответ: $(-\infty; \frac{1}{3}) \cup (1; +\infty)$.

Пример 2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x+\frac{9}{x}\right)^2 + 2\left(x+\frac{9}{x}\right) - 49a + 14 = 0$$

имеет ровно два различных корня.

Решение.

Пусть $x + \frac{9}{x} = t$.

Тогда получим: $at^2 + 2t + 14 - 49a = 0$.

$D_1 = 4 - 4a(14-49a) = (14a-2)^2 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-2 \pm (14a-2)}{2a}$.

Поскольку уравнение $x + \frac{9}{x} = t$ может иметь максимально 2 корня $\Rightarrow$ $D_1 \geq 0$.

1) Если $a = 0$, то $2\left(x+\frac{9}{x}\right) + 14 = 0$.

$$\frac{2x^2+14x+18}{x} = 0$$

$2x^2 + 14x + 18$ и $x \neq 0$

$x^2 + 7x + 9 = 0$

$D = 49 - 36 = 13 \Rightarrow$ уравнение имеет

два различных корня при $a = 0$.

2) Если $a \neq 0$, то $D_1 \geq 0$.

а) Если $D_1 = 0$, то $(14a - 2)^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{7} \Rightarrow t = \frac{-2 \pm 0}{2 \cdot \frac{1}{7}} = -7$.

$$x + \frac{x}{9} = -7 \Rightarrow \frac{x^2 + 7x + 9}{x} = 0$$

$x^2 + 7x + 9 = 0$ и $x \neq 0$

$D = 49 - 36 = 13 \Rightarrow$ уравнение

имеет два различных корня при $a = \frac{1}{7}$

б) Если $D_1 > 0$, то $(14a - 2)^2 > 0 \Rightarrow a \neq \frac{1}{7} \Rightarrow$

$t_1 = \frac{-2+14a-2}{2a} = \frac{7a-2}{a}; t_2 = \frac{-2-14a+2}{2a} = -7.$

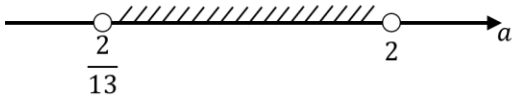
Поскольку требуется 2 решения, а при $t = -7$ уравнение уже имеет 2 решения, то уравнение $x + \frac{9}{x} = \frac{7a-2}{a}$ не должно иметь решений, значит $D < 0$.

$$x + \frac{9}{x} - \frac{7a - 2}{a} = 0$$

$$\frac{ax^2 + 9a - 7ax + 2x}{ax} = 0$$

$ax^2 - x(7a - 2) + 9a = 0$ и $ax \neq 0$

$D = (7a - 2)^2 - 4a \cdot 9a = 13a^2 - 28a + a < 0.$



Ответ: $\{0\} \cup \left\{\frac{1}{7}\right\} \cup \left(\frac{2}{13}; 2\right)$.

Упражнения для самостоятельной работы

№1. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x + a|\sqrt{3x + 1}$$

имеет ровно 2 различных решения.

№2. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| = |x - a|\sqrt{x^2 - 4ax + 5a}$$

имеет ровно 2 различных решения.

№3. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - a^2| + 20 = 4|x - a| + 5|x + a|$$

имеет 2 положительных корня.

№4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + a^2 + 2x - 4a = |4x + 2a|$$

имеет более двух различных корней.

№5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a^2 - 2ax - 4a - 3x^2 + 4x + 8|x| = 0$$

имеет 4 различных решения.

№6. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$|2x^2 + 3x - 2| = 8x - 2x^2 - a$$

либо не имеет решений, либо имеет единственное решение.

№7. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} (xy - 2x + 12) \cdot \sqrt{y - 2x + 12} = 0, \\ y = ax - 10 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

№8. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{(y^2 - xy + x - y)\sqrt{x + 4}}{\sqrt{3 - x}} = 0, \\ a = x + y \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

№9. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2-4x+a}{5x^2-6ax+a^2}=0$$

имеет ровно два различных решения.

