**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**

**«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
**ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

# ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

**бакалаврская работа на тему:**

**«Использование свойств функций при решении уравнений»**

**Студент** Счисл. 01.06.26 Счисляева Влада Игоревна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

**Руководитель** 01.06.26 Монахова О.А.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

**Нормоконтролёр** 15.06.26 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

*Работа допущена к защите* (протокол заседания кафедры от 01.06.26 № 10)

**И.о. заведующего кафедрой** 01.06.26 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

*Работа защищена с оценкой* отлично (протокол заседания ГЭК от 25.06.26 № 9)

**Секретарь ГЭК** 25.06.26 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2026

## СОДЕРЖАНИЕ

**ВВЕДЕНИЕ** ... 3

**ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ** ... 5

1.1 Понятие функции и её основных свойств в курсе алгебры средней школы ... 5

1.2 Основные методы решения уравнений с использованием свойств функций ... 7

1.3 Уравнения с использованием свойств функций в школьном курсе математике ... 20

**ГЛАВА 2 РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ»** ... 22

2.1 Место и роль элективных курсов в системе школьного образования ... 22

2.2 Тематическое планирование элективного курса ... 23

2.3 Разработка задачного материала в рамках элективного курса ... 30

2.4 Разработка конспекта занятия в рамках элективного курса ... 45

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ** ... 55

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ** ... 56

# ВВЕДЕНИЕ

Использование свойств функций при работе с уравнениями в некоторых случаях упрощает нахождение решений в математике. Базовые свойства функций изучаются в школьном курсе алгебры и начала анализа, однако их целенаправленное применение для решения уравнений зачастую остаётся за рамками стандартной программы.

Традиционный подход к решению уравнений сосредоточен на формальных преобразованиях: раскрытии скобок, переносе слагаемых, разложении на множители и т.д. Однако во многих случаях такие методы либо оказываются слишком громоздкими, либо вовсе не приводят к результату. Именно тогда на помощь приходит функциональный подход: анализ свойств функций, стоящих в левой и правой частях уравнения, позволяет выявить ключевые особенности задачи и найти лучший способ решения.

В последние годы задачи, требующие применения функционального подхода, всё чаще встречаются в заданиях повышенной сложности ЕГЭ профильного уровня по математике, на математических олимпиадах, что повышает уровень заинтересованности учащихся к данной теме.

Анализ учебной литературы приводит к выводу, что на сегодняшний день в школьной программе недостаточно систематизированных материалов, которые бы последовательно знакомили учащихся с методами использования свойств функций при решении разных типов уравнений. Создание элективного курса могло бы значительно повысить математическую культуру школьников и подготовить их к дальнейшему изучению точных наук.

**Цель работы** - разработать элективный курс на тему: «Решение уравнений на основе свойств функций» и методические рекомендации к его использованию.

**Объект исследования** – процесс обучения математике в школе.

**Предмет исследования** – основные методы решения уравнений на основе свойств функций.

**Основные задачи выпускной работы.**

1. На основе анализа методической литературы описаны основные способы и методы решения уравнений на основе свойств функций.
2. Проведён анализ учебной литературы и контрольно-измерительных материалов с целью выявления заданий, в которых возможно применение функционального подхода.
3. Разработан элективный курс на тему: «Решение уравнений на основе свойств функций».
4. Подобран задачный материал и составлен конспект занятия в рамках элективного курса на тему: «Решение уравнений на основе свойств функций».

Выпускная квалификационная работа состоит из двух глав.

В первой главе рассмотрены такие методы решения уравнений на основе функций, как: использование области определения для отсечения посторонних корней, применение теоремы о корне для монотонных функций, учёт чётности/нечётности для упрощения уравнения и нахождения симметричных решений, метод мажорант (оценка значений функций) для доказательства отсутствия решений или локализации корней**.**

Во второй части работы разработан элективный курс «Решение уравнений на основе свойств функций» и приведен конспект вводного занятия этого курса.

Разработанный элективный курс «Решение уравнений на основе свойств функций» предоставит учителям математики готовую методическую базу для углублённого изучения темы – с чётким тематическим планированием и подборкой задач разной сложности.

# ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ИЗУЧЕНИЯ УРАВНЕНИЙ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

## 1.1 Понятие функции и её основных свойств в курсе алгебры средней школы

В современном школьном образовании математика занимает центральное место, формируя логическое мышление, аналитические способности и навыки применения знаний в практических ситуациях. Одним из ключевых разделов школьного курса математики является изучение функций, которое образует так называемую «функциональную линию». В Федеральном государственном образовательном стандарте (ФГОС) среднего общего образования функция рассматривается как одно из базовых понятий, способствующее формированию метапредметных навыков, таких как моделирование и анализ.

Понятие функции прошло долгий путь эволюции, отражая развитие математической мысли. Уже в античной период закладывались первые представления о зависимостях (Евклид, III в. до н.э.). В XVII веке благодаря картезианскому анализу Р. Декарта (1637 г.) функции связали с геометрией через координаты. В XVIII-XIX веках Л. Эйлер (1748 г.) и Ж. Лагранж сформировали современное определение функции как аналитического выражения. В XIX веке понятие функции получило новую трактовку. Л. Дирихле (1837 г.) и независимо от него Н. И. Лобачевский (1834 г.) дали определение функции через теорию множеств и идею соответствия. В XX веке понятие было формализовано через теорию множеств (Н. Бурбаки, 1930-е гг.). [8, с. 45]

В рамках школьном курсе математики понятие функции представляется в адаптированной форме, сохраняющей ключевую методологическую строгость и обеспечивающей корректное формирование базовых представлений. Функция трактуется как зависимость одной переменной от другой, где каждому

значению независимой переменной (аргумента) соответствует единственное значение зависимой переменной (функции). [1, с. 54]

Формально функция – это правило, которое каждому элементу из множества A ставит в соответствие единственный элемент из множества B.

Системный подход к изучению функций предполагает непрерывное усложнение материала: от простых представлений в 5-6 классах до сложных аналитических методов в 11 классе. Этот поэтапный подход обеспечивает учащимся прочный фундамент для дальнейшего образования и позволяет эффективно применять свойства функций при решении уравнений.

Уже в 5-6 классах закладываются пропедевтические основы функциональной линии: учащиеся знакомятся с зависимостями между величинами, что формирует первичное представление о функциональной зависимости.

В 7 классе начинается систематическое изучение функций. Ученики знакомятся с понятием функции как зависимости одной переменной от другой, осваивают способы задания функций. На простых примерах линейной функций школьники учатся определять и интерпретировать основные характеристики.

В 8 классе математический курс значительно усложняется: изучаются квадратичная функция и обратная пропорциональность. На этом этапе учащиеся знакомятся и с областью определения D($f$), и областью значений E($f$). Область определения функции $y = f(x)$ - это множество значений переменной $x$, при которых функция имеет смысл. Областью значений функции $y = f(x)$ называется множество значений переменной $y$ при допустимых значениях переменной $x$.

Программа 9 класса предполагает расширение представлений о квадратичной функции, вводятся понятия чётности и нечётности функций. Функция называется чётной, если $f(-x) = f(x)$, её график симметричен относительно оси $Oy$. Функция называется нечётной, если $f(-x) = -f(x)$, график

симметричен относительно начала координат. Также в 9 классе начинается знакомство с кусочными функциями.

В 10 классе знаменует переход к более усложнённым функциям и их свойствам. Вводится понятие монотонности функции, рассматривается периодичность тригонометрических функций. Начинается изучение ограниченности функций – свойства, которое играет ключевую роль при решении уравнений методом «мажорант».

В 11 классе изучение функций достигает самого сложного уровня: подробно разбирают экстремумы – точки, где функция достигает самых больших или самых маленьких значений. (точки максимума, где $f(x_0) \geq f(x)$, и минимум, где $f(x_0) \leq f(x)$ в некоторой окрестности).

Школьная программа специальным образом так, чтобы постепенно дать полное представление о функциях: от общего представления о том, как одни величины зависят от других, а потом переходят к более сложным математическим правилам. Каждый этап должен опираться на предыдущий, а свойства функций раскрываются шаг за шагом - через конкретные примеры и типы функций. Данный подход обеспечивает учащимся прочный фундамент для дальнейшего образования, позволяя решать уравнения более успешно и эффективнее.

## 1.2 Основные методы решения уравнений с использованием свойств функций

### 1. Оценка области определения уравнения

Рассмотрим уравнения, решаемые через анализ области определения функции или области допустимых значений переменной. Область допустимых значений (ОДЗ) уравнения – это множество всех значений переменных, при которых уравнение имеет смысл. Нахождение ОДЗ помогает сразу отсеять

значения переменной, не входящие в область определения функций, входящих в уравнение, упростить решение за счёт сужения множества возможных корней.

Алгоритм решения уравнений с использованием ОДЗ:

1. Выписать условия, при которых каждая часть уравнения определена (например, подкоренное выражение неотрицательно, знаменатель не равен нулю, аргумент логарифма положителен и т.д.).
2. Решить полученную систему ограничений – это и будет ОДЗ уравнения.
3. Проанализировать уравнение в пределах найденного ОДЗ:
    - если ОДЗ – пустое множество, то уравнение не имеет решений;
    - если ОДЗ состоит из конечного числа точек, подставить их в уравнение и проверить;
    - если ОДЗ задаёт узкий диапазон значений, это упрощает дальнейший поиск решений.
4. Записать ответ с учётом всех ограничений.

Вывод. Если при рассмотрении уравнения установлено, что обе его части определены на множестве М, состоящем из одного или нескольких чисел, дальнейшее преобразования не требуются: достаточно проверить, является или нет каждое из этих чисел решением данного уравнения.

**Пример 1**. Решите уравнение $\sqrt{8x-15-x^2}+\sqrt{x-5}=2$

Решение: Определим область допустимых значений (ОДЗ), решив систему неравенств $\begin{cases} x-5\geq 0, \\ 8x-15-x^2\geq 0 \end{cases}$.

Решив, получим следующую систему неравенств $\begin{cases} 3\leq x\leq 5, \\ x\geq 5 \end{cases}$. Пересечение этих условий даёт единственное решение $x = 5$. Уравнение имеет смысл только при одном значении переменной. Подставив $x = 5$ в уравнение, убеждаемся, что равенство выполняется. 5 – корень уравнения.

**Пример 2.** Решим уравнение $\log_2(2-x)+\sqrt{x}+\sqrt{x^2-2x}=1$

Найдём область определения:

$$\begin{cases} 2-x>0, \\ x\geq 0, \\ x^2-2x\geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x<2 \\ x\geq 0 \\ x\in(-\infty;0]\cup[2;+\infty) \end{cases}$$

Откуда имеем $x = 0$. Подставим найденное число в уравнение и проверим является ли данное число корнем уравнения.

$\log_2 2+\sqrt{0}+\sqrt{0^2-2\cdot 0}=1$, 1=1.

Ответ: $x = 0$.

**Пример 3.** Решим уравнение $\sqrt{(x^2-x)}+\sqrt{(2-x-x^2)}=\sqrt{x}$

ОДЗ: $\begin{cases} x^2-x\geq 0 \\ 2-x-x^2\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x(x-1)\geq 0 \\ (x+2)(x-1)\geq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$ → ОДЗ: $x = 0$, $x = 1$

Сделаем проверку: $x = 0$ не подходит, $x = 1$ – корень уравнения.

Ответ: $x = 1$.

## 2. Метод монотонности функции

Монотонность функции – полезный инструмент при решении уравнений. Именно это свойство используется чаще всего. Метод основан на анализе поведения функций в левой и правой частях уравнения и помогает существенно упростить нахождение корней, а в ряде случаев – доказать их единственность или отсутствие.

Успешное применение метода монотонности при решении уравнений требует опоры на ряд ключевых математических утверждений:

1. Если функция *f(x)* на некотором промежутке возрастает, а функция *g(x)* убывает на этом же промежутке, то уравнение *f(x) = g(x)* имеет на этом промежутке не более одного корня.
2. Если на некотором промежутке функция *f(x)* возрастает (или убывает), то уравнение *f(x) = a* на этом промежутке имеет единственный корень либо не имеет корней вовсе (*a*-постоянная величина).

Основой данных утверждений служит геометрическая интерпретация: если одна функция возрастает, а другая убывает, их графики могут пересекаться не

более чем в одной точке; график монотонной функции пересекает горизонтальную прямую $y = a$ не более одного раза.

