

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и  
естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: заочная

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**

бакалаврская работа на тему:

**«Комбинаторные задачи как средство развития математического мышления  
школьников»**

Студент

Т.И. 15.06.2023  
(подпись, дата)

Тимошина Софья Андреевна  
(ФИО полностью)

Руководитель

М.В. 15.06.2023  
(подпись, дата)

Марина Е.В.  
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

М.В. 29.06.23  
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.  
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 26.06.23 № 14)

Заведующий кафедрой

М.В. 26.06.23  
(подпись, дата)

Паньженский В.И.  
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой хорошо (протокол заседания ГЭК от 14.07.23 № 15)

Секретарь ГЭК

М.В. 14.07.23  
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.  
(фамилия, инициалы)

Пенза 2023

## Содержание

|                                                                                                                                |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ВВЕДЕНИЕ .....                                                                                                                 | 3  |
| ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ<br>МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ<br>ПОСРЕДСТВОМ РЕШЕНИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ ..... | 6  |
| 1.1 Роль и место комбинаторных задач в развитии математического<br>мышления школьников .....                                   | 6  |
| 1.2 Особенности комбинаторных задач .....                                                                                      | 13 |
| 1.3 Основные методы и приемы, используемые при обучении теме<br>«Комбинаторика».....                                           | 15 |
| ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ<br>КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ .....                                                    | 19 |
| 2.1 Анализ школьных учебников по проблеме исследования .....                                                                   | 19 |
| 2.2 Методика обучения решению комбинаторных задач в основной<br>школе.....                                                     | 23 |
| 2.3 Системы задач по теме «Комбинаторные задачи».....                                                                          | 40 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....                                                                                                               | 52 |
| Список использованных источников.....                                                                                          | 54 |

## ВВЕДЕНИЕ

Статистические методы исследования проникают в различные сферы общественной жизни и научного познания. Это обусловлено необходимостью включения в школьный курс математики элементов стохастики: комбинаторики, теории вероятностей, статистики и некоторых других. Комбинаторика – один из разделов в математике, который занимается поисками ответов на вопросы: сколько всего есть комбинаций в том или ином случае, как из всех комбинаций выбрать оптимальную. Комбинаторика позволяет ответить на вопросы: сколькими способами, сколько вариантов и так далее.

Главная роль, которую играют эти знания в общеобразовательной подготовке современного школьника состоит в том, что изучение этого материала направленно: на формирование умений воспринимать и анализировать полученную информацию; на развитие вероятностной интуиции и логического мышления; умений выполнять простейшие вероятностные подсчеты; на понимание характера многих реальных зависимостей. Эти знания необходимы для повседневной жизни в современном информационном обществе, а также для продолжения образования почти во всех сферах деятельности человека.

Введение этого раздела в школьный курс математики вызвал ряд проблем:

- Недостаточная методическая подготовленность учителей,
- отсутствие единой методики преподавания,
- отсутствие материала по данной теме в школьных учебниках [13].

Хотя с момента включения этой темы в школьный курс математики до наших дней прошло немало лет, но все же некоторые трудности в её изучении и преподавании остались. Как правило, большинство учащихся

либо не понимают, либо недопонимают, как решать задачи связанные с комбинаторикой.

Решение таких задач требует от школьников несколько иных навыков и способов рассуждения, в отличие от задач других линий школьного курса математики. Обучающиеся не всегда могут полностью осознать математическую модель задачи, следовательно, и правильно выбрать способ решения. Прежде всего, это связано со строго ограниченными временными рамками. В курсе школьной математики на эту тему отводится мало часов, за которые очень сложно передать значительный объем информации и закрепить навыки решения практических задач.

Объектом данного исследования является процесс обучения математике в основной школе.

Предметом данного исследования являются методические особенности обучения решению комбинаторных задач в основной школе.

Целью данной выпускной квалификационной работы является выявление методического аппарата решения комбинаторных задач в основной школе как средство развития математического мышления школьников.

Для достижения заданной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Провести анализ научно-методической литературы в контексте данного исследования;
2. Выделить основные методы и приемы обучения решению комбинаторных задач в основной школе;
3. Провести анализ содержания программы и школьных учебников по теме исследования.
4. Выявить методические особенности методики обучения решению комбинаторных задач, направленных на развитие математического мышления обучающихся основной школы.
5. Разработать систему упражнений по теме «Комбинаторные задачи».

Практическая значимость исследования обусловлена возможностью использования разработанной системы задач в профессиональной деятельности педагога.

Работа состоит из введения, двух глав и заключения.

# **ГЛАВА 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ ШКОЛЬНИКОВ ПОСРЕДСТВОМ РЕШЕНИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ**

## **1.1 Роль и место комбинаторных задач в развитии математического мышления школьников**

Развитие учащихся в значительной степени определяется той деятельностью, которую они выполняют в процессе обучения.

Деятельность, когда ученик получает готовую информацию, воспринимает ее, запоминает и воспроизводит, принято называть воспроизводящей. Основная её задача – формирование знаний, умений и навыков, а так же развитие внимания и памяти.

Психологи отмечают, что результатом такой деятельности является заостренность мышления и стремление ребенка мыслить по заранее сложившимся стереотипам. Эта особенность интеллектуальной деятельности связана с демонстрацией поведенческих моделей и их закреплении в ходе выполнения однотипных заданий. В результате учащиеся усваивают только один тип решения и успешно воспроизводят его, но не видят других вариантов решения и не могут его изменить или преобразовать [20], [42].

Продуктивная деятельность связана с активным мышлением и выражается в таких мыслительных операциях, как анализ, синтез, сравнение, классификация, аналогия и обобщение. В психологической и педагогической литературе эти мыслительные операции принято называть навыками логического мышления или навыками умственных действий.

Включение этих операций в процесс усвоения математического содержания является одним из ключевых условий развивающего обучения.

Организация развивающего обучения заключается в создании условий для овладения учащимися приемами умственных действий. Овладение этими

приемами не только обеспечивает новый уровень обучения, но и приводит к существенным изменениям в психическом развитии ребенка. Дети, овладевшие этими навыками, становятся самостоятельными в решении учебных задач, умеют рационально строить деятельность в соответствии с условиями познания.

Мышление – это процесс, т.е. познание в его динамике. В центре мыслительного процесса находится открытие неизвестного, обозначенного вопросом, что придает мышлению характер строгого определения, организации и проблематизации [18].

Когда человек мыслит, ему приходится решать проблему; неслучайно С. Л. Рубинштейн говорил, что «мышление - это открытие неизвестного» [36, с. 383]. Рубинштейн заявил, что «мышление часто определяется как процесс решения проблемы» [36, с. 392]. Действительно, мышление обычно возникает из проблемной ситуации и направлено на ее решение. Однако он также отметил, что «сводить мышление к процессу решения проблем - значит прагматически определять его по эффекту, который оно производит, не раскрывая его природы, то есть того, что делает этот эффект возможным» [36, с. 395].

Мышление решает проблемы человека, потому что оно раскрывает неизвестные свойства и отношения предметов и явлений, содержащихся в проблемных ситуациях, которые не могут быть даны в условиях. Мышление - это, по сути, познание, которое приводит к решению проблем и задач, стоящих перед человеком.

Усвоение школьниками системы математических знаний и овладение определенными математическими умениями и навыками является одной из задач сложного процесса математического образования. Другой задачей, не менее важной чем первая, является развитие мышления учащихся.

К сожалению, единого мнения по вопросу определения понятия математического мышления в психологопедагогической и методической

литературе нет. Можно выделить 5 подходов к определению математического мышления:

Представители первого подхода (З.И. Слепкань, Л.С. Трегуб, Г. Фрейденталь и др.) отрицают специфику математического мышления, считая, что его, обладающего своими специфическими формами мыслительных действий, нет; своеобразие такого мышления связано, по их мнению, лишь с характером собственно математического материала [41], [43], [45].

Второй подход представлен исследованиями Ж.Пиаже и его сторонников (мышление как «биологический процесс»). Согласно Ж.Пиаже, под математическим мышлением понимается собственно логико-математическое мышление, имеющее абстракции, так называемые «абстракции действия» [33].

Сторонники третьего подхода (Ж.Адамар, А.Я. Хинчин, С.И. Шварцбурд, А.Пуанкаре, Л.А. Сазонова и др.) математическое мышление характеризуют как абстрактное, логическое, обладающее способностью к формализации, обобщению, пространственным представлениям и др., т.е. наделяют качествами, которые фактически определяют характеристику мышления не только в математической, но и в любой другой предметной области. [46], [48].

Сторонники четвертого подхода (А.Н. Колмогоров, Б.В. Гнеденко, В.А. Крутецкий) связывают математическое мышление с понятиями «способности» и «обобщения» [22], [23].

Сторонники пятого подхода (Р. Атаханов, В.В. Давыдов, Л.К. Максимов) считают, что подлинное математическое мышление, которое проявляется в самостоятельном решении возникающих задач, является мышлением теоретического типа и имеет аналитический, планирующий и рефлексирующий уровни развития. Особое внимание изучению математического мышления посвятил Р. Атаханов. В результате проведенных им экспериментальных исследований было установлено, что

эмпирический уровень математического мышления имеет более ранние, а теоретический – более поздние возрастные проявления, т. е. имеется определенный период перехода от эмпирического уровня математического мышления к теоретическому [10], [27].

В своей работе под математическим мышлением мы будем понимать умственную деятельность личности, подчиненную математическим законам, направленную на изучение окружающего мира и установление закономерностей между различными предметами и явлениями действительности.

Поэтому в своей работе в структуре математического мышления обучающихся мы придерживались мнения Низмановой М.А., которая выделяет четыре компонента:

- мотивационный,
- когнитивный,
- содержательный,
- операционный [31].

Мотивационный компонент включает в себя мотивацию, являющейся движущей силой процесса развития математического мышления и проявляется в стремлении обучающихся к улучшению личностных достижений. Основой когнитивного компонента математического мышления являются знания, полученные в результате его функционирования. Содержательный компонент математического мышления образован качествами специфичными для данного вида мышления. Операциональный компонент представлен математическими умениями и мыслительными операциями, как составляющими умственной деятельности при математическом мышлении. Взаимодействие всех четырех компонентов: мотивационного, когнитивного, содержательного и операционального, лежит в основе преобразования математического материала, в результате которого можно говорить об изменении уровня математического мышления.

Задачи являются основным средством развития математического мышления учащихся. И здесь речь идёт не об упражнениях тренировочного характера, а о задачах, являющихся важнейшим слагаемым на пути развития способностей учащегося. Учитель должен научить школьника находить пути к решению проблем, а это значит – формировать у учащихся способность к самостоятельному, творческому мышлению. Решение любой задачи, особенно сложной, требует от учащихся напряжённого труда и упорства. А упорство проявляется только тогда, когда задача интересна. Чаще всего интерес вызывают комбинаторно современное – вероятностные задачи.

Итак, анализ психологической литературы и исследований в области развития математического мышления показал, что математическое мышление как специфический вид мышления представляет собой умственную деятельность, направленную на разрешение той или иной задачи.

Основными свойствами, характеризующими как математическое мышление в целом, так и его отдельные составляющие (практическое, логическое и пространственное мышление), являются: гибкость; скорость протекания мыслительных процессов; умение увидеть и поставить новый вопрос; экономичность; широта и глубина; последовательность и критичность.

Также следует отметить следующие характерные черты математического мышления, которые формируются у подавляющего числа учащихся при изучении математики в средней школе:

1. чёткость формирования проблемы, задачи, задания;
2. понимание предлагаемого математического материала;
3. строгость изложения материала;
4. память [19].