№10. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 4x-y+a=0, \\ 2|y|-x^2+4x=0 \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

№11. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} y=|x-a|-1, \\ |y|+x^2-2x=0 \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

№12. Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x+y=a, \\ |y|=|x^2-4x| \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

№13. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(|x-2a-1|+|x-2a+1|)^2+a(|x-2a-1|+|x-2a+1|)+a^2-48=0$$

имеет ровно два различных корня.

№14. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$(5x+|x-a^2|-4|x+1|-a^2)^2+(a+2)(5x+|x-a^2|-4|x+1|-a^2)+1=0$$

имеет ровно два различных корня.

№15. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$a\left(x+\frac{4}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{4}{x}\right)-49a+14=0$$

имеет ровно два различных корня.

Ответы

§2

1. а) $a = 1$: нет решений; $a = -1$: x — любое; $a \neq \pm 1$: $x = \frac{a^2-a+1}{a-1}$.

б) $a = 0$: нет решений; $a \neq 0$: $x = \frac{a^3-1}{a}$.

в) $a = -4$: нет решений; $a \neq -4$: $x = \frac{2a+1}{a+4}$.

г) $a = -1$ или $a = \frac{2}{3}$: нет решений; иначе $x = \frac{a^2-4}{(3a-2)(a+1)}$.

2. а) $a = 2$: при $b = -\frac{8}{3}$ x любое, иначе нет; $a \neq 2$: $x = \frac{4a+3b}{a-2}$.

б) $a + 2 + 3b = 0$: при $a = b$ x любое, иначе нет; иначе $x = \frac{a-b}{a+2+3b}$.

в) $a = b$: x любое; $a = -b \neq 0$: нет решений; $a \neq \pm b$: $x = \frac{1}{a+b}$.

г) $ab = 1$: нет решений; иначе $x = \frac{a+b}{ab-1}$.

3. а) беск. много: $a = 2$; нет решений: $a = -2$.

б) беск. много: $b = 1$; нет: $b = -1$.

в) беск. много: $b = 3$; нет: $b = -3$.

г) беск. много: $b = 2$; нет: $b = 3$.

д) беск. много: $b = -1$; нет: $b = 0$.

4. а) $p = 1$: $x = -0{,}5$; $p > 2$: нет; $p = 2$: $x = -1$; $p < 2$, $p \neq 1$: $x = \frac{-1\pm\sqrt{2-p}}{p-1}$.

б) $p = 1$: нет; $p = -1$: $x = 0{,}25$; $p > 1$: нет; $p < 1$, $p \neq -1$: $x = \frac{-(p-1)\pm\sqrt{2-2p}}{(p-1)(p+1)}$.

в) $p = 0$: $x = 1$; $p = 1$: $x = -1$; $p \neq 0{,}1$: $x = -\frac{1}{p}$, $x = -\frac{1}{p-1}$.

г) $p = -2$: $x = -1$; $p \neq -2$: $x = -1$, $x = \frac{2-p}{p+2}$.

14. а) $x = t \pm 2$ (2 решения).

б) $t < -2$: нет решений;

$t = -2$: $x = -1$;

$t > -2$: $x = t + 1$ и $x = \frac{t-1}{3}$

в) $t < -3$: нет решений;

$t = -3$: $x \in [-3; -1]$ (бесконечно много);

$-3 < t < -1$: $x = \frac{t-3}{2}$ и $x = \frac{1+t}{2}$;

$t = -1$: $x = -2$ и $x = 0$;

$-1 < t < 1$: $x = \frac{t-3}{2}$ и $x = \frac{1+t}{2}$;

$t = 1$: $x \in [-1; 1]$ (бесконечно много);

$t > 1$: нет решений.

г) при $t \geq 0$: $x = t$, $x = 3t$; при $t < 0$: нет.