*Алгоритм решения уравнений методом монотонности:*

1. Разделить уравнение на две части и выделить две функции: *f(x)* (левая часть) и *g(x)* (правая часть).
2. Определить область допустимых значений (ОДЗ) и выделить промежутки монотонности функций.
3. Для каждого интервала выяснить, как ведёт себя функция: возрастает или убывает (исследовать характер монотонности каждой функции на выделенных промежутках).
4. Применить соответствующее утверждения:
   - если *f(x)* возрастает, а *g(x)* убывает (или наоборот), то уравнение может иметь не более одного корня на данном интервале;
   - если обе функции ведут себя одинаково (обе возрастают или обе убывают), однозначного вывода сделать нельзя.
5. Подобрать корень уравнения подбором или найти его с помощью других методов.
6. Доказать, что других корней на данном промежутке нет, опираясь на установленные свойства монотонности.
7. Проверить, входит ли найденный корень в ОДЗ. Если да, включить его в итоговый ответ.

**Пример 1**. Решить уравнение $x^{1991} + 1 = \sqrt{5 - x}$

Решение: В левой части уравнения находится возрастающая функция *f(x)*= $x^{1991} + 1$ на множестве R. А в правой части *g(x)*= $\sqrt{5 - x}$ убывающая на $(-\infty; 5]$. Можно сразу заметить, что этот корень 1, и он, согласно теореме, единственный.

Ответ: 1.

**Пример 2.** Решим уравнение $\sqrt{x^3 + 24} = 3x + 8 + \sqrt{x^3 + 12}$

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$\frac{12}{\sqrt{x^3+24}+\sqrt{x^3+12}} = 3x+8$$

Левая часть - убывающая функция, а правая – возрастающая, значит уравнение не может иметь более одного корня. Корень уравнения -2, и он единственный.

Ответ: -2.

**Пример 3.** Решить уравнение $\log_2(2x-x^2+15) = x^2-2x+5$

Решение: Выполним замену $2x-x^2+15=t$. Тогда $2x-x^2+5=20-t$. Получаем уравнение $log_2\, t = 20-t$. Функция *f(t)*= $log_2\, t$ – возрастает, *g(t)* = 20-*t* убывает на всей области определения. Уравнение может иметь не более одного корня, который находим элементарным подбором: *t* = 16. Делаем обратную замену и получаем квадратное уравнение $2x-x^2+5=16,$ которое имеет единственный корень 1.

Ответ: 1.

**Пример 4**. Может ли при каком-нибудь значении *a* уравнение $\sqrt{x+5} = a(x^2+4)$ имеет единственный корень на отрезке $[-4;-1]$?

Решение. Запишем уравнение в виде: $\frac{\sqrt{x+5}}{x^2+4} = a$. Данное уравнение имеет хотя бы один корень на отрезке $[-4;-1]$ тогда и только тогда, когда $a$ принадлежит множеству значение функции $y = \frac{\sqrt{x-5}}{x^2+4}$ на отрезке $[-4;-1]$. На отрезке $[-4;-1]$ функция $g(x) = \frac{1}{x^2+4}$ непрерывна и возрастает на этом отрезке. Функция $h(x)= \sqrt{x+5}$ непрерывна и возрастает в своей области определения D($h$) = $[-5;+\infty)$ и, в частности, на отрезке $[-4;-1]$, где она, кроме того, положительна. Тогда функция $f(x) = g(x)\cdot h(x)$, как произведение двух непрерывных, возрастающих и положительных функций, также непрерывна и возрастает на $[-4;-1]$, следовательно её множество значений на $[-4;-1]$ есть отрезок $[f(-4);f(-1)] = [0{,}05;0{,}4]$. Уравнение имеет решение на отрезке $[-4;-1]$, причём единственное, при $a \in [0{,}05;0{,}4]$.

Ответ: $a \in [0{,}05; 0{,}4]$.

**Пример 5.** Найдите все значения $a$, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} \sin x + \sin^3 x + \sin^3 y + \sin^5 y = a^5 + 2a^3 + a \\ \sin x + \sin^3 x + a^5 = \sin^3 y + \sin^5 y + a \\ \sin x \cdot \sin y \cdot \sin z = a^2 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение и укажите эти решения для найденных значений $a$.

Решение.

*Сложим первые два уравнения:*

$\sin x + \sin^3 x + \sin^3 y + \sin^5 y + \sin x + \sin^3 x + a^5 = a^5 + 2a^3 + a + \sin^3 y + \sin^5 y + a$

$2\sin x + 2\sin^3 x = 2a + 2a^3$

Рассмотрим функцию $f(t) = 2t + 2t^3$. Данная функция возрастает, так как сумма возрастающих функций при любом действительном $t$. Тогда наше уравнение можем записать в виде: $f(\sin x) = f(a)$.

Если функция монотонна, то равенство $f(\alpha) = f(\beta)$ будет выполняться только, если $\alpha = \beta$: $\sin x = a$.

*Вычтем первые два уравнения:*

$\sin x + \sin^3 x + \sin^3 y + \sin^5 y - \sin x - \sin^3 x - a^5 = a^5 + 2a^3 + a - \sin^3 y - \sin^5 y - a.$

$2\sin^5 y + 2\sin^3 x = 2a^5 + 2a^3$

Рассмотрим функцию $g(t) = 2t^5 + 2t^3$. Данная функция возрастает, так как сумма возрастающих функций при любом действительном $t$. Тогда наше уравнение можно записать в виде: $g(\sin y) = g(a)$. Если функция монотонна, то равенство $g(\alpha) = g(\beta)$ будет выполняться только, если $\alpha = \beta$, $\sin y = a$.

Для того, чтобы исходная система имела корни, нужно, чтобы уравнения $\sin x = a$ и $\sin y = a$ имели решения. То есть $a \in [-1; 1]$.

Обратимся к третьему уравнению системы: $\sin x \cdot \sin y \cdot \sin z = a^2$. Учитывая, что $\sin x = a$ и $\sin y = a$, получаем $a^2 \cdot \sin z = a^2$.

Рассмотрим два случая:

1) $a^2 = 0$; $a = 0$, тогда уравнение примет вид $0 \cdot \sin z = 0$ и будем выполняться при любом действительном $z$. Из уравнений $\sin x = 0$ и $\sin y = 0$, получаем: $x = \pi k, k \in Z$ и $y = \pi n, n \in Z$.
2) $a^2 \neq 0$; $a \neq 0$. Учитывая, что $a \in [-1; 1]$, то получаем промежуток $a \in [-1;0) \cup (0; 1]$. Тогда $\sin z = 1$, $z = \frac{\pi}{2} + 2\pi r, r \epsilon Z$. Из уравнений $\sin x = a$ или $\sin y = a$, получаем: $x = (-1)^m \cdot \arcsin a + \pi m, m \epsilon Z$ и $y = (-1)^l \cdot \arcsin a + \pi l, l \epsilon Z$.

Ответ: $(\pi k, \pi n, p), k \in Z, n \in Z, p \in R$ при $a=0$; $((-1)^m \cdot \arcsin a + \pi m; (-1)^l \cdot \arcsin a + \pi l, \frac{\pi}{2} + 2\pi r), m \epsilon Z, l \epsilon Z, r \epsilon Z$ при $a \in [-1;0) \cup (0; 1]$. Других решений нет.

### 3. Метод чётности/нечётности функции

Свойства чётных и нечётных функций помогают упростить решение уравнений. Вычислений требуется меньше, в некоторых случаях можно сразу доказать, что решений нет или их единственность.

Функция *f(x)* называется **чётной**, если выполняются два требования:

1. Область определения функции *f(x)* (множество допустимых значений аргумента) симметрична относительно начала координат.

2. Для любых *x* из области определения выполняется равенство *f(-x) = f(x).*

График чётной функции симметричен относительно оси ординат. Это означает, что точки пересечения с осью Ox симметричны относительно нуля.

Выводы:

- если *x = a* является корнем уравнения *f(x)* = 0, то *x = -a* также будет решением;
- если *x* = 0 не является корнем общее количество корней уравнения *f(x)* = 0 будет чётным;

- если среди решений $x = 0$, то уравнение имеет нечётное количество корней.

Функция $f(x)$ называется **нечётной**, если одновременно выполняются два условия:

1. Область определения симметрична относительно нуля.
2. Для любых $x \in D(f)$ выполняется равенство: $f(-x) = -f(x)$

График нечётной функции симметричен относительно начала координат. Важно:

- Если $x = a$ – корень уравнения $f(x) = 0$, то $x = -a$ тоже будет корень.
- Если $0 \in D(f)$, то $x = 0$ всегда является корнем уравнения $f(x) = 0$ для нечётной функции.

Функция будет называться функцией общего вида, если ни одно из этих условий не выполняется.

**Пример 1.** Найти все значения параметра $a$, при которых уравнение $\sqrt{x^4 + (a-6)^4} = |x + a - 6| + |x - a + 6|$ имеет единственное решение.

Решение. Перенесём слагаемые в одну сторону.

$\sqrt{x^4 + (a-6)^4} - |x + a - 6| - |x - a + 6| = 0$

Проверим функции на чётность.

$f(-x) = \sqrt{(-x)^4 + (a-6)^4} - |-x + a - 6| - |-x - a + 6|$

$f(-x) = \sqrt{x^4 + (a-6)^4} - |x - a + 6| - |x + a - 6| = f(x)$

Функция - чётная, поэтому, единственным решением уравнения будет $x=0$. Подставим в уравнение $x=0$ и решим относительно параметра $a$.

$$\sqrt{(a-6)^4} - |a - 6| - |a - 6| = 0$$

Введём обозначение $t=|a-6|$:

$t^2 - 2t = 0$ $t = 0$ или $t = 2$. Обратная замена:

$|a - 6| = 0$ или $|a - 6| = 2$

$a = 6$, $a = 8$, $a = 4$.

Получили три значения параметра, при которых один из корней исходного уравнения равен нулю. Рассмотрим три случая:

1) $a = 6$

$$\sqrt{x^4 + (6-6)^4} = |x + 6 - 6| + |x - 6 + 6|$$

$$\sqrt{x^4} - |x| - |x| = 0$$

$x^2 - 2|x| = 0$ $|x| = 0$ или $|x| = 2$ -больше одного корня

2) $a = 8$

$$\sqrt{x^4 + (8-6)^4} = |x + 8 - 6| + |x - 8 + 6|$$

$$\sqrt{x^4 + 16} - |x + 2| - |x - 2| = 0$$

Приравняем каждое подмодульное выражение к 0:

$x+2 = 0$ $x = -2$

$x-2 = 0$ $x = 2$.

Рассмотрим три промежутка.

* $x \leq -2$

$\sqrt{x^4 + 16} + (x + 2) + (x - 2) = 0$

$x^4 + 16 = 4x^2$, $x < 2$. Уравнение не имеет решений.

** $-2 < x \leq 2$

$\sqrt{x^4 + 16}-(x-2)-(x-2) = 0$

$\sqrt{x^4 + 16} = 4$

$x = 0$

*** $x > 2$

$\sqrt{x^4 + 16}-(x+2)-(x-2) = 0$

$\sqrt{x^4 + 16} = 2x$

$x^4 + 16 = 4x^2$, $x > 2$

$x^4 - 4x^2 + 16 = 0$ – нет решений.

Таким образом, если $a = 8$, то $x = 0$, уравнение имеет единственное решение.

3) $a = 4$

Получаем уравнение

$\sqrt{x^4+(4-6)^4} = |x+4-6| + |x-8+6|$=0

$\sqrt{x^4+16} - |x-2| - |x+2| = 0$

Уравнение такое же, как и в случае 2, поэтому $a = 4$ также подходит.

Ответ: 4; 8.

**Пример 2.** $8^{|x|} = 2^{|x+2|+|x-2|}$

Решение. В левой и правой частях уравнения находятся чётные функции. Поэтому достаточно найти решения для $x \geq 0$. Так как $x = 0$ не является корнем уравнения, рассмотрим два промежутка: (0;2], (2;+∞)

а) На (0;2] получаем:

$$8^x = 2^{x+2-x+2}, 2^{3x} = 2^4, x = \frac{4}{3}$$

б) На промежутке (2;+∞) имеем:

$$8^x = 2^{x+2+x-2}, 2^{3x} = 2^{2x}, 3x = 2x, x = 0.$$

Но $x = 0$ не является корнем уравнения, поэтому для $x > 0$ уравнение имеет корень $x = \frac{4}{3}$. Тогда $x = -\frac{4}{3}$ также является корнем уравнения.

Ответ: $-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}$.