Без целенаправленного развития математического мышления, являющегося одним из важнейших компонентов процесса познавательной деятельности, невозможно достичь эффективных результатов в обучении,

сформировать учебные действия средствами такой предметной области научного знания как математика.

Методические аспекты развития математического мышления исследовали многие ученые, но в их работах подчеркивается необходимость формирования следующих умений учащихся:

- «умение правильно формулировать определения, опираясь на использование различных логических связей;
  - умение приводить примеры и контрпримеры, тем самым демонстрируя свои возможности при подведении объектов под определения и отрицания определения;
  - умение приводить классификацию известных понятий, демонстрируя свое понимание в таком вопросе, как понятие отношения;
  - умение выделять условия и заключения теорем;
  - умение понимать смысл доказательств и проводить его и т. д.»
- [17, с. 212].

В настоящее время комбинаторика занимает весьма значительное место в науке и прикладной деятельности. Ее идеи, методы и результаты не только используются, но и буквально пронизывают все естественные и технические науки. Выборы и референдумы, банковские кредиты и страховые полисы, таблицы занятости и таблицы опросов вошли в нашу жизнь. Общество все больше начинает изучать себя и делать прогнозы о себе и о природных явлениях, которые требуют понятия вероятности.

В соответствии с федеральным компонентом Национальных образовательных стандартов элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей включены в программу по математике базового (среднего) школьного курса. В последние годы вероятность и комбинаторика были включены в задания по математике для выпускного государственного экзамена и единого государственного экзамена. Поэтому необходима специальная подготовка в области математического образования, чтобы научить учащихся решать такие задачи.

В науке и практике учащиеся часто сталкиваются с задачами, в которых нужно составить различные комбинации из конечного числа элементов и подсчитать количество таких комбинаций. Такие задачи называются комбинаторными, а отрасль математики, занимающаяся такими задачами, называется комбинаторикой [37].

Слово «комбинаторика» происходит от латинского слова «combinare», что означает «объединять». Комбинаторные методы широко используются в физике, химии, биологии, экономике и теории вероятностей.

Важный аспект изучения комбинаторики заключается в том, что эта область математики может быть применена практически во всех науках и профессиях. Знание комбинаторики может помочь ученикам в работе с огромными объемами данных, при работе с компьютерами и программировании, а также при изучении таких наук, как физика, биология, химия и экономика.

Кроме того, изучение комбинаторики может стимулировать интерес к научным и математическим исследованиям в целом. Сложность задач и их эмоциональный заряд могут вызвать в учениках чувство удовлетворения от решения сложных заданий и стимулировать их желание развиваться в этой области знаний.

Комбинаторные задачи - это задачи, которые имеют большое значение в развитии математического мышления у школьников. Эти задачи помогают ученикам развивать логическое мышление, умение абстрагироваться от конкретных ситуаций и решать проблемы на основе закономерностей и правил.

Изучение комбинаторных задач позволяет ученикам узнать и понять такие основные принципы, как правило умножения, правило сложения, перестановки и сочетания. Это не только помогает решать конкретные задачи, но и развивает их мышление, учит абстрактному мышлению и знанию математических закономерностей.

Кроме того, решение комбинаторных задач требует от учеников точности, внимательности и системности. При работе над такими задачами они учатся структурировать свои мысли, организовывать информацию, постоянно перепроверять свои выводы и решения.

Таким образом, комбинаторные задачи играют важную роль в развитии математического мышления и являются важным элементом учебного плана в школе. Они помогают ученикам развивать критическое мышление, систематический подход к решению задач и, в целом, готовят их к дальнейшему изучению более сложных математических понятий. Так же можно сказать, что комбинаторные задачи необходимы для развития математического мышления школьников, так как они развивают не только конкретные математические навыки учащихся, но и способствуют развитию учеников в целом.

## **1.2 Особенности комбинаторных задач**

Комбинаторные задачи - это задачи на нахождение всех возможных вариантов решения, иногда, с определенными характеристиками, или задачи на подсчет количества возможных комбинаций решения.

Вариантов решений комбинаторных задач, выделяют всего два: «формальные» и «неформальные» [35].

При «формальном» способе решения необходимо определиться с характером выборки, выбрать подходящую формулу или комбинаторный принцип, а затем подставить числа и получить ответ. Ответ - это множество полученных вариантов, которые сами не образуются.

Например: Сколько словарей надо иметь, чтобы можно было выполнять переводы непосредственно с любого из пяти языков на любой из этих пяти?

«Неформальный» путь решения комбинаторной задачи предусматривает составление всех возможных вариантов данных элементов.

Например: У кассы кинотеатра стоят четверо ребят. У двух из них сторублевые купюры, у других двух - пятидесятирублевые. Как должны расположиться ребята, чтобы никому не пришлось ждать сдачи, если билет в кино стоит 50 рублей?

На основе проведенного анализа научно-методической литературы можно разделить комбинаторные задачи на следующие виды:

1. Задачи, в которых необходимо перечислить все возможные варианты решения. Например: номер комнат в общежитии можно представить в виде двухзначного числа, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5. Какие номера комнат могут быть?

2. Задачи, суть которых состоит в требовании выбрать из всех возможных решений именно то, которое будет удовлетворять заданному дополнительному требованию. Например: при регистрации на конкурс чтецов участникам присваиваются двухзначные номера состоящие из цифр 3, 5, 6, 8, 9. Какие номера могут быть у участников, при условии, что цифры в номере не могут повторяться?

3. Задачи, решение которых требует выполнить подсчет количества возможных решений. Например: в финальном этапе олимпиады по математике учувствуют 7 школьников. Сколькими способами их можно расположить в списке? [12], [21], [47].

Комбинаторные задачи имеют свои особенности, которые отличают их от других типов математических задач.

Первой особенностью является то, что комбинаторные задачи требуют от учеников умения анализировать и организовывать информацию. В этом смысле комбинаторика является более абстрактной областью математики, которая не всегда связана с конкретными ситуациями или примерами.

Второй особенностью комбинаторных задач является наличие правил и закономерностей, которые необходимо знать и уметь применять для решения задач. Например, правило умножения, перестановки и сочетания - это основные правила комбинаторики. Они позволяют решать задачи на подсчет

количества комбинаций в различных ситуациях, например, при вычислении количества вариантов составления слов из определенного набора букв или размещения элементов в определенном порядке.

Третьей особенностью комбинаторных задач является то, что они могут быть очень сложными и требовать тщательного анализа и долгого решения. Однако при правильном подходе и использовании правил и закономерностей, такие задачи могут быть решены довольно быстро и эффективно.

Четвертой особенностью комбинаторных задач является то, что они могут быть применены в разных областях науки и жизни, о чем уже упоминалось ранее. Например, задачи комбинаторики могут быть использованы для решения проблем в экономике, биологии, технологии и даже музыке [16], [49].

Таким образом, комбинаторные задачи представляют собой один из важных разделов математики. Они способствуют развитию математического мышления школьников, так как благодаря комбинаторным задачам учащиеся учатся анализу и организации полученной информации на основе изученных правил и закономерностей. Обучающиеся в процессе решения комбинаторных задач так же учатся структурированному применению полученных знаний, а так же иногда при решении комбинаторных задач требуется воспроизвести в своей памяти определенный метод решения, которые поможет решить задачу быстро и эффективно.

### **1.3 Основные методы и приемы, используемые при обучении темы «Комбинаторика»**

Обучению решения комбинаторных задач посвящены практически все ступени образовательного процесса в курсе математики средней школы, начиная с бесформульных примеров в начальной школе и заканчивая элементами теории вероятности и математической статистики в выпускных

классах общеобразовательных учебных заведений. Поэтому, эта тема позволяет привить учащимся математическую культуру и способность к логическому мышлению начиная с самой начальной школы. Комбинаторика учит абстрактному восприятию различных предметов и объектов, развивает способности к их анализу.

С комбинаторными задачами сталкиваются не только в математике и информатике, но и в физике, лингвистике, химии, биологии, да и специалисты различных других профильных ориентаций.

Однако, существуют известные сложности, которые испытывают учащиеся при решении комбинаторных задач, связанные с необходимостью самостоятельно выделять и классифицировать различные элементы и множества в целом, и совершать операции с ними по правилам комбинаторики. Это указывает на необходимость улучшения методологических подходов к процессу изучения элементов комбинаторики в курсе математики, что является обязательным для успешного окончания общеобразовательной школы.

Основными методами, при решении темы «Комбинаторные задачи» являются:

1. Перебор всех возможных вариантов, который может быть систематическим перебором или перебором с ограничениями. Данный метод даёт возможность собирать решения конкретных задач, что позволяет в дальнейшем вводить комбинаторные формулы и принципы.

2. Дерево вариантов (граф). Граф-дерево применяют для наглядной систематизации различных вариантов при решении комбинаторных задач. Формирование умения решать задачи с помощью графов может происходить как во время уроков, так и во внеклассной работе.

3. Таблица вариантов. Этот метод служит для облегчения процесса нахождения всех вариантов методом перебора, он позволяет разделить и упорядочить ход рассуждений и не упустить каких-либо искомых вариантов.

4. Правило суммы. Если некоторый объект А можно выбрать N разными способами, то другой объект В можно выбрать М способами. Тогда существует N+М вариантов выбрать либо объект А, либо объект В.

5. Правило произведения. Если объект А можно выбрать N способами, а после каждого такого выбора объект В можно выбрать М способами. Значит выбор пары (А,В) можно осуществить NM способами. Этот применяется в том случае, когда не нужно перечислять все возможные варианты, а необходимо ответить на вопрос - сколько их существует.

6. Использование комбинаторных формул, такие как: перестановка, размещение и сочетание. Этот метод помогает найти количество возможных вариантов решения.

- Перестановкой называется каждое расположение n элементов в определенном порядке.
- Размещением называется любое множество, состоящее из k элементов, взятых в определенном порядке из данных n элементов.
- Сочетанием называется любое множество, составленное из k элементов, выбранных из данных n элементов.

7. Задачи, при решении которых вводятся ограничения на искомые объекты.

8. Бином Ньютона. Формула представляющая выражение  $(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + C_n^3 a^{n-3} b^3 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$ . [11], [14], [21], [38].

Анализ научно-методической литературы позволил нам выделить следующие методические приёмы при обучении школьников решению комбинаторных задач:

1. Моделирование комбинаторной задачи по данному решению и ответу.

2. Сопоставление решения комбинаторной задачи с текстом комбинаторной задачи.
3. Дополнение решения комбинаторной задачи в соответствии с текстом задачи.
4. Поиск ошибок в решении комбинаторной задачи в соответствии с текстом задачи.
5. Сравнение разных способов решения комбинаторной задачи и выбор наиболее рационального.
6. Проверка решения комбинаторной задачи другим методом решения, отличным от использованного. [12], [15], [47].

Выполняя все методические приемы, учащиеся овладевают умениями моделировать комбинаторную задачу, решать комбинаторные задачи разными способами, анализируют полученные результаты и сравнивают их, определяют наиболее рациональный способ решения задачи и выполняют проверку правильности решения. Данные методические приемы работы над комбинаторной задачей позволяют повысить не только уровень сформированности умения решать комбинаторные задачи, но и будут способствовать формированию у учащихся метапредметных умений.