15. а) $c \neq -1$: $x = \frac{1-c}{2}$; $c = -1$: x любое.

б) $c \neq -3$: $x = \frac{c-3}{2}$; $c = -3$: x любое.

в) $c \neq -2$: $x = \frac{2-c}{2}$; $c = -2$: x любое.

г) $c = -2$

16. а) $h > 2$.

б) $h > 3$.

в) нет таких h

г) $h \in (-\infty; -6) \cup (-6; +\infty)$

17. а) $j < -1$*: 4 корня;* $j = -1$*:* $x = \pm 1$*;* $-1 < j < 3$*: нет корней;* $j \geq 3$*: нет корней.*

б) $j < -2$*: два корня;* $j = -2$*:* $x = 0$*;* $j > -2$*: нет корней.*

в) $j > 1$*:* $x = -1 \pm \sqrt{2}$ *(2 корня);* $j = 1$*:* $x = -1$, $-1 \pm \sqrt{2}$ *(3 корня);* $-1 < j < 1$*: 4 корня* ($-1 \pm \sqrt{2}$, $-1 \pm \sqrt{1-j}$)*;* $j = -1$*:* $x = -1 \pm \sqrt{2}$ *(2 корня, каждый кратности 2, но*

д) $p = 0$: $x = 0$; $p = -0{,}5$: $x = 1$; $p < -0{,}5$: нет; $p > -0{,}5$, $p \neq 0$: $x = \frac{-(p+1) \pm \sqrt{2p+1}}{p}$.

5. а) $m = 0,\ m = 3 \pm 2\sqrt{2}$.

б) $m = -2,\ m = -\frac{10}{3}$.

в) $m = -1,\ m = 0$.

г) $m = 0$.

6. а) нет.

б) $0 < q < 6 - 2\sqrt{5}$.

в) $(1; 3) \cup (3; \infty)$.

г) $(0; 2) \cup (2; \infty)$.

7. а) $n < 1$: $x = 1 \pm \sqrt{1 - n}$; $n \geq 1$: нет.

б) $n \neq 0$: $x = \frac{1}{n}$; $n = 0$: нет.

в) $x = \frac{-n \pm \sqrt{n(n+8)}}{2}$ при $n \in (-\infty; -8) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$;

$x = 4$ при $n = -8$;

$x = -2$ при $n = 1$;

нет решений при $n \in (-8; 0]$.

г) $n \neq \pm 1$: $x = n$; $n = \pm 1$: нет.

8. а) $a = 2$.

б) $p \in [-1; 1]$.

в) $m \in [1; 5 - \sqrt{7}]$.

9. а) $w < 0$: нет; $w = 0$: $x = 0$; $0 < w < 1$: $x = \pm\sqrt{w}$; $w = 1$: $x = -1$; $w > 1$: $x = \pm\sqrt{w}$.

б) $w \neq \pm 2$: $x = w$; $w = \pm 2$: нет.

в) $w < 0$: нет; $w = 0$: $x = 0$; $0 < w < 4$: $x = \pm\sqrt{w}$; $w = 4$: $x = 2$; $w > 4$: $x = \pm\sqrt{w}$.

г) $w \neq \pm 3$: $x = w$; $w = \pm 3$: нет.

д) $w \neq 0$: $x = \frac{1}{w}$; $w = 0$: нет.

10. а) $b = 0,\ b = 4$.

б) $b = 2,\ b = -2$.

различных 2); $j < -1$: 4 корня $(-1 \pm \sqrt{2},\ -1 \pm \sqrt{1 - j})$.

г) *при любом j два корня:* $x = 1 - j$ *и* $x = -2 - j$.

18. а) $v \in (-\infty; -2] \cup \{-1\}$.

б) $v \in (-\infty; 0] \cup \{1\}$.

в) $v = 2$ или $v = -2$.