**Пример 3.** При каком значении $a$ уравнение

$2x^8 - 3ax^6 - 4x^4 - ax^2 = 5$ имеет пять корней?

Решение. Обозначим $f(x) = 2x^8 - 3ax^6 - 4x^4 - ax^2$. В силу чётности $f(x)$ наличие корня $x_0$ у уравнения автоматически влечёт существование симметричного ему корня $-x_0$. Однако $x = 0$ не является корнем данного уравнения ($0 \neq 5$). Отсюда следует, что число корней у этого уравнения при любом действительном $a$ чётно, поэтому уравнение не может иметь пять корней.

Ответ: ни при каких $a$.

## 4. Метод мажорант (метод оценки, метод ограниченности)

Для решения уравнений нередко применяют метод мажорант, который опирается на свойство ограниченности функций. Термин происходит от французского majored – «объявлять большим».

Мажорантой функции *f(x)* на множестве P называют число A, что для всех $x \in P$ выполняется одно из неравенств:

- $f(x) \leq A$ (если A - верхняя мажоранта)
- $f(x) \geq A$ (если A –нижняя мажоранта)

*Определение.* Ограниченная функция - функция, множество значений которой ограничено сверху и снизу.

1. Если функция *f(x)* ограничена сверху, причём max *f*(*x*) = A, функция *g(x)* ограничена снизу, причём min *g(x)*=A, то уравнение *f(x)* = *g(x)* равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$
2. Если функция *f(x)* ограничена сверху, причём max *f*(*x*) = A, функция *g(x)* ограничена снизу, причём min g(*x*)=A, то неравенство *f(x)* > *g(x)* равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$

Утверждения 1 и 2 будут справедливы, если функции $f$ и $g$ будут функциями не одного, а разных аргументов.

Суть метода – функции, которые стоят в левой и правой частях, могут быть равны друг другу только в определённой точке, причём одна из них принимает в этой точке наименьшее значение, а другая – наибольшее. Метод основан на свойствах функций: в точке минимума производная функции меняет знак с минуса на плюс, в точке максимума – с плюса на минус. В общем алгоритм решения строится так:

1. Найти такое число A, что для всех допустимых *x* одновременно выполняются неравенства $f(x) \leq A$ и $g(x) \leq A$.
2. Предполагаем, что равенство *f(x)* = *g(x)* достигается только, когда одновременно выполняется *f(x)* = A и *g(x)* = A.

3. Решают полученную систему уравнений.

4. Искомое решение – это значение *x*, при котором *f(x)* достигает минимума, а функция *g(x)* достигает своего максимума. Поэтому рассматриваемые задачи называются минимаксными.

Метод применим к уравнениям, в которых используются ограниченные функция.

Например:

1) $-1 \leq \sin x \leq 1$ или $|\sin x| \leq 1$
2) $-1 \leq \cos x \leq 1$ или $|\cos x| \leq 1$
3) $x^{2n} \geq 0$
4) $a^x > 0$
5) $|x| \geq 0$
6) $\sqrt{x} \geq 0$

**Пример 1**. Решить уравнение $cos^7x + sin^4x = 1$

Решение. Поскольку $\cos^7 x \leq \cos^2 x$ и $\sin^4 x \leq \sin^2 x$, то левая часть данного уравнения не превосходит 1 и равна единице только в том случае, когда в обоих написанных нестрогих неравенствах имеет место равенство, т.е. выполняется система уравнений:

$$\begin{cases} (cosx)^7 = (cosx)^2 \\ (sinx)^4 = (sinx)^2 \end{cases}$$

Первое уравнение этой системы выполняется при $\cos x = 0$ и при $\cos x = 1$. При этих значениях x второе уравнение также выполняется: если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$, а $\sin^2 x = 1$, а если $\cos x = 1$, то $\sin x = 0$. Поэтому решениями системы, а вместе с ней и решениями исходного уравнения, будут следующими: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ и $x = 2\pi n, n \in Z$.

**Пример 2.** Решим уравнение $|\lg(x-2)| + 1 = -\cos \pi x$

Решение: Рассмотрим функции $g(x) = |\lg(x-2)| + 1$ и $f(x) = -\cos \pi x$

E($g(x)$) = $[1; +\infty)$, т.к. $|\lg(x-2)| \geq 0$

E($f(x)$)= $[-1; 1]$, т.к. $-1 \leq \cos x \leq 1$, то $-1 \leq \cos \pi x \leq 1$.

$g(x)_{наим}$ = 1 для функции $g(x)= |lg(x-2)| + 1$ и $f(x)_{наиб}$ = 1 для функции $f(x)= -cos\,\pi x$, значит можно воспользоваться теоремой о ограниченности функции.

Составим систему уравнений и решим её:

$$\begin{cases} |\lg(x-2)| + 1 = 1, \\ -\cos \pi x = 1. \end{cases}$$

Достаточно будет решить одно, более простое уравнение, и сделать проверку корней в другом уравнение.

$$|\lg(x-2)| + 1 = 1,$$

$$|\lg(x-2)| = 0,$$

$$\lg(x-2) = 0,$$

$$10^0 = x - 2,$$

$$1 = x\text{-}2,$$

$$x = 3.$$

Проверка: если $x$ = 3, то $-\cos \pi 3 = 1$, $\cos \pi$ = -1, -1 = -1, верно, значит $x$ = 3 является решением исходного уравнения.

Ответ: 3.

**Пример 3**. Найти решение уравнения $sin(x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 2$

Решение. Для любого действительного значения $x$ выполняются неравенства:

$sin(x^3 + 2x^2 + 1) \leq 1$, $x^2 + 2x + 2=(x+1)^2 + 1 \geq 1$. Так как для всех значений x левая часть не больше 1, а правая часть не меньше 1, то уравнение может иметь решение только при $x$ = 1.

Но так как при $x$ = -1, $x^2 + 2x + 2 = 1$, $sin(-1 + 2 \cdot 1 + 1) = sin\,2 \neq 1$, то также не является решением данного уравнения.

Ответ: нет корней.

## 1.3 Уравнения с использованием свойств функций в школьном курсе математике

Взаимосвязь уравнений и свойств функций – один из самых мощных инструментов в школьной математике. К сожалению, в стандартной программе эти темы оторваны друг от друга. Первое знакомство с этим методом начинается в 8-9 классах на примере уравнений с корнями и дробями. Именно здесь ученики открывают для себя понятие области определение. Например, они учат, что под корнем не может быть отрицательного числа, а знаменатель не должен равняться нулю. Эти простые правила становятся базой для развития математического мышления.

В 10 классе программа усложняется: появляются логарифмы, тригонометрия, показательные функции. Здесь школьники учатся применять более сложные свойства, такие как чётность, периодичность или монотонность. Это помогает им доказывать, что у уравнения есть только один корень, или отсеивать лишние ответы, основываясь на ограничениях функции.

К 11 классу все эти знания объединяются. Умение использовать свойства функций становится очень важным при подготовке к ЕГЭ, особенно для решения сложных задач.

Проблема в том, что в учебниках по алгебре функциональному методу уделено мало места. Чаще всего авторы предлагают решать уравнения стандартными способами: через замену переменной, разложение на множители или приведению к общему знаменателю. О свойствах функций вспоминают редко, а количество задач, нацеленных на применение функционального подхода, крайне невелико из-за чего ученикам сложно справляться с заданиями повышенной сложности.

Например, в задание №13 (тригонометрия) нужно не просто найти корни, но и правильно отобрать их на промежутке, учитывая периодичность. В задании №17 (экономика) часто требуется найти самое выгодное решение, используя

возрастание или убывание функции. А в задании №18 с параметром функциональный подход просто незаменим: там нужно понимать, как ведёт себя функция. Из-за этого у учеников не формируется устойчивый навык анализа функций в контексте уравнений, а материальная наполняемость учебников по данной теме оказывается недостаточной.

Как показывает практика, на экзаменах многие ребята теряются. Они могут знать теорию и определения, но не понимают, как применять их в конкретном примере. Также часто забывают про область определения, из-за чего в ответ попадают лишние числа или теряют лишние решения.

Чтобы помочь ученикам, во второй главе работы предложен элективный курс «Решение уравнений на основе свойств функций». Его цель научить школьников разбираться в логике математических задач, а не просто действовать по шаблону. Такой навык поможет им не только успешно сдать ЕГЭ, но и лучше подготовиться к обучению в университете.

# ГЛАВА 2 РАЗРАБОТКА ЭЛЕКТИВНОГО КУРСА «РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ»

## 2.1 Место и роль элективных курсов в системе школьного образования

Элективные курсы являются ключевым инструментом в современной системе образования, обеспечивающим индивидуальной подход к обучению особенно в старших классах. В отличие от обязательных дисциплин, элективы дают возможность организовать дифференцированную подготовку – с учётом индивидуальных образовательных целей и профессиональных ориентиров учащихся. Это даёт возможность усовершенствовать знания в узкоспециализированных областях, которые выходят за рамки стандартной школьной программы.

Внедрение элективных курсов в образовательный процесс обусловлено рядом факторов:

- Профессиональное самоопределение: помощь школьникам в выборе будущей специальности на основе их способностей и интересов.
- Формирование навыков самостоятельной исследовательской деятельности и критического анализа информации.
- Возможность построения индивидуального учебного плана для каждого учащегося.

Функционально элективные курсы решают несколько важных задач:

1) Профориентационная – знакомство со спецификой различных профессий и требованиями к современным специалистам.
2) Развитие когнитивных способностей учащихся, формирование навыков аргументированного изложения собственной позиции и практического применения теоретических знаний.

3) Расширение содержания базовых дисциплин для тех учащихся, которые планируют сдавать профильные экзамены или заниматься наукой.
4) Поддержание учебной мотивации через представление свободы выбора изучаемого материала.

Курсы по выбору имеют ряд особенных черт, отличающих их от традиционных предметов: добровольность (группы формируются на основе личных заявлений учащихся), модульный характер (занятия обычно рассчитаны на который срок – от 17 до 34 учебных часов), вариативность форм, результативность (итогом освоения курса часто становится конкретный продукт – защита авторского проекта, публикация статьи или формирование префессионального портфолио).

Эффективная работа элективов возможна только при соблюдении определенных условий. Программы должны соответствовать актуальным запросам общества, иметь качественное методическое и материально-техническое обеспечение, а педагоги должны обладать высокой квалификацией для ведения авторских курсов. Важна регулярная оценка эффективности данной программы через обратную связь с учениками.

Элективные курсы выступают связующим звеном между общим среднем и профессиональным образованием. Они способствуют не только накоплению знаний, но и формированию осознанного отношения к своей будущей карьере, развивая самостоятельность и готовность к непрерывному обучению.

## 2.2 Тематическое планирование элективного курса

*1. Пояснительная записка*

Элективный курс по математике «Решение уравнений с использованием свойств функций» направлен на системное углубление знаний учащихся 11 классов и повышение их математической подготовки через изучение методов

решения различных типов уравнений с опорой на свойства функций. Курс содержит рекомендации по необходимому объёму знаний, ключевым понятиям и основным теоретическим положениям, а также анализ типов заданий и критериев их оценки. Особое внимание уделяется сочетанию как стандартные, так и нестандартные подходы, позволяющие успешно справляться с задачами повышенного уровня сложности.

Рассматриваемая тема является важной частью математического анализа и алгебры, требующей понимая свойств функций и умения применять их для нахождения решений уравнений. Изучение данного курса стимулирует развитие аналитического мышления, нестандартного подхода и навыков самостоятельной учебной деятельности, что особенно востребовано на олимпиадах.

Цель элективного курса: изучить основные методы решения уравнений с опорой на свойства функций; обосновать применимость и эффективность этих методов; систематизировать знания по данной теме и показать значимость свойств функций в решении уравнений.

Для достижения поставленной цели определены следующие задачи:

- расширить знания учащихся о свойствах функций (монотонность, чётность/нечётность, ограниченность, область определения) и их применении при решении уравнений;
- сформировать умение проводить анализ уравнений с точки зрения функциональных свойств;
- улучшить коммуникативные и общеучебные навыки через работу в группе, участие в дискуссиях и грамотное обоснование собственных решений;
- развить способности к самостоятельной исследовательской деятельности и аналитического мышления;
- способствовать формированию устойчивого интереса к математике и развитию логического мышления.