## **ГЛАВА 2. МЕТОДИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ**

### **2.1 Анализ школьных учебников по проблеме исследования**

Обучение в школе должно строиться таким образом, чтобы у ребенка шло интенсивное развитие всех его качеств, в частности, его логического мышления, лучше всего соответствует изучение математики. Считается, что формально-логические элементы мышления составляют собой любой знаковый материал именно так, что создается строго упорядоченный и легко понимаемый контекст, требуемый для успешного общения между людьми. И это не обязательно должны быть слова, но так же и иные символы, знаки и даже образы, то есть когда из всех реальных и потенциальных связей между предметами и явлениями выбирается несколько конкретных, которые укладываются в общий контекст и не создают противоречий.

Комбинаторные задачи предоставляют большие возможности для развития мышления учащихся. Кроме того, процесс обучения учащихся решению комбинаторных задач может расширить их знания о проблеме и познакомить их с новыми способами решения задач. Они могут подготовить учащихся к решению жизненных проблем, научить их принимать оптимальные решения в той или иной ситуации и организовать основу для исследовательской и творческой деятельности учащихся.

В процессе решения комбинаторных задач учащиеся приобретают опыт неупорядоченного комбинирования возможных вариантов. Этот опыт следует использовать для дальнейшего систематического исследования.

При введении любой новой темы или вопроса в основной курс школы встаёт проблема изложения в школьных учебниках. Рассмотрим учебники

математики на предмет методов и приёмов для решения комбинаторных задач.

В учебнике Математика. 5 класс. Н. Я. Виленкин [28] теоретическому материалу не посвящается ни одна глава. Автор знакомит учащихся с графом – дерево возможных вариантов в Главе 1 «Натуральные числа ноль. Шкалы» в § 2 «Цифры и числа». Автор предлагает решить задачи на нахождение чисел из представленных цифр. В § 4 «Плоскость, прямая, луч, угол» автор знакомит обучающихся с правилом умножения не вводя при этом формулу и не вводя понятия. В § 7 «Представление числовой информации в столбчатых диаграммах» автор знакомит учащихся с таблицей возможных вариантов. В 3 главе § 18 «Делитель и кратные» автор вводит понятие «Комбинаторика» и «Комбинаторные задачи», а так же еще раз показывает граф – дерево возможных вариантов с развернутым объяснением решения такого типа задач. В главе 4 § 20 «Формулы» вводит понятие факториал и предлагает решить задачи с его использованием.

В материале данного учебника упражнения имеют классификацию: задачи, на нахождение всех возможных вариантов путем перебора, использования дерева возможных вариантов или таблицы; задачи на нахождение количества возможных вариантов; задачи на нахождение всех возможных вариантов с помощью использования правила умножения, задачи на нахождение количества возможных вариантов решения с использованием факториала. Решение задач подробно описано в учебнике.

В учебнике Математика. 6 класс. Н. Я. Виленкин [29] теоретический материал снова не представлен ни в одной главе. Большое количество вариаторов комбинаторных задачи встречаются на протяжении всего учебника. В основном все задачи построены на закрепление материала, который обучающиеся изучили в 5 классе.

Н. Я. Виленкин [29] предлагает решать комбинаторные задачи, используя удобный способ перебора всех возможных вариантов, путём построения дерева возможных вариантов, а также упрощая нахождение

количества вариантов путем использования правила умножения и используя факториал. Решение задач подробно описано в учебнике.

Комбинаторные задачи приводятся авторами разных учебников в 7-9 классах. Обучение выполнению данных задач осуществляется с помощью решения задач учителем, точно так же, как и в 5-6 классах: продолжается решение задач с помощью стандартного перебора всех возможных вариантов. Тем не менее, на данном этапе учащиеся уже работают с гораздо более широким набором элементов и в более сложных ситуациях. Им предлагается познакомиться и изучить формулы для упрощения решения комбинаторных задач и упрощения записей.

В учебниках встречаются упражнения на выполнение операций над множествами и построение классификаций. Как и в 5 классе, упражнения классифицируются: на нахождение всех возможных вариантов путем перебора, использования дерева возможных вариантов или таблицы; задачи на нахождение количества возможных вариантов; задачи на нахождение всех возможных вариантов с помощью использования правила умножения задачи с использованием формул сокращения, размещения и сочетания.

Что касается авторов, в учебнике «Алгебра» Е. А. Бунимович [1] 7 класс и «Алгебра» Е. А. Бунимович [4] 8 класс задачи на комбинаторику отсутствуют. В учебнике 9 класса [7] этого же автора включены только «Вероятность и статистика».

Авторы Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк [3], [6] в 7-8 классах рассматривают статистические характеристики, статистические исследования. В материале учебника встречаются задачи на применение правила произведения, а так же встречается теоретический материал понятий перестановка, размещение и сочетание, а так же их формулы. В курс Алгебра 9 класса Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк [9] включена глава 11 «Элементы комбинаторики». В §30 «Примеры комбинаторных задач» автор вводит понятие комбинаторика, знакомит учащихся с такими приемами, как перебор возможных вариантов, граф – дерево возможных вариантов решения, а так

же с комбинаторным правилом умножения. В §31 «Перестановки» автор знакомит учащихся с формулой перестановки  $P_n = n!$ . В §32 «Размещения» автор знакомит учащихся с формулой размещения  $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ . В §33 «Сочетания» автор знакомит учащихся с формулой сочетания  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

В материале данного учебника упражнения имеют классификацию: задачи, на нахождение всех возможных вариантов или количества возможных вариантов путем перебора, использования дерева возможных вариантов, применения правила умножения; задачи на нахождение количества возможных вариантов с использованием таких формул, как перестановки, размещения и сочетания. В учебнике представлено большое количество хорошо подобранных упражнений разного уровня сложности.

Автор А. Г. Мордкович в 7-8 классах [2], [5] рассматривает задачи на таблицу вариантов решения и граф – дерево возможных вариантов решения, а так же в теоретических материалах учебников встречаются правило умножения, а так же понятия перестановки, размещения, сочетания и их формулы. Автор издания в учебнике «Алгебра» 9 класс [8] в 5 главе «Элементы комбинаторики, статистики и теории вероятностей» §26 «Комбинаторные задачи» вводит понятие комбинаторные задачи и показывает учащимся графические способы решения: дерево возможных вариантов, таблица вариантов решения. В учебнике указаны примеры решения комбинаторных задач с использованием формул умножения, перестановки, сочетания и размещения. В задачнике дан большой список задач по данной теме. В начале представляются задачи базового уровня, а затем идут задачи повышенного уровня сложности, отмеченные отдельным знаком.

Анализ школьных учебников, особенностей и способов решения комбинаторных задач позволяет нам сделать следующие выводы:

1. При составлении комбинаторных задач для учащихся используются различные виды соединений, такие как размещения, расстановки и сочетания.

2. Основным методом решения комбинаторных задач в курсе основной школы является «неформальный» метод решения, так он учитывает особенности мышления школьников и не требует введения в программу дополнительной информации

3. Можно предположить, что в качестве способов решения комбинаторных задач в курсе основной школы вполне доступны способы перебора, построение таблицы вариантов решения и графа – дерево возможных вариантов.

## **2.2 Методика обучения решению комбинаторных задач в основной школе**

Для того, чтобы сформировать у школьников умение решать комбинаторные задачи, необходима всесторонняя работа над задачей. Очень важно научить учащихся решать комбинаторные задачи различными методами. Анализ методической литературы позволит нам выделить этапы в обучении решению комбинаторных задач учащихся 5-6 классов:

- Подготовительный этап:

На подготовительном шаге улучшается работа мыслительных операций, таких как анализ, синтез и сравнение, являющихся частью процесса решения комбинаторных задач. Особое внимание уделяется сравнению объектов, которые состоят из отдельных компонентов. Производится сравнение по следующим признакам: количество элементов; состав элементов, из которых состоит объект; расположение элементов в объекте.

- Решение задач с небольшим количеством вариантов:

На этапе решения задач с небольшим количеством вариантов ученики пробуют перебором по определенной системе определять все возможные варианты для решения комбинаторных задач. Основной целью данного этапа является обучение школьников решению задач с использованием системного перебора всевозможных вариантов.

- Работа с графическими средствами:

Этап работы с графическими средствами должен облегчить процесс нахождения необходимых вариантов. Для этого нужно научить школьников использовать таблицы и графы. Они позволят легко разделить рассуждения и точно перебрать все возможные варианты [39].

Вслед за Д. Пойа в процессе решения задачи выделяем четыре основных этапа: осмысление условия задачи, составление плана решения, осуществление плана решения, изучение найденного решения [34].

Рассмотрим 4 этапа более подробно:

1. Осмысление условия задачи. На данном этапе учащимся необходимо прочитать задачу, понять ее смысл. Необходимо научить учащихся правильно читать задачу, сразу выявлять то, что им дано и что им необходимо найти. Обучающиеся могут прочитать задачу несколько раз, чтобы понять ее смысл, но необходимо стремиться к тому, чтобы учащиеся делали это с первого раза. Так же учащимся необходимо установить вид и тип задачи и зафиксировать результаты анализа задачи.

2. Составление плана решения. На данном этапе обучающиеся начинают искать возможные варианты решения. Они должны выделить данные и искомые, установить между ними связь и в соответствии с этим выбрать подходящий вариант решения.

3. Осуществление плана решения. На данном этапе от учащихся необходимо грамотное выделение в каждом силлогизме, на которые разбивается доказательство, большую и малую посылки, а также следующий из них вывод. Необходимо научить школьников давать пояснения к тем действиям, которые они выполняют.

4. Изучение найденного решения. На данном этапе необходимо определить правильность хода решения и правильность ответа на задачу. Очень важно, чтоб учащиеся понимали важность данного этапа при работе с задачей, ведь он помогает сделать выводы в том случае, если задача решена неверно и в будущем избегать подобных ошибок [26], [40].

Рассмотрим методику работы с задачами при решении комбинаторных задач.

Первый этап - осмысление условия задачи. Не рекомендуется сразу переходить к решению комбинаторной задачи, для начала необходимо убедиться в том, что учащиеся поняли смысл задачи, верно определили, что им дано и что им нужно найти, знают ли они вид такой комбинаторной задачи и какие варианты решения у нее есть.

На первом этапе решения комбинаторных задач необходимо выяснить, однозначно ли сформулирована задача, есть ли в ней все необходимые данные. Важно правильно поставить вопросы по условию задачи, это поможет учащимся правильно проанализировать условие задачи. Так же можно представить ситуацию, которая описана в задаче или смоделировать ее. Это помогает сделать задачу более доступной.

Второй этап – составление пути решения. Составление пути решения это главный шаг к нахождению верного вида решения комбинаторной задачи. Правильно подобранный путь решения, практически гарантирует верное решение. На нахождение правильного пути решения может потребоваться достаточно большое количество времени. Ведь может случиться и так, что найденный план решения может оказаться неправильным, в таком случае нужно будет возвращаться к анализу задачи.

Можно направить учащегося наводящими вопросами, дать ему какой-то совет. Знает ли решающий вид таких задач? Подобные задачи? Знает ли он формулы или методы для решения такого типа задач? Если подобная задача знакома учащемуся, то необходимо свести путь решаемой задачи к решенной ранее.

Может случиться так, что подобная задача незнакома учащемуся, в таком случае можно попробовать переформулировать задачу без изменения математического содержания. При поиске верного пути решения необходимо задаваться таким вопросом, как: Учтены ли все данные в задаче? Нахождение неиспользованных данных может облегчить поиск решения.

Иногда, можно попробовать преобразовать искомые и данные в задаче. Это может ускорить нахождение верного пути решения. В таком случае необходимо сделать так, чтоб искомое приблизилось к данным, а данное к искомому. Может случиться и такое, что учащийся все же не сможет найти верный путь решения. В таком случае можно попробовать проанализировать задачу и понять, можно ли решить ее по частям, а потом части объединить в единое решение.