г) нет решений ($\emptyset$).

19. а) $a = 4$

б) нет таких a ($\emptyset$)

в) $a \in (4 - 2\sqrt{3};\ 4 + 2\sqrt{3})$

г) $a = 0$

д) $a \geq 0$

е) нет таких a ($\emptyset$)

20. а) $a = -5 \pm 2\sqrt{6}$

б) $-\frac{1}{4} < a \leq 0$

в) $a \in (3 - 2\sqrt{2};\ 3 + 2\sqrt{2})$

г) $-4 < a < 4$

21. а) $a > -1$

б) $a = -1$ или $0 < a \leq 3$

в) $a \in [-1; 0]$

г) $a = -1$ или $a \geq 0$

22. а) $a \geq -2$

б) $a \in \mathbb{R}$

в) нет решений ($\emptyset$)

г) $a = 1$

23. а) $a = 0,\ 4$

б) $a = -4 \pm 2\sqrt{5}$

в) $a = -3 \pm 2\sqrt{2}$

24. а) $a = \pm\frac{10\sqrt{15}}{9}$

б) $a = 2 - 2\ln 2$

в) $b = 0,\ b = 1.$

г) $b = 0,\ b = 1.$

11. а) $r \in (-\infty; -1) \cup (-1; 0).$

б) $r \in (-\infty; -2) \cup (-2; 0) \cup (0; 2) \cup (2; \infty).$

в) $r \in (-\infty; 3 - 2\sqrt{2}) \cup (3 + 2\sqrt{2}; \infty).$

г) $r < 0.$

12. а) $d < -\frac{1}{4}$: нет; $d = -\frac{1}{4}$: $x = \frac{1}{2}$; $-\frac{1}{4} < d \leq 0$: $x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4d}}{2}$; $d > 0$: $x = \frac{1+\sqrt{1+4d}}{2}$.

б) $d \geq -1$: $x = \frac{d-1}{2}$; $d < -1$: нет.

в) $d = -1$: $x \geq -1$; $d \neq -1$: нет.

г) $d \geq 0$: $x = 2d$; $d < 0$: нет.

13. а) $s \geq -1.$

б) $s \geq -2.$

в) $s \in [-1; 0) \cup [1; +\infty).$

г) $s < 2$ или $s = 3.$

в) $a = -1 - \ln 2$

г) $a = \frac{1}{8}$

25. а) $0 < a < 4$

б) $a = 0$ или $a > 4$

в) $a = 4$

г) $a < 0$

26. а) $a < 3$

б) $a = 0$

в) $a = 3$ или $a = -3$

г) $0 < a < 1$

27. а) $a = \pm 2$

б) $a = \pm 1$

в) $a = \pm 1$

г) нет решений ($\emptyset$) (при $a > 0$ окружность пересекает прямую в двух точках)

28. а) $a = \pm 1$

б) $a \in (-3, -1) \cup (1,3)$

в) $a \in (-\infty, -3) \cup (3, \infty)$

г) $a \in (-1,0) \cup (0,1)$

29. $a \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

§3

1. $\left\{-\frac{13}{12}; -1; \frac{1}{4}\right\} \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$

2. $\left(0; \frac{5}{7}\right)$ или $\left(\frac{5}{7}; \frac{5}{3}\right]$

3. $(-\infty; -5] \cup \{-4,5\} \cup [-4; -0,5) \cup (-0,5; 4) \cup (5; +\infty)$

