МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

Факультет вычислительной техники (наименование)

Кафедра Высшая и прикладная математика (наименование)

Направление подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» (код и наименование)

Профиль Математическое моделирование в экономике и технике (код и наименование)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ДРОБНЫХ РЕОЛОГИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ

Студент 17ВВ1 (группа) — 17.06.21 (подпись, дата) — Пухов А. А. (фамилия, инициалы)

Руководитель к. ф.-м. н., доцент — 17.06.21 (подпись, дата) — Тында А. Н (фамилия, инициалы)

Нормоконтролер к.т.н., доцент — 17.06.21 (подпись, дата) — Тарасов Д. В. (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 04.06.2021г № 10)

Заведующий кафедрой д.ф.-м.н., проф. — 18.06.21 (подпись, дата) — Бойков И. В. (фамилия, инициалы)

Работа защищена с отметкой отл. (протокол заседания ГЭК от 22.06.21г № 10)

Секретарь ГЭК к.пед.н., доцент — 22.06.21г (подпись, дата) — Зверовщикова Н. В. (фамилия, инициалы)

Пенза 2021

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

Факультет

Вычислительной техники
(наименование)

Кафедра

Высшая и прикладная математика
(наименование)

«УТВЕРЖДАЮ»

Заведующий кафедрой

И. В. Бойков
(подпись, инициалы, фамилия)

«30» ноября 2020 г.

ЗАДАНИЕ

на бакалаврскую работу

1. Студент Пухов Андрей Александрович гр. 17ВБ1
(фамилия, имя, отчество)

факультета вычислительной техники

2. Тема работы Численные методы исследования дробных реологических моделей вязкоупругих тел

Тема утверждена приказом по ПГУ № 0903_с от « 30 » ноября 2020 г.

3. Руководитель работы к.ф.-м.н., доцент Тында А. Н.

4. Задание на работу (назначение разработки, исходные данные и т.п.)

1. Провести исследования дробных реологических моделей вязкоупругих тел

2. Рассмотреть дифференциальные уравнения дробного порядка, изучив теорию о существовании и единственности решения.

3. Описать основные методы решения дробных реологических моделей вязкоупругих тел.

4. Построить алгоритм описанного метода «предиктор-корректор» для решения дробных реологических моделей на языке C++

5. При помощи реализованного алгоритма сравнить результаты, оценив погрешность при разных значениях разбиения

5. Перечень подлежащих разработке вопросов

1. Основная теоретическая часть по дробно-дифференциальным уравнениям

1.1. Введение в дифференциальные уравнения дробного порядка

1.2. Существование и единственность решения

1.3. Постановка задачи

2. Основные реологических модели вязкоупругих тел

2.1. Модель Максвелла, Кельвина

2.2. Стандартная модель

2.3. Модель Бэгли-Торвика

2.4. Модель Работнова

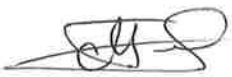
3. Основные численные методы для решения дробных реологических моделей вязкоупругих тел

3.1. Динамических подход

3.2. Схема типа «предиктор-корректор» для численного исследования дробной реологической модели вязкоупругих тел

6. Календарный график по выполнению проекта

Наименование этапов работы	Объем работы	Срок выполнения	Подпись руководителя
1. Постановка задачи по решению дробных реологический моделей. Обзор литературы	20 %	28.05.2021	
2. Исследования основных дробно-дифференциальных моделей и методов, применимых для их решения	25 %	02.06.2021	

3. Описание алгоритма для численного решения	20 %	07.06.2021	
4. Разработка программы	25 %	10.06.2021	
5. Оформление пояснительной записки	10 %	14.06.2021	

Дата выдачи задания « 30 » ноября 2020 г.

Руководитель бакалаврской работы А. Н. Тында
(подпись, инициалы, фамилия)

Задание к исполнению принял студент А. А. Пухов
(подпись, инициалы, фамилия)

Работу к защите допустить
Декан факультета Л. Р. Фионова
(подпись, инициалы, фамилия)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3
1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ 5
1.1. Введение в дифференциальные уравнения дробного порядка 5
1.2. Существование и единственность решения 6
1.3. Постановка задачи 13
1.4. Механика вязкоупругих тел 15
1.5. Дробно-дифференциальная модель Максвелла 17
1.6. Дробно-дифференциальное обобщение модели Кельвина 19
1.7. Стандартная модель и ее обобщение 20
1.8. Модель Бэгли – Торвика 22
1.9. Модель Работнова 23
1.10. Теория Рауса 25
1.11. Динамический подход 27
1.12. Составные механические модели 30
1.13. Течение вязкоупругой среды 33
1.14. Анализ математических моделей вязкоупругих тел с операторами дробного и целочисленного интегро-дифференцирования. 36
2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ 39
2.1. Описание алгоритма 39
2.2. Модельная задача 42
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 45
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 46
ПРИЛОЖЕНИЕ А Реализация схемы типа «предиктор-корректор» для численного исследования дробной реологической модели вязкоупругого тела 47

ВВЕДЕНИЕ

Реология –это наука о поведении различных текучих и пластичных тел при механическом нагружении. Различают некоторое количество реологических моделей. Основной классификацией является отличие ньютоновских и неньютоновских сред. Исходные понятия реологии – ньютоновская жидкость, вязкость которой не зависит от режима деформирований, и идеально упругое тело, в котором в каждый момент времени величина деформации пропорциональна приложенному напряжению.

Вязкость – это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одного слоя жидкости относительно другого. При перемещении одних слоев реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоев. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. Со стороны же слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила. Среды, для которых в рамках поставленной задачи пренебрегают вязкостью – называют идеальными.

Упругие тела и вязкие жидкости существенно различаются своими свойствами при деформации. Упругие деформируемые тела после снятие приложенных нагрузок возвращаются к своему естественному состоянию. В отличие от них несжимаемые вязкие тела совсем не имеют тенденции возвращаться после снятия нагрузки в исходное положение.

Поведение материала, которое объединяет в себе оба эти свойства (упругости, вязкости) называют вязкоупругими. Хотя вязкоупругие материала чувствительны к температуре, последующее изложение ограничивается условиями изотермии и температура входит в уравнения только как параметр.

Идея о распространении интегрирования и дифференцирования на нецелые порядки существует с самого зарождения интегрального и дифференциаль-

ного исчислений. Однако, несмотря на обширную область возможного применения, до недавнего времени этой области уделялось мало внимания. К примеру, дробное исчисление используется в моделях вязкоупругих тел, сплошных сред с памятью, трансформации температуры и влажности в слоях атмосферы, в уравнениях диффузии и в других областях.

Как и большинство других интегро-дифференциальных, дробно-интегральные и дробно-дифференциальные уравнения не решаются точно. В связи с этим появляется необходимость в построении приближенных методов их решения.

Большой вопрос вызывает целесообразность применения дробных реологических моделей. Для этого в выполняемой работе рассмотрим не только распространенные линейные (нелинейные) модели, но и сравним их с целочисленными моделями.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. Введение в дифференциальные уравнения дробного порядка

Существование, единственность, структурная устойчивость решений нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка являются первостепенными вещами, на которые стоит обратить внимание. Дифференциальные уравнения берутся в смысле Римана-Лиувилля, а начальные условия задаются в соответствии с предложением Капуто [1]. Рассмотрим зависимость решения от порядка дифференциального уравнения и от начального условия.

Дифференциальные уравнения могут включать дифференциальные операторы Римана-Лиувилля дробного порядка $q > 0,$ которые принимают вид

$$D_{x_0}^{q} y(x) := \frac{1}{\Gamma(m-q)} \frac{d^m}{dx^m} \int_{x_0}^{x} \frac{y(u)}{(x-u)^{q-m+1}} du, \tag{1}$$

где m – это целое число, находящееся в промежутке $m-1 < q \le m.$

Такие уравнения в последнее время оказались ценным инструментов для моделирования многих физических явлений. Случай, когда $0 < q < 1$ является основным, но в то же время для $q > 1$ также существуют некоторые приложения. Хорошо известно, что оператор D^q имеет m – мерное ядро, поэтому необходимо указать m начальных условий, чтобы получить единственное решение прямой формы дробного дифференциального уравнения:

$$D^q y(x) = f\left(x, y(x)\right) \tag{2}$$

с некоторой заданной функцией f. Здесь и далее будем предполагать, что $x_0 = 0,$ больше не упоминая об этом.

Начальное условие уравнения (2) будет иметь вид:

$$\frac{d^{q-k}}{d_{x^{q-k}}} y(x)\Big|_{x=0+} = b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

с заданным значением b_k.

Таким образом, необходимо указать некоторые дробные производные функции y. В практических приложениях эти значения часто недоступны, и может быть неясен их физический смысл. Поэтому Капуто предложил включить классические производные (целочисленного порядка) функции y. Так как они обычно используются в задачах Коши с уравнениями целого порядка в уравнение дробного порядка, дающее:

$$D^q\left(y - T_{m-1}[y]\right)(x) = f\left(x, y(x)\right), \tag{3}$$

где $T_{m-1}[y]-$ многочлен Тейлора порядка $(m-1)$ для функции y с центром в нуле. Затем начальное условие можно задать в классическом виде

$$y^{(k)}(0) = y_0^{(k)}, \quad k = 0,1,...,m-1. \tag{4}$$

Именно данная проблема, описанная в уравнениях (3) и (4), путем использования методов преобразования Лапласа, имеет единственное решение при некоторых сильных условиях (в частности, линейность дифференциального уравнения). Основная цель – дать соответствующий результат для нелинейного случая, используя как можно меньше вычислений. Вопрос о том, как изменяется решение y при изменении порядка q, начальных условий, а также исходной функции f.

1.2. Существование и единственность решения

Рассматривая вопрос о существование и единственности решения, можно представить следующие результаты, которые очень похожи на соответствующие классические теоремы, известные в случае уравнений первого порядка. В явном виде будет обсуждаться только скалярная настройка, обобщение на векторные функции будет являться простым.

Теорема 1.1 (Существование). Предположим, что $D := \left[0, \chi^*\right] \times \left[y_0^{(0)} - \alpha, y_0^{(0)} + \alpha\right]$, где $\chi^* > 0,\ \alpha > 0$ и пусть функция $f : D \to \mathbb{R} -$ непрерывна. Вместе с тем определитель имеет значение

$\chi := \min\left\{\chi^*, \left(\alpha\Gamma(q+1)/\|f\|_\infty\right)^{1/q}\right\}$. Тогда существует функция $y:[0,\chi]\to\mathbb{R}$, которая будет решать задачу Коши (3) и (4).

Теорема 1.2 (Единственность). Предположим, что $D := \left[0,\chi^*\right]\times\left[y_0^{(0)}-\alpha, y_0^{(0)}+\alpha\right]$, где $\chi^*>0$, $\alpha>0$ и пусть функция $f:D\to\mathbb{R}$ – ограничена на D и выполняет условие Липшица относительно второй переменной $\left|f(x,y)-f(x,z)\right|\le L|y-z|$ с некоторой константой $L>0$, не зависящей от x, y, z. Тогда, определяя χ как в теореме 1.1, будет существовать не более одной функции $y:[0,\chi]\to\mathbb{R}$, решающую задачу Коши (3) и (4).

Лемма 1.1 Если функция непрерывна, то задача Коши эквивалента нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$y(x)=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{x^k}{k!}y^{(k)}(0)+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^x (x-z)^{q-1} f\left(z,y(z)\right)dz \qquad (5)$$

где $m-1<q<m$. Другими словами, каждое решения уравнения Вольтерра (5) также является решением исходной задачи Коши.

Уравнение (5) является слабосингулярным, если $0<q<1$ и регулярным, если $q\ge 1$. Таким образом, в последнем случае утверждения двух теорем непосредственно следуют из классических результатов теории Вольтерра. Однако в первом случае мы должны дать явные доказательства.

Доказательство теоремы единственности будет основано на следующем обобщении теоремы Банаха о неподвижной точке.