Третий этап – осуществление плана решения. На данном этапе учащийся реализует найденный путь решения, учитывая все детали, отвечает на поставленный вопрос в задаче. Весь ход решения нужно рассматривать очень внимательно.

При решении комбинаторных задач в основном используются три метода решения. 1 метод – перебор всех возможных вариантов. 2 метод – это графический метод решения, к которому относятся построение таблицы решения возможных вариантов и граф – дерево возможных вариантов. 3 метод – это аналитический метод решения комбинаторных задач. К данному методу относятся решения с помощью формул умножения, перестановки, размещения и сочетания.

На данном этапе работы с комбинаторной задачей необходимо проконтролировать правильно ли учащиеся используют выбранный метод решения. При использовании перебора всех возможных вариантов, верно ли они осуществляют перебор, так как некоторые задачи могут быть ограничены какими-то дополнительными условиями. В случае графического метода решения задачи правильно ли они составляют таблицу и дерево возможных вариантов решения. В случае с аналитическим методом решения

комбинаторных задач необходимо проконтролировать правильно ли учащимися записана формула, не перепутаны ли в них данные и искомые части.

Четвертый этап – изучение найденного решения. Обычно, учащиеся после обоснования хода решения и получения ответа считают задачу решенной, но это не так. Ведь полученный ответ не гарантирует, что задача решена безошибочно. А так же не обозначает, что выбран самый оптимальный вариант решения. Для этого и проводится анализ правильности решения комбинаторной задачи, для того чтобы выявить, что задача решена безошибочно.

На данном этапе работы с комбинаторной задачей можно решить задачу тем же методом еще раз. Это поможет установить правильность хода решения, не допущена ли где-то ошибка, а так же правильность решения. Так же можно попробовать решить задачу с помощью другого метода. Можно воспользоваться таким приемом, как сравнение с уже решенной задачей, сравнить ход решения и полученный результат.

В процессе работы с комбинаторными задачами учащиеся основной школы проходят по основным этапам, такие как: осмысление условия задачи, составление плана решения, осуществление плана решения, изучение найденного решения. В процессе решения комбинаторных задач границы названных этапов очень размыты. Решение задач должно проходить все этапы, так как это облегчит усвоение материала для учащихся.

Рассмотрим методические аспекты обучению решению комбинаторных задач.

Изучение комбинаторных задач в курсе основной школы начинается с 5 класса. Один из уроков в 5 классе посвящен изучению таблицы возможных вариантов решения. Данную задачу можно использовать при уроке, направленному на усвоение новых знаний на этапе актуализации с переходом в изучение новых знаний.

**Задача 1.** Есть три цифры 1, 2 и 3. Сколько двузначных чисел можно составить из данных цифр, если цифру в числе можно использовать только один раз?

Первый этап – осмысление условия задачи. На данном этапе нужно удостовериться в том, что учащимися понята суть вопроса поставленного в задаче. Для этого можно использовать следующую систему вопросов:

1. Что нам дано в задаче?
  - Цифры 1, 2 и 3.
2. Что требуется в задаче?
  - Составить двузначные числа.
3. Какое ограничение есть в задаче?
  - Цифры в числах не должны повторяться.
4. Какой основной вопрос задачи?
  - Найти количество двузначных чисел.

Второй этап – составление плана решения. На данном этапе учащимся необходимо найти верный путь решения поставленной задачи. Для этого можно построить беседу следующим образом.

1. Для начала необходимо спросить:
  - Из чего состоят двузначные числа?
2. После ответа учащихся о том, что двузначные числа состоят из десятков и единиц можно уточнить у них:
  - Сколько цифр для составления числа мы можем использовать?

Учащиеся ответят, что мы можем использовать только две цифры. Учащиеся знают, что при составлении чисел у них есть ограничение, что цифры в числах не должны повторяться, поэтому можно перейти к поиску метода решения таким вопросами, как:

- Каким способом нам легче всего будет составить двузначные числа?
- С чего лучше начать составление двузначных чисел?

Учащиеся знают, что двузначные числа начинаются с десятков и понимают, что для них проще всего будет составить числа, где место

десятков сначала занимает 1, потом 2, потом 3. Составить все возможные варианты и сосчитать их количество.

Третий этап – осуществление плана решения. На данном этапе учащиеся осуществляют систематический перебор всех возможных вариантов решения и считают количество составленных вариантов. Необходимо убедиться, что обучающиеся не забыли об ограничении поставленном в условии задачи и исключают варианты, где цифры в числах повторяются.

Четвёртый этап – изучение найденного решения. Данный этап является идеальным для развития творческой деятельности учащихся. Можно предложить школьниками самостоятельно придумать вариант проверки решения задачи. Так же данным этапе можно осуществить совместную работу с учащимися и предложить им наглядный вариант решения задачи и вместе с ними составить таблицу возможных вариантов решения задачи (таблица 1)

Таблица 1 – таблица вариантов решения к задаче 1

|   | 1  | 2  | 3  |
|---|----|----|----|
| 1 | 11 | 12 | 13 |
| 2 | 21 | 22 | 23 |
| 3 | 31 | 32 | 33 |

Данная задача в курсе математики 5 класса служит изучению нового типа решению комбинаторных задач – составление таблицы возможных вариантов.

На уроках математики 5 классе учащиеся также знакомятся с таким вариантом решения комбинаторных задач как граф – дерево возможных вариантов решения. Данную задачу можно использовать на уроке посвященном закреплению изученному материалу на этапе первичное закрепление.

**Задача 2.** В классе назначили четырех дежурных. Ими оказались Вова, Ксюша, Рома и Катя. Какие можно составить группы из двух человек для дежурства в классе после уроков? Сколько различных групп может получиться?

Первый этап – осмысление условия задачи. На данном этапе обучения решению комбинаторных задач необходимо убедиться, что обучающиеся поняли условие задачи. Необходима система вопросов, помогающая установлению частных связей между данными и искомыми. Для нашего примера это могут быть следующие вопросы:

1. Что нам дано в задаче?

- Что в классе назначили четырех дежурных и их имена

2. Что нам нужно составить?

- Пары из двух человек

3. Есть ли какие-то ограничения в составлении пар?

- Нет

4. Почему?

- В условии задачи нет ограничений, все могут дежурить друг с другом

5. Что нам нужно найти?

- Количество пар из двух человек

Второй этап – составление плана решения. На данном этапе обучения решению комбинаторных задач необходимо убедиться, что обучающийся владеет навыками, которые потребуются ему для успешного решения задачи. На данном этапе можно корректировать работу учащихся такими вопросами, как:

1. Знакомы ли вы с таким видом задач?

- Знакомы

2. Решались ли подобные задачи ранее?

- Да

3. Какими методами такие задачи решались ранее?

- Методом перебора всех вариантов, составление таблицы возможных вариантов, построение графа – дерево возможных вариантов

4. Какой метод будет удобней всего?

- Граф – дерево возможных вариантов

5. Почему?

- Этот метод наглядней и не позволит упустить ни один вариант

Третий этап – осуществление плана решения. К данному этапу обучения решению комбинаторных задач учащиеся поняли условия задачи, что им даны имена ребят, из которых нужно составить пары из двух человек и найти их количество, что самый оптимальный вариант для решения данной задачи это составление графа – древо возможных вариантов решения, учащиеся могут переходить к решению.

На данном этапе необходимо проконтролировать, что выбранный метод решения осуществляется верно, что все данные учтены и построение графа осуществляется верно. В нашем случае необходимо проконтролировать, чтобы учащиеся объединяли одинаковые пары в один вариант, например КВ и ВК. По окончании данного этапа учащийся получает ответ на задачу. А так же получает наглядный пример решения (рисунок 1).

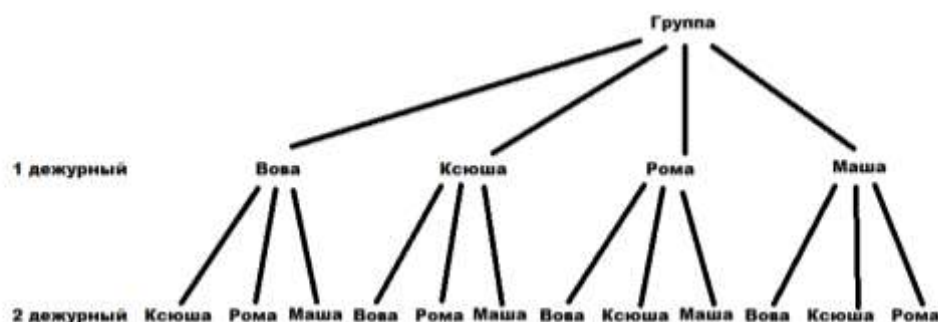


Рисунок 1 – Дерево возможных вариантов к задаче 2

Четвёртый этап – изучение найденного решений. К началу данного этапа учащийся считает, что поставленная перед ним задача решена, но это не так. Необходимо проанализировать и проверить решение задачи, выявить правильность хода решения и ответ.

На данном этапе можно предложить учащимся самостоятельно проверить решение задачи, это можно сделать несколькими способами.

Например, попросить учащихся еще раз решить данную задачу с помощью выбранного метода решения задачи или предложить им альтернативный метод решения, в данном случае можно проверить решение с помощью составления таблицы возможных вариантов, при этом необходимо проконтролировать, что при составлении таблицы учащиеся понимают, что выбранный человек не может дежурить сам с собой и исключали такие варианты решения, а так же объединяли одинаковые пары в один вариант.

По итогу проверки у учащихся получится следующая таблица (таблица 2).

Таблица 2 – Таблица вариантов решения к задаче 2

|   | В      | К      | Р      | М      |
|---|--------|--------|--------|--------|
| В | ВВ     | КВ(ВК) | РВ(ВР) | МВ(ВМ) |
| К | ВК(КВ) | КК     | РК(КР) | МК(КМ) |
| Р | ВР(РВ) | КР(РК) | РР     | МР(РМ) |
| М | ВМ(МВ) | КМ(МК) | РМ(МР) | ММ     |

Данная задача подходит для проверки, как учащимися усвоен новый вариант решения комбинаторных задач граф – дерево возможных вариантов. Не возникает ли у учащихся трудностей в понимании и составлении графа, а так же позволит скорректировать работу учащихся.

Рассмотрим задачу, которую можно использовать при изучении темы «Комбинаторные задачи» в 6 классе. К данному моменту учащиеся знакомы со всеми элементарными вариантами решения комбинаторных задач, которые им были представлены в 5 классе, а так же умело ими пользуются. Данную задачу можно использовать на уроке направленном на повторение изученного материала в 5 классе на этапе применения знаний и умений.

**Задача 3.** Какие двузначные числа можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5.

Первый этап – осмысление условия задачи. Для начала убеждаемся, что учащимися понято условие задачи с помощью системы вопросов тем самым подталкивая их к поиску пути решения.