Актуальность элективного курса «Решение уравнений с использованием свойств функций» обусловлена недостаточным вниманием к теме свойств функций и их роли в решении уравнений в базовом школьном курсе, несмотря на его высокую эффективность. Объём математических знаний и требований к уровню подготовки растёт, а количество учебных часов на изучение математики остаётся ограниченным. Методы, основанные на свойствах функций, позволяют решать сложные уравнения, которые не поддаются стандартным алгебраическим преобразованиям. Элективные курсы позволяют учитывать индивидуальные образовательные интересы и потребности учащихся, а также создают эффективную основу для подготовки к ЕГЭ профильного уровня и дальнейшему обучению в вузах с углубленным изучением математики.

*2. Место элективного курса в учебном плане.*

Программа элективного курса предусматривает организацию занятий для учащихся 11 класса. Занятия будут проводиться еженедельно, общее количество часов на курс составляет 18 часов.

*3. Тематическое планирование.*

В рамках рабочей программы элективного курса «Решение уравнений на основе свойств функций» разработано тематическое планирование, представленное в форме таблицы 1.

*Таблица 1 – учебно-тематический план.*

| **№** | **Тема раздела** | **Количество часов** |
|---|---|---|
| 1. | Исходные понятия необходимые для решения уравнений на основе свойств функций. | 2 |
| 2. | Методы решений уравнений с использованием свойств функций. | 8 |
| 3. | Нестандартные задачи по теме: «Решение уравнений с использованием свойств функций». | 8 |
| **Итого:** | | 18 |

*4. Содержание программы.*

**Тема 1.** Основные понятия теории решения уравнений на основе свойств функций (2 часов)

В рамках темы изучаются ключевые аспекты функционального подхода к решению уравнений:

— актуализация знаний о понятии функции, способы её задания и области определения;

— основные свойства функций: монотонность, чётность/нечётность, ограниченность;

— графики элементарных функций и их преобразования;

— анализ поведения функций на различных промежутках;

Основная цель – углубить и систематизировать знания учащихся о функциях, сформировать надёжную теоретическую базу для применения функциональных методов при решении уравнений, посредством решения практических задач, в том числе заданий на готовых чертежах.

**Тема 2.** Методы решений уравнений с использованием свойств функций.

Данная тема включает в себя рассмотрение следующих основных вопросов:

— использование области определения функции при решении уравнений;

— метод монотонности функции (применение теоремы о корне, анализ возрастающих и убывающих функций);

— метод оценки (min-max): работа с ограниченностью функций, выявление случаев одновременного достижения экстремальных значений;

— применение свойств чётности/нечётности функций для упрощения уравнений и нахождения решений.

Основная цель – развить у учащихся способность к самостоятельному математическому исследованию: в условиях проблемной ситуации научиться

решать нестандартные уравнения путём анализа графиков и свойств функций и самостоятельно открывать методы решения задач, не поддающихся стандартным алгебраическим преобразованиям. Освоить алгоритмы применения функциональных методов для точного и рационального решения уравнений. Сформировать умение выбирать оптимальный метод решения в зависимости от структуры уравнения, а также решать уравнения повышенного уровня сложности, включая задачи с параметрами.

**Тема 3.** Нестандартные задачи по теме: «Решение уравнений на основе свойств функций» (4 часа).

В рамках данной темы осуществляется работа с математическими задачами повышенной сложности, требующих применение функциональных методов, задачи с параметрами, решаемые через анализ свойств функций.

Основная цель – стимулировать развитие творческого математического мышления и навыков исследовательской деятельности. Подготовить учащихся к участию в математических олимпиадах и сдаче ЕГЭ профильного уровня. Углубить предметные знания и сформировать умения решать сложные и нестандартные задачи. Развить способности планировать стратегию решения, выявлять функциональные закономерности и применять их для нахождения ответа.

*5. Формы организации учебных занятий.*

Занятия строятся на сочетании традиционных и интерактивных форм обучения с акцентом на исследовательскую деятельность и практическое освоение методов решения уравнений. Учащиеся выявляют закономерности, открывают методы решения уравнений на основе свойств функций. Проводятся практические семинары для отработки навыков решения задач, проблемные беседы и групповые обсуждения.

Основной подход – частично-поисковый. Учащиеся выдвигают и проверяют гипотезы, самостоятельно приходят к алгоритмам решения через анализ задач, интерактивное исследования графиков. Обучение учитывает

индивидуальные особенности: темп освоения материала и уровень подготовки, для чего применяются дифференцированные задания разного уровня сложности.

Регулярный контроль (мини-тесты, математические диктанты) обеспечивает обратную связь и позволяет корректировать образовательный процесс. Систематическое повторение и включение ранее изученных методов в новые задачи способствуют глубокому усвоению материала и формированию целостной системы знаний, необходимой для успешной сдачи ЕГЭ и дальнейшего обучения.

*6. Формы контроля*

Уровень усвоения материала учащимися оценивается на основе следующих критериев:

- анализа их активности и вовлеченности в ходе практических занятий;
- проведения индивидуальных и групповых бесед для выяснения понимания темы;
- проверки и анализа д/з на правильность выполнения;
- выполнения контрольных работ.

*7. Календарно-тематическое планирование курса*

В рамках рабочей программы элективного курса: «Решение уравнений с использованием свойств функций» было разработано тематическое планирование представленное в форме таблицы 2.

*Таблица 2 – календарно-тематическое планирование.*

| № урока | Тема | Часы |
|---|---|---|
| 1 | Введение. Понятие функция, свойства и их роль в решении уравнений | 2 |
| 2 - 3 | Область определения функции и её применение | 2 |
| 4 - 5 | Чётность и нечётность функций | 2 |
| 6-8 | Монотонность функций. Теорема о корне | 2 |

| | | |
|---|---|---|
| 9 -11 | Ограниченность функций. Метод оценки | 2 |
| 12 | Промежуточная контрольная работа №1 | 1 |
| 13 -17 | Комбинированное применение свойств | 3 |
| 19-20 | Решение сложных уравнений и задач ЕГЭ повышенного уровня | 2 |
| 21 | Итоговая контрольная работа №2 + анализ ошибок | 1 |
| Итого: | | 18 |

8. *Планируемые результаты:*

По итогам изучения курса учащиеся должны уметь:

- чётко и корректно формулировать теоретические положения, а также выстраивать и излагать логическую цепочку рассуждений при выполнении учебных заданий;

- анализировать уравнение и выбирать оптимальный метод решения на основе свойств функций;

- применять отдельные свойства функции для решения уравнений разных типов;

- комбинировать несколько свойств при решении сложных уравнений;

9. *Материально-техническое обеспечение факультативного курса.*

Наличие современного технического оборудования в аудиториях играет ключевую роль в обеспечении эффективного образовательного образования. Оснащение учебных аудиторий техническими средствами (ноутбуками, мультимедийными проекторами и интерактивными досками) создаёт условия для формирования интерактивной образовательной среды, способствующей повышению вовлеченности обучающихся. Кроме того, ключевым компонентом технической инфраструктуры выступает специализированное программное

обеспечение, что значительно обогащает и углубляет процесс изучения материала.

Программное обеспечение включает в себя компоненты, такие как операционная система, файловые менеджеры, антивирусные приложения и интернет-браузеры. Указанные инструменты обеспечивают эффективную работу с ноутбуками и мультимедийном оборудованием, а также способствуют формированию единой цифровой среды взаимодействия посредством интерактивных досок.

Оснащённость аудиторий современными техническими средствами и программными продуктами существенно повышает качество обучения. Это не только оптимизирует использование учебного времени, но и способствует развитию у учащихся навыков работы с информационными технологиями, что является важной компетенцией в современном образовательном пространстве.

## 2.3 Разработка задачного материала в рамках элективного курса

В рамках элективного курса «Решение уравнений с использованием свойств функций» разработан структурированный задачный материал. Его цель – сформировать у учащихся навыки решения уравнений на основе свойств функций, а также подготовить к решению задач повышенной сложности (заданий ЕГЭ по математике профильного уровня и олимпиад).

Материал структурирован по принципу последовательного нарастания сложности заданий:

- Базовый уровень (A)
- Средний уровень (B)
- Повышенный уровень (C)

Задания сопровождаются чётким указанием на применяемое свойство функции или их комбинацию. Для некоторых задач предусмотрены краткие указания для учителя, что помогает выделить важные шаги и избежать ошибок.

Задания охватывают широкий спектр функций: алгебраические, иррациональные, логарифмические, тригонометрические.

## Материал к занятиям по темам

### Тема 1. Область определения функции.

*Базовый уровень (А).*

Докажите, что уравнения **не** имеют решения.

1. $\sqrt{x-7}+\sqrt{5-x}=2.$

2. $\log_3(1-x)+\sqrt{x-11}=5.$

3. $\log_{0,3} x+\sqrt{(x+2)(-11-x)}=7.$

4. $\log_2(3-x)+\log_{x-3} 2 = 1.$

5. $\frac{x^2-3x+2}{\log_5(2x-3)}=0.$

6. $\sqrt{3-x^2}-\sqrt{x-2}=x.$

*Пример решения задания.* $\sqrt{1-x}+\sqrt{x-3}=5.$ Найдём ОДЗ: $\begin{cases}1-x\geq 0\\ x-3\geq 0\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}x\leq 1\\ x\geq 3\end{cases}\rightarrow$ уравнение не имеет решений.

*Средний уровень (В).*

Решите уравнения.

1. $(\sqrt{x^2-4x+3}+1)\log_5\frac{x}{5}+\frac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)=0.$

2. $(\sqrt{x^2-9x+14}-2)\log_{0,5} x+\sqrt{\frac{2-x}{x-7}}=5-\frac{6}{x}.$

3. $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2+4x-3}=\sqrt{-x^2+3x-2}.$

4. $\sqrt{x^2-3x+2}+\sqrt{-x^2+2x}=\sqrt{-x^2+5x-6}.$

5. $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}}+\sqrt{x^2-x-6}=\log_5(4-x).$

6. $\sqrt{x}=-x.$

7. $\sqrt{-1-2x}=1+2x.$

*Ответы:* **1**. 1 **2**. 2. **3**. 1. **4**. 2. **5**. 3. **6**. 0. **7**. -0,5

***Пример решения задания.*** Решите уравнение, оценив область допустимых значений переменной $\sqrt{x-1}+\sqrt{1-x}=x^2-1.$

ОДЗ: $\begin{cases} x-1\geq 0 \\ 1-x\geq 0 \end{cases} \rightarrow x=1.$ Остаётся проверить, является ли $x$ = 1 корнем уравнения. $x = 1 \rightarrow \sqrt{1-1}+\sqrt{1-1}=1-1.$ Верно.

Ответ: 1.

***Пример решения задания***. Решите уравнение $\sqrt{6-x-x^2}$ = $x^2+x-6$

Найдём области определения функций, стоящих в правой и левой частях уравнения и их пересечение:

$D_1(\sqrt{6-x-x^2}) = [-3;2]$ и $D_2(x^2+x-6) = (-\infty;+\infty)$.

$D = D_1(\sqrt{6-x-x^2}) \cap D_2(x^2+x-6) = [-3;2]$.

Левая часть уравнения неотрицательна значит такой же должна быть правая часть. Для этого рассмотрим пересечение множества D с множеством решений неравенства $x^2+x-6\geq 0,$ то есть с A = $(-\infty;-3] \cup [2;+\infty)$. Достаточно рассмотреть уравнение на множестве $D \cap A = \{-3;\ 2\}$. Подстановкой убеждаемся, что оба его элемента служат решением уравнения.

Ответ: -3; 2.

*При решении уравнений оценивается не только область определения выражений, входящих в него, но и их область значений. При решении иррациональных уравнений методы комбинируются.*

*Повышенный уровень (С).*

Решите уравнения.

1. $\sqrt{1-2x+x^2}+\sqrt{26+3x-5x^2}=x-1.$

2. $\sqrt{(3^x-2)^2}+\sqrt{(3^x-9)(3^x-1)}=3^x-2.$

3. $\log_7\frac{x-5}{3-x}+\log_3|x-3|=\sqrt{\frac{x-4}{3-x}}+\sqrt{9x-x^2-20}.$

4. $2\sqrt{(4-2^x)^2}+\sqrt{4^x-18\cdot 2^x+32}=2^{x+1}-8.$

5. $\arcsin(x^2-2x+2)=\frac{\pi x}{2}.$

6. arccos (6$x$-$x^2$-10) = $\frac{\pi x}{3}$.

*Ответы:* **1**. 2,6 **2**. 2. **3**. 4 **4.** 4. **5.** 1 **6.** 3.