Теорема 1.3 Пусть U – непустое замкнутое подмножество банахова пространства E, и пусть существует такое $a_n>0$ для $\forall n$, что $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится. Более того, пусть отображение $A:U\to U$ удовлетворяет неравенству

$$\left\|A^n u - A^n \upsilon\right\| \le a_n \|u-\upsilon\|$$

для каждого $n\in\mathbb{N}$, u, $\upsilon\in U$.

Тогда A имеет однозначно определенную фиксированную точку u^*. Кроме того, для любого $u_0 \in U$ последовательность $\left(A^n u_0\right)_{n=1}^{\infty}$ сходится к этой фиксированной точке u^*.

Доказательство теоремы 1.2.

Рассмотрим случай, когда $0 < q < 1$. В этой ситуации уравнение Вольтерра (5) сводится к

$$y(x) = y_0^{(0)} + \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^x (x-z)^{q-1} f\left(z, y(z)\right) dz.$$

Таким образом введено множество $U := \left\{ y \in C[0,\chi] : \left\| y - y_0^{(0)} \right\|_{\infty} \le \alpha \right\}$. Очевидно, что это замкнутое подмножество банахова пространства всех непрерывных функций на $[0,\chi]$, снабженное нормой Чебышева. Так как постоянная функция $y \equiv y_0^{(0)}$ находится в U, то можно сделать вывод о том, что $U-$ непустое подмножество. На U определим оператор A с помощью

$$(Ay)(x) := y_0^{(0)} + \int_0^x (x-z)^{q-1} f\left(z, y(z)\right) dz. \qquad (6)$$

Используя этот оператор, рассматриваемое уравнение можно определить следующим образом:

$$y = Ay,$$

и для доказательства уникальности, должны показать, что оператор A имеет уникальную фиксированную точку. Для этого исследуем свойства оператора A.

Первым делом отметим, что для $0 \le x_1 \le x_2 \le \chi$

$$\left|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)\right| = \frac{1}{\Gamma(q)} \left| \int_0^{x_1} (x_1 - z)^{q-1} f\left(z, y(z)\right) dz - \int_{x_0}^{x_2} (x_2 - z)^{q-1} f\left(z, y(z)\right) dz \right| =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(q)} \left| \int_0^{x_1} \left((x_1 - z)^{q-1} - (x_2 - z)^{q-1} \right) f\left(z, y(z)\right) dz + \int_{x_1}^{x_2} (x_2 - z)^{q-1} f\left(z, y(z)\right) dz \right| \le$$

$$\le \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(q)}\left|\int_0^{x_1}\left((x_1-z)^{q-1}-(x_2-z)^{q-1}\right)dz+\int_{x_1}^{x_2}(x_2-z)^{q-1}\,dz\right|=$$

$$=\frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(q+1)}\left(2(x_2-x_1)^q+x_1^q-x_2^q\right),$$

доказывая, что Ay – непрерывная функция. Более того, при $y\in U$ и $x\in[0,\chi]$ можем найти:

$$\left|(Ay)(x)-y_0^{(0)}\right|=\frac{1}{\Gamma(q)}\left|\int_0^x(x-z)^{q-1}\,f\left(z,y(z)\right)dz\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\Gamma(q+1)}\|f\|_\infty x^q\le\frac{1}{\Gamma(q+1)}\|f\|_\infty\chi^q\le\frac{1}{\Gamma(q+1)}\|f\|_\infty\frac{\alpha\Gamma(q+1)}{\|f\|_\infty}=\alpha.$$

Таким образом было показано, что $Ay\in U$, если $y\in U$, то есть A отображает множество U на себя.

Следующий шаг – доказать, что для каждого $n\in\mathbb{N}_0$ и каждого $x\in[0,\chi]$, будет верным утверждение:

$$\left\|A^n y-A^n\tilde{y}\right\|_{L_\infty[0,x]}\le\frac{\left(Lx^q\right)^n}{\Gamma(1+qn)}\|y-\tilde{y}\|_{L_\infty[0,x]}. \tag{7}$$

Это можно увидеть с помощью индукции. В случае, когда $n=0,$ утверждение тривиально верно. Для шага индукции $n-1\to n$ запишем:

$$\left\|A^n y-A^n\tilde{y}\right\|_{L_\infty[0,x]}=\left\|A\left(A^{n-1}y\right)-A\left(A^{n-1}\tilde{y}\right)\right\|_{L_\infty[0,x]}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(q)}\sup_{0\le\omega\le x}\left|\int_0^\omega(\omega-z)^{q-1}\left[\,f\left(z,A^{n-1}y(z)\right)-f\left(z,A^{n-1}\tilde{y}(z)\right)\right]dz\right|.$$

На следующих шагах используем предположение Липшица относительно f и предположение индукции, тем самым найдем:

$$\left\|A^n y-A^n\tilde{y}\right\|_{L_\infty[0,x]}=\frac{L}{\Gamma(q)}\sup_{0\le\omega\le x}\left|\int_0^\omega(\omega-z)^{q-1}\left|A^{n-1}y(z)-A^{n-1}\tilde{y}(z)\right|dz\right|\le$$

$$\le \frac{L}{\Gamma(q)}\int_0^x (x-z)^{q-1} \sup_{0\le\omega\le z}\left|A^{n-1}y(\omega)-A^{n-1}\tilde{y}(\omega)\right|dz \le$$

$$\le \frac{L^n}{\Gamma(q)\Gamma\left(1+q(n-1)\right)}\int_0^x (x-z)^{q-1} z^{q(n-1)} \sup_{0\le\omega\le z}\left|y(\omega)-\tilde{y}(\omega)\right|dz \le$$

$$\le \frac{L^n}{\Gamma(q)\Gamma\left(1+q(n-1)\right)} \sup_{0\le\omega\le z}\left|y(\omega)-\tilde{y}(\omega)\right|\int_0^x (x-z)^{q-1} z^{q(n-1)}dz =$$

$$= \frac{L^n}{\Gamma(q)\Gamma\left(1+q(n-1)\right)}\left\|y-\tilde{y}\right\|_{L_\infty[0,x]} \frac{\Gamma(q)\Gamma\left(1+q(n-1)\right)}{\Gamma(1+n)} x^{qn},$$

что и является нашим желаемым результатом (7). Как следствие, мы находим, что Чебышевские нормы на нашем фундаментальном интервале $[0,\chi]$,

$$\left\|A^n y - A^n \tilde{y}\right\|_\infty \le \frac{\left(L\chi^q\right)^n}{\Gamma(1+qn)}\left\|y-\tilde{y}\right\|_\infty .$$

Теперь мы показали, что оператор A удовлетворяет предположениям теоремы 1.3, где $\alpha_n = \left(L\chi^q\right)^n / \Gamma(1+qn)$. Чтобы применить эту теорему, остается только проверить, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ сходится. Это, однако, хорошо известный результат. Пределом

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(L\chi^q\right)^n}{\Gamma(1+qn)} = E_q\left(L\chi^q\right)$$

является функция Миттаг – Леффлера порядка q, вычисляемая на $L\chi^q$. Поэтому мы можем применить теорему о неподвижной точке и вывести единственность решения нашего дифференциального уравнения.

Замечание 1.1 Обратим внимание, что теорема 1.3 не только утверждает, что решение единственно, но и фактически дает нам средство определения этого решения с помощью итерационного процесса типа Пикара.

Замечание 1.2 Без предположения Липшица относительно f решение не

обязательно должно быть единственным. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим простой одномерный пример

$$D^q y = y^k$$

с начальным условием $y(0)=0.$ Рассмотрим промежуток $0<k<1,$ где функция правой части дифференциального уравнения непрерывна, но условие Липшица нарушается. Очевидно, что нулевая функция является решением этой задачи с начальным значением. Однако, устанавливая функцию f должны помнить, что

$$D^q p_j(x) = \frac{\Gamma(j+1)}{\Gamma(j+1-q)} p_{j-q}(x).$$

Таким образом, функция $y(x) = \sqrt[k]{\Gamma(j+1)/\Gamma(j+1-q)}x^j$, $\left(j = q/(1-k)\right)$ также решает проблему, доказывая, что решение не является уникальным.

Доказательство теоремы 1.1.

Начнем с аргументов, аналогичных аргументам предыдущего доказательства. В частности, мы использует тот же оператор A, определенный в (6) и напомним, что он отображает непустое, выпуклое и замкнутое множество

$$U := \left\{ y \in C[0,\chi] : \left\| y - y_0^{(0)} \right\|_\infty \le \alpha \right\}.$$

Следующим шагом докажем, что оператор A является непрерывным оператором. Более сильный результат, уравнение (6), получен выше, но в этом выводе мы использовали свойство Липшица, которое здесь не выполнятся. Поэтому поступим иначе и отметим, что так как функция f является непрерывной на компактном множестве D, она равномерно непрерывна и там. Таким образом, при произвольном $e>0$ мы можем найти $\delta>0$ такое, что

$|f(x,y)-f(x,z)| < \frac{e}{\chi^q}\Gamma(q+1)$ каждый раз, когда $|y-z|<\delta.$

Пусть $y,\tilde{y}\in U$ с условием, что $\|y-\tilde{y}\|<\delta.$ Тогда, ввиду предыдущего выражения, получим

$$\left| f(x,y(x)) - f(x,\tilde{y}(x)) \right| < \frac{e}{\chi^q}\Gamma(q+1)$$

для $\forall x \in [0, \chi]$. Следовательно

$$\left|(Ay)(x) - (A\tilde{y})(x)\right| = \frac{1}{\Gamma(q)}\left|\int_0^x (x-z)^{q-1}\left(f\left(z, y(z)\right) - f\left(z, \tilde{y}(z)\right)\right)\right| \leq$$

$$\leq \frac{\Gamma(q+1)e}{\chi^q \Gamma(q)}\int_0^x (x-z)^{q-1} dz = \frac{ex^q}{\chi^q} \leq e,$$

доказывая непрерывность оператора A.

Теперь рассмотрим набор функций

$$A(U) := \{Ay : y \in U\}.$$

Для $z \in A(U)$ мы находишь, что для $x \in [0, \chi]$,

$$\left|z(x)\right| = \left|(Ay)(x)\right| \leq \left|y_0^{(0)}\right| + \frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^x (x-z)^{q-1}\left|f\left(z, y(z)\right)dz\right| \leq \left|y_0^{(0)}\right| + \frac{1}{\Gamma(q+1)}\|f\|_\infty \chi^q,$$

это означает, что $A(U)$ ограничено в точечном смысле. Более того, для $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \chi$, мы обнаружили в доказательстве теоремы 1.2, что

$$\left|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)\right| \leq \frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(q+1)}\left(x_1^q - x_2^q + 2(x_2 - x_1)^q\right) \leq 2\frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(q+1)}(x_2 - x_1)^q.$$

Таким образом, если $|x_2 - x_1| < \delta$, то

$$\left|(Ay)(x_1) - (Ay)(x_2)\right| \leq 2\frac{\|f\|_\infty}{\Gamma(q+1)}\delta^q.$$

Заметив, что выражение правой части не зависит от y, отталкиваясь от теории линейности, можно определить, что множество $A(U)$ равномерно непрерывно. Тогда теорема Арзела – Асколи приводит к тому, что каждая последовательность функций из $A(U)$ имеет постоянную равномерно сходящуюся подпоследовательность, и поэтому оператор $A(U)$ является относительно компактным. Затем теорема Шаудера о неподвижной точке утверждает, что A имеет неподвижную точку. По построению фиксированная точка A является решением задачи Коши.

1.3. Постановка задачи

В числе первых работ, в которых использовался аппарат дробных производных для описания вязкоупругости, следует указать работу А. Н. Герасимова [2], начинающуюся со ссылки на уравнение Больцмана.

Путем экспериментальных исследований было показано, что частный вид уравнения Больцмана, соответствующего только наследственной части напряжения, заслуживает отдельного внимания

$$\sigma(t)=\int_0^{\infty} G(\tau)\varepsilon(t-\tau)d\tau.$$

Большой интерес представляет и тот случай, когда напряжение $\sigma(t)$ зависит от всех предшествующих, надлежащим образом взвешенных значений скоростей деформации, но не самой деформации. Для данных процессов деформирования можно выразить зависимость между напряжением $\sigma(t)$ и ε

$$\sigma(t)=\int_0^{\infty} K(\tau)\dot{\varepsilon}(t-\tau)d\tau, \qquad (8)$$

если ограничиваться только наследственной частью напряжения.