1. Что нам дано в задаче?
  - Цифры
2. Что нам нужно составить?
  - Двузначные числа
3. Есть ли какие-то ограничения в составлении двузначных чисел?
  - Двузначные числа не могут начинаться с нуля
4. Что нам нужно найти?
  - Все двузначные числа

Второй этап – составление плана решения. На данном этапе учащихся необходимо направить на поиск пути решения с помощью системы вопросов:

1. Какие методы решения комбинаторных задач вы знаете?
  - Перебор возможных вариантов, графический и аналитический метод
2. Какой метод будет удобней всего?
  - Графический
3. Почему?
  - Этот метод наглядней и позволяет учесть все варианты
4. Какой из вариантов графического метода решения для вас будет удобней?
  - Составление таблицы возможных вариантов
5. Как лучше составить таблицу возможных вариантов решения?
  - По вертикали записать цифры означающие десятки, а по горизонтали цифры означающие единицы
6. Какую цифру мы не будем записывать по вертикали
  - Ноль

Третий этап – осуществление плана решения. На данном этапе учащиеся составляют таблицу вариантов решения комбинаторной задачи, которая будет наглядной и не позволит упустить ни один вариант решения. Необходимо проконтролировать, что составление таблицы всеми учащимися осуществляется по оговоренному плану, в вертикальные клетки учащиеся не учитывают цифру 0. По итогу учащиеся получают таблицу (таблица 3).

Таблица 3 – Таблица вариантов решения к задаче 3

|   | 0  | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  |
|---|----|----|----|----|----|----|
| 1 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| 2 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 |
| 3 | 30 | 31 | 32 | 33 | 34 | 35 |
| 4 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 |
| 5 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 | 55 |

Четвёртый этап – изучение найденного решения. На данном этапе необходимо проверить ответ данный на задачу. Можно предложить учащимся составить граф – дерево возможных вариантов (рисунок 2) и самостоятельно из этого графа выписать все получившиеся варианты.

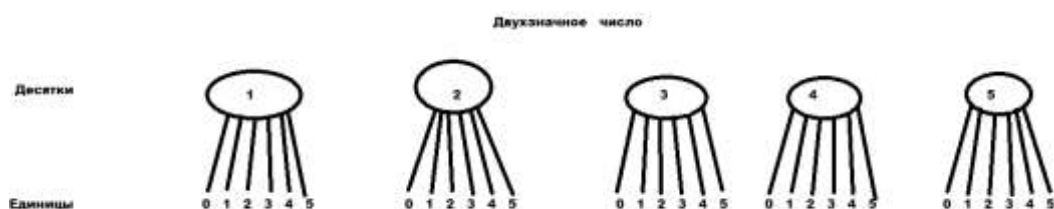


Рисунок 2 – Дерево возможных вариантов к задаче 3

Данная задача подходит для учащихся 6 класса при проверке знаний и умений полученных в 5 классе по теме «Комбинаторные задачи», так как при решении данной задачи учащиеся восстанавливают в памяти и воспроизводят знания полученные в 5 классе.

Рассмотрим задачу, которую можно использовать на уроке в 8 классе. К данному моменту учащиеся умело используют такие варианты решения как перебор возможных вариантов решения, таблица возможных вариантов решения, граф – дерево возможных вариантов решения. Знают правило умножения и знакомы с формулами перестановки, размещения и сочетания, но все еще не могут отказаться от элементарных методов решения комбинаторных задач.

Данную задачу можно использовать на закрепление формулы умножения, а так же показать учащимся, что на данном этапе обучения нужно начинать отказываться от элементарных методов решения комбинаторных задач и переходить к аналитическому методу решения, так как задачи становятся объемней и сложнее.

**Задача 4.** Команда по волейболу состоит из 6 человек. Из команды нужно выбрать связующего и либеро. Сколькими способами можно это сделать?

Первый этап – осмысление условия задачи. Убеждаемся, что обучающиеся поняли условие задачи. Необходима система вопросов, помогающая установлению частных связей между данными и искомыми. Для нашего примера это могут быть следующие вопросы:

1. Что нам дано в задаче?
  - Команда из 6 человек
2. Что нам нужно найти?
  - Количество расстановок связующего и либеро из команды
3. Есть ли какие-то ограничения при расстановках?
  - Нет

Второй этап – составление плана решения. На данном этапе учащиеся могут начать решать задачу с помощью составления графа – дерево возможных вариантов, этот вариант тоже возможен, но нам необходимо показать, что есть более простой способ решения данной задачи. Учащихся можно направить с помощью системы вопросов:

1. Каким методом мы можем решить данную задачу?
  - Графическим методом граф – дерево возможных вариантов
2. Какие еще методы решения комбинаторных задач вы знаете?
  - Перебор возможных вариантов и аналитический метод
3. Можно ли решить данную задачу методом перебора?
  - Можно, но это будет долго и есть возможность упустить какой-то из вариантов и по итогу получить неверное количество
4. Какие формулы при аналитическом методе решения комбинаторных задач вы знаете?
  - Умножения, перестановки, сочетания, размещения
5. Попробуйте переформулировать задачу переводя ее на математический язык
  - Нужно найти произведение двух множителей
6. В таком случае мы можем использовать какую-то формулу для решения?
  - Да, формулу умножения
7. Что мы можем принять за первый и второй множитель?
  - Первый множитель – связующий, второй множитель – либеро
8. Учтите, что первый и второй множитель выбираются совместно, а не по отдельности, в таком случае, какое число будет первым множителем?
  - Шесть
9. Какое число будет вторым множителем?
  - Пять
10. Почему?
  - Всего дано шесть вариантов, при выборе второго множителя, один вариант уже занят первым множителем)

Третий этап – осуществление плана решения. Учащиеся пользуются правилом умножения для решения комбинаторных задач. Учитывая, что сначала они выбирают связующего, а потом либеро. Для того чтобы выбрать связующего из команды у них есть 6 возможных вариантов, так как команда

состоит из шести человек. Для того чтобы найти либеро у них есть 5 вариантов, так как в команде 6 человек, но один из них уже ушел на позицию связующего. По итогу учащиеся используют формулу и получают ответ  $P=N \cdot M=6 \cdot 5=30$ .

Четвёртый этап – изучение найденного решения. На данном этапе проверяем правильность хода решения и ответ. Предлагаем учащимся обозначить каждого игрока команды цифрами от 1 до 6 и составить граф – дерево возможных вариантов решения и посчитать количество получившихся вариантов решения (рисунок 3).

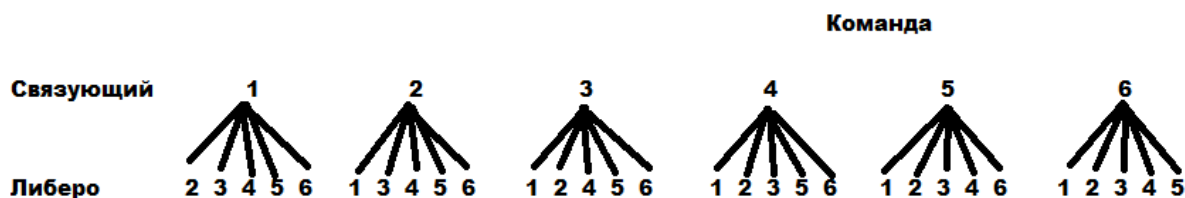


Рисунок 3 – Дерево возможных вариантов к задаче 4

После решения данной задачи у учащихся перед глазами складывается картина того, что действительно, элементарные методы решения комбинаторных задач не всегда проще и легче, что на данной ступени обучения лучше использовать аналитические методы решения комбинаторных задач, так как они гораздо быстрее и компактней по решению.

Рассмотрим задачу для 9 класса. Данную задачу можно использовать на уроке направленном на повторение изученного материала по такому методу решения комбинаторных задач как перестановка. Данную задачу можно использовать на таком этапе как применение полученных знаний.

**Задача 5.** Петя, Коля, Юра и Антон готовятся к сдаче ГТО. Сколько вариантов постановки друг за другом для сдачи ГТО есть у ребят?

Первый этап – осмысление условия задачи. Помогаем учащимся проанализировать задачу с помощью системы вопросов:

1. Что нам дано в задаче?

- Имена участников сдачи ГТО
- 2. Сколько их?
  - Четыре
- 3. В какой последовательности они сдают ГТО?
  - По очереди
- 4. Что нам нужно найти?
  - Количество вариантов расстановки друг за другом

Второй этап – составление плана решения. На данном этапе учащиеся могут не до конца понять, что от них требуют в задаче, в таком случае можно скорректировать работу путем вопросов:

1. Можем ли мы ввести какую-то систему расстановки?
  - Да, ребят 4, значит и места у них будут с 1 по 4
2. Что нам нужно сделать?
  - Расставить их друг за другом
3. В процессе решения что мы будем делать, чтоб найти количество вариантов расстановки?
  - Перемещать их между друг другом с 1 по 4 место
4. Решались ли подобные задачи ранее?
  - Да, решались
5. Знакома ли вам формула, которая может упростить решение?
  - Да, формула перестановки

Третий этап – осуществление плана решения. Осуществить план решения можно следующим образом:

1. Какие выводы вы можете сделать исходя из условия задачи и тех заключений к которым мы с вами пришли?
    - Данная задача решается с помощью формулы перестановки.
- Аналитический метод решения комбинаторных задач осуществляется путем применения формул перестановки, размещения и сочетания. Следовательно данная задача является комбинаторной
2. Назовите формулу перестановки

-  $P_n = n!$

3. Что в данном случае мы будем принимать за  $n$ ?

- цифру 4

4. Почему?

- Потому что участников сдачи ГТО 4 и занимают они с 1 по 4 место

Далее учащиеся применяют формулу и получают ответ.

Четвёртый этап – изучение найденного решения. Необходимо проверить правильность хода решения, это можно сделать следующим образом:

1. Какие еще методы решения комбинаторных задач вы знаете?

- Перебор вариантов, таблица вариантов решения, граф – дерево возможных вариантов, правило умножения

2. С помощью какого метода решения можно проверить решение данной задачи?

- Граф – дерево возможных вариантов решения

Далее необходимо провести исследование задачи, это можно сделать с помощью вопросов:

1. Как вы думаете если что-то изменить в условии задачи она будет иметь решение?

-Да

2. Почему?

- Если, например, участники будут сдавать ГТО не поочереди, а через  $n$  количество участников, то мы все равно сможем найти количество вариантов их расстановки. Потому что в данном случае нам неважно сдают ли они ГТО друг за другом или через  $n$  количество участников, количество вариантов от этого не изменится

Далее необходимо сформулировать ответ к задаче. В случае применения формулы у учащихся получится:  $P_n = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$  варианта расстановки. В случае проверки у учащихся получится следующее наглядное изображение:

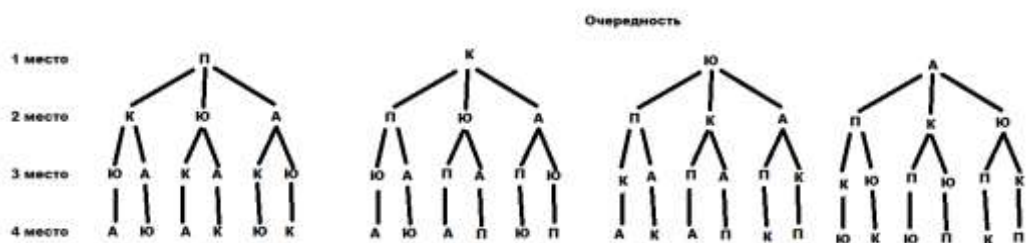


Рисунок 4 – Дерево возможных вариантов к задаче 5

Мы рассмотрели методику обучения решению комбинаторных задач и методику работы с комбинаторными задачами с использованием основных методов решения комбинаторных задач, которые изучаются в курсе основной школы. Это задачи, которые решаются перебором всех возможных вариантов решения, задачи, которые решаются с помощью построения графа – дерево возможных вариантов решения, с помощью построения таблицы возможных вариантов решения, задачи, которые решаются с помощью правила умножения и задачи с использованием основных комбинаторных формул.

