

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
Кафедра «Математическое образование»

Курсовая работа по дисциплине «Математический анализ»
на тему «Решение задачи Дирихле для круга методом разделения переменных
(методом Фурье)»

Направление подготовки – 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки – Математика

Выполнил студент: _____ Кислова С.А.

Группа: _____ 18ФПМ1

Руководитель:

д.п.н., профессор каф.МО _____ Яремко Н.Н.

Работа защищена с оценкой _____

Дата защиты _____

2020

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое
образование»

Направление подготовки

Утверждаю: зав. кафедрой

44.03.01 Педагогическое образование

« » _____ 20__ г

Профиль подготовки «Математика»

Задание

По КР студента Кисловой Светланы Александровны

Тема работы: Решение задачи Дирихле для круга методом разделения
переменных (методом Фурье).

Распоряжение по кафедре от « _____ » 20__ г. № _____

Срок сдачи студентом законченной работы « _____ » _____ 20__ г.

Перечень подлежащих разработке вопросов

Оператор Лапласа. Метод Фурье для однородного уравнения и однородных
граничных условий. Метод Фурье для неоднородного уравнения и однородных
граничных условий. Метод Фурье для задачи с неоднородными граничными
условиями. Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье.

Дата выдачи задания « _____ » _____ 20__ г.

Руководитель / _____

(подпись) Ф.И.О.

Задание принял к исполнению / _____

(подпись) Ф.И.О.

Содержание

Введение	3
1. Оператор Лапласа.....	5
Метод разделения переменных (метод Фурье)	
1.1 Метод Фурье для однородного уравнения и однородных граничных условий.....	8
1.2 Метод Фурье для неоднородного уравнения и однородных граничных условий.....	11
1.3 Метод Фурье для задачи с неоднородными граничными условиями.....	14
1.4 Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье.....	16
2. Практическое применение метода разделения переменных для решения задачи Дирихле для круга	
2.1 Задача 1	19
2.2. Задача 2.....	20
Заключение.....	22
Список использованной литературы.....	23

Введение

Метод разделения переменных или метод Фурье является одним из наиболее распространенных методов решения уравнений математической физики.

Этот метод применяется для решения в ограниченной области (D) с границей (σ) задачи теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = Lu + f(M, t), \\ (\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})_{(\sigma)} = g_1(M, t), \text{ где } M \in (D) \\ u|_{t=0} = g_2(M), \end{cases}$$

или задачи колебаний:

$$\begin{cases} u_{tt} = Lu + f(M, t), \\ (\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})_{(\sigma)} = g_1(M, t), \text{ где } M \in (D) \\ u|_{t=0} = g_2(M), u_t|_{t=0} = g_3(M), \end{cases}$$

Также метод Фурье применяется для решения стационарных задач.

В этих задачах $u = u(M, t)$, Lu - дифференциальный оператор. В последующих рассматриваемых заданиях будем рассматривать $Lu = \operatorname{div}(p \cdot \operatorname{grad}(u))$ или $Lu = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(u)) = \Delta u$ - оператор Лапласа.

Дифференциальное уравнение и граничные условия будем называть однородными при удовлетворяющей им функции $u = 0$. В задачах теплопроводности и колебаний дифференциальные уравнения и граничные условия однородные, если $f(M, t) = 0$ и $g_1(M, t) = 0$.

Целью исследования является описание решения задачи Дирихле для круга методом разделения переменных (методом Фурье).

Объект исследования: метод разделения переменных.

Предмет исследования: метод разделения переменных для задачи Дирихле для круга.

Для достижения поставленной цели в рамках работы необходимо решить следующие задачи:

1. Провести анализ существующих источников и привести теоритические сведения по методу разделения переменных.
2. Рассмотреть применение метода разделения переменных для однородных и неоднородных уравнений с однородными и неоднородными граничными условиями.
3. На основе проведенного анализа литературы привести решения задачи Дирихле для круга методом разделения переменных.