4. $\left[3 - \sqrt{10}; 0\right] \cup [4; 1 + \sqrt{10}]$

5. $(0; 1) \cup (1; 3) \cup (3; 4)$

6. $\left[\frac{57}{16}; +\infty\right)$

7. $(-\infty; 0) \cup \left(0; \frac{5}{3}\right] \cup \{2\} \cup \{3\}$

8. $(-8; -3] \cup \{2\} \cup [4; 6)$

9. $(-\infty; -5) \cup (-5; 0) \cup (0; 3) \cup (3; 4)$

10. $(-\infty; -18) \cup (-16; 0) \cup (2; +\infty)$

11. $\left(\frac{3}{4};1\right)\cup\left(1;\frac{5}{4}\right)$

12. $(-\infty;-2{,}25)\cup(6{,}25;+\infty)$

13. $\{-8\}\cup\left(-1-3\sqrt{5};-1+3\sqrt{5}\right)$

14. $(-\infty;-4)\cup\left(0;\frac{9}{4}\right)\cup\left(\frac{9}{4};+\infty\right)$

15. $\left\{0;\frac{1}{7}\right\}\cup\left(\frac{2}{11};\frac{2}{3}\right)$

Лист для заметок

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выпускная квалификационная работа посвящена исследованию методических аспектов обучения решению уравнений с параметрами, являющихся одной из наиболее сложных и содержательных тем школьного курса математики. Актуальность данного исследования обусловлена возрастающими требованиями к математической подготовке выпускников, необходимостью успешного выполнения заданий профильного ЕГЭ, а также выявленным дефицитом систематизированных учебных материалов, сочетающих теоретическую базу с практическими упражнениями. Целью исследования являлась разработка рабочей тетради, направленной на формирование у старшеклассников целостного подхода к решению задач с параметрами, которая была успешно достигнута.

Для реализации поставленной цели был решён комплекс взаимосвязанных задач. На основе анализа методической литературы было проведено раскрытие понятия уравнения с параметром, обобщены существующие определения и подходы к классификации его видов, что позволило сформировать чёткий понятийный аппарат. Подробно рассмотрены аналитический и графический методы решения, а также метод решения относительно параметра, с демонстрацией их возможностей и границ применимости на конкретных примерах, что послужило методической основой для построения системы упражнений.

Особое внимание было уделено определению роли и места темы «Уравнения с параметрами» в школьном курсе математики. Установлено, что на базовом уровне данная тема практически отсутствует, тогда как на углублённом она является обязательной и выполняет важные развивающие функции, формируя у учащихся логическое мышление, способность к исследовательской деятельности и графическую культуру. Сравнительный анализ учебников Ш. А. Алимова и А. Г. Мордковича выявил существенные различия в подаче материала,

подтвердив необходимость создания дополнительного учебного пособия, восполняющего пробелы системного изложения темы.

На основе изученных методических положений были выявлены ключевые принципы обучения решению уравнений с параметрами: поэтапное усложнение материала, приоритет исследовательского подхода и широкое использование графических интерпретаций. Эти принципы легли в основу разработанной рабочей тетради.

Практическая значимость выполненной работы состоит в создании готового к использованию учебного материала, которое может применяться учителями математики, студентами-практикантами, а также самими старшеклассниками в процессе самоподготовки, способствуя повышению качества математического образования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Примерная рабочая программа среднего общего образования по математике (углублённый уровень). М. : Министерство просвещения Российской Федерации, 2023. 98 с.
2. Примерная рабочая программа среднего общего образования по математике (базовый уровень). М. : Министерство просвещения Российской Федерации, 2023. 95 с.
3. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / Ш. А. Алимов [и др.]. М. : Просвещение, 2019. 464 с.
4. Алгебра. 7 класс. Базовый уровень : учеб. / Ю. Н. Макарычев [и др.]; под ред. С. А. Теляковского. 16-е изд., стер. М. : Просвещение, 2024. 255 с.
5. Алгебра. 8 класс. Базовый уровень : учеб. / Ю. Н. Макарычев [и др.]; под ред. С. А. Теляковского. 17-е изд., стер. М. : Просвещение, 2024. 157 с.
6. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Г. В. Дорофеев [и др.]. 6-е изд. М. : Просвещение, 2019. 336 с.
7. Алгебра. 9 класс. Базовый уровень : учеб. / Ю. Н. Макарычев [и др.]; под ред. С. А. Теляковского. 15-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2023. 257 с.
8. Арюткина С. В. Формирование у школьников обобщенных приемов математической деятельности (на примере задач с параметрами: монография) : монография. Арзамас: АГПИ, 2009. 82 с.
9. Беляева Э. С., Потапов А. С., Титаренко С. А. Математика. Уравнения и неравенства с параметром. В 2 ч. : учебное пособие. М. : Дрофа, 2009.
10. Важенин Ю. М. Самоучитель решения задач с параметрами : учеб. пособие. Екатеринбург : УрГУ, 1996. 84 с.
11. Карбачинская Н. Б. Параметрические задачи в старших классах. С чего начать? // Математика в школе. 2024. № 4. С. 24-33.
12. Кожухов С. К. Уравнения и неравенства с параметром : уч.-метод.