***Пример решения задания***. $\sqrt{4-4x+x^2}+\sqrt{x^2-5x+4}=x-2.$

Преобразуем уравнение $|x-2|+\sqrt{x^2-5x+4}=x-2.$ Левая часть уравнения неотрицательна, то $x$–2 $\geq 0$. $x \geq 2$ $|x-2|=x-2.$ Преобразуем $x$-2+$\sqrt{x^2-5x+4}$ = $x$-2, $\sqrt{x^2-5x+4}$=0, $x_1$ = 1, $x_2$ = 4. С учетом того, что $x \geq 2$, корень $x$ = 4.

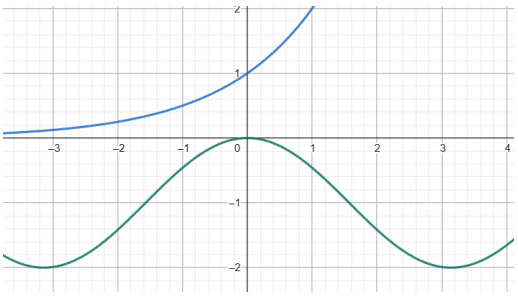
Ответ: 4.

## Тема 2. Использование понятия области значений функции (метод оценки, метод ограниченности). Организация учебной деятельности, направленной на открытие метода оценки области значений при решении уравнений

Цель: демонстрация методики организации учебной деятельности, направленной на самостоятельное открытие учащимися метода оценки области значений как способа решения уравнений.

Учащимся предлагается решить уравнение: $\cos x - 2^x$=1. Учитель задаёт вопрос: «К какому типу можно отнести данное уравнение? Существует ли стандартный алгоритм решения данного уравнения?». Ожидаемый ответ: «Это комбинированное уравнение. Стандартные алгоритмы решения тригонометрических или показательных уравнений здесь неприменимы».

Учитель предлагает построить графики левой и правой частей уравнения, предварительно преобразовав его: $cos\,x - 1 = 2^x$. Обозначим: $f(x)=cos\,x-1$, $g(x)= 2^x$. Наблюдаются ли точки пересечения графиков? Что это означает для исходного уравнения? Ожидаемый ответ: «Точек пересечения нет, следовательно, корней уравнение не имеет».



Учитель фиксирует внимание на ключевом наблюдении: «Точно ли графики не пересекаются? Как это доказать строго, не полагаясь только на графическое изображение?» Ожидаемый ответ: «Области значений функций не пересекаются».

После успешного решения задачи учитель предлагает учащимся сформулировать общий метод и записать его в виде правила.

*Правило*. Пусть дано уравнение $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ —функции, определенные на множествах $D_1$, $D_2$. Обозначим область изменения этих функций соответственно $E_1$ и $E_2$. Если $x_1$ является решением уравнения, то будет выполняться числовое равенство $f(x_1) = g(x_1)$, где $f(x_1)$ — значение функции $f(x)$ при $x = x_1$, а $g(x_1)$ — значение функции $g(x)$ при $x = x_1$. Следовательно, если уравнение имеет решение, то области значений функций $f(x)$ и $g(x)$ имеют общие элементы ($E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$). Если же таких общих элементов множества $E_1$ и $E_2$ не содержат, то уравнение решений не имеет.

*Базовый уровень (А).*

Докажите, что уравнения не имеют решений.

1. $\sqrt{x} + \sqrt{x+4} = 1.$

2. $\sqrt{x} + \sqrt{x+5} = 2.$

3. $\sqrt{x} - \sqrt{x+5} = 2.$

4. $|2x^2 - 3x - 5| + 7^{2x^2-3x-5} = 0.$

5. $|x^2 - 2x| + |\lg(3x-7)| = 0.$

6. $\log_3 9^{(x+1)^2}\,(10^{(x+1)^2}+11) = -1$

*Указание: Из* того, что $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, еще не следует существование решения, так как это только необходимое, но не достаточное условие.

Например, уравнение $x^2 = \sqrt{x-2}$ не имеет решений, хотя $E(x^2) \cap E(\sqrt{x-2}) = [0; +\infty)$.

Пусть дано уравнение *f(x) = g(x)*. Если $f(x) \geq 0$ и $g(x) \leq 0$, то решением уравнения является решение системы $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0. \end{cases}$

Если функция f(x) ограничена сверху, причём max *f*(*x*) = A, функция *g(x)* ограничена снизу, причём min g(*x*) = A, то уравнение *f*(*x*) = *g(x)* равносильно системе уравнений $\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$

***Пример решения задания***. $(\frac{4}{3})^x = -2x^2 + 6x$-9

Область допустимы значений уравнения есть множество всех действительных чисел. Функция $f(x) = (\frac{4}{3})^x$ принимает только положительные значения, а $g(x) = -2x^2 + 6x$-9 — отрицательные значения. Множества значений этих функций не имеют общих элементов, и, следовательно, уравнение решений не имеет.

*Средний уровень (В).*

Решите уравнения:

1. $\sqrt{x^2-1} + \sqrt{2x^2-x-1} = 0.$

2. $x^2 - 10x + 25 + |x^2 - 9x + 20| = 0.$

3. $|x^2 - 2x| + \sqrt{x^2 - 3x + 2} = 0.$

4. $\sin^2 \pi x + \log^2_2(2x^2+x) = 0.$

5. $3+(x-\pi)^2 = 1-2\cos x.$

6. $\sqrt{x+5} + \sqrt{-3-x} = x^2+8x+18.$

7. $\sin x = x^2 + 1$

8. $\cos x = x^2 + 1$

*Ответы:* **1.** 1 **2.** 5 **3.** 2. **4.** -1. **5.** $\pi$. **6**. -4. **7**. нет корней. **8.** 0.

***Пример решения задания***. $\frac{3}{\pi} arccos(x-1) = 3+\sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2}$

$0 \le \arccos(x\text{-}1) \le \pi$ для допустимых значений $x$, следовательно, $0 \le \frac{3}{\pi}\arccos(x\text{-}1) \le 3$. $3+\sqrt{x^4-4x^3+4x^2} \ge 3$ для допустимых значений $x$. Равенство достигается, если $\begin{cases} \frac{3}{\pi}arcos(x-1)=3 \\ 3+\sqrt{x^4-4x^3+4x^2}=3 \end{cases}$. Решим 1-ое уравнение системы: $\arccos(x\text{-}1) = \pi$, $x = 0$.

При $x = 0$ 2-ое уравнение обращается в верное числовое равенство. Следовательно, решением системы и уравнения является $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

*Повышенный уровень (С).*

Решите уравнения:

1. $5^{\sin x} = 6\text{-}\cos^2\frac{4x}{5}$.

2. $\log_2(3+2x-x^2) = \text{tg}^2\frac{\pi x}{4} + \text{ctg}^2\frac{\pi x}{4}$.

3. $2^{1-|4x-1|} = \text{tg}\,\pi x + \text{ctg}\pi x$.

4. $\cos^{120}x\text{-}\sin^{120}x = 1$.

5. $\sin 5x + \sin x = 2+\cos^2 x$.

6. $4\sin 2x\text{-}\text{tg}^2(x\text{-}\frac{\pi}{4}) = 4$.

7. $\arccos(x+4) = -\log^2_3(x^2\text{-}8)$.

8. $\frac{1}{\pi}\arcsin(-x) = \frac{1}{2} + |x^4+2x^3+x^2|$.

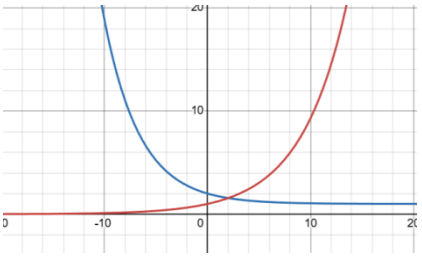
*Ответы:* **1.** $2{,}5\pi + 10\pi n, n \in Z$. **2.** 1. **3.** $\frac{1}{4}$. **4.** $\pi n, n \in Z$. **5.** $0{,}5\,\pi + 2\pi n, n \in Z$

**6.** $0{,}25\,\pi + 2\pi n, n \in Z$. **7.** -3 **8.** -1.

## Тема 3. Использование свойства монотонности функции. Организация учебной деятельности, направленной на открытие метода использования свойства монотонности функции при решении уравнений

Цель: демонстрация методики организации учебной деятельности, направленной на самостоятельное открытие метода использования свойств монотонности функций как способа решения уравнения.

Учащимся предлагается решить уравнение $3^x + 4^x = 5^x$. Учитель обращает внимание на основания показательных функций: «Что вы можете сказать о тройке чисел?» Ожидаемый ответ: «Числа образуют пифагорову тройку». Учитель: «Какое значение переменной удовлетворяет этому уравнению?». Ожидаемый ответ: «Можно подобрать корень *x*=2». «Является ли найденный корень единственным решением уравнения?» «Как доказать, что других решений нет». Возникает проблемная ситуация. Учитель предлагает разделить обе части уравнения на $4^x$ $(\frac{3}{4})^x + 1 = (\frac{5}{4})^x$ и оценить характер монотонности функций, входящих в это уравнение. В левой части уравнения находится убывающую функция, а справа возрастающая. Вспоминаем теорему о корне монотонной функции: «Если на некотором промежутке функция из одной части уравнения возрастает, а функция из другой части убывает, то уравнение имеет не более одного решения на данном промежутке».




Ожидаемый вывод учащихся: «Так как функции имеют разный характер монотонности, уравнение может иметь только один корень. Найденный корень *x* = 2 единственный».

Делается вывод, что в некоторых уравнениях можно оценить характер монотонности функций и, опираясь на теорему, делать вывод о количестве корней уравнения.

*Базовый уровень (А).*

Решите уравнения.

1. $3^x = 4 - x$.

2. $2^x = \frac{3-5x}{3}$.

3. $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$.

4. $\log_{\frac{1}{3}} x$ = $x$-4.

5.$\log_2(4-x) = x-3$.

6. $4^{\log_3(1-x)} = 3x+1$.

7. $0{,}5^{\log_7(2x+3)} = \frac{2}{34-15x}$

8. $\log_3(3^x - 8) = 2-x$

*Ответы*: **1**. 1. **2**. 0. **3**. 1. **4**. 3. **5**. 3. **6**. 0. **7**. 2. **8**. 2.

*Средний уровень (В).*

Решите уравнения.

1. $x^5 + x^3$+ $x$ = -42.

2. $x^2$+ $\sqrt{x} - \frac{12}{x} = 15$.

3. $x^2$+$|x|$+$\sqrt{x}$+2$x$ = 30.

4. $x^3 - (5-x)^3$+2$x$ = 71.

5. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+6} + \sqrt{x+13} = 9$.

6. $\frac{x^4+5x-12}{x} = 7$.

7. $(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6})(\sqrt{2x-1} - 3) = 4$.

8. $\frac{24}{x+5} + \frac{2}{x-5} = 3$.

9. $\sqrt{3-x}$+2 = $\sqrt{2x-2}$.

10. $\sqrt[4]{x-1} + 2\sqrt[3]{3x+2}$ = 4+$\sqrt{3-x}$.

11. $0{,}2^{x+1} = \sqrt{35+5x}$.

12. 40· $0{,}04^x$ = $(2x+1)^3$.

13. 3arcsin $x$ +$\pi$x-$\pi$ = 0.

14. arcsin (2$x$+3) = $\log_\pi(-4x-5)$.

*Ответы*: **1**. -2. **2**. 4. **3**. 4. **4**. 4. **5**. 3. **6**. 2. **7**. 7. **8**. 7. **9.** 3. **10.** 2. **11.** -2. **12.** 0,5.

**13.** 0,5. **14.** -1,5.

***Пример решения задания***. $x^2 + \sqrt{-x} = 18$.

ОДЗ уравнения: $x$≤0. Функция $y(x) = x^2 + \sqrt{-x}$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$,

а g($x$) = 18 - постоянная функция. Подбором находим, что $x$ = -4. В силу теоремы 1, найденный корень единственный.

Ответ: -4.

*Повышенный уровень (С).*

1. Найдите все значения параметра $a$, при которых любое решение уравнения $4\sqrt[3]{3{,}5x-2{,}5}+3\log_2(3x-1)+2a=0$ принадлежит отрезку $[1;3]$.

2. Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $64x^6-(3x+a)^3+4x^2-3x=a$ имеет более одного корня.

3. Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $27x^6+(a-2x)^3+9x^2+3a=6x$ не имеет корней.

4. Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $8x^6+(a-x)^3+2x^2+a=x$ имеет хотя бы один корень.

5. Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $27x^6+(3a-4x)^3+3x^2+3a=4x$ имеет хотя бы 1 корень.

6. Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $27x^6+(a-2x)^3=2^{2x-a}-8^{x^2}$ имеет хотя бы один корень.

7. Найдите все значения параметра $a$ при каждом из которых уравнение $2^{ax-\sqrt{x+1}}\cdot\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{ax+2}+\log_9(\sqrt{x+1}+2)=0$ имеет единственное решение.

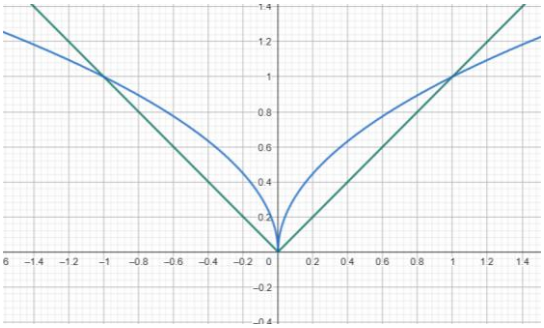
8. Найдите все значения параметра $a$ при каждом из которых уравнение $\sin(x+4a)+\sin\left(\frac{x^2-6x-7a}{2}\right)=4x-x^2-a$ не имеет действительных решений.

*Ответы*: **1.** $\left[-\frac{17}{2};-\frac{7}{2}\right]$ **2.** $a>-\frac{9}{16}$. **3.** $a>\frac{1}{3}$. **4.** $a\leq\frac{1}{8}$. **5.** $a\leq\frac{4}{9}$. **6.** $a\leq\frac{1}{3}$, в частности $a=0$ **7.** $a\leq 0$. **8.** $a>4$.

## Тема 4. Использование свойств чётности и нечётности функций. Организация учебной деятельности, направленной на открытие метода использования свойства чётности/нечётности функции при решении уравнений.

Цель: демонстрация методики организации учебной деятельности, направленной на самостоятельное открытие метода использования свойств чётности/нечётности функций как способа решения уравнения.

Учащимся предлагается рассмотреть уравнение $|x| = \sqrt{|x|}$. Задание учащимся: оценить количество корней, не решая уравнения. Ученики самостоятельно выполняют анализ уравнения: выделяют левую и правую части как функции $y_1 = |x|$ и справа $y_2 = \sqrt{|x|}$. Далее учащиеся исследуют свойства функций и приходят к выводу, что они чётные и их графики симметричны относительно оси ординат.



Опираясь на установленную симметрию, школьники формулируют гипотезу: если положительное число корень уравнения, то противоположное к нему число также является корнем этого уравнения. При этом $x = 0$ не имеет симметричной пары. Из этого следует закономерность: уравнения с чётными функциями имеет чётное количество корней, если $x = 0$ не является корнем и нечётное количество корней, если $x = 0$ корень.

*Базовый уровень (А).*

Решите уравнения с использованием свойств чётности и нечётности функций.

1. $x^2$-6$|x| + 8 = 0$
2. $x^2$+5$|x|$-24 = 0
3. $|x^2 - 4| = 5$
4. $\cos(2x)$+$2x^2 = \cos^2 x$
5. $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x$+$(\sqrt{7-\sqrt{48}})^x = 14$

6. $x|x| = \sqrt[3]{x}$

7. $3^{|x|} = 4 - x^2$

8. $\lg x^2 = 1\text{-}x^2$

9. $x^6+2x^4+3x^2 = 6$

10. $\sqrt{x^2+5} + \sqrt{2x^2+1} = 6$

11. $\sqrt{x^4+19}+\sqrt{x^2+7} + \sqrt{x^2-8} = 15$

*Ответы:* **1.** 2; -2; 4; -4. **2.** -3; 3. **3.** 3; -3 **4.** 0. **5.** -2; 2 **6.** -1; 0; 1 **7.** -1; 1. **8.** -1; 1. **9**. -1; 1. **10.** -2; 2. **11**. -3; 3.

*Пример решения задания* $8^{|x|} = 2^{|x+2|+|x-2|}$.

В обеих частях уравнения имеем чётные функции. Поэтому достаточно найти решения для $x \geq 0$. Так как $x = 0$ не является корнем уравнения, рассмотрим два промежутка: $(0;2]$, $(2;+\infty)$.

а) На промежутке $(0;2]$ имеем: $8^x = 2^{x+2-x+2}$, $x = \frac{4}{3}$.

б) На $(2;+\infty)$ имеем: $8^x = 2^{x+2+x-2}$, $x = 0$.

Но так как $x = 0$ не является корнем уравнения, то для $x > 0$ данное уравнение имеет корень $x = \frac{4}{3}$. Тогда $x = -\frac{4}{3}$ также является корнем уравнения.

Ответ: $\frac{4}{3}$, $-\frac{4}{3}$.

*Средний уровень (В).*

1. Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2a \sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственный корень.
2. Для всех значений параметра $a$ исследуйте на четность и нечетность функцию ($x \in R$):
   а) $f(x) = (a-2)x+3a-4$;
   б) $f(x) = x^2+(a^2-4)x + a$
3. Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение $x^2 - 4a \sin(\cos x) + a^2 = 0$.
4. Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение $2x^2 - a \operatorname{tg}(\cos x)\, 4\, a^2 = 0$.

5. Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение $a^2 + a\sqrt{2} + 4 + \sin^2 ax = 4\cos x$.
6. Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $3^x+3^{2-x} = a^2-6a+11$ имеет единственный корень.
7. Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $\text{tg}\,|a| = \log_2(\cos x - |x|)$ имеет единственный корень.

*Ответы:* **1**. $a = 0$. **2 (а).** при $a = 2$ функция чётная; при $a = \frac{4}{3}$ функция нечётная; при остальных значениях $a$ функция общего вида. **2 (б).** при $a = 2, -2$ функция чётная; при остальных значениях $a$ функция общего вида. **3**. $a = 0$ **4.** $a = 0$ **5.** $a = -\sqrt{2}$. **6.** $a = 1$; $a = 5$ **7.** $a = \pi k, k \epsilon Z$.

*Повышенный уровень (С).*

1. Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $\sqrt[4]{a^4 + x^4} = \cos\frac{x}{2} + a^2 - 2a - 1$ имеет ровно одно решение.
2. Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение $x^2 + (a - 3)^2 = |x - a + 3| + |x + a - 3|$.
3. Найдите все значения параметра $a$, при которых уравнение $\sqrt{x^4 + (a-5)^4} = |x + a - 5| + |x - a + 5|$ имеет единственное решение.
4. Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 5 \cdot 2^{|x|} + 6|x| + 7 = 5y + 6x^2 - a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет единственное решение

5. Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение $\sqrt[4]{x^4 + (a-5)^4} = |x + a - 5| + |x - a + 5|$.
6. Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых уравнение $x^2-|x + a + 3| = |x - a - 3|-(a+3)^2$ имеет единственное решение.
7. Найдите все значения параметра $a$, для каждого из которых уравнение $3^{x^2+6ax+9a^2} = ax^2 + 6a^2x + 9a^3 + a^2 - 4a + 4$ имеет единственное решение.

Данные задания были взяты из образовательного ресурса Решу ЕГЭ [18].

*Ответы:* **1**. $a = 0$, $a = 3$. **2.** $a = 1$; $a = 5$ **3**. $a = 3$; $a = 7$ **4.** $a = -7$; $a = -17$ **5.** $a = 3$; $a = 7$ **6.** $a = -5$; $a = -1$ **7.** $a = 1$.

## Тема 5. Комбинированное применение свойств функций при решении уравнений.

1. $\sqrt{x+3} + \sqrt{5-x} = x^2 - 2x + 5$.

*Указание: область определения + монотонность.*

2. $x^4-4x^3+6x^2-4x+1+\sin^2 x = 0$.

*Указание: чётность + ограниченность.*

3. $\log_4(x+1)+\log_5(7-x) = 2$.

*Указание: область определения + монотонность.*

4. $x^8+\sin^6 x+\cos^8 x = 2$.

*Указание: чётность + ограниченность.*

5. $x^{10}+\sin^8 x+\cos^{10} x = 2$.

*Указание: чётность + ограниченность.*

6. $5^{\sqrt{x}} + 4\sqrt{x} = 20$.

*Указание: область определения + монотонность + замена переменной.*

7. $|x|^6 + \frac{1}{1+x^{12}} + \sin^4 x = 1$.

*Указание: чётность + ограниченность.*

8. $\sqrt{x+a} + \sqrt{8-x} = a + 2$.

*Указание: область определения + монотонность: исследовать монотонность левой части, определить при каких $a$ уравнение имеет решение, проверить граничные случаи.*

9. $a \cdot 2^{\sqrt{x}} + \sqrt{x} = a^2+1$.

*Указание: область определения + монотонность.*

*10.* $\operatorname{arctg}(x-1)+\operatorname{arctg}(x+1) = \frac{\pi}{4}$.

*Указание: область определения + монотонность.*

11. $a^{x^2-4x+5} = x^2-4x+6$.

*Указание: область определения + монотонность.*

12. $\sqrt{x+a}+\sqrt{a-x}=2\sqrt{a}$.

*Указание: область определения + чётность.*

*Ответы:* **1.** нет корней **2.** x = 1 **3.** корней нет **4.** корней нет **5.** корней нет **6.** $x \approx 4$ **7.** $x = 0$ **8.** уравнение имеет решение при $a \in [2; 6]$ **9.** при $a > 0$ существует единственное решение $x \geq 0$, при $a \leq 0$ решений нет. **10**. $x = \sqrt{2-1}$ **11.** Решение существует при $a > 0$ и $a \neq 1$. **12.** $x = 0$ при $a \geq 0$.

## Тема 6. Уравнения повышенной сложности.

1. Найдите все значения $a$, при каждом из которых уравнение $x^4 + (a-3)^2 = |x-a+3|+|x+a-3|$ либо имеет единственное решение, либо не имеет решений.

2. Найдите все значения параметра $a$ при каждом из которых уравнение $|x-1|-(1-2a)x^2+(3-4a)x+6a-4 = \sin(|x-3|+6a-4) - \sin((1-2a)x^2-(3-4a)x)$ имеет 3 различных решения.

3. Найдите все значения параметра $a$ при каждом из которых уравнение $4^{|x-a|} \cdot \log_{\frac{1}{3}}(x^2-2x+4) + 2^{x^2-2x} \cdot \log_{\sqrt{3}}(2|x-a|+3) = 0$ имеет ровно 3 решения.

4. Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $|a^2+3-x|+|x-a-2|+|x-3a-1| = a^2-a+1$ имеет не менее одного решения.

5. Найдите все значения параметра $a$, при каждом из которых уравнение $(5a^2 — 26a + 5)^6 + (5^{x^2-x} - 5a)4 = 0$ имеет хотя бы один корень, и укажите корни уравнения для каждого из найденных значений $a$.

Данные задания были взяты из образовательного ресурса Решу ЕГЭ [18].

*Ответы:* **1.** $a \leq 1, a \geq 5$. **2.** $a = \frac{1}{2}$. **3.** $a = 1$ **4.** $a = \frac{1}{2}$ **5**. при $a = 5$ $x = 2$ и $x = -1$, при $a = \frac{1}{5}$ $x = 0$ *и* $x = 1$.

## Промежуточная контрольная работа №1

№1 Решить уравнение: $\sqrt{x^2-9}+\log_3(x+4) = \sqrt{9-x^2}+\log_3(4-x)$.

№2 Решить уравнение: $\sin^2\pi x+\log^2_2(2x^2+x) = 0$.

№3 Решить уравнение: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$.

№4 Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых уравнение $x^2 - 2a \cdot \sin(\cos x) + a^2 = 0$ имеет единственный корень.

№5. Решить уравнение: $\log_3(3^x - 8) = 2 - x$.

**Итоговая контрольная работа №2**

№1Решить уравнение: $\sqrt{16 - 8x + x^2} + \sqrt{4x^2 - 13x - 17} = x - 7$.

№2 Решить уравнение: $\frac{4}{\pi}\arcsin(x-1) = 2 + \sqrt{x^2 - x - 2}$.

№3 Найдите все значения параметра *a*, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение $a^2 + a\sqrt{2} + 4 + \sin^2 ax = 4\cos x$.

№4 Решить уравнение: $x^8 + \sin^6 x + \cos^8 x = 2$.

№5 Найдите все значения параметра *a*, для каждого из которых имеет единственный корень уравнение $x^2 + (a+7)^2 = |x - 7 - a| + |x + 7 + a|$.