Эти методы способствуют развитию математического мышления школьников так как при их применении учащиеся демонстрируют способность к логическому мышлению, гибкость мыслительных процессов в математической деятельности, стремление к рациональности решения, а также хранение математической информации.

### 2.3 Системы задач по теме «Комбинаторные задачи»

Проблеме решению задач посвящено много работ. К решению задач так же относятся и комбинаторные задачи. Комбинаторные задачи встречаются на всех ступенях курса основной школы и являются очень важным аспектом для развития математического мышления школьников. Так как данные задачи имеют большое разнообразие искомых ответов и вариантов решения. Во ФГОС ООО [44] для каждой ступени курса основной школы представлены свои задачи, но не всегда в школьных учебниках есть необходимый и достаточный материал для реализации этих задач.

Рассмотрим задачи, которые ставятся на всех ступенях курса основной школы и разработаем системы задач для их реализации.

«Задачи на реализацию темы «Комбинаторика» в 5 классе:

- выработка умений и навыков работать с таблицей, извлекать из таблиц информацию и анализировать ее;
- выработка умений заполнять в таблице пустые графы (строки, столбцы); формирование умений и навыков в составлении, выборе и упорядочении комбинаторных наборов;
- формирование умений подсчета комбинаторных объектов, методом непосредственного перебора;
- показать, что такое дерево возможных вариантов, его использование как один из методов решения комбинаторных задач» [44].

Для того, чтобы реализовать все задачи поставленные ФГОС ООО по теме «Комбинаторика» в 5 классе предлагаем следующую систему задач направленную на развитие математического мышления школьников:

**Задача 1.** Рассмотрите внимательно кольца бусинок (рисунок 5). Определите, что меняется от одного колечка к другому?

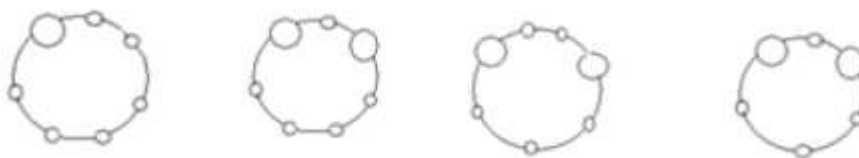


Рисунок 5 – рисунок к задаче 1.

**Задача 2.** Мама купила пучок редиса (рисунок 6) и взяла на салат 3 штуки. Какого размера могли быть эти редиски?

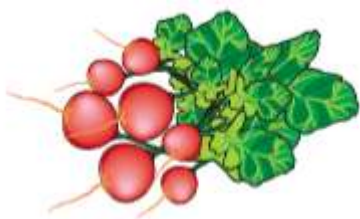


Рисунок 6 – рисунок к задаче 2.

Рассмотрим методику работы с задачей 2.

Осмысление условия задачи. Помогаем учащимся проанализировать задачу с помощью системы вопросов:

1. Что нам дано в задаче?

- Мама, которая купила пучок редиса и взяла произвольно 3 штуки на салат

2. Какие редисы изображены на картинке?

- Большие и маленькие

3. Сколько больших и маленьких?

- 3 больших, 4 маленьких

4. Что нам нужно найти?

- Варианты, какие редисы могла взять на салат мама

Составление плана решения. Необходимо навести учащихся на решение задачи:

1. Как мы можем обозначить большие и маленькие редиски?

- Большими и маленькими кругами

2. Как мы наглядно можем показать варианты решения?

- Зарисовать их

Осуществления плана решения. Направляем учащихся следующим образом:

1. Могла ли мама взять только большие редисы?

- Да, ведь их 3, а она взяла 3 редиса на салат

2. Могла ли мама взять только маленькие редисы?

- Да, ведь их 4, а она взяла 3 редиса на салат

3. Могла ли мама взять и большие и маленькие редисы?

- Да, могла

Учащиеся зарисовывают все варианты решения задачи.

Изучение найденного решения:

Изучение найденного решения. Необходимо проанализировать ход решения задачи и ответ. Предлагаем учащимся составить граф – дерево

возможных вариантов решения, где Б – означает большой редис, а М – маленький редис. По итогу у учащихся получится наглядный вариант решения задачи и они смогут внимательно рассмотреть все варианты решения и проверить не упустили ли они какой-либо вариант при первоначальном решении.

**Задача 3.** Девочки Катя, Маша и Даша выиграли билеты в кино. Один билет на 5 ряд 5 место и два билета на 10 ряд 10 и 13 место. Посчитайте количество способов, как они могут рассесться в кинозале?

**Задача 4.** Четыре гостя при входе в ресторан отдали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Невнимательный швейцар раздал шляпы случайным образом. Сколько существует вариантов, при которых каждый гость получил чужую шляпу?

Рассмотрим методику работы с задачей 3.

Осмысление условия задачи. Помогаем учащимся проанализировать задачу с помощью системы вопросов:

1. Что нам дано в задаче?

- Девочки, которые выиграли билеты в кино

2. Сколько девочек?

- Три

3. Сколько выигранных билетов?

- Три

4. Что нам нужно найти?

- Количество способов, как они могут рассесться на выигранные места

Составление плана решения. Необходимо навести учащихся на решение задачи:

1. Решались ли подобные задачи ранее?

- Да, решались

2. Какой метод использовался при решении подобных задач?

- Перебор всех возможных вариантов и их подсчет

3. Как мы будем осуществлять перебор?

- Рассаживать девочек на разные места

Осуществления плана решения. Направляем учащихся следующим образом:

1. Как мы можем обозначить места, куда могут сесть девочки?

- 5 ряд 5 место – 1, 10 ряд 10 место – 2, 10 ряд 13 место – 3

2. Как мы можем обозначить девочек?

- Первыми буквами имени

3. Как нам проще будет осуществлять перебор?

- Закрепить одну из девочек на первом месте, а других перемещать по оставшимся и так проделать для каждой девочки

По итогу учащиеся осуществляют перебор всех возможных вариантов решения и считают количество получившихся вариантов решения.

Изучение найденного решения. Необходимо проанализировать ход решения задачи и ответ. Можно предложить учащимся готовый вариант решения данной задачи и попросить сравнить с тем, который у них получился.

**Задача 5.** Прямоугольник состоит из 4 квадратов. Есть три вида краски: белая, синяя, красная. Найдите все варианты раскраски прямоугольника. Сколько существует вариантов?

**Задача 6.** В школьной столовой на завтрак можно взять кашу, запеканку, омлет и запить чаем, морсом или какао. Сколько вариантов завтрака может быть в столовой?

Рассмотрим методику работы с задачей 6.

Осмысление условия задачи. Помогаем учащимся проанализировать задачу с помощью системы вопросов:

1. Что нам дано в задаче?

- Варианты еды на завтрак и чем можно запить завтрак

2. Сколько вариантов еды на завтрак?

- Три

3. Сколько вариантов чем можно запить?

- Три

4. Что нам нужно найти?

- Количество всех возможных вариантов сочетания еды на завтрак и чем его можно запить

Составление плана решения. Необходимо навести учащихся на решение задачи:

1. Какие методы решения комбинаторных задач вы знаете?

- Перебор возможных вариантов, таблица вариантов решения, граф – дерево возможных вариантов

2. Какой метод будет удобней всего?

- Таблица вариантов решения

3. Почему?

- Она будет проще и наглядней в исполнении

Осуществления плана решения. Направляем учащихся следующим образом:

1. Как мы можем обозначить варианты еды на завтрак и чем можно запить завтрак?

- Первыми буквами названий

2. Что мы будем записывать по вертикали?

- Варианты, чем можно запить завтрак

3. Что мы будем записывать по горизонтали?

- Варианты, что можно съесть на завтрак

По итогу учащиеся составляют таблицу вариантов решения и считают количество получившихся вариантов.

Изучение найденного решения. Необходимо проанализировать ход решения задачи и ответ. Предлагаем учащимся составить граф – дерево возможных вариантов решения. По итогу у учащихся получится наглядный вариант решения задачи и они так же смогут сосчитать количество вариантов решения и сравнить с полученным ответом.

«Задачи на реализацию темы « Комбинаторика» в 6 классе:

- отработка умений и навыков в составлении и подсчете числа комбинаторных наборов;
- показать учащимся как можно решать комбинаторные задачи с помощью рассуждений;
- познакомить учащихся с правилом умножения при подсчете числа возможных вариантов, сформировать умения по его применению;
- формирование умений строить дерево возможных вариантов;
- формирование умений сравнения вероятностей разных событий (более вероятно, менее вероятно)» [44].

Для того, чтобы реализовать все задачи поставленные ФГОС ООО по теме «Комбинаторика» в 6 классе предлагаем следующую систему задач направленную на развитие математического мышления школьников:

**Задача 1.** Катя, Света, Вова и Андрей отправились на электричке в другой город. Ряд сидений в электричке рассчитан на 4 человек. Как могут рассестся ребята, чтоб мальчики и девочки чередовались.

**Задача 2.** Дима подбрасывает два игральных кубика. Найдите все варианты, которые могут показать кубики. Сосчитайте количество всех вариантов. Выпишите все варианты кратные 3.

**Задача 3.** В чемпионате мира по спортивной гимнастике участвуют команды из России, США, Канады, Японии, Бразилии и Великобритании. Найдите все варианты, в каком порядке будут выступать команды, если Россия будет первой, а Япония будет выступать за Россией.

**Задача 4.** Пете надо купить машинку, конструктор и мяч. Придя в магазин он обнаружил, что в магазине есть 2 вида машинок, 4 вида конструктора и 3 вида мячей. Сколькими способами Петя может купить игрушки?

**Задача 5.** Используя фразы «более вероятно» и «менее вероятно» сравните возможность наступление события А и Б

1. В пенале лежит 5 ручей и 1 карандаш, Коля не глядя достает предмет

А: Коля достает карандаш Б: Коля достает ручку.

2. Зима. Будний день. На улице - 30.

А: Вы пойдете в школу Б: Вы останетесь дома

3. Вася подбрасывает 2 игральных кубика:

А: Выпадает дубль Б: Выпадает не дубль.

**Задача 6.** У Алёны начались летние каникулы. В июле она может поехать в лагерь, поехать в деревню или остаться дома. Если она поедет в лагерь, то там она сможет участвовать в конкурсах, ходить на дискотеки и найти новых друзей. Если Алёна поедет в деревню, то там она сможет ходить в лес за грибами, купаться на речке, помогать бабушке. Если она останется дома, то там она сможет, читать книгу, смотреть телевизор и играть в компьютер. Сколько вариантов времяпровождения есть у Алёны на июль?

**Задача 7.** Оксана пришла домой и ей нужно полить цветы, помыть посуду, пропылесосить и сделать уроки. Сколькими способами Оксана может это сделать? Найдите все варианты решения.

**Задача 8.** В класс пришло 5 новых учеников Саша, Настя, Лена, Валя и Максим. Найдите все возможные варианты расположения 5 учеников за одной партой (за парту могут сесть только два ученика) Сколько вариантов существует?

**Задача 9.** Петя, Коля и Вася решили съесть мороженое. У мальчиков было одно клубничное, одно шоколадное, одно малиновое и одно вишнёвое мороженое. Сколько вариантов выбора мороженого было у мальчиков?

**Задача 10.** В магазине детских игрушек Маше понравились четыре мягких игрушки: мишка, енот, лиса и белка. Мама разрешила взять только две из них. Сколько существует вариантов выбора игрушек у Маши?