Теоритическая значимость исследования состоит в систематизации имеющихся в математике знаний об особенностях решения задачи Дирихле для круга методом разделения переменных.

Практическая значимость исследования заключается в том, что выявленные результаты могут быть использованы преподавателями и студентами в решении задач, которые можно привести к задаче Дирихле для круга, методом разделения переменных.

Структура работы: работа состоит из двух глав, заключения и списка литературы.

Оператор Лапласа

Оператор Лапласа – дифференциальный оператор, действующий в линейном пространстве гладких функций и обозначаемый символом Δ . Функции F он ставит в соответствие функцию $\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) F$.

Оператор Лапласа эквивалентен последовательному взятию операций градиента и дивергенции.

Градиент – вектор, показывающий направление наискорейшего возрастания некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой (скалярного поля). Например, если взять в качестве высоты поверхности Земли над уровнем моря, то её градиент в каждой точке поверхности будет показывать «направление самого крутого подъёма».

Величина (модуль) вектора градиента равна скорости роста в этом направлении. Для случая трёхмерного пространства, градиентом называется векторная функция с компонентами $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, где φ – некоторая скалярная функция координат x, y, z .

Если – функция φ n переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, то её градиентом называется n -мерный вектор $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_n} \right)$, компоненты которого равны частным производным φ по всем аргументам. Градиент обозначается $grad(\varphi)$ или с использованием оператора набла $\nabla \varphi$.

Из определения градиента следует, что: $grad(\varphi) = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z$.

Смысл градиента любой скалярной функции f в том, что его скалярное произведение с бесконечно малым вектором перемещения dx дает полный дифференциал этой функции при соответствующем изменении координат в пространстве, на котором определена f , то есть линейную часть изменения f

при смещении на dx . Применяя одну и ту же букву для обозначения функции от вектора и соответствующей функции от его координат, можно написать:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial f}{\partial x_3} dx_3 + \dots = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = (\text{grad}(f) \cdot dx).$$

Стоит здесь заметить, что поскольку формула полного дифференциала не зависит от вида координат x_i , то есть от природы параметров x вообще, то полученный дифференциал является инвариантом, то есть скаляром, при любых преобразованиях координат. Так как dx - это вектор, то градиент, вычисленный обычным образом, оказывается ковариантным вектором, то есть вектором, представленным в дуальном базисе, какой только и может дать скаляр при простом суммировании произведений координат, то есть вектором, записанным в обычном базисе.

Таким образом, выражение может быть вполне правильно и инвариантно записано как: $df = \sum_i (\partial_i f) dx^i$ или, опуская по правилу Эйнштейна знак суммы, $df = (\partial_i f) dx^i$.

Дивергенция — дифференциальный оператор, отображающий векторное поле на скалярное, который определяет для каждой точки на сколько расходится входящее и исходящее из малой окрестности данной точки поле.

Оператор дивергенции, применённый к полю F , обозначают как $\text{div } F$ или ∇F

Определение дивергенции выглядит так: $\text{div } F = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_F}{V}$, где Φ_F — поток

векторного поля F через сферическую поверхность площадью S , ограничивающую объём V . Ещё более общим, а потому удобным в применении, является определение, когда форма области с поверхностью S и объёмом V допускается любой. Единственным требованием является её нахождение внутри сферы радиусом, стремящимся к нулю. Это определение не привязано к определённым координатам.

Таким образом, значение оператора Лапласа в точке может быть истолковано как плотность источников потенциального векторного поля $\text{grad } F$ в этой точке. В декартовой системе координат оператор Лапласа часто обозначается следующим образом $\Delta = \nabla \cdot \nabla = \nabla^2$, то есть в виде скалярного произведения оператора набла на себя.

Метод разделения переменных (метод Фурье). Метод Фурье для однородного уравнения и однородных граничных условий.