## 2.4 Разработка конспекта занятия в рамках элективного курса

## Конспект занятия по теме: «Понятие функция, свойства и их роль в решении уравнений»

*Класс*: 11

*Тема:* «Понятие функция, свойства и их роль в решении уравнений».

*Тип:* урок обобщения и систематизации знаний.

*Цели урока:*

- повторить и углубить знания учащихся о понятии функция, способах её задания и видах функций;
- закрепить навык нахождения области определения и области значений функции для различных типов функций;
- отработать умение соотносить график функции с её аналитической формулой;
- актуализировать знания о свойствах функций (монотонность, чётность/нечётность, ограниченность);

## Ход урока

*1. Организационный момент.*

Учитель: Добрый день! Сегодня мы начинаем наш элективный курс под названием «Решение уравнений с использованием свойств функций». Это не обычный урок алгебры – это возможность взглянуть на привычные уравнения по-новому и освоить мощные методы, которые помогут вам решать даже сложные задачи быстро и эффективно.

Вы уже многое знаете о функциях: умеете строить графики, находить область определения, анализировать поведение функции. Но задумались ли вы, как эти знания можно применить для решения уравнений? На этом курсе мы научимся использовать свойства функций как инструменты для решения уравнений.

Сегодняшний урок – подготовительный. Мы вспомним всё, что знаем о функциях, их видах и свойствах. Это наш фундамент: чем прочнее он будет, тем легче вам будет осваивать новые методы на следующих занятиях.

Теперь давайте приступим к работе. Начнём с самого базового – вспомним что такое функция. Перед вами – перемешанные фрагменты определений. Ваша задача: собрать из них корректные математические определения понятия «функция».

*(Учитель выводит на экран фрагменты по вариантам)*

Карточка 1. переменной *y*, при которой, переменной y, зависимость, от переменной *x*, соответствует, единственное, значение, каждому значению переменной *x*.

Карточка 2. При котором, соответствует, соответствие *f*, единственный элемент, множества Y, между двумя множествами X и Y, каждому элементу множества X.

*(Ученики собирают определения, затем представляют получившиеся определения)*

Вариант 1 (на основе карточки 1):

Функция $y = f(x)$ – зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.

Вариант 2 (на основе карточки 2):

Функция между множествами X и Y – это соответствие f между двумя множествами X и Y, при котором каждому элементу множества X соответствует единственный элемент множества Y.

Учитель: В чём сходство этих определений?

Ученики: Оба говорят о соответствии, зависимости с условием единственности

Учитель: В чём различие?

Ученики: Первое более «школьное», через переменные $x$ и $y$; второе – более общее через множества.

Учитель: А какое определение шире?

Ученики: Второе, потому что оно не привязано к переменным $x$ и $y$, а работает для любых множеств.

Учитель: Перейдём к следующему заданию. Я вам буду зачитывать утверждения, вы будете говорить является ли данное утверждением функцией или нет.

1. Соответствие между учениками класса и их датами рождения. (Да, у каждого ученика одна дата рождения).

2. Соответствие между углами и их синусами. (Да, каждому углу соответствует один синус).

3. Соответствие между числом и его делителями. (Нет, у большинства чисел несколько делителей).

4. Соответствие между городами России и их населением. (Да, население – одно число на город).

5. Соответствие между фамилиями учеников и их именами (Нет, если есть однофамильцы).

Учитель: Давайте вспомним какие есть способы задания функции?

Ученики: табличный, графический, аналитический

Посмотрите на рисунки и определите какие изображения являются графиками функции, а какие нет. *(графики представлены на слайде)*

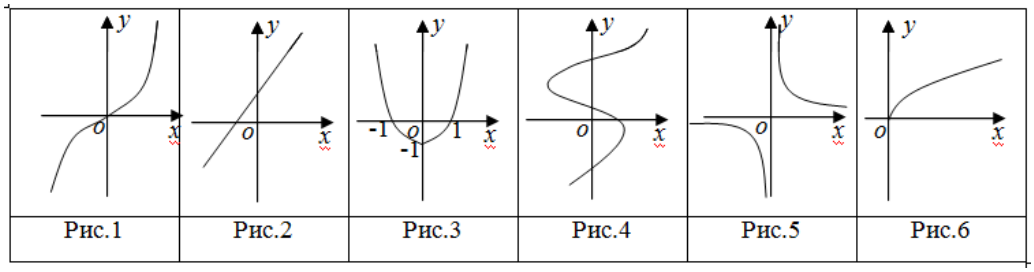


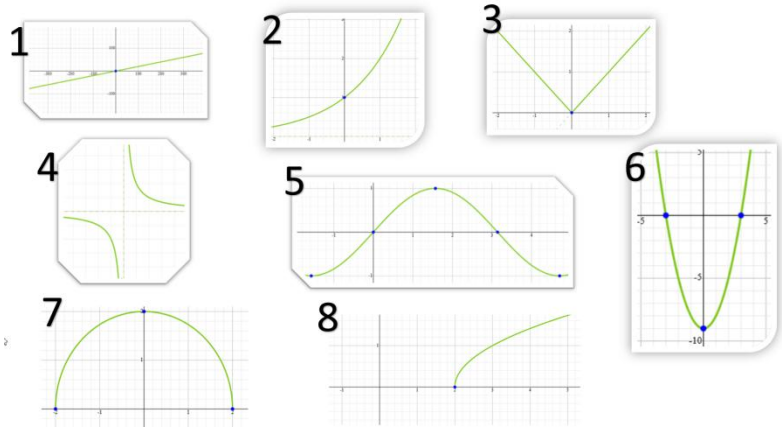

Рис.1 Рис.2 Рис.3 Рис.4 Рис.5 Рис.6

Ученики: Под номером 4 не является графиком функции. Не подходит под определение: каждому значению аргумента ставится в соответствие единственной значение функции. В этом случае не единственное.

Учитель: Мы вспомнили, какие существуют способы задания функций и как отличить график функции от графика, который функцией не является. Теперь давайте устно потренируемся «читать» графики – узнавать по внешнему виду, какой формуле они соответствуют. Перед вами 8 графиков и 8 формул. Ваша задача – установить соответствия между ними. *(графики и формулы представлены на слайде)*.

А) $y = \frac{x}{5}$ Б) $y = x^2 - 9$ В) $y = \frac{2}{x}$ Г) $y = 2^x$ Д) $y = \sin x$ Е) $y = |x|$

Ж) $y = \sqrt{4 - x^2}$ З) $y = \sqrt{x - 2}$.




Ответ: **А** 1 **Б** 6 **В** 4 **Г** 2 **Д** 5 **Е** 3 **Ж** 7 **З** 8.

Учитель: Ребята, перечислите какими свойства может обладать функция?

Ученики: ограниченная область определения функции, область значений функции, чётность, периодичность, монотонность, определение точек пересечения графика функции с осями координат и др.

Учитель: Дайте определение области определения функции.

Ученики: Область определения функции – это множество всех значений, которые может принимать независимая переменная.

Учитель: Хорошо, а теперь потренируемся находить область определения для разных типов функций письменно. *(задание на слайде)*

Найдите область определения:

1) $y = 3x^2-5x+2$

2) $y = \frac{2x-1}{x+4}$

3) $y = \sqrt{5-x}$

4) $y = \frac{\sqrt{x+3}}{x-2}$

5) $y = \sin x$

6) $y = \log_3(x^2-4)$

7) $y = \frac{1}{\log_2(x+1)}$

8) $y = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$

9) $y = \frac{1}{\sqrt{2\sin x-1}}$

10) $y = \sqrt{\log_{0,5}\frac{x-1}{x+2}}$

11) $y = \frac{\sqrt{|x|-3}}{\log_2(x^2-9)}$

12) $y = 2^{\frac{1}{x-2}}$

Учитель: На экране представлены 3 решения. Найдите в них ошибки если есть и исправьте их.

Задание 1. Найдите область определения функции $y = \frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$

Решение: $x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$.

**Правильный ответ:** $\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \neq 3 \end{cases} \rightarrow [1;3) \cup (3;\infty)$.

Задание 2. Найдите область определения функции $y=\log_5(x^2-9)$

Решение: $x^2-9 \geq 0 \rightarrow x \leq -3$ или $x \geq 3$.

**Правильный ответ:** $x^2-9>0 \rightarrow x<-3$ или $x>3$.

Задание 3. Найдите область определения функции $y=\frac{1}{\sqrt{x^2-4x+3}}$

Решение: $x^2-4x+3>0$, корни $x_1=1$, $x_2=3$, ответ $x \in (1;3)$

**Правильный ответ:** $(-\infty: 1) \cup (3;+\infty)$.

Учитель: Теперь поговорим про область значений функции. Кто сможет дать определение данному понятию?

Ученики: Область значений функции – это все значения зависимой переменной.

Учитель: Найдите область значений следующих функций:

1) $y = 3x-7$
2) $y = x^2+4$
3) $y = \sqrt{x+5}$
4) $y = |x-3|+2$
5) $y = \frac{2}{x-1}$
6) $y = 2^x+3$
7) $y = \log_2(x^2+1)$
8) $y = 3\sin x - 2$
9) $y = \sqrt{4-x^2}$
10) $y = \frac{x^2-4}{x^2+1}$

Учитель: Хорошо. А теперь снова выполним упражнение «Найди ошибку». На экране представлены 3 задания с ответом. Найдите в них ошибки, если есть и исправьте их.

1) Область значений функции $y = \sqrt{9-x^2}$ E($y$) = (0;3) *(ошибка)*

**<u>Правильная</u>** область значений: E($y$) = [0; 3]

2) Область значений функции $y = \frac{2x+1}{x-3}$ E($y$) = $(-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. *(верно)*

3) Область значений функции $y = 2^{\sin x}$ E($y$) = (0,5;2) (*ошибка*)

**Правильная** область значений: E($y$) = $[0,5; 2]$.

Учитель: Вспомним ещё одно важное свойство функций – монотонность. Дайте определение возрастающей и убывающей функции на промежутке.

*(Ученики дают определения. Учитель обобщает)*

Учитель: Закрепим определения.

Функция называется возрастающей на некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.

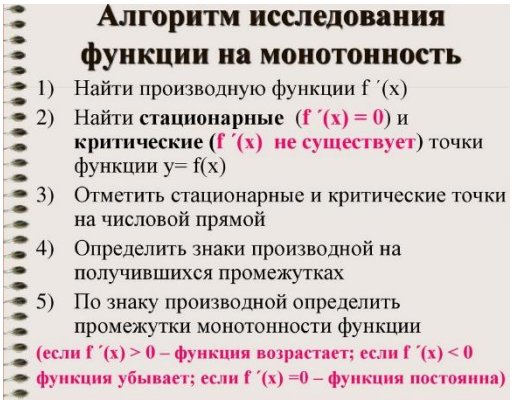
Функция называется убывающей на некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.

Учитель: Монотонность нам помогает решать уравнения и неравенства, находить экстремумы функций, определять количество корней. Следующее задание: проверьте корректность утверждений о монотонности функций на всей области определения. Для каждого случая либо подтвердите правильность утверждения, либо найдите ошибку и дайте верный ответ.

1) $y = 2x+3$ убывает на всей области определения
2) $y = -x+5$ убывает на всей области определения
3) $y = x^2$ возрастает на всей области определения
4) $y = \frac{1}{x}$ возрастает на всей области определения
5) $y = 3^x$ убывает на всей области определения
6) $y = \log_2 x$ возрастает на всей области определения

*Указание*: для квадратичной и дробно-линейной функции укажите промежутки монотонности.

Учитель: Исследовать функцию на монотонность ещё можно с помощью производной. Этот метод более эффективен, особенно для сложных функций. *(на слайде представлен алгоритм исследования функции на монотонность)*




Учитель: А теперь выполняем задание письменно. Исследуйте функции на монотонность, используя производную.

1) $y = x^3-3x^2+2$

2) $y = \frac{x^2-4}{x}$

3) $y = x+\frac{4}{x}$

Учитель: Теперь перейдём к ещё одному важному свойству – чётность/нечётность. Дайте определение чётной и нечётной функции.

Ученики: Функция *f(x)* называется чётной, если для любого *x* из области определения выполняется равенство *f(-x) = f(x)*. Функция *f(x)* называется нечётной, если для любого x из области определения выполняется равенство f*(-x) = -f(x).*

Учитель: График чётной функции симметричен относительно оси ординат (*Oy*). График нечётной функции симметричен относительно начала координат. А если ни одно из условий не выполняется что это за функция?

Ученики: Функция называется функцией общего вида.

Учитель: Устно, определите, какие из функций являются чётными, нечётными или общего вида. Объясните свой ответ.