Именно при помощи уравнения (8) можно наглядно представить существующую связь между напряжением и деформацией. Для этого достаточно интерпретировать ядро $K(t)$ как реакцию (отклик) напряжения в момент времени t на ступенчатую деформацию единичной величины $l(t-\tau)$ в момент времени $t-\tau$. Интегральная сумма получается путем плавного приближения зависимости $\varepsilon(t)$ ступенчатой функцией, которая задана скачкообразными приращениями $\Delta\varepsilon(t_j)$ в момент времени t_j, имея в виду принцип линейности

$$\sigma(t)=\sum_{t_j} K(t-t_j)\Delta\varepsilon(t_j),$$

при $\Delta t_j \to 0$ интегральная сумма, описывающая состояние напряжения, будет принимать вид:

$$\sigma(t)=\int_0^t K(t-t')d\varepsilon(t')=\int_0^t K(\tau)\dot{\varepsilon}(t-\tau)d\tau.$$

Введем понятие наследственной функции для некоторых материалов, например, волокнистая структура. Ее общий вид:

$$K(\tau)=\frac{A}{\tau^{\alpha}},$$

где постоянная $A>0$ и α находятся между нулем и единицей. Добавив к этому

$$A=\frac{k_{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},$$

где постоянная $k_{\alpha}>0$ зависит от свойств вещества и Γ есть эйлеров интеграл второго рода, получим

$$\sigma(t)=\frac{k_{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty}\frac{\dot{\varepsilon}(t-\tau)}{\tau^{\alpha}}=k_{\alpha}|_0^{\alpha},\ \ 0<\alpha<1. \qquad (9)$$

Если $\alpha=0,$ то полученное линейное соотношение между ε и τ (9) обращается в закон Гука, если $\alpha=1,$ то в закон Ньютона для внутреннего трения.

Таким образом, в определенном отношении вязкоупругая среда занимает промежуточное положение между вязкой неупругой и абсолютно упругой невязкой материями,

$$\sigma(t)=\begin{cases}E\varepsilon(t), & (\textit{закон Гука});\\ \eta d\varepsilon(t)/dt, & (\textit{закон Ньютона}),\end{cases}$$

и формула

$$\sigma(t)=k_{\alpha}|_0^{\alpha}\ D_t\varepsilon(t)$$

может рассматриваться как один из возможных способов интерполяции между ними. При $\alpha=1$ будет получен закон Ньютона, а при $\alpha=0$ - закон Гука. Решающую роль играет то, что степенной закон Нуттинга связан с решением уравнения с дробной производной, поэтому это не единственный способ интерполяции.

Сам дробно-дифференциальный подход был успешно применен для описания реологического поведения таких тел, как полиуретан, полиизобутилен.

Особое внимание будет уделено дробно-дифференциальным моделям вязкоупругости.

1.4. Механика вязкоупругих тел

Вязкоупругие материалы обладают способностью запоминать часть энергии, которая была затрачена на их деформацию. После этого остальная часть энергии попросту рассеивается.

Для механических цепей свойственны два типовых линейных элемента: пружина и демпфер, именно они рассматриваются в теории упругости [3].

Линейный закон, которому подчиняется деформация пружины, выглядит следующим образом:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E \frac{d^0}{dt^0} \varepsilon,$$

где σ – усилие, приложенное к пружине, ε – деформация, вызванная приложенным усилием, E – коэффициент жесткости пружины.

Демпфер описывается уравнением связи усилия с первой производной деформации или скоростью перемещения поршня:

$$\sigma = \eta \cdot \dot{\varepsilon} = \eta \frac{d^1}{dt^1} \varepsilon,$$

Реологический элемент вводится для вязкоупругих систем. Для него связь между деформацией и усилием описывается дробной производной:

$$\sigma = p \frac{d^\nu}{dt_\nu} \varepsilon.$$

Наиболее распространенной на практике – дробная 4-параметрическая модель реологического элемента. Её математическая модель имеет вид:

$$\sigma + \frac{p}{E_1 + E_2} \cdot \frac{d^\nu \sigma}{dt^\nu} = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \cdot \varepsilon + \frac{p E_2}{E_1 + E_2} \cdot \frac{d^\nu \varepsilon}{dt^\nu}.$$

Данная модель может быть представлена также в следующем виде:

$$\sigma + a \cdot \frac{d^{\nu}\sigma}{dt^{\nu}} = b \cdot \varepsilon + c \cdot \frac{d^{\nu}\varepsilon}{dt^{\nu}}.$$

Таким образом можно заметить, что этот элемент является обобщением пружины и демпфера.

Если рассматривать механику сплошной среды в теории вязкоупругости, то здесь наиболее характерным является применение дробного исчисления.

Существует ряд элементарных моделей механики сплошной среды, которые описывают связи между усилиями и деформациями. Имея в виду обозначения усилия $\sigma(t)$ и деформации $\varepsilon(t)$, эти математические модели будут иметь вид:

1) $\sigma(t) = m \cdot \varepsilon(t)$ – модель Гука: усилие пропорционально деформации;

2) $\sigma(t) = b \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$ – модель Ньютона: усилие пропорционально первой производной деформации;

3) $\sigma(t) = m \cdot \varepsilon(t) + b \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$ – модель Фойгта: усилие является линейной комбинацией деформации и первой производной деформации;

4) $\sigma(t) + a \cdot \frac{d\sigma(t)}{dt} = b \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt}$ – модель Максвелла: линейная комбинация усилия и первой производной усилия пропорциональна первой производной деформации;

5) $\left[1 + a \cdot \frac{d}{dt}\right]\sigma(t) = \left[m + b \cdot \frac{d}{dt}\right]\varepsilon(t)$ – модель Зенера: обобщает приведенные выше модели. Механические модели состоят их пружин, демпферов и их различных соединений (последовательных, параллельных, последовательно-параллельных) (рис. 1).

На основе этих моделей формируется вид общего дифференциального уравнения вязкоупругой системы, которое носит называние операторного уравнения механической системы (16).

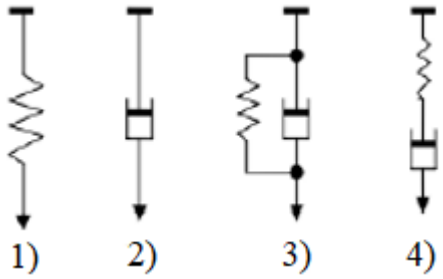


Рисунок 1 – Условные обозначения аналоговых механических моделей

$$\left[1+\sum_{k=1}^{p} a_k \frac{d^{\beta_k}}{dt^{\beta_k}}\right]\sigma(t)=\left[m+\sum_{k=1}^{q} b_k \frac{d^{k}}{dt^{k}}\right]\varepsilon(t). \qquad (10)$$

Обобщение уравнения (10) на дробные порядки интегро-дифференциальных операторов имеет вид:

$$\left[1+\sum_{k=1}^{p} a_k \frac{d^{\beta_k}}{dt^{\beta_k}}\right]\sigma(t)=\left[m+\sum_{k=1}^{q} b_k \frac{d^{\beta_k}}{dt^{\beta_k}}\right]\varepsilon(t),\ \beta_k=k+\beta-1,\ 0<\beta\le 1. \qquad (11)$$

В основе уравнения (11) можно увидеть элементарные дробные версии $(p=q=1)$ моделей Гука $(a=b=0)$, Ньютона $(a=m=0)$, Фойгта $(a=0)$ и Максвелла $(m=0)$.

Еще одной важной задачей механики сплошных сред, решение которых состоит в дробном исчислении, является проблема Бассета – движение сферы, которая погружена в вязкую жидкость. В безразмерной форме она сводится к дифференциальному уравнению дробного порядка:

$$\frac{dV(t)}{dt}+\beta^{a}\cdot\frac{d^{a}V(t)}{dt^{a}}+V(t)=1,$$
$$\beta^{a}>0,\ 0<A<1,\ V(0)=V_0.$$

1.5. Дробно-дифференциальная модель Максвелла

Со времен Максвелла и Кельвина важную роль в реологии играют механические модели, которые включают в себя два основных тела: упругий элемент (пружина) и вязкий элемент (демпфера).

Эти элементы, проводя аналогию с сопротивлениями, емкостями и индуктивностями в электрических цепях, можно комбинировать в различном порядке, тем самым получив различные схемы вязкоупругостей [4], которые приводят к различным видам дифференциальных уравнений.

Именно Максвеллом были впервые объединены в одно конститутивное уравнение вязкоупругой среды закон Гука для упругого тела и закон Ньютона для вязкой жидкости,

$$\sigma(t)+\tau D_t\sigma(t)=E\tau D_t\varepsilon(t),\ \tau>0, \tag{12}$$

положившее начало современной феноменологии вязкоупругости. Уравнение (12) описывает поведение системы, которая состоит из последовательно соединенных упругого (с модулем упругости E) и вязкого (с вязкостью $\eta=E\tau$) элементов (пружины и демпфера) (рис. 2). Обобщение этой модели на дробно-дифференциальный тип достигается заменами

$$\tau D_t\sigma\to\tau_0^{\alpha}D_t^{\alpha}\sigma(t),\ \ \tau D_t\varepsilon\to\tau_0^{\beta}D_t^{\beta}\varepsilon(t);\ \ 0<\alpha,\beta<1:$$

$$\sigma(t)+\tau_0^{\alpha}D_t^{\alpha}\sigma(t)=E\tau_0^{\beta}D_t^{\beta}\varepsilon(t). \tag{13}$$

Решение уравнения (13) относительно напряжения $\sigma(t)$ при заданной зависимости деформации $\varepsilon(t)$ от времени имеет вид:

$$\sigma(t)=cG(t)+E\tau^{\beta}\int_0^t G(t-z)_0\,D_z^{\beta}\varepsilon(z)dz,$$

где

$$G(t)=\left(t^{\alpha-1}/\tau^{\alpha}\right)E_{\alpha,\alpha}\left(-t^{\alpha}/\tau^{\alpha}\right).$$

При $\alpha=\beta=1$:

$$G(t)=(1/\tau)E_{1,1}(-t/\tau)=(1/\tau)e^{-t/\tau}. \tag{14}$$

Если деформация $\varepsilon(t)$ в момент времени $t=0$ скачкообразно меняется от нуля до величины ε_0 и после этого остается постоянной, функция Грина (14) дает обычную релаксацию напряжения:

$$\sigma(t) = \varepsilon_0 E e^{-t/\tau}.$$

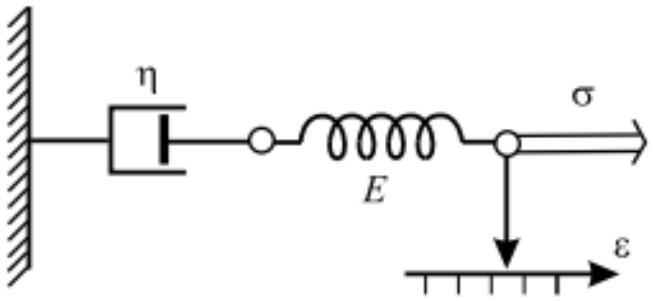


Рисунок 2 – Модель Максвелла

1.6. Дробно-дифференциальное обобщение модели Кельвина

Модель Кельвина, основанная на параллельном соединении пружины и демпфера (рис. 3), является не менее популярной классической моделью на ровне с дробно-дифференциальной моделью Максвелла.