пособие. Орел, 2013. 72 с.

13. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы : учеб. для учащихся общеобразоват. организаций (базовый уровень) : в 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович. М. [и др.]. Мнемозина, 2014. 399 с.

14. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы : учеб. для учащихся общеобразоват. организаций (базовый уровень) : в 2 ч. Ч. 2 : Задачник / А. Г. Мордкович. М. [и др.]. Мнемозина, 2014. 263 с.

15. Прокофьев А. А. Задачи с параметром на ЕГЭ-2019 // Математика в школе. 2020. № 1. С. 17-30.

16. Прокофьев А. А., Корянов А. Г. ЕГЭ. Математика. Задачи с параметрами. Ростов-на-Дону: Легион, 2022. 384 с.

17. Шахмейстер А.Х. Уравнения и неравенства с параметрами : пособие. 4-е изд. М. : Изд-во МЦНМО, 2023. 304 с.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«12» 09 2025 г.
Паньженский В.И

Задание

по ВКР студентки Авдеевой Полины Владимировны
(ФИО полностью)

Тема работы: «Методические аспекты обучения решению уравнений с параметрами»

Утверждена приказом по Университету от «25.09» 2025 г. № 1103/0

Срок сдачи студентом законченной работы «06» 05 2026 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение и анализ литературы по теме работы	Ноябрь – декабрь 2025 г.	Выполнено
2.	Определение цели обучения и места уравнений с параметрами в школьном курсе математики	Январь 2026 г.	Выполнено
3.	Анализ методических основ обучения решению уравнений с параметрами	Февраль – март 2026 г.	Выполнено
4.	Определение методических принципов обучения решению уравнений с параметрами, обоснование структуры и содержания рабочей тетради на основе анализа школьной программы и учебников	Март – апрель 2026 г.	Выполнено
5.	Создание рабочей тетради: подбор и классификация уравнений с параметрами (линейные, квадратные, дробно-рациональные, иррациональные, с модулем), включение примеров решений аналитическим и графическим способами, разбор реальных заданий ЕГЭ профильного уровня (2021–2025 гг.), подготовка заданий для самостоятельной работы и ответов	Апрель 2026 г.	Выполнено
6.	Оформление списка использованных источников	Май 2026 г.	Выполнено
7.	Оформление работы, подготовка презентации и выступления	Май – июнь 2026 г.	Выполнено

Дата выдачи задания «11» 09 2025.

Руководитель _____ Журавлева Е.Г.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

_____ Авдеева П.В.
(подпись) (Ф.И.О.)

И.о. ректора Пензенского
государственного университета
Д.В. Артамонову
студентки4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Авдеевой Полины Владимировны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Авдеева Полина Владимировна,студентка4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Методические аспекты обучения решению уравнений с параметрами», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

Авдеева
подпись
06.05.26
дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 06.05.26
дд.мм.гггг

Руководитель ВКР _____ Жуковлева С. Г.
подпись И.О.Ф.