Рассмотрим метод Фурье для однородного уравнения и однородных граничных условий на примере следующей задачи:

$$\begin{cases} u_1 = Lu(M, t), M \in (D), t > 0, \\ (\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})_{(\sigma)} = 0 \\ u|_{t=0} = g(M) \end{cases}$$

Решение этой задачи с помощью метода Фурье состоит из нескольких этапов.

1) Нахождение решения первого уравнения из системы в виде

$$u(M, t) = X(M) \cdot T(t). \text{ Подставим } u(M, t) = X(M) \cdot T(t) \text{ в}$$

дифференциальное уравнение задачи $u_1 = Lu(M, t), M \in (D), t > 0$:

$$\text{Разделим переменные } \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{LX(M)}{X(M)}.$$

Дробь в левой части этого равенства зависит только от t , в правой части – от точки M ; поэтому равенство возможно только тогда, когда эти дроби равны постоянной, которую мы обозначим λ .

$$\text{Тогда получим равенство: } \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{LX(M)}{X(M)} = \lambda.$$

Приравняем каждую из дробей к λ . Получаем два уравнения:

$$T'(t) = \lambda \cdot T(t)$$

$$LX(M) = \lambda \cdot X(M).$$

2) Перенос однородных граничных условий в уравнении

$$(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})_{(\sigma)} = 0 \text{ на функцию } X(M). \text{ Подставим } u(M, t) = X(M) \cdot T(t) \text{ в}$$

$$\text{граничное условие: } T(t) \cdot (\alpha \cdot X(M) + \frac{\partial X(M)}{\partial n})_{(\sigma)} = 0.$$

Если $T(t) = 0$, то решение $u(M, t) = 0$, что противоречит начальному условию. Тогда $T(t) \neq 0$, поэтому полученного равенства следует:

$$(\alpha \cdot X(M) + \beta \frac{\partial X(M)}{\partial n})_{(\sigma)} = 0.$$

Таким образом, для отыскания функции $X(M)$ получили дифференциальное уравнение $LX(M) = \lambda \cdot X(M)$ и граничное условие

$$(\alpha \cdot X(M) + \beta \frac{\partial X(M)}{\partial n})_{(\sigma)} = 0.$$

$$3) \text{ Решение задачи для функции } X(M) : \begin{cases} LX(M) = \lambda \cdot X(M) \\ (\alpha \cdot X(M) + \beta \frac{\partial X(M)}{\partial n})_{(\sigma)} = 0 \end{cases}.$$

Для самосопряженного оператора L в результате решения этой задачи получим базис из собственных функций $X_k(M)$, ортогональных с весом ρ , и систему собственных значений λ_k ($k=1,2,\dots$). Где оператор L называют самосопряженным в евклидовом пространстве, если $(Lx, y) = (x, Ly)$.

$$4) \text{ Нахождение функции } T_k'(t) \text{ из уравнения } T_k'(t) = \lambda_k \cdot T_k(t).$$

Запишем уравнение в виде $\frac{dT_k(t)}{dt} = \lambda_k \cdot T_k(t)$. Разделим переменные

$$\frac{dT_k(t)}{dt} = \lambda_k \cdot dt \text{ и проинтегрируем это равенство. Тогда получим}$$

$$\ln T_k(t) = \lambda_k t + \ln C_1 \text{ или } T_k(t) = C_k e^{\lambda_k t}.$$

$$5) \text{ Нахождение искомого решения в виде}$$

$$u(M, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(M, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(M) \cdot T_k(t).$$

Функции $u_k(M, t) = X_k(M) \cdot T_k(t)$ были найдены из дифференциального уравнения и граничных условий задачи. В силу линейности и однородности дифференциального уравнения и граничных условий конечная сумма этих функций также будет им удовлетворять. Также это справедливо для суммы ряда:

$$u(M, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(M, t), \text{ но при определенных условиях (например, если}$$

вычисление производных от функции $u(M, t)$ фигурирующих в уравнении, можно совершать при помощи почленного дифференцирования ряда).