Конститутивное уравнение модели Кельвина, описывающее деформацию вязкоупругого тела, имеет вид:

$$\sigma(t) = E\left[\varepsilon(t) + \tau D_t \varepsilon(t)\right]$$

и обобщается на дробно-дифференциальную модель образом, представленным формулой (15)

$$\sigma(t) = E\left[\tau^{\alpha}{}_0 D_t^{\alpha} \varepsilon(t) + \tau^{\beta}{}_0 D_t^{\beta} \varepsilon(t)\right], \quad 0 \le \alpha < \beta \le 1. \qquad (15)$$

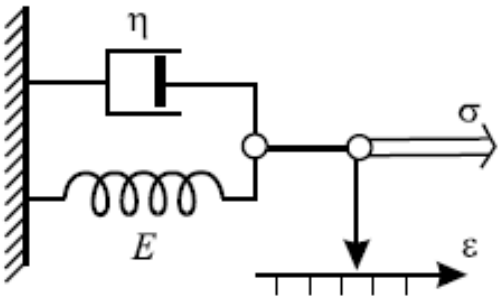


Рисунок 3 – Модель Кельвина

Численное частное решение уравнения (15) будет иметь интегральный вид:

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{E\tau^{\beta}}\int_0^t (t-z)^{\beta-1}E_{\beta-\alpha,\beta}\left[-\tau^{\alpha-\beta}(t-z)^{\beta-\alpha}\right]\sigma(z)dz. \qquad (16)$$

Подставив в уравнение (16) значения $\alpha=0,\ \beta=1$ будет осуществлен возврат в рамки стандартной модели Кельвина, где скачкообразно возникшее напряжение σ_0 (в момент времени $t=0$) вызовет деформацию

$$\varepsilon(t)=\frac{\sigma_0}{E}\left(1-e^{-t/\tau}\right),$$

которое экспоненциально приближается к гуковскому пределу σ_0 / E, при $t\to\infty$.

1.7. Стандартная модель и ее обобщение

В схеме Зенера сочетаются качества обеих описанных выше классических моделей. Ее конститутивное уравнение имеет симметричный относительно деформации и напряжения вид:

$$\sigma(t)+\tau D_t\sigma(t)=E\left[\varepsilon(t)+\theta D_t\varepsilon(t)\right],$$

носящее название стандартной трех-параметрической модели. Ее дробно-дифференциальное обобщение будет описываться конститутивным уравнением с дробными производными одинакового порядка α (четырех-параметрическая модель):

$$\sigma(t)+\tau^{\alpha}{}_0D_t^{\alpha}\sigma(t)=E\left[\varepsilon(t)+\theta^{\alpha}{}_0D_t^{\alpha}\varepsilon(t)\right],\ \ 0<\alpha<1. \qquad (17)$$

При постоянной деформации и постоянном напряжении параметры θ и τ интерпретируются как времена температурных релаксаций. E – изометрический модуль.

Зенер дал термодинамическое обоснование стандартной модели в рамках теории термоупругости твердых тел [5]. Два основных уравнения связывают отклонение температуры δT от ее равновесного значения с напряжением и деформацией. Первое из них связано с тепловым расширением тела

$$\varepsilon=\frac{1}{E}\sigma+\lambda\delta T, \qquad (18)$$

где λ – линейный коэффициент теплового расширения. Основной целью второго же уравнения является отображения двух причин изменения температуры: термодиффузию (температурная релаксация):

$$\left(\frac{d\delta T}{dt}\right)_{diff} = -\frac{1}{\tau_\varepsilon}\delta T, \tag{19}$$

и адиабатическое изменение деформации

$$\left(\frac{d\delta T}{dt}\right)_{adiab} = -\gamma\frac{d\varepsilon}{dt},$$

где $\gamma = \partial t / \partial \varepsilon$. В результате получаем:

$$\left(\frac{d\delta T}{dt}\right) = \left(\frac{d\delta T}{dt}\right)_{diff} + \left(\frac{d\delta T}{dt}\right)_{adiab} = -\frac{1}{\tau_\varepsilon}\delta T - \gamma\frac{d\varepsilon}{dt}. \tag{20}$$

Полагая $1+\lambda\gamma = \tau_\sigma / \tau_\varepsilon$ и исключая из уравнений (18) и (19) член с изменением температуры δT, Зенер пришел к уравнению (17).

Заменяя уравнение (19) дробно-дифференциальным уравнением субдиффузионной релаксации

$${}_0D_t^\alpha \delta T = -\frac{1}{\tau^\alpha}\delta T, \;\; 0<\alpha<1,$$

Ф. Майнарди получил вместо (20) уравнение

$${}_0D_t^\alpha \delta T = -\frac{1}{\tau^\alpha}\delta T - \gamma {}_0D_t^\alpha \varepsilon,$$

что привело к дробно-дифференциальному обобщению стандартной модели (17), в котором использовано соотношение

$$1+\lambda\gamma = \left(\theta / \tau\right)^\alpha.$$

Впервые уравнение типа (17) было предложено Капуто и Майндарди в 1971 году с использованием дробных производных Капуто, как эмпирическая модель, позволяющая более точно воспроизвести данные эксперименты.

1.8. Модель Бэгли – Торвика

Бэгли и Торвик, продолжив развитие дробно-дифференциальной феноменологии, взяли уравнение с различными порядками дробных производных деформации и напряжения:

$$\sigma(t)+\tau_0^{\beta}D_t^{\beta}\sigma(t)=E\left[\varepsilon(t)+\theta_0^{\alpha}D_t^{\alpha}\varepsilon(t)\right].$$

Далее необходимо применить преобразование Лапласа с мнимым параметром $\lambda=i\omega$:

$$\hat{f}(i\omega)=\int_0^{\infty}e^{-i\omega t}f(t)dt.$$

В результате преобразования получим:

$$\hat{\sigma}(i\omega)=\hat{E}(i\omega)\hat{\varepsilon}(i\omega),$$

где $\hat{E}(i\omega)=\dfrac{1+(i\omega)^{\alpha}}{1+(i\omega\tau)^{\beta}}E$ – это комплексный модуль. Материл будет вести себя как абсолютно упругая, идеальная резина при очень низких частотах $\hat{E}(i\omega)\to E.$ Если же частоты трансформанта высоки $\hat{E}(i\omega)\sim\left(\theta^{\alpha}/\tau^{\beta}\right)(i\omega)^{\alpha-\beta}$, то тот же самых материл будет вести себя подобно стеклу.

В рассматриваемой модели параметры должны быть вещественными, но в то же время они могут быть и произвольными: вычисления должны давать неотрицательную внутреннюю работу и неотрицательную скорость диссипации энергии. Для установления термодинамических ограничениях на параметры модели Бэгли и Торвик рассмотрели синусоидальную деформацию

$$\varepsilon(t)=\sin(\omega_0 t),$$

которая производит напряжение

$$\sigma(t)=A\sin(\omega_0 t)+B\cos(\omega_0 t).$$

Внутренняя работа, совершаемая в единице объема в единицу времени, дается выражением:

$$\sigma(t)\dot{\varepsilon}(t)=A\omega_0\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0 t)+B\omega_0\cos^2(\omega_0 t). \qquad (21)$$

При постоянной температуре данное выражение будет эквивалентно термодинамическому соотношению:

$$\dot{p} = \dot{\psi} + \dot{e}, \tag{22}$$

которое показывает, что скорость действия механической работы внутренними силами $\dot{p}$ равно скорости приращения свободнойэнергии $\dot{\psi}$ плюс скорость диссипации энергии $\dot{e}$. Сопоставив оба уравнения, прояснится ситуация с термодинамическими ограничениями на параметры модели.

Чтобы гарантировать неотрицательность скорости диссипации энергии $\dot{e}$, необходимо потребовать неотрицательность B, для которой достаточно, чтобы для всех частот выполнялось неравенство

$$\operatorname{Im}\hat{E}(i\omega) \geq 0, \;\; 0 < \omega < \infty.$$

Таким же образом налагается ограничение неотрицательности внутренней работы. Для этого нужно проинтегрировать уравнения (21) и (22) по времени, учитывая неотрицательность B, достаточно потребовать неотрицательности A, чтобы гарантировать неотрицательность работе внутренних сил. Условие, с помощью которого достигает неотрицательность A:

$$\operatorname{Re}\hat{E}(i\omega) \geq 0, \;\; 0 < \omega < \infty.$$

Разложив комплексный модуль на вещественную и мнимую части, можно получить следующие ограничения на параметры модели:

$$1) E \geq 0, \;\; 2) \alpha = \beta, \;\; 3) \theta \geq \tau.$$

Использовав эти ограничения, можно гарантировать термодинамическую согласованность дробно-дифференциальной модели вязкоупругости и образуют основу для дальнейшего развития семейства таких моделей.

1.9. Модель Работнова

Ю. Н. Работнов в основу своей модели наследственной механики твердых тел положил определяющее уравнение:

$$\sigma(t) = E\left[\varepsilon(t) - \beta \int_0^t Э_\alpha(-\beta, t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau \right], \tag{23}$$

где $\alpha \in (-1,0]$, $\beta \neq 0$, а функция $Э_\alpha$ задается степенным рядом

$$Э_\alpha(\beta, x) = x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n x^{n(\alpha+1)}}{\Gamma\left((n+1)(1+\alpha)\right)}. \tag{24}$$

Подставив (24) в (23) и используя формулу дробного интегрирования, получим

$$\sigma(t) = E\left[\varepsilon(t) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^{n+1}}{\Gamma\left[(\alpha+1)(n+1)\right]} \int_0^t \frac{\varepsilon(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{1-(\alpha+1)(n+1)}} \right] =$$

$$= E\left[\varepsilon(t) + \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{n+1} {}_0D_t^{-(\alpha+1)(n+1)} \varepsilon(t) \right] =$$

$$= E\left[\varepsilon(t) + {}_0D_t^{-(\alpha+1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)^{n+1} {}_0D_t^{-(\alpha+1)n} \varepsilon(t) \right].$$

Далее к обеим частям этого равенства применим оператор ${}_0D_t^{\alpha+1}$:

$${}_0D_t^{\alpha+1}\sigma(t) = E\left[{}_0D_t^{\alpha+1}\varepsilon(t) + \sum_{n=0}^{\infty} (-\beta)_0^{n+1} D_t^{-(\alpha+1)n} \varepsilon(t) \right] =$$

$$= E\left[{}_0D_t^{\alpha+1}\varepsilon(t) - \beta\varepsilon(t) - \beta \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta)^n {}_0D_t^{-(\alpha+1)n} \varepsilon(t) \right] =$$

$$= E\left[{}_0D_t^{\alpha+1}\varepsilon(t) - \beta\varepsilon(t) - \beta \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta)^{n+1} {}_0D_t^{-(\alpha+1)(n+1)} \varepsilon(t) \right].$$

После чего найдя из последнего равенства

$$E\beta \sum_{n=1}^{\infty} (-\beta)^{n+1} {}_0D_t^{-(\alpha+1)(n+1)} \varepsilon(t) = E\left[{}_0D_t^{\alpha+1}\varepsilon(t) - \beta\varepsilon(t) \right] - {}_0D_t^{\alpha+1}$$

и подставив это вместо последовательного слагаемого получим следующее уравнение

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + (E/\beta)\left[{}_0D_t^{\alpha+1}\varepsilon(t) - \beta\varepsilon(t) \right] - (1/\beta) {}_0D_t^{\alpha+1}\sigma(t),$$

которое после элементарных преобразований принимает вид

$$\sigma(t)+\tau_0 D_t^{\rho}\sigma(t)=\tau E_0 D_t^{\rho}\varepsilon(t),$$

где $\tau=\frac{1}{3},\ \rho=\alpha+1.$

Нетрудно заметить, что модель Работнова является частным случаем 4-параметрической модели Бэгли-Торвика. Если $\alpha=0,$ то она будет совпадать с определяющим уравнением Максвелла.

1.10. Теория Рауса

На основе статистической теории Рауса было дано физическое объяснение дробно-дифференциальному соотношению между деформацией и напряжением для вязкоупругости растворов полимеров в ньютоновской жидкости. Разлагая скорость каждой из $N-$молекул полимерной цепочки, совпадающей со скоростью течением жидкости, а также относительную скорость, которая описывает возвращение деформированной цепочки к равновесной форме и выполняя необходимые вычисления, Раус получил для сдвигового модуля $\tilde{G}(\omega)$ выражение

$$\tilde{G}(\omega)=nkT\sum_{j=1}^{N}\frac{\tau_j^2\omega^2}{1+\tau_j^2\omega^2}+i\left\{\mu_s\omega+nkT\sum_{j=1}^{N}\frac{\tau_j\omega}{1+\tau_j^2\omega^2}\right\}. \qquad (25)$$

Здесь $T-$абсолютная температура, $k-$постоянная Больцмана, $n-$число молекул в единице объема раствора.