ПРОТОКОЛ

проверки на оригинальность в системе "Антиплагиат.ВУЗ" выпускной квалификационной работы на тему **«Методические аспекты обучения решению уравнений с параметрами»**
студентки 4 курса **Авдеевой Полины Владимировны**
направления подготовки 44.03.01 "Педагогическое образование"

профиль подготовки "Математика"

Руководитель ВКР Журавлева Е.Г.

АНТИПЛАГИАТ
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАИМСТВОВАНИЙ

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - http://pnzgu.antiplagiat.ru

Отчет о проверке

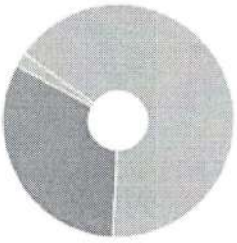
Автор: Авдеева Полина Владимировна

Название документа: Методические аспекты обучения решению уравнений с параметрами

Проверяющий: Журавлёва Екатерина Геннадьевна

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения: 32,49%

Оригинальность: 65,42%

ИИ-контент: 9,4%

Цитирования: 2,09%

Самоцитирования: 0%

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

Проверено: 96,37% текста документа, исключено из проверки: 3,63% текста документа. Разделы и элементы, отключенные пользователем: Титульный лист, Библиография, Таблицы

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- **Самоцитирования** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» – это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- **Цитирования** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы; библиография; фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- **Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- **Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- **Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 155

Тип документа: Не указано

Дата проверки: 06.05.2026 09:45:36

Дата корректировки: Нет

Комментарий: не указано

Количество страниц: 91

Символов в тексте: 97893

Слов в тексте: 18972

Число предложений: 3842

Руководитель ВКР 06.05.26 Е.Г. Журавлева

дата, подпись

ОТЗЫВ

РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методические аспекты обучения решению уравнений с параметрами»
студентки Авдеевой Полины Владимировны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»
профиль «Математика», гр. 22ФПМ1

Выпускная квалификационная работа Авдеевой Полины Владимировны посвящена разработке рабочей тетради “Решение задач с параметрами” для подготовки к ЕГЭ по математике. Необходимость разработки такой рабочей тетради связана с тем, что на уроках в школьном курсе математики невозможно уделить достаточно времени задачам данного типа. Для выполнения этих заданий недостаточно прочного усвоения теоретического содержания школьного курса математики, необходимо также иметь развитое логическое мышление, умение ориентироваться в нестандартных ситуациях, определенные навыки исследовательской работы, достаточно высокий уровень общей математической культуры. Опыт показывает, что учащиеся, владеющие методами решения задач с параметрами, успешно справляются и с другими задачами. Именно поэтому задачи с параметрами обладают диагностической и прогностической ценностью. В последние годы такие задачи регулярно встречаются в вариантах ОГЭ и ЕГЭ. Но до сих пор задача с параметром остается самой "неудобной" для абитуриентов. И здесь далеко не все школьники приступают к решению этих заданий, и еще меньшее число – выполняют решение верно.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

В ходе выполнения работы были решены следующие задачи: раскрыто понятие уравнения с параметром, рассмотрены основные методы решений уравнений с параметрами, проведен сравнительный анализ содержания в учебниках теории и задач по рассматриваемой теме, разработана рабочая тетрадь для обучения школьников задачам с параметрами, проанализированы задачи с параметрами из вариантов ЕГЭ профильного уровня прошлых лет.

Работа является самостоятельным исследованием. Разработанная рабочая тетрадь поможет старшеклассникам самостоятельно овладеть некоторыми приемами решения уравнений с параметрами, а учителям – планомерно организовать работу по данной теме в классе на уроке или факультативных занятиях (элективных курсах).

Выпускная квалификационная работа Авдеевой П.В. удовлетворяет требованиям, предъявляемым к выпускным работам и заслуживает оценки «отлично».

Руководитель, к.п.н., доцент кафедры
«Математическое образование» Е.Г. Журавлева