«Задачи на реализацию темы « Комбинаторика» в 7 классе:

- выработка умений решения простейших комбинаторных задач основными методами: перебор вариантов, построение дерева вариантов, правило умножения;
- умение применять правило комбинаторного умножения для решения задач на нахождение числа объектов или комбинаций;
- умение проводить организованный перебор вариантов, работать по правилу и образцу;
- формирование умения подсчитывать число вариантов с помощью графов» [44].

Для того, чтобы реализовать все задачи поставленные ФГОС ООО по теме «Комбинаторика» в 7 классе предлагаем следующую систему задач направленную на развитие математического мышления школьников:

**Задача 1.** Найдите все варианты и количество двузначных чисел, которые можно записать с помощью цифр 2, 4, 6, цифры могут повторяться.

**Задача 2.** Настя пришла в магазин. Ей нужно купить блюдце и чашку. В магазине продается посуда зеленого, синего и желтого цвета. Какие варианты посуды Настя сможет купить, при условии, что чашка и блюдце должны быть разных цветов. Приведите пример решения с помощью таблицы и «дерева вариантов».

**Задача 3.** Инспектор ГИБДД находясь на посту заметил нарушителя пересекающего двойную сплошную. Он увидел только вторую цифру номера «5». В городе номера у транспортных средств были трёхзначные и состояли из цифр 1,2,3,5,8. Скольких водителей нужно будет проверить, чтоб найти нарушителя?

**Задача 4.** Найдите количество трёхзначных чисел, которые можно составить из цифр 2, 4, 6 и 8, при условии, что цифры не должны повторяться используя правило умножения.

**Задача 5.** Команда по волейболу состоит из 6 человек. Из команды нужно выбрать связующего и либеро. Сколькими способами можно это сделать?

**Задача 6.** Мама сшила для куклы Алины 4 блузки и 5 юбок. Сколько вариантов есть у Алины, чтобы нарядить куклу?

**Задача 7.** В классе 25 человек, 13 мальчиков и 12 девочек. Класс отправился на экскурсию в другой город. Сколько вариантов есть у учителя, чтоб рассадить ребят в автобусе так, чтобы мальчик сидел с девочкой?

**Задача 8.** Даша бросает два игральных кубика с 6 гранями. Сколько вариантов комбинаций может получиться у Даши на верхних гранях кубика при бросании? Найдите все возможные варианты.

**Задача 9.** У Светы есть три котенка Барсик, Пушок и Боня. Отправившись в зоомагазин она купила три ошейника зеленый, желтый и красный. Сколько вариантов существует у Светы, чтобы надеть ошейники котят?

**Задача 10.** В 5 классе в пятницу 4 урока: литература, русский язык, история и физкультура. Сколько вариантов расписания можно составить?

«Задачи на реализацию темы «Комбинаторика» в 8 классе:

- формирование умений извлекать статистическую информацию, представленную в таблицах, диаграммах, графиках;
- формирование умений представлять комбинаторную задачу в виде таблиц, диаграмм, схем (метод графов, метод таблиц, дерево решений);
- ознакомление с понятиями перестановки, размещения, сочетания и соответствующими формулами для подсчета их числа» [44].

Для того, чтобы реализовать все задачи поставленные ФГОС ООО по теме «Комбинаторика» в 8 классе предлагаем следующую систему задач направленную на развитие математического мышления школьников:

**Задача 1.** У Вовы есть четыре рубашки и двое брюк. Сколько вариантов наряда существует у Вовы? Представьте решение с помощью таблицы вариантов решения и графа – дерево возможных вариантов.

**Задача 2.** В шкафу стоит 4 бокала – прозрачный, зеленый, желтый и серебряный. Настя не глядя достает все бокалы по очереди. Сколько вариантов есть у Насти, чтобы достать все бокалы.

**Задача 3.** Из представленной ниже таблицы двухзначных чисел (таблица 4) найдите: а) Сумму всех двухзначных чисел, б) Произведение двухзначных чисел, цифры которых повторяются, в) Двухзначные числа, цифры которых не повторяются

Таблица 4 – Таблица вариантов решения для задачи 3.

|   | 2  | 4  | 6  | 8  |
|---|----|----|----|----|
| 2 | 22 | 42 | 62 | 82 |
| 4 | 24 | 44 | 64 | 84 |
| 6 | 26 | 46 | 66 | 86 |
| 8 | 28 | 48 | 68 | 88 |

**Задача 4.** В вазе лежит 5 конфет – ромашка, коровка, ласточка, карамель и рачки. Сколькими способами Вася может взять конфеты если в руке у него помещается только 4 конфеты.

**Задача 5.** На парковке осталось 2 парковочных места, а на парковку въехали 7 машин. Сколькими способами машины могут припарковаться?

**Задача 6.** На столе лежит банан, яблоко, груша, апельсин, манго и клубника. Сколькими способами их можно поставить друг за другом?

**Задача 7.** Вечером Миша может пойти на тренировку, в кофейню, на прогулку или остаться дома. Сколько вариантов провести вечер существует у Миши если он сможет успеть сделать только два дела?

**Задача 8.** Ирина привезла сувениры с моря: ракушка, камень, магнитик, тарелка и статуэтка. Ей нужно подарить по сувениру Кате и Даше. Сколько способов есть у Ирины раздать подарки подругам?

«Задачи на реализацию темы « Комбинаторика» в 9 классе:

- освоение понятия факториал, умение применять определение факториала в решении комбинаторных задач;
- формирование умений использовать формулы комбинаторики для решения задач; умение группировать данные, проводить обработку данных, представлять информацию в виде таблиц, диаграмм, графиков;

- распознавание задач на вычисление числа перестановок, размещений, сочетаний и применять соответствующие формулы» [44].

Для того, чтобы реализовать все задачи поставленные ФГОС ООО по теме «Комбинаторика» в 9 классе предлагаем следующую систему задач направленную на развитие математического мышления школьников:

**Задача 1.** Петя, Коля, Юра и Антон готовятся к сдаче ГТО. Сколько вариантов постановки друг за другом для сдачи ГТО есть у ребят?

**Задача 2.** Необходимо составить расписание на понедельник для 7 класса. В этот день у них 5 уроков: 2 урока алгебры, химия, русский язык и физкультура. Сколько вариантов расписания можно составить?

**Задача 3.** В поселке «Астово» есть несколько обычаев, при рождении девочки ей дается не отчество, а матчество, при этом всех женщин в поселке зовут Анна, Мария, Ольга и Ксения. В поселке есть швейное предприятие на котором работает 12 женщин. Есть ли вероятность того, что на предприятии нет женщин с одинаковыми именами и матчествами?

**Задача 4.** На столе лежит 8 книг, 3 из них – легкие романы. Сколько вариантов расположения книг существует, чтоб легкие романы лежали рядом друг с другом в произвольном порядке?

**Задача 5.** Сколькими способами компания ребят из 5 человек может разместиться в кинозале на 6 мест, если в кинозал больше никто не придет?

**Задача 6.** Сколькими способами в компании, в которой работают 25 человек можно выбрать сотрудника отдела кадров и старшего менеджера?

**Задача 7.** В коробке осталось 10 шаров, но места на ёлке хватит только для 3 шаров. Сколькими способами можно выбрать шары, которые повесят на ёлку?

Разработанная система задач частично апробирована в ходе педагогической практики в МБОУ СОШ № 51 г. Пензы.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Мышление является важной составляющей процесса познавательной деятельности ученика, без развития которого невозможно достичь эффективных результатов в обучении математике. Процесс обучения математике в основной школе необходимо организовать таким образом, чтобы наряду с формированием математических знаний, умений, навыков происходило формирование мышления учащихся.

Можно ещё раз сказать, что владение навыками решения комбинаторных задач актуально на сегодняшний день. Комбинаторная задача тесно связана с теорией вероятностей, которая появилась ещё в средневековые времена. Всё это вызвано велением времени, поскольку является следствием многих социально-экономических причин.

Появление в школьной программе вероятностно-статистической линии, ориентированной на знакомство учащихся с вероятностной природой большинства явлений окружающей действительности, будет способствовать усилению её общекультурного потенциала, возникновению новых, глубоко

обоснованных межпредметных связей, гуманитаризации школьного математического образования. Если же говорить в целом, они должны вызвать у человека интерес и желание найти общее решение. Помимо математических расчетов, необходимо применять умственное напряжение и использовать догадку. Вероятность происхождения того или иного события можно вычислить с использованием комбинаторики.

Изучение комбинаторной линии позволит уже в 5-6 классах начать формировать вероятностные представления, что, по мнению психологов, считается удачным. При решении комбинаторных задач включаются такие операции мышления, как наблюдение, сравнение, обобщение, классификация. Кроме того, мышление последовательно проходит все три этапа: от наглядно-действенного (при решении комбинаторных задач путём систематического перебора вариантов) и наглядно-образного (задачи на распознавание различных видов комбинаторных соединений) к словесно-логическому (комбинаторные задачи, при решении которых необходимо привлечь элементы математической логики). Поэтому не случайно такие задачи являются хорошим средством развития учащихся. Осваивая комбинаторику, учащиеся получают знания, необходимые при изучении теории вероятностей, при этом у них развиваются способности к математическому мышлению. А это уже следующая ступень в изучении стохастической линии.

На основе апробации можно сделать вывод, что педагоги могут использовать разработанную нами систему задач для каждой ступени курса основной школы. Система задач направлена на реализацию задач поставленную ФГОС ООО. Так же данная система задач способствует развитию математического мышления школьников, так как она формирует в учащихся гибкость, оригинальность и глубину мышления, развивает математический склад ума. С помощью данной системы задач так же задействована и математическая память учащихся, ведь каждый раз им

необходимо обращаться к своим прошлым знаниям, а так же развивает лаконичность речи и записи.

#### **Список использованных источников**

1. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Бунимович Е. А. [и др.] М. : Просвещение, 2021. 208 с.
2. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. / А. Г. Мордкович [и др.] М. : Мнемозина, 2021. 478 с.
3. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. М. : Просвещение, 2021. 256 с.
4. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Бунимович Е. А. [и др.] М. : Просвещение, 2021. 208 с.
5. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. / А. Г. Мордкович [и др.] М. : Мнемозина, 2021. 458 с.

6. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. М. : Просвещение, 2021. 288 с.

7. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Бунимович Е. А. [и др.] М. : Просвещение, 2021. 192 с.

8. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений. / А. Г. Мордкович [и др.] М. : Мнемозина, 2021. 456 с.

9. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. организаций / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. М. : Просвещение, 2021. 287 с.

10. Атаханов, Р. А. Уровни развития математического мышления ; под ред. В. В. Давыдова. Душанбе : Таджикский государственный университет, 1993. 174 с.

11. Афанасьев В. В. Теория вероятностей в вопросах и задачах : учеб. пособие для студентов вузов обучающихся по специальности «Математика». М. : «Владос», 2007. 350 с.

12. Белокурова Е. Е. Методика обучения решению комбинаторных задач // Начальная школа. 1994. №12. С. 43-47.

13. Беляева И. С. Комбинаторный подход и его применение в преподавании математики в восьмилетней школе : автореф. дис. ... канд. пед. наук. Ярославль, 1971. 19 с.

14. Берикханова Г. Е. Комбинаторные методы и использование их в обучении комбинаторике в школе. // Известия вузов. 2010. № 1. С. 291 – 292.

15. Болотов В. А. О введении элементов комбинаторики, статистики и теории вероятностей в содержание математического образования основной школы // Математика. 2004. №44. С. 45 – 47.

16. Буркова Н. А. Особенности изучения комбинаторики в курсе математики средней школы // Студенческая наука и XXI век. 2013. № 10. С. 36 – 38.