Переменная τ_j-характеристические времена релаксаций, имеющие при $j<N/5,\ \omega\tau_1<N^2/250$ вид:

$$\tau_j\simeq\frac{\tau_1}{j^2}, \qquad (26)$$

$$\tau_1\simeq\frac{6(\mu_0-\mu_s)}{n\pi^2 kT},$$

где μ_0 и μ_s-стационарные вязкости раствора и растворителя. Подставив (26) в (25), приходим к выражению:

$$\tilde{G}(\omega) \simeq i\mu_s\omega + nkT\sum_{j=1}^{N/2}\left[1 - ij^2/(\tau_1\omega)\right]^{-1}.$$

Переходя от суммирования к интегрированию с использованием формулы

$$\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{j=1}^{\infty}\left[1 - i(j\Delta x)^2\right]\Delta x = \int_0^{\infty}\left(1 - i\xi^2\right)^{-1} d\xi = i^{1/2}\pi/2$$

при $\Delta x = (\tau_1\omega)^{-1/2}$ и $[N/5] \gg \tau_1\omega \geq 25,$ получаем:

$$\tilde{G}(\omega) \simeq i\mu_s\omega + nkT(\pi/2)\sqrt{i\tau_1\omega} = i\mu_s\omega + \sqrt{(3/2)(\mu_0 - \mu_s)nkT}\sqrt{i\omega}.$$

Обратное преобразование Фурье соотношения

$$\tilde{\sigma}(\omega) = \tilde{G}(\omega)\varepsilon(\omega)$$

и ведет к искомому результату:

$$\sigma(t) = \mu_s D_t\varepsilon(t) + \sqrt{(3/2)(\mu_0 - \mu_s)nkT}\,{}_0D_t^{1/2}\varepsilon(t).$$

Из полученного выражения видно, что основными составными напряжения в полимерном растворе являются: первое – растворитель (ньютоновская жидкость); второе – дает вклад полимерных цепочек, который зависит от их предыстории (от предыстории всего течения).

Теория Рауса дает форму этой зависимости, тем самым обеспечивая физическое обоснование применения дробных производных к описанию рассматриваемого процесса.

При мгновенно созданной постоянной деформации $(t = 0)$

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \varepsilon_0, & t > 0 \end{cases}$$

ее производная при $t > 0$ равно нулю, в то время, как полупроизводная отлична от нуля и спадает со временем по степенному закону:

$$\sigma(t) = \sqrt{\left(3/2\sqrt{\pi}\right)(\mu_0 - \mu_s)nkT}\,\varepsilon_0 t^{-1/2}.$$

Таким образом, расчет Рауса ведет к конститутивному уравнению с полупроизводной,

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + E_1 {}_0 D_t^{1/2} \varepsilon(t),$$

что представляет собой частный случай модели Бэгли и Торвика. Экспериментальная часть с твердыми полимерами показала, что спектр значений α достаточно широкий в интервале $(0,1)$, в теории вязкоупругости существуют специальные методики по более точному определению спектра значений, но объяснение этого требует более общей модели, в отличие от полимерных молекул в растворе.

1.11. Динамический подход

Пусть A – динамическая переменная однородной динамической системы и $V(t)$ – внешнее поле, предназначенное для возмущения равновесного состояния системы. После его включения система начнет релаксацию, в соответствие с переходом в равновесное состояние, которое будет соответствовать новым условиям. Оператор полной энергии системы (гамильтониан) будет иметь вид суммы невозмущенного и возмущенного гамильтониана,

$$H = H_0 + H_{\text{int}},$$

который связан с потенциалом внешнего поля. Данная связь будет являться линейной с коэффициентом пропорциональности b, зависящем через обобщенные координаты и импульсы от времени:

$$H_{\text{int}} = -b\big(p(t), q(t)\big)V(t).$$

Путь эволюции возмущенной системы описывается известной формулой Кубо:

$$\langle A(t) \rangle = \langle A(0) \rangle + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(\omega) \tilde{G}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega,$$

где G – запаздывающая функция Грина системы,

$$G(t-t') = -1(t-t') \langle \{b(t'), A(t)\} \rangle_{eq} = \langle \langle b(t') A(t) \rangle \rangle,$$

а $\{...\}$ – скобки Пуассона.

Опираясь на данный формализм, можно рассмотреть систему запутанных полимерных цепочек разной длины. Если описывать их размеры, то нагляднее представить величину между макроскопическим размером и мономером. Цепочки, испытывая воздействие внешнего поля, могут деформироваться или рваться. Пусть x_1 и x_2 – две точки цепочки, взятые в направлении натяжения. Расстояние между ними гораздо меньше длины участка цепочки, соединяющей эти точки. Разность этих длин будет называться запасенной длинной. Когда первая из этих точек приходит в движение, сначала выпрямляется сам участок цепочки между двумя точками и только потом приходит в движение другая точка.

Диссипация энергии в соседних участках происходит с запаздыванием, которое порождает закон демпфирования, содержащий дробную производную. Возмущение системы заключается в ее деформации $V(t)=\varepsilon(t)$, а отклик системы – напряжение $\sigma(t)$ – представляется в виде суммы упругой $\sigma_e = E\varepsilon$ и неупругой $\sigma_d = A$ составляющих.

Так как прямой расчет функции Грина является очень трудным, целесообразно заменить гамильтониан воздействия его усредненным значением:

$$\bar{H}_{\text{int}}(p,q,t) = -\bar{b}(p,q)V(t).$$

Усреднение осуществляется по дискретизированному времени запаздывания n – го мономера nt_0 с распределением вероятностей

$$P(nt_0) = \frac{t_0 N_0}{(nt_0)^{\nu+1}},\ \ n > N = \theta / t_0,\ \ N_0 = (\nu+2)\theta^{\nu+2},\ \ 0<\nu<1.$$

и приводит к выражению

$$G(t-t') = \left\langle\left\langle \sum_{n=N}^{\infty} P(nt_0) b(t'-nt_0)\sigma_d(t) \right\rangle\right\rangle = N_0 \sum_{n=N}^{\infty} \frac{\left\langle\left\langle b(t'-nt_0)\sigma_d(t)\right\rangle\right\rangle}{t_0^{\nu} n^{\nu+1}}.$$

Пренебрежем термодинамической корреляцией между $b(t')$ и $\sigma_d(t)$,

$$G(t-t') = \begin{cases} -N_0 \sum\limits_{n=N}^{\infty} t_0^{-\nu} n^{-\nu-1} \delta(t-t'-nt_0),\ t>t' \\ 0,\ t \le t' \end{cases}$$

и найдем трансформанту Фурье функции Грина:

$$\tilde{G}(\omega) = -N_0 \sum_{n=N}^{\infty} t_0^{-\nu} n^{-\nu-1} \exp(-i\omega t_0 n) =$$

$$= -N_0 \left[\sum_{n=1}^{\infty} t_0^{-\nu} n^{-\nu-1} \exp(-i\omega t_0 n) - \sum_{n=1}^{N-1} t_0^{-\nu} n^{-\nu-1} \exp(-i\omega t_0 n) \right]. \qquad (27)$$

Воздействовав на функции $\exp(-i\omega t_0 n),\ \omega > 0$ прямым и обратным преобразованием Меллина, можно проверить тождество

$$\exp(-i\omega t_0 n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{e-i\infty}^{e+\infty} \Gamma(s) (\omega t_0 n)^{-s} \exp(-is\pi/2) ds,\ 0 < c < 1.$$

Подставив преобразование в (27) и использовав теоремы о вычетах, получим выражение

$$\tilde{G}(\omega) = -N_0 \Gamma(-\nu) \omega^{\nu} e^{i\nu\pi/2} -$$

$$-N_0 \sum_{n=0}^{\infty} t_0^{n-\nu} \left[\zeta(1+\nu-n) - \sum_{m=1}^{N-1} m^{nu-1+n} \right] \left[(-1)^n / n! \right] \omega^n e^{i\nu\pi/2},$$

где $\zeta(z)$ – дзета-функция Римана.

$$res_z =_{-\nu} \zeta(1+z+\nu) = 1.$$

При $\omega < 0$ изменяется знак перед мнимой единицей.

В пределе при $t_0 \to 0$ все слагаемые в квадратных скобках, кроме первого, который находится с использованием эрмитова представления обобщенной дзета-функции $\zeta(\nu + 1/t_0)$, исчезают

$$\lim_{t_0 \to 0} \tilde{G}(\omega) = -N_0 \left[\Gamma(-\nu) (i\omega)^{\nu} + \left(\nu\theta^{\nu} \right)^{-1} \right].$$

Подставив полученный результат в формулу Кубо, получим конститутивное уравнение

$$\langle \sigma_d \rangle = -N_0 \Gamma(-\nu) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (i\omega)^{\nu} \tilde{\varepsilon}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega - N_0 \left(\nu\theta^{\nu} \right) \varepsilon(t) = \eta_{\nu\ a} D^{\nu} \varepsilon(t) + \xi_{\nu} \varepsilon(t),$$

$$\eta_\nu = -N_0\Gamma(-\nu),\ \ \xi_\nu = -N_0\left(\nu\theta^\nu\right)^{-1},$$

содержащему дробную производную ν – го порядка.

1.12. Составные механические модели

Основной вопрос, относящийся к моделям вязкоупругих тел, это рассмотрение возможности построения вязкоупругой дробно-дифференциальной модели с помощью двух стандартных элементов (вязкого и упругого).

Данная модель была построена Марвином и Гроссом для $\alpha = 1/2$ и обобщена Блюменом и Шисселем на произвольное $\alpha \in (0,1)$. Модель наглядно имеет образ лестничного типа (рис. 4), который построен из бесконечной последовательности элементов с заданными определенным образом параметрами [6].

Пусть ε_k^e, ε_k^d – удлинение k – й пружины с модулем упругости E_k и смещение k – го демпфера с вязкостью η_k соответственно. Так же, как и электромеханические, механические цепи рассчитываются с использованием конкретного набора правил.

1. Аддитивность последовательных деформаций:

$$\varepsilon_k^d = \varepsilon_{k+1}^e + \varepsilon_{k+1}^d,\ \ k = 0,1,...,n-2. \tag{28}$$

На верхнем конце:

$$\varepsilon = \varepsilon_0^e + \varepsilon_0^d,$$

на нижнем

$$\varepsilon_{n-1}^d = \varepsilon_n^e.$$

2. Аддитивность параллельных напряжений:

$$\sigma_k^e = \sigma_{k+1}^e + \sigma_k^d,\ \ k = 0,1,...,n-1. \tag{29}$$

На конце лестницы

$$\sigma = \sigma_0^e.$$

3. Компоненты деформаций напряжений связаны между собой соотношениями:

$$\varepsilon_k^e = \frac{1}{E_k}\sigma_k^e,\ \sigma_k^d = \eta_k \frac{d\varepsilon_k^d}{dt}. \tag{30}$$

4. Далее предполагается, что

$$\varepsilon(t) = 0,\ t \le 0,$$
$$\sigma(t) = 0,\ t \le 0.$$

Подставляя (30) в (28) и в (29), а также переходя к трансформантам Лапласа, получим:

$$E_{k+1}\hat{\varepsilon}_k^d(\lambda) = \hat{\sigma}_{k+1}^e(\lambda) + E_{k+1}\hat{\varepsilon}_{k+1}^d(\lambda),\ k = 0,1,...,n-2. \tag{31}$$

$$\hat{\sigma}_k^e(\lambda) = \hat{\sigma}_{k+1}^e(\lambda) + \lambda\eta_k\hat{\varepsilon}_k^e(\lambda),\ k = 0,1,...,n-1. \tag{32}$$

Разделив обе части уравнения (31) на $\hat{\sigma}_{k+1}^e(\lambda)$, подставив в него найденное из формулы (32) напряжение

$$\hat{\sigma}_{k+1}^e(\lambda) = \hat{\sigma}_{k+2}^e(\lambda) + \lambda\eta_{k+1}\hat{\varepsilon}_{k+1}^d(\lambda)$$

и произведя некоторые сокращения, получим результат в виде:

$$E_{k+1}\frac{\hat{\varepsilon}_k^d(\lambda)}{\hat{\sigma}_{k+1}^e(\lambda)} = 1 + \frac{E_{k+1}}{\eta_{k+1}}\frac{1}{\lambda + \frac{1}{\eta_{k+1}}\frac{\hat{\sigma}_{k+2}^e(\lambda)}{\hat{\varepsilon}_{k+1}^d(\lambda)}},$$

$$E_{n-1}\frac{\hat{\varepsilon}_{n-2}^d(\lambda)}{\hat{\sigma}_{n-1}^e(\lambda)} = 1 + \frac{E_{n-1}}{\eta_{n-1}}\frac{1}{\lambda + \frac{E_n}{\eta_n - 1}}.$$

После нескольких повторений этого процесса отношение $\hat{\varepsilon}(\lambda)/\hat{\sigma}(\lambda)$ можно представить в виде цепной дроби

$$E_0\frac{\hat{\varepsilon}(\lambda)}{\hat{\sigma}(\lambda)} = 1 + \frac{\lambda^{-1}E_0/\eta_0}{1+}\frac{\lambda^{-1}E_1/\eta_0}{1+}...\frac{\lambda^{-1}E_{n-1}/\eta_{n-1}}{1+}\frac{\lambda^{-1}E_n/\eta_{n-1}}{1}.$$

Далее необходимо сопоставить полученное выражение с разложением следующего вида:

$$x(x+1)^{\alpha-1} = \frac{x}{1+}\frac{(1-\alpha)x}{1+}\frac{1\cdot(0+\alpha)}{1\cdot 2}\frac{1\cdot(2-\alpha)}{2\cdot 3}\frac{1\cdot(1+\alpha)}{3\cdot 4}\frac{1\cdot(3-\alpha)}{4\cdot 5}...,$$

можно увидеть, что при подходящем выборе параметров,

$$E_1/\eta_0=(1-\alpha)c_0,\ \ E_1/\eta_1=\frac{1\cdot(0+\alpha)}{1\cdot 2}c_0,...,$$

исследуемое отношение имеет предел

$$\lim_{n\to\infty} E_0\frac{\varepsilon(\lambda)}{\sigma(\lambda)}=1+(c_0/\lambda)(c_0/\lambda+1)^{\alpha-1}.$$

По логике асимптотике малых λ, соответствующих большим временам t,

$$E_0\frac{\varepsilon(\lambda)}{\sigma(\lambda)}\sim(c_0/\lambda)^{\alpha}.$$

Во временной области этому соотношению будет соответствовать выражение с дробной производной

$$\sigma(t)=\eta_0^{\alpha}E_0^{1-\alpha}{}_0D_t^{\alpha}\varepsilon(t).$$

Если немного усложнить саму конструкцию модели, то это может привести к дробно-дифференциальному обобщению модели Максвелла:

$$\sigma(t)+\tau^{\alpha}{}_0D_t^{\alpha}\sigma(t)=\tau^{\beta}E_0D_t^{\beta}\varepsilon(t).$$

Отстраненность от физики явлений не позволяет принять их как физическую интерпретацию дробно-дифференциальной модели.

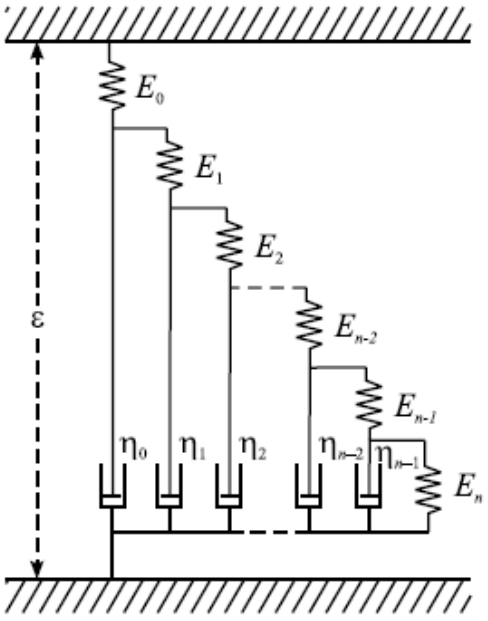


Рисунок 4 – Модель Гросса-Марвина

1.13. Течение вязкоупругой среды

Плоское течение

Задача о течении вязкоупругой среды была одной из первых, решенных Герасимовым в простейшей дробно-дифференциальной реологической модели с конститутивным уравнением

$$\sigma(t) = k_\alpha \, {}^{\alpha}_{0}D_t \varepsilon(t),$$

где вязкоупругая среда с указанными свойствами заключена между параллельными плоскостями – нижняя плоскость $(x = 0)$ неподвижна, верхняя $(x = a)$ движется в направлении оси OY по определенному закону $\varphi(t)$, $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$. Граничное и начальное условия для y – координаты жидкой частицы $y(x,t)$ имеют вид:

$$y(x,0) = 0, \; \left.\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \;\; y(0,t) = 0, \;\; y(a,t) = \varphi(t).$$

Пусть имеется элементарный параллелепипед жидкости, который ограничен двумя горизонтальными гранями единичной площади с расстоянием dx между ними.

Уравнение движения центра масс этого элемента имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x},$$

где $\rho = const$ – плотность жидкости. К тому же стоит добавить, что

$$\varepsilon = \frac{\partial y}{\partial x}, \;\; \sigma = k_\alpha \, {}^{\alpha}_{0}D_t \varepsilon = k_\alpha \, {}^{\alpha}_{0}D_t \frac{\partial y}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_\alpha \, {}^{\alpha}_{0}D_t \varepsilon\right) = k_\alpha \, {}^{\alpha}_{0}D_t \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

тем самым получаем уравнение движения в виде

$$c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = {}^{\alpha}_{0}D_t \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \;\; c_\alpha^2 = \frac{\rho}{k_\alpha}.$$

Чтобы решить эту задачу Герасимовым был использован операционный метод Хэвисайда. Процесс перехода от функции $y(x,t)$ к ее изображению $\hat{y}(x,t)$ приводит к обыкновенному дифференциальному второго порядка

$$\frac{d^2\hat{y}}{dx^2} = c_\alpha^2 p^{2-\alpha}\hat{y}$$

с граничными условиями

$$\hat{y}(0,p) = 0, \;\; \hat{y}(a,p) = \hat{\varphi}(p).$$

Его решение будет иметь вид:

$$\hat{y}(x,p) = \hat{K}(p)\hat{\varphi}(p),$$

где

$$\hat{K}(p) = \frac{sh\left(c_\alpha p^{1-\alpha/2}x\right)}{sh\left(c_\alpha p^{1-\alpha/2}a\right)}.$$

Обратное преобразование было выполнено для трех случаев.

1. Ньютонова жидкость $(\alpha = 1)$:

$$y(x,t) = \frac{2}{(\pi c_1)^2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\int_0^t \exp\left\{-\left(\frac{k\pi}{c_1 a}\right)^2(t-\tau)\right\}\varphi(\tau)d\tau, \;\; 0 \le x < a.$$

2. Упругая среда $(\alpha = 0)$:

$$y(x,t) = \frac{2}{c_0 a}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\sin\left(\frac{k\pi x}{a}\right)\int_0^t \sin\left\{\left(\frac{k\pi}{c_0 a}\right)(t-\tau)\right\}\varphi(\tau)d\tau, \;\; 0 \le x < a.$$

3. Промежуточный случай $(\alpha = 1/2)$:

$$y(x,t) = \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\int_0^t \dot{\phi}_n(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau, \;\; 0 \le x < a,$$

$$\phi_n(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{c_{1/2}a}\right)\frac{(-1)^k\tau^{3k/2}}{\Gamma(3k/2+1)}, \;\; n = 1,2,3,\ldots .$$

Герасимов, для равномерного движения верхней плоскости

$$\varphi(t) = \upsilon t, \;\; \upsilon = const > 0,$$

нашел напряжение на верхней поверхности при произвольном α в виде двойного ряда:

$$\sigma(a,t)=kc_{1/2}\upsilon\left\{\frac{1}{\Gamma(1-\alpha/2)}t^{-\alpha/2}+2\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left[-(2k+2)c_\alpha a\right]^j}{j!\Gamma\left((1-j)(1-\alpha/2)\right)}t^{-j(1-\alpha/2)-\alpha/2}\right\}.$$

При $t=0$ оно обращается в бесконечность порядка $\alpha/2.$ Это связано с тем, что в вязкой жидкости нельзя мгновенно сообщить граничной плоскости $x=a$ конечную скорость, применяя усилие конечной величины.

Цилиндрическое течение

Следующая задача, которая была решена Герасимовым – движение вязкоупругой жидкости между цилиндрическими поверхностями $r_1<r<r_2,$ которые вращаются по заданным законам $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t).$

Уравнение движения для углового смещения $\varphi(r,t)$ имеет вид:

$$pr^3\frac{\partial^2}{\partial t^2}=k\frac{\partial}{\partial r}\left[r^3\frac{\partial}{\partial r}\left({}_0^{\alpha}D_t\varphi(r,t)\right)\right],\ \ r_1\le r\le r_2.$$

Решение данного уравнения должно удовлетворять заданным начальным условиям

$$\varphi(r,0)=0,\ \ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right|_{t=0}=0$$

и граничным условиям

$$\varphi(r_1,t)=\varphi_1(t),\ \ \varphi(r_2,t)=\varphi_2(t),$$

выражающими прилипание частиц на стенках. Функции $\varphi_1(t),\ \varphi_2(t)$ в начальный момент времени $t=0$ предполагаются равными нулю вместе со своими производными.

Существует частный случай, когда разность $r_2-r_1=\delta_0$ мало по сравнению с r_1,

$$\sigma(r,t)=\frac{kr_1r_2}{r\delta_0}\ {}_0^{\alpha}D_t\psi(t),\ \ \psi(t)=\varphi_2(t)-\varphi_1(t),$$

напряжение на поверхностях даются выражениями

$$\sigma(r_1,t)=\frac{kr_1}{\delta_0}\,{}_0^{\alpha}D_t\psi(t),\ \ \sigma(r_2,t)=\frac{kr_2}{\delta_0}\,{}_0^{\alpha}D_t\psi(t). \qquad (33)$$

Стоит отметить, что напряжение на внешней поверхности будет меньше, чем напряжение на внутренней поверхности ровно в r_2/r_1 раз. Данное явление имеет чисто геометрическое обоснование. Исходя из закона действия и противодействия, обе силы должны быть равными, но так как они распределены по разным площадям, и концентрация напряжения должна быть выше на поверхности с меньшей площадью.

Если $\alpha=1$, то уравнение (33) преобразует в закон Кулона – напряжение пропорционально относительной скорости вращения поверхностей; если $\alpha=0,$ то (33) превращается в закон Гука: напряжение пропорционально относительному смещению поверхностей. В случае гармонических колебаний поверхностей

$$\psi(t)=A\sin(\omega t)$$

напряжение также имеет гармонический вид

$$\sigma(r_1,t)=\frac{kr_2}{\delta_0}A\sin\left(\omega t+\frac{\alpha\pi}{2}\right)$$

со сдвигом фазы, зависящей исключительно от α. В исключительно упругой среде напряжение колеблется синфазно с движением поверхностей, в исключительно вязкой среде сдвиг фаз составляет $\pi/2.$

1.14. Анализ математических моделей вязкоупругих тел с операторами дробного и целочисленного интегро-дифференцирования.

Целесообразность применения моделей с операторами дробного интегро-дифференцирования имеет множество вопросов. Чтобы ответить на некоторые из них необходимо провести сравнительный анализ решений на основе дробных линейной (34) и нелинейных (35), (36) моделей Фойхта:

$$(E_1+E_2)\sigma(t)+\eta D_{0t}^{\alpha}\sigma=E_1E_2\varepsilon(t)+\eta E_2D_{0t}^{\alpha}\varepsilon, \qquad (34)$$

$$\sigma = E\varepsilon^n + \eta\left(D_{0t}^{\alpha}\varepsilon\right)^m, \tag{35}$$

$$\sigma = E\varepsilon^n + \eta D_{0t}^{\alpha}\varepsilon^m, \tag{36}$$

где $E_1,\ E_2,\ \eta -$ постоянные величины, которые при $\alpha = 1$ совпадают с модулями упругих элементов и коэффициентов демпфирования соответственно.

В моделях (34), (35) и (36) используются данные, полученные на основе классической модели теории вязкоупругости с операторами целочисленного интегрирования. Рассмотрим нелинейную модель вязкоупругого тела в виде:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + \int_0^t \sum_{i=1}^{n} a_i e^{-\lambda_i(t-\tau)} \left(\frac{\sigma(\tau)}{\sigma^*}\right)^m d\tau, \tag{37}$$

где $\varepsilon(t),\ \sigma(t) -$ деформация и напряжение в момент времени t; $\sigma^* -$ нормирующий коэффициент; $E -$ мгновенный модуль упругости; $a_i,\ \lambda_i,\ m -$ некоторые подлежащие идентификации параметры модели. При $\sigma = \sigma_0 = const$ мгновенно-упругая деформация отбрасывается, вследствие чего из уравнения (37) получаем выражение для чистой вязкоупругой компоненты деформации $p = p(t)$:

$$p(t) = \sum_{i=1}^{n} A_i \left(1 - e^{-\lambda_i t}\right)\left(\frac{\sigma_0}{\sigma^*}\right)^m. \tag{38}$$

Пусть имеется пять постоянных уровней напряжения поливинилхлоридного пластика [7]. Посредством экспериментальных данных и специальной методики получена аппроксимация со следующими параметрами: $n = 3,\ m = 1,48,\ A_1 = 0,0192,\ A_2 = 0,0163,\ A_3 = 0,0019,$ то есть имеем 3 экспоненциальных слагаемых и 7 параметров.

Приведем оценки погрешностей в норме анализируемых моделей:

- для модели вида (37) (семь параметров) - $\Delta = 9,23\%$;

- для линейного дробного аналога модели Фойхта $\sigma(t) = E_1\varepsilon(t) + \eta D_{0t}^{\alpha}\varepsilon$ (три параметра) - $\Delta = 10,47\%$;

- для нелинейного неинтегрируемого дробного аналога модели Фойхта (35) (пять параметров) - $\Delta = 4,41\%$;

- для нелинейного интегрируемого дробного аналога модели Фойхта (36) (четыре параметра) - $\Delta = 4,27\%$.

Таким образом можно сделать вывод о том, что при меньшем числе параметров линейная дробная модель дает практически одинаковые результаты с моделью (38), а нелинейная дробная модель, имея всего 4 параметра, дает вдвое меньшую погрешность, чем модель с целочисленным интегральным оператором и с семью параметрами. Исходя из этого, можно вывести целесообразность использования математических моделей с дробными операторами интегро-дифференцирования в теории вязкоупругости.

2. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

2.1. Описание алгоритма

Рассмотрим одну дробную реологическую модель вязкоупругого тела, численное решение которой будет основываться на схеме типа «предиктор-корректор».

Вязкоупругие модели требуют одновременного решения линейного дифференциального уравнения первого порядка для пластичного расширения e^p, нелинейного дифференциального уравнения первого порядка для деформации E_p, и двух нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка для внутреннего напряжения X и его предельной прочности L. Для одновременной обработки всех вышеперечисленных уравнений существует специальная численная схема, в которой введем ограничение $0 < \beta < 1$.

Дадим определение дробной производной Римана-Лиувилля порядка $\beta > 0$ функции f относительно точки t_0

$$D_{t_0}^{\beta} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\beta)} \frac{d^m}{dt^m} \int_{t_0}^{t} f(u)(t-u)^{m-\beta-1} du, \tag{39}$$

где m – целое число, определенное отношением $m-1 < \beta < m$.

Как известно из теории дробного исчисления [8], дробное дифференциальное уравнение

$$D_{t_0}^{\beta}(y - y_0)(t) = f(t, y(t)), \qquad y(t_0) = y_0,$$

сводится к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\frac{1}{\Gamma(-\beta)} \int_{t_0}^{t} \frac{y(u) - y_0}{(t-u)^{\beta+1}} du = f(t, y(t)), \;\; y(t_0) = y_0.$$

Преобразуем интегральное уравнение Вольтерра второго рода в эквивалентное слабосингулярное уравнение

$$y(t) = y(t_0) + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_{t_0}^{t} (t-u)^{\beta-1} f(u, y(u)) du. \tag{40}$$

В данной ситуации ядро является непрерывным, поэтому классические численные алгоритмы не могут справиться с нашим уравнением. Для решения построим численную схему типа «предиктор-корректор» способом, описанным в [9,10].

Так как дробные дифференциальные уравнения связаны с дифференциальными уравнениями первого порядка, необходимо объединить алгоритм дробного порядка с классическим методом. Подход Адамса-Башфрота-Моултона для обоих интегралов является оптимальным. Принцип заключается в замене исходного дробного дифференциального уравнения (39) эквивалентным слабосингулярным уравнением Вольтерра (40).

Чтобы аппроксимировать интеграл в (40) относительно весовой функции $\left(t_{n+1}-u\right)^{\beta-1}$ будем использовать квадратурную формулу трапеций с узлами $t_j,\ \left(j=0,1,...,n+1\right)$. Имеем

$$\int_{t_0}^{t_{n+1}}(t_{n+1}-u)^{\beta-1}g(u)du \approx \int_{t_0}^{t_{n+1}}(t_{n+1}-u)^{\beta-1}g_{n+1}(u)du, \qquad (41)$$

где g_{n+1} - кусочно-линейный интерполянт функции g по узлам квадратурной формулы $t_j,\ \left(j=0,1,...,n+1\right)$. Интеграл правой части равенства (41) может быть вычислен аналитически:

$$\int_{t_0}^{t_{n+1}}(t_{n+1}-u)^{\beta-1}g_{n+1}(u)du=\sum_{j=0}^{n+1}a_{j,n+1}g(t_j),$$

где

$$a_{j,n+1}=\int_{t_0}^{t_{n+1}}(t_{n+1}-u)^{\beta-1}\phi_{j,n+1}(u)du,$$

$$\phi_{j,n+1}(u)=\begin{cases}(u-t_{j-1})/(t_j-t_{j-1}), & при\ t_{j-1}<u<t_j,\\ (t_{j+1}-u)/(t_{j+1}-t_j), & при\ t_j<u<t_{j+1},\\ 0, & в\ остальных\ случаях.\end{cases}$$

В случае равномерных узлов $t_j = t_0 + jh$ с фиксированным шагом h, получаем следующее соотношение для коэффициентов

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} \dfrac{h^\beta}{\beta(\beta+1)}(n^{\beta+1} - (n-\beta)(n+1)^\beta), & j = 0, \\ \dfrac{h^\beta}{\beta(\beta+1)}((n-j+2)^{\beta+1} - 2(n-j+1)^{\beta+1} + (n-j)^{\beta+1}), & 1 \le j \le n, \\ \dfrac{h^\beta}{\beta(\beta+1)}, & j = n+1. \end{cases}$$

Далее определяем формулу корректора (поправок), т.е. дробный вариант одношагового метода Адамса-Моултона

$$y_{n+1} = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)}\left(\sum_{j=0}^{n} a_{i,n+1} f(t_j, y_j) + a_{n+1,n+1} f(t_{n+1}, y_{n+1}^P) \right). \tag{42}$$

Остается определить формулу предиктора, для вычисления значения y_{n+1}^p. Для этого необходимо аппроксимировать интеграл в правой части уравнения (40) с использованием квадратурной формулы прямоугольников

$$\int_{t_0}^{t_{n+1}} (t_{n+1} - u)^{\beta-1} g(u)du \approx \sum_{j=0}^{n+1} b_{j,n+1} g(t_j),$$

$$b_{j,n+1} = \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(t_{n+1} - u\right)^{\beta-1} du = \frac{1}{\beta}\left((t_{n+1} - t_j)^\beta - (t_{n+1} - t_{j+1})^\beta \right).$$

Если разбиение является равномерным, то в таком случае имеем

$$b_{j,n+1} = \frac{h^\beta}{\beta}\left((n+1-j)^\beta - (n-j)^\beta \right).$$

Таким образом предиктор y_{n+1}^p определяется как

$$y_{n+1}^P = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{j=0}^{n} b_{j,n+1} f(t_j, y_j). \tag{43}$$

Для применения алгоритма на каждом шаге по формуле (43) сначала вычисляется предиктор y_{n+1}^p, затем величина $f\left(t_{n+1}, y_{n+1}^p\right)$, с помощью которой из формулы (42) определяется корректор y_{n+1}, далее вычисляется величина

$f(t_{n+1}, y_{n+1})$, которая используется в следующей итерации. Процесс повторяется, решение $y(t)$ восстанавливается по найденным значениям $\{y_i\}$ с помощью кусочно-линейной интерполяции.

Скорость сходимости описанного метода можно улучшить, используя принцип экстраполяции. Применим экстраполяцию по Ричардсону. Для этого погрешность разлагается в ряд Тейлора по степеням шага h, затем вычисляются решения на двух сетках с числом разбиений N и удвоенным – $2N$. Формула, уточняющая решение, принимает вид:

$$y_{extra} = (4y_{2N} - y_N)/3.$$

2.2. Модельная задача

В качестве модельного рассмотрим уравнение следующего вида

$$D^{\beta}[y - y_0](t) = \alpha y(t) + f(t),\ \beta = 0.5,\ \ y(0) = 0,\ \alpha = -1 \text{ или}$$

$$D^{0.5}[y](t) = -y(t) + t^2 + \frac{2}{\Gamma(2.5)} t^{1.5},\ t \in [0,1],$$

точным решением этого уравнения является функция $y(t) = t^2$, $\Gamma(\omega)$ – гамма-функция.

Применив к данному уравнению реализованный метод типа «предиктор-корректор) на языке C++ (приложение А), получим следующие результаты вычислений (таблица 1–4), в которых приняты следующие обозначения:

$$\varepsilon_N = \max_{t\in[0,1]} |y(t) - y_N(t)|,\ \varepsilon_{2N} = \max_{t\in[0,1]} |y(t) - y_{2N}(t)|,\quad \varepsilon_{extra} = \max_{t\in[0,1]} |y(t) - y_{extra}(t)|.$$

Таблица 1 – Равномерное разбиение отрезка $[0,1]$

N	ε_n	ε_{2n}	ε_{extra}
10	0.022	0.007	0.002
20	0.007	0.0022	0.0007
50	0.0015	$4.9\cdot10^{-4}$	$1.5\cdot10^{-4}$
100	$4.9\cdot10^{-4}$	$1.7\cdot10^{-4}$	$5.8\cdot10^{-5}$

Окончание табл. 1

N	ε_n	ε_{2n}	ε_{extra}
200	$1.7\cdot10^{-4}$	$5.7\cdot10^{-5}$	$2.1\cdot10^{-5}$
400	$5.7\cdot10^{-5}$	$1.2\cdot10^{-5}$	$1.2\cdot10^{-6}$
800	$2\cdot10^{-5}$	$6.8\cdot10^{-6}$	$2.5\cdot10^{-6}$
1500	$7.5\cdot10^{-6}$	$2.6\cdot10^{-6}$	$9.1\cdot10^{-7}$
3000	$2.6\cdot10^{-6}$	$9.2\cdot10^{-7}$	$3.2\cdot10^{-7}$

Таблица 2 – Неравномерное разбиение отрезка $[0,1]$

N	ε_n	ε_{2n}	ε_{extra}
10	0.0161	0.005	0.002
20	0.005	0.0016	0.00061
50	0.00112	$3.7\cdot10^{-4}$	$1.28\cdot10^{-4}$
100	$3.7\cdot10^{-4}$	$1.24\cdot10^{-4}$	$4.47\cdot10^{-5}$
200	$1.2\cdot10^{-4}$	$4.25\cdot10^{-5}$	$1.56\cdot10^{-5}$
400	$4.26\cdot10^{-5}$	$1.46\cdot10^{-5}$	$5.47\cdot10^{-6}$
800	$1,46\cdot10^{-5}$	$5.087\cdot10^{-6}$	$1.93\cdot10^{-6}$
1500	$5.584\cdot10^{-6}$	$1.96\cdot10^{-6}$	$7.47\cdot10^{-7}$
3000	$1.95\cdot10^{-6}$	$6.86\cdot10^{-7}$	$2.64\cdot10^{-7}$

Таблица 3 – Равномерное разбиение отрезка $[0,5]$

N	ε_n	ε_{2n}	ε_{extra}
10	1.134	0.3015	0.0313
20	0.3014	0.0886	0.0188
50	0.0605	0.0191	0.0054
100	0.0191	0.0063	0.00199
200	0.0063	0.0021	$7.2\cdot10^{-4}$
400	0.0021	$7.1\cdot10^{-4}$	$2.6\cdot10^{-4}$
800	$0.7\cdot10^{-3}$	$2.4\cdot10^{-4}$	$8.98\cdot10^{-5}$
1500	$2.7\cdot10^{-4}$	$9.37\cdot10^{-5}$	$3.5\cdot10^{-5}$
3000	$9.37\cdot10^{-5}$	$3.27\cdot10^{-5}$	$1.24\cdot10^{-5}$

Таблица 4 – Неравномерное разбиение отрезка $[0,5]$

N	ε_n	ε_{2n}	ε_{extra}
10	0.727	0.1992	0.0671
20	0.1992	0.0599	0.0196
50	0.0413	0.0132	0.0041
100	0.0132	0.0043	0.0015
200	0.0044	0.00148	$5.2 \cdot 10^{-4}$
400	0.0015	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$
800	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.7 \cdot 10^{-4}$	$6.52 \cdot 10^{-5}$
1500	$2 \cdot 10^{-4}$	$6.71 \cdot 10^{-5}$	$2.54 \cdot 10^{-5}$
3000	$6.71 \cdot 10^{-5}$	$2.35 \cdot 10^{-5}$	$8.96 \cdot 10^{-6}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были рассмотрены и изучены основные математические дробно-реологические модели вязкоупругих тел. Приведено определение вязкоупругости и основных ее свойств.

На основе изученного материала можно вывести целесообразность использования математических моделей с дробными операторами интегро-дифференцирования в теории вязкоупругости. Основное преимущество дробной модели заключается в том, что она, имея всего 4 параметра, дает вдвое меньшую погрешность, чем модель с целочисленным интегральным оператором, обладающую семью параметрами.

Результаты применения реализованного метода типа «предиктор-корректор» к рассматриваемой задачи говорят о рассматриваемой стабильной погрешности с нужным порядком. Сравнивая между собой неравномерное и равномерное разбиение, можно отметить чуть лучшую точность первого, это связано с тем, что оно лучше учитывает поведение функции в начальных точках, ведь именно эти значения используются во всех остальных итерациях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Diethelm, K. Analysis of Fractional Differential Equations / K. Diethelm, N. J. Ford. — Braunschweig, Germany: NASA Lewis Research Center, 2002. – 335 с.

2. Герасимов, А. Н. Математические модели в биологии, экологии и медицине : Учеб. пособие / А. Н. Герасимов. –М.: МИФИ, 1998. - 40 с.

3. Арутюнян, Н. Х. Механика растущих вязкоупругих тел / Н. Х. Арутюнян, В. Э. Наумов. –М.: ИПМ, 1984. – 148 с.

4. Колтунов, М. А. Прикладная механика деформируемого твердого тела: Учебное пособие для вузов по специальности «Прикладная математика" / М. А. Колтунов, А. С. Кравчук, В. П. Майборода. – М.: Высшая школа, 1983. – 351 с.

5. Васильев, В. В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем. / В.В.Васильев, Л.А.Симак. – Киев: НАН Украины, 2008. – 256 с.

6. Учайкин В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин. – Ульяновск: Издательство «Артишок», 2008. – 512 с.

7. Нахушев А. М. Дробное исчисление и применение / А. М. Нахушев. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 271 с.

8. Самко, С. Г. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688с.

9. Diethelm, K. The FracPECE subroutine for the numerical solution of differential equations of fractional order. / K Diethelm, A. Freed. – Göttingen: Forschung und wissenschaftliches Rechnen, 1998. – 125 с.

10. Diethelm K. An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order / K. Diethelm. – Germany: Journal Applied Mathematics, 1997. – 53 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Реализация схемы типа «предиктор-корректор» для численного исследования дробной реологической модели вязкоупругого тела

(обязательное)

Алгоритм типа «предиктор-корректор» для решения поставленной задачи реализован на языке C++. Точное решение рассматриваемой в практической части задачи было построено с использованием математической среды Maple, там же были посчитаны гамма функции (G25, G05). Разбиение рассматривается как равномерное, так и неравномерное. Функция *xe* передает точное решение для модельного примера. Функция Find_Solution содержит вспомогательные функции и процедуры для нахождения значений функций Solution_n, Solution_2n, которые, в сою очередь, строят кусочно-линейные приближенные решения. Операция Extra_Solution содержит экстраполяцию по Ричардсону, направленную на ускорение сходимости решения. Погрешность оценивается в три случая – между точным решением (xe) и приближенным при числе разбиений N(Solution_n), $2N$(Solution_2n), а также экстраполированным значением (Extra_Solution).

```
#include "stdafx.h"
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>
#define  t0    0
#define  T     1
#define  n     1000
#define  N     2*n   // число основных областей
#define  Beta  0.5 // показатель сингулярности
#define  v     1  // константа для разбиения областей
#define  pi    3.1415926535897932385
#define  G25   1.32934038817913702
#define  G05   1.77245385090551603
typedef double (*Func)(double);
//------- Prototypes of the functions & procedures ------
double xe(double t);
double xa(double t);
double H(double t,double s);
double f(double t);
double Solution_n(double s);
double Solution_2n(double s);
double Extra_Solution(double s);
void Find_Solution(int Num);
//---------- Global variables definition ----------------
double t[N+1], tn[n+1], t2n[N+1];
double Y[N+1], Y_2n[N+1], Y_n[n+1];
```

```
double a[N+2][N+2], b[N+2][N+2], Yp[N+1];
//Func Solution_n, Solution_2n;
//----------- M A I N  P R O G R A M --------------------

int _tmain(int argc, _TCHAR* argv[])
{
   int i,k;
  double max, tmp, tmp1,tmp2;

  Find_Solution(n);
  for(i=0; i<=n; i++)
         {
          Y_n[i]=Y[i];
       tn[i]=t[i];
         }

  Find_Solution(N);
  for(i=0; i<=N; i++)
         {
          Y_2n[i]=Y[i];
          t2n[i]=t[i];
         }

  //====================
  max=0;
  tmp=0;
  k=145;
  for (i=0; i<=k; i++)
    {
     tmp1=t0+(T-t0)*double(i)/k;
     tmp2=fabs(Solution_n(tmp1)-xe(tmp1));
        if (tmp2>max)
       {
        max=tmp2;
        tmp=tmp1;
       }
    }
  printf("n=%d \n",n);
  printf("Error for the Solution_n: Eps1=%f \n",max);
  printf("Achieved at the point t=%f \n \n",tmp);
  //cout<<"Error for the Solution_n: Eps1="<<max<<endl;
  //cout<<"Achieved at the point t="<<tmp<<endl<<endl;

  //====================
  max=0;
  tmp=0;
  for (i=0; i<=k; i++)
    {
     tmp1=t0+(T-t0)*double(i)/k;
     tmp2=fabs(Solution_2n(tmp1)-xe(tmp1));
        if (tmp2>max)
       {
        max=tmp2;
        tmp=tmp1;
       }
    }

  printf("N=%d \n",N);
  printf("Error for the Solution_2n: Eps2=%f \n",max);
  printf("Achieved at the point t=%f \n \n",tmp);
  //cout<<"Error for the Solution_2n: Eps2="<<max<<endl;
  //cout<<"Achieved at the point t="<<tmp<<endl<<endl;
  //====================
  max=0;
  tmp=0;
```

```
  for (i=0; i<=k; i++)
    {
     tmp1=t0+(T-t0)*double(i)/k;
     tmp2=fabs(Extra_Solution(tmp1)-xe(tmp1));
        if (tmp2>max)
       {
        max=tmp2;
        tmp=tmp1;
       }
    }

  //printf("point is t[%d]=%f \n",k,tmp);

  printf("Error for the extrapolated solution: Eps3=: Eps3=%f \n",max);
  printf("Achieved at the point t=%f \n",tmp);
  //cout<<"Error for the extrapolated solution: Eps3="<<max<<endl;
  //cout<<"Achieved at the point t="<<tmp<<endl;
  //====================

  getch();
  return 0;

}

//--------------- Auxiliary functions  and procedures --------------------------
//*****************************************************
void Find_Solution(int Num)
{
  int i,j,k;
  double tmp,h;

  for(i=0; i<=Num; i++)
   t[i]=t0+(T-t0)*double(i)/Num;

   h=double(T-t0)/Num;
   //-------------------------------------------

   for (k=0; k<=Num; k++)
        {
       a[0][k+1]=pow(h,Beta)/(Beta*(Beta+1))*(pow(k,Beta+1)-(k-Beta)*pow(k+1,Beta));

             a[k+1][k+1]=pow(h,Beta)/(Beta*(Beta+1));
             for(j=1; j<=k; j++)
             {
                    a[j][k+1]=pow(h,Beta)/(Beta*(Beta+1))*( pow(k-j+2,Beta+1)-2*pow(k-
j+1,Beta+1)+pow(k-j,Beta+1) );
             }
        for(j=0; j<=k; j++)
             {
                    b[j][k+1]=pow(h,Beta)/Beta*( pow(k+1-j,Beta)-pow(k-j,Beta) );
             }
        }

   //-------------------------------------------
   Y[0]=f(t0);
   for (k=0; k<=Num-1; k++)
       {
       tmp=0;
             for(j=0; j<=k; j++)
             {
                    tmp=tmp+b[j][k+1]*H(t[j],Y[j]);
             }
        Yp[k+1]=tmp/G05+Y[0];

             tmp=a[k+1][k+1]*H(t[k+1],Yp[k+1]);
```

```
              for(j=0; j<=k; j++)
              {
                     tmp=tmp+a[j][k+1]*H(t[j],Y[j]);
              }
              Y[k+1]=tmp/G05+Y[0];
       }

}
//*****************************************************

//----- Piecewise linear approximate solutions ------
double Solution_n(double s)
  {
    int k,i;
    double tmp;
       k=1;
    for (i=1; i<=n; i++)
              {
             if ( (s>tn[i-1])&&(s<=tn[i]) ) k=i;
            }
    tmp=Y_n[k-1]+(Y_n[k]-Y_n[k-1])*(s-tn[k-1])/(tn[k]-tn[k-1]);
    return tmp;
  }
//-----------------------------
double Solution_2n(double s)
  {
    int k,i;
    double tmp;
       k=1;
    for (i=1; i<=N; i++)
              {
             if ( (s>t2n[i-1])&&(s<=t2n[i]) ) k=i;
            }
    tmp=Y_2n[k-1]+(Y_2n[k]-Y_2n[k-1])*(s-t2n[k-1])/(t2n[k]-t2n[k-1]);
    return tmp;
  }
//-----------------------------
double Extra_Solution(double s)
       {
        return (4*Solution_2n(s)-Solution_n(s))/3;
       }
//-----Exact solution for test example----------------
double xe(double s)
  { return s*s;}

//-----Kernel of integral equation (without the weight function)------
double H(double s, double y)
  { return -y+s*s+2/G25*pow(s,1.5); }


//-----Right part of integral equation----------------
double f(double t)
  {return t0; }
```