1) $y = x^2$(чётная)

2) $y = x^3$ (нечётная)

3) $y = |x|$ (чётная)

4) $y = \frac{1}{x}$ (нечётная)

5) $y = x+1$ (общего вида)

6) $y = x^4-2x^2$ (чётная)

7) $y = x^3+x$ (нечётная)

Учитель: Следующее задание делаем письменно. Исследуйте функции на чётность, выполняя все шаги решения:

1) $y = \frac{x^2+1}{x^4-3}$

2) $y = x \cdot \sin x$

3) $y = \cos x + x^2$

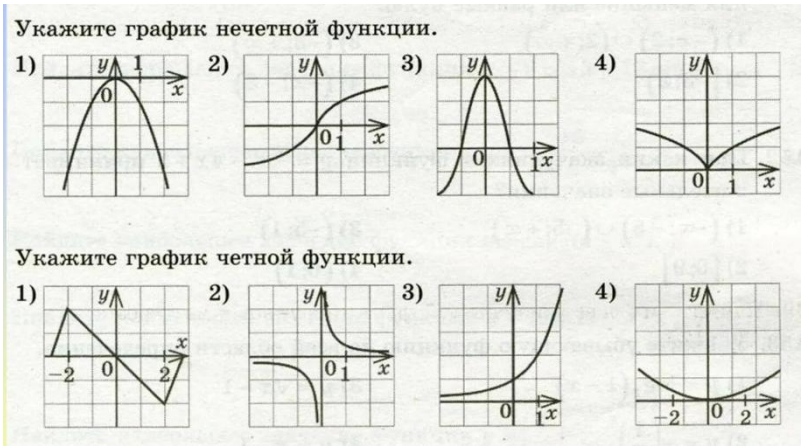
4) $y = \frac{x^3-x}{x^2+2}$

5) $y = \sqrt{x^2+4}$

Указание: *План исследования.*

1. Найдите область определения функции и проверьте её симметричность относительно нуля.
2. Вычислите $f(-x)$.
3. Сравните $f(-x)$ с $f(x)$ и $-f(x)$.
4. Сделайте вывод о чётности функции.
5. Запишите полное обоснование.

Учитель: А теперь работаем устно. Укажите график нечётной/чётной функции. *(слайд)*



Учитель: Сегодня мы вспомнили многое о функция. Теперь обобщим наши знания. Перед вами – несколько утверждений. Ваша задача определить верно утверждение или нет.

Утверждения:

1) Любая функция, определённая на всей числовой прямой, является чётной. (*неверно*)
2) Если функция возрастает на промежутке (0;+∞), то она будет обязательно убывать на (-∞;0). (*неверно*)
3) Область определения функции $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ - все действительные числа. (*неверно*)
4) Функция $y = x^7 - x$ является нечётной. *(верно)*
5) График чётной функции симметричен относительно начала координат *(неверно)*
6) Функция $y = \sin x$ является чётной *(неверно)*
7) Если функция $f(x)$ возрастает на $[a, b]$, то для любых $x_1 < x_2$ из этого промежутка выполняется $f(x_1) < f(x_2)$. *(верно)*
8) Функция $y = |x| + x^2$ является чётной *(верно)*.

Учитель: Подведём итоги занятия. Сегодня мы систематизировали знания о ключевых свойствах функций. Освоение этих понятий – необходимая база для дальнейшего изучения курса. Уже на ближайших занятиях мы используем данные свойства как инструменты для решения уравнений более эффективными методами. Благодарю за продуктивную работу!

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Использование свойств функций при решении уравнений эффективный инструмент, упрощающий поиск решений там, где традиционные методы (раскрытие скобок, разложение на множители и т.д.) громоздки или неэффективны. Задачи с функциональным подходом всё чаще встречаются в сложных заданиях ЕГЭ и на олимпиадах, что подчёркивает актуальность темы. Анализ учебной литературы показал: в школьной программе недостаточно систематизированных материалов по этому методу.

Разработанный элективный курс «Решение уравнений на основе свойств функций» восполняет этот пробел и даёт учителям готовую методическую базу для углублённого изучения темы. В ходе выполнения выпускной квалификационной работы были достигнуты следующие результаты: на основе анализа методической литературы описаны основные способы и методы решения уравнений с опорой на свойства функций, проведён анализ учебной литературы и контрольно-измерительных материалов, позволивший выявить типы заданий, в которых эффективно применяется функциональный подход, разработан элективный курс «Решение уравнений на основе свойств функций», включающий чёткое тематическое планирование, подобран задачный материал разной сложности и составлен конспект вводного занятия в рамках курса, который формирует базу для последующих уроков.

Все поставленные задачи успешно выполнены, а главная цель работы достигнута: создан элективный курс и методические рекомендации к его использованию. Курс позволит повысить математическую культуру школьников, подготовить к решению сложных задач на экзаменах и олимпиадах, а также к дальнейшему изучению точных наук.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. Алгебра. 7 кл : учебник для общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов [и др.]. М. : Просвещение, 2011. 226 с.
2. Алгебра. 8 кл : учебник для общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов [и др.]. М. : Просвещение, 2015. 258 с.
3. Алгебра. 9 кл : учебник для общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов [и др.]. М. : Просвещение, 2015. 289 с.
4. Алгебра и начала математического анализа 11 класс: учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. М. Колягин [и др.]. М. : Просвещение, 2016. 384 с.
5. Алгебра. 7 кл : учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев [и др.]. М. : Просвещение, 2022. 112 с.
6. Алгебра. 8 кл : учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев [и др.]. М. : Просвещение, 2018. 287 с.
7. Алгебра. 9 кл : учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев [и др.]. М. : Просвещение, 2021. 288 с.
8. Башмаков М. И. Уравнения и неравенства. 2-е изд., перераб. М. : Наука, 2000. 96 с.
9. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра и начала математического анализа, 10 – 11 класс. Часть 1. М. : Просвещение, 2009. 402 с.
10. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра. 8 кл. Учебник. М. : Просвещение, 2010. 215 с.
11. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра. 8 кл. Задачник. М. : Просвещение, 2013. 272 с.
12. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра. 9 кл. Задачник. М. : Просвещение, 2015. 223 с.
13. Никольский С. М., Решетников Н. Н., Потапов М. К. Алгебра. 7 кл. М. : Просвещение, 2014. 287 с.

14. Никольский С. М., Решетников Н. Н., Потапов М. К. Алгебра. 8 кл. М. : Просвещение, 2019. 304 с.

15. Никольский С. М., Решетников Н. Н., Потапов М. К. Алгебра. 9 кл. М. : Просвещение, 2023. 336 с.

16. Никольский С. М., Решетников Н. Н., Потапов М. К. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни. М. : Просвещение, 2010, 464 с.

17. Об Утверждении Концепции развития математического образования в Российской Федерации : распоряжение Правительств Российской Федерации от 24 декабря 2013 г. № 2506-р. URL: http://government.ru/docs/all/89895/ Заглавие с экрана (дата обращения: 14.02.2026)

18. Образовательный портал для подготовки к экзаменам «Решу ЕГЭ». URL: https://math-ege.sdamgia.ru. Заглавие с экрана (дата обращения: 15.04.2026)

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ**
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования**
**ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**
**ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: и.о. зав. кафедрой
«16» 02 2026 г.
Паньженский В.И.

# Задание

по ВКР студента Счисляевой Влады Игоревны
(ФИО полностью)

Тема работы «Использование свойств функций при решении уравнений»

Утверждена приказом по университету от «17.02» 2026 г. № 0153 а/о

Срок сдачи студентом законченной работы «01» мая 2026 г.

# КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

| № п/п | Перечень подлежащих разработке вопросов | Сроки выполнения | Примечания |
|---|---|---|---|
| 1. | Изучение и анализ литературы по теме исследования | Ноябрь-декабрь 2025 г. | Выполнено |
| 2. | Определение цели обучения и места использование свойств функций при решении уравнений в школьном курсе математики | Январь 2026 г. | Выполнено |
| 3. | Анализ методики изучения вопросов использования свойств функций при решении уравнений | Февраль-март 2026 г. | Выполнено |
| 4. | Разработка элективного курса по теме: «Использование свойств функций при решении уравнений» | Март-апрель 2026 г. | Выполнено |
| 5. | Разработка задачного материала в рамках элективного курса: «Использование свойств функций при решении уравнений» | Апрель 2026 г. | Выполнено |
| 6. | Разработка конспекта вводного урока элективного курса по теме: «Понятие функция, свойства и их роль в решении уравнений» | Апрель 2026 г. | Выполнено |
| 7. | Оформление библиографического списка | Май 2026 г. | Выполнено |
| 8. | Оформление работы, подготовка презентации и выступления | Май-июнь 2026 г. | Выполнено |

Дата выдачи задания «11» 09 2025 г.

Руководитель _____ Монахова О.А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

_____ Счисляева В.И.
(подпись) (Ф.И.О.)

И.о. ректора Пензенского
государственного университета
Васину С.М.
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Счисляевой Влады
Игоревны

# ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Счисляева Влада Игоревна,
Ф.И.О. студента
студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Использование свойств функций при решении уравнений», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

Счисл
подпись
14.05.26
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 14.05.26
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР Мон Монахова О.А.
подпись И.О.Ф.

# ПРОТОКОЛ

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему:

**«Использование свойств функций при решении уравнений»**

студентки 4 курса Счисляевой Влады Игоревны

направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,

профиль подготовки «Математика»

Руководитель ВКР Монахова Оксана Александровна

АНТИПЛАГИАТ
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАИМСТВОВАНИЙ

Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - http://pnzgu.antiplagiat.ru

## Отчет о проверке

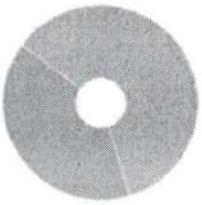
**Автор:** Султанов Адгам Яхиевич

**Имя документа:** ВКР по математике использование свойств функций (1)

**Проверяющий:** Султанов Адгам Яхиевич

**Организация:** Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

### РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения: 39.78%

Оригинальность: 60.22%

ИИ-контент: 14.7%

Цитирования: 0%

Самоцитирования: 0%

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

Проверено: 95.14% текста документа, исключено из проверки: 4.86% текста документа. Разделы и элементы, отключенные пользователем: Библиография, Таблицы

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- **Самоцитирования** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» – это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- **Цитирования** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы, библиография, фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- **Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- **Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- **Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» – это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является всего лишь инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

### ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

**Номер документа:** 388

**Тип документа:** Не указано

**Дата проверки:** 15.05.2026 22:59:59

**Дата корректировки:** 29.05.2026 09:55:48

**Количество страниц:** 56

**Символов в тексте:** 72423

**Слов в тексте:** 10712

**Число предложений:** 2003

29.05.26 — (дата)

(подпись)

О. А. Монахова — (ИОФ руководителя ВКР)

**ОТЗЫВ**
**РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ**
**на тему: «Использование свойств функций при решении уравнений»**
**студентки Счисляевой Влады Игоревны**
**факультета физико-математических и естественных наук направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,**
**профиль подготовки «Математика», гр. 22ФПМ1**

Работа посвящена обучению решению уравнений с использованием функционального подхода в школе. Выбор темы обусловлен тем, что традиционные во многих случаях оказываются слишком громоздкими либо вовсе не приводят к результату, а задачи, требующие применения свойств функций, всё чаще встречаются в ЕГЭ профильного уровня и на математических олимпиадах. При этом в школьной программе недостаточно систематизированных материалов, которые последовательно знакомили бы учащихся с методами использования свойств функций при решении разных типов уравнений.

Выполнен анализ учебной литературы и контрольно-измерительных материалов с целью выявления заданий, в которых возможно применение функционального подхода. Разработан элективный курс «Решение уравнений на основе свойств функций» и методические рекомендаций к его использованию. В рамках курса подобран задачный материал и составлен конспект вводного занятия.

Предложенный курс предоставляет учителям готовую методическую базу для углублённого изучения темы – с чётким тематическим планированием и подборкой задач разной сложности для углублённого изучения темы на уроках и во внеурочной деятельности.

Работа выполнена на высоком методическом уровне, имеет чёткую практическую направленность, соответствует требованиям к ВКР, заслуживает оценки «отлично».

Руководитель ВКР:
Монахова Оксана Александровна,
кафедра «Математическое образование»
Педагогического института
им. В.Г. Белинского, ПГУ, доцент,
доцент, кандидат физико-математических наук _____