17. Виноградова Л. В. Методика преподавания математики в средней школе : учеб. пособие. Ростов н/Д. : Феникс, 2005. 252 с.
18. Гальперин П. Я. Введение в психологию : учебное пособие для вузов. М. : Книжный дом «Университет», 1999. 332 с.
19. Гусев В. А. Теория и методика обучения математике : психолого-педагогические основы. М. : Лаборатория знаний, 2017. 458 с.
20. Дворяткина С. Н., Щербатых С. В. Роль системы дополнительного профессионального образования в развитии нового стиля мышления современного специалиста (на примере переподготовки учителя математики) // Психология образования в поликультурном пространстве. 2019. №. 3. С. 76-88.
21. Ежов И. И. Элементы комбинаторики: учебное пособие. М. : «Наука», 1977. 80 с.
22. Колмогоров А. Н. О профессии математика. М. : Московский университет, 1960. 32 с.
23. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. М. : Институт практической психологии, 1998. 416 с.
24. Крутихина М. В. Изучение элементов комбинаторики в 5-ом классе гуманитарной направленности // Научно-методический журнал Концепт. 2013. №11. С. 131-135.
25. Лебедев В. В. Эффективное обучение комбинаторике и теории вероятностей // Школьные технологии. 2012. №2. С. 126- 134.
26. Лященко Е. И., Мазаник А. А. Методика обучения в IV-V классах. Л. : Изд-во Народная асвета, 1976. 222 с.
27. Максимов Л. К. Развитие математического мышления младших школьников в условиях учебной деятельности : автореф. дисс. ... докт. психол. наук. Москва, 1993. 22 с.
28. Математика. 5 класс : учебник в 2 частях / Н. Я. Вилекнкин [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 160 с.

29. Математика. 6 класс : учебник в 2 частях / Н. Я. Вилекнкин [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 159 с.
30. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. Учеб. пособие для студентов физ-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян [и др.] ; 2-е изд., пе-рераб. и доп. М. : Просвещение, 1980. 386 с.
31. Нагорная В. О. Развитие математического мышления в школе // Научно-методический журнал Концепт. 2015. № 21. С. 76-80.
32. Панцева Е. Ю. Специфика математического мышления. // Проблемы современной науки. 2013. № 7. С.154-159.
33. Пиаже Ж. Структуры математические и операторные структуры мышления // Математика: Хрестоматия по истории, методологии, дидактике / Сост. Г.Д. Глейзер. М.: Изд-во УРАО, 2001. С. 302–321.
34. Пойа Д. Математическое открытие: Решение задач, основные понятия, изучение и преподавание. М. : Наука, 1976. 448 с.
35. Решение комбинаторных задач // В помощь веб-мастеру URL: <http://wm-help.net/books-online/book/78613/78613.html> Заглавие с экрана (дата обращения: 10.05.2023).
36. Рубинштейн С. Л. "Основы общей психологии". М. : АСТ, 2020. 960 с.
37. Рыбдылова Д. Д., Бадеев А. В., Булатова В. Б. Формирование у учащихся содержательного обобщения в процессе решения комбинаторных задач // Современное педагогическое образование. 2021. №. 2. С. 221-226.
38. Рыбников К. А. Введение в комбинаторный анализ. М.: URSS, 2018. 312 с.
39. Сабанашвилли М. Г. Некоторые вопросы методики обучения решению комбинаторных задач в школьном курсе математики // Современные проблемы математического образования. 2017. С. 180 – 185.
40. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе : Учеб. пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-тов. М. : Просвещение, 2002. 222 с.

41. Слепкань З. И. Психолого-педагогические основы обучения математике: метод. пособие. К.: Рад. школа, 1983. 192 с.
42. Тестов В. А. Решение задач как основа развития математического мышления // Математика и проблемы образования. 2022. С. 158-160.
43. Трегуб Л. С. Элементы современного введения в математику. Ташкент: Фан, 1973. 358 с.
44. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования: Приказ Мин. образования и науки РФ от 17.12.2010 г. № 1897.
45. Фрейденталь Г. Математика в науке и вокруг нас. М. : Мир, 1977. 261 с.
46. Хинчин А. Я. Педагогические статьи. М.: АПН РСФСР, 1964. 204 с.
47. Царева С. Е. Различные способы решения задач и различные формы записи решения. М. : Просвещение, 1991. 267 с.
48. Шварцбурд С. И. О развитии интереса, склонностей и способностей учащихся к математике // Математика в школе. 1964. С. 52-55.
49. Яковлева Н. С. Внеурочные занятия по математике как средство формирования комбинаторных умений // Педагог-исследователь: Взгляд в будущее. 2020. С. 20-24.

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования**  
**ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических  
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки  
44.03.01 Педагогическое образование  
Профиль подготовки «Математика»  
Форма обучения: заочная

Утверждаю: зав. кафедрой  
« 20 » 09 20 22 г.  
Паньженский В.И.

**Задание**

По ВКР студента Тимошиной Софьи Андреевны  
(ФИО полностью)

Тема работы «Комбинаторные задачи как средство развития математического мышления  
школьников»

Утверждена приказом по Университету от « 28.09 » 20 22 г. № 809/0

Срок сдачи студентом законченной работы « 15 » 06 20 23 г.

# КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

| № п/п | Перечень подлежащих разработке вопросов                                                                                                    | Сроки выполнения        | Примечания          |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|---------------------|
| 1     | Составление плана бакалаврской работы и согласование его с руководителем.                                                                  | Сентябрь, 2022 г.       | Выполнен <i>маф</i> |
| 2     | Подбор и изучение научно-педагогической, философской, психологической литературы по проблеме исследования.                                 | Октябрь, 2022 г.        | Выполнен <i>маф</i> |
| 4     | Анализ научно-методической литературы с целью выявления основных методов и приемов, используемых при обучении темы «Комбинаторика»         | Ноябрь, 2022 г.         | Выполнен <i>маф</i> |
| 5     | Определение приоритетных форм учебной работы в курсе основной школы при изучении учебного материала.                                       | Декабрь, 2022 г.        | Выполнен <i>маф</i> |
| 6     | Выявление методических особенностей при изучении темы «Комбинаторные задачи», направленные на развитие математического мышления школьников | Январь, 2023 г.         | Выполнен <i>маф</i> |
| 7     | Разработка системы задач для курса основной школы по теме «Комбинаторные задачи»                                                           | Февраль – март, 2023 г. | Выполнен <i>маф</i> |
| 8     | Оформление текста работы.                                                                                                                  | Апрель, 2023 г.         | Выполнен <i>маф</i> |
| 9     | Подготовка презентации и выступления.                                                                                                      | Май, 2023 г.            | Выполнен <i>маф</i> |

Дата выдачи задания «20» 09 2022 г.

Руководитель *маф* \_\_\_\_\_  
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению  
*Т* \_\_\_\_\_ *Григорьев С.А.*  
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского  
государственного университета  
А.Д. Гулякову  
студента(ки) 5 курса ФФМЕН  
заочной формы обучения  
Тимиошиной С.А.

### ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Тимошина Софья Андреевна, студент(ка) 5 курса заочной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Комбинаторные задачи как средство развития математического мышления школьников», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен (на) с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

  
\_\_\_\_\_  
подпись  
19.06.23  
\_\_\_\_\_  
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 19.06.23  
\_\_\_\_\_  
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР   
\_\_\_\_\_  
подпись

Е.В. Марина  
\_\_\_\_\_  
И.О.Ф.

## Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы (бакалаврской работы) на тему «Комбинаторные задачи как средство развития математического мышления школьников»  
студентки 5 курса Тимошиной Софьи Андреевны  
Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование  
Профиль «Математика»  
Руководитель ВКР Марина Е.В.



### Отчет о проверке на заимствования №1



Автор: Тимошина Софья Андреевна  
Проверяющий: Родионов Михаил Алексеевич  
Организация: Пензенский государственный университет  
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - <http://antiplagiat.ru>

#### ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 863  
Начало загрузки: 19.06.2023 14:16:53  
Длительность загрузки: 00:00:06  
Имя исходного файла: ВКР\_Тимошина.docx  
Название документа: ВКР\_Тимошина  
Размер текста: 63 кБ  
Символов в тексте: 64069  
Слов в тексте: 8244  
Число предложений: 614

#### ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 19.06.2023 14:17:00  
Длительность проверки: 00:02:34  
Корректировка от 19.06.2023 14:22:50  
Комментарий: [Автосохраненная версия]  
Поиск с учетом редактирования: да  
Проверенные разделы: содержание с. 1, основная часть с. 2-42, библиография с. 43-44  
Модули поиска: Переводные заимствования, ИПС Адилет, Библиография, Сводная коллекция ЗБС, Интернет Плюс+, Сводная коллекция РГБ, Цитирование, Переводные заимствования (RuEn), Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu), Переводные заимствования по коллекции Гарант: аналитика, Переводные заимствования по коллекции Интернет в английском сегменте, Переводные заимствования по Интернету (EnRu), Переводные заимствования по коллекции Интернет в русском сегменте, Переводные заимствования издательства Wiley, eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ: аналитика, СПС ГАРАНТ: нормативно-правовая документация, IEEE, Медицина, Диссертации НББ, Коллекция НБУ, Перефразирования по eLIBRARY.RU, Перефразирования по СПС ГАРАНТ: аналитика, Перефразирования по Интернету, Перефразирования по Интернету (En), Перефразированные заимствования по коллекции Интернет в английском сегменте, Перефразированные заимствования по коллекции Интернет в русском сегменте, Перефразирования по коллекции издательства Wiley, Патенты СССР, РФ, СНГ, СМИ России и СНГ, Шаблонные фразы, Кольцо вузов, Издательство Wiley



СОВПАДЕНИЯ  
28,78%

САМОЦИТИРОВАНИЯ  
0%

ЦИТИРОВАНИЯ  
4,93%

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ  
66,31%

Руководитель ВКР

ПОДПИСЬ

Е.В. Марина

## ОТЗЫВ РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

на тему: «Комбинаторные задачи как средство развития математического мышления школьников» студентки Тимошиной Софьи Андреевны факультета физико-математических и естественных наук направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование», профиль подготовки «Математика», гр. 183ФПМ51

Обучение решению комбинаторных задач посвящены практически все ступени образовательного процесса в курсе математики средней школы, начиная с бесформульных примеров в начальной школе и заканчивая элементами теории вероятности и математической статистики в выпускных классах общеобразовательных учебных заведений, потому что эта тема позволяет привить учащимся математическую культуру и способность к логическому мышлению. В указанном контексте работу можно считать актуальной.

Бакалаврская работа состоит из введения, двух глав и заключения.

В первой главе автор рассматривает общие теоретические вопросы, касающиеся роли, места и особенностей комбинаторных задач в развитии математического мышления обучающихся.

Во второй главе проведен анализ содержания раздела школьного курса математики «Комбинаторика» в наиболее распространённых учебниках за 5 - 9 классы общеобразовательной школы. Раскрываются методические особенности обучения обучающихся методам решения задач по комбинаторике при изучении школьного курса математики. Кроме того, рассматриваются методы решения комбинаторных задач, задач на правило умножения, развитие навыков решения задач на формирование комбинаторных понятий, дерева вариантов.

В целом бакалаврская работа удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к ним, и заслуживает положительной оценки «хорошо».

Научный руководитель, к.п.н.,  
доцент кафедры «Информатика и  
методика обучения информатике  
и математике»



Марина Е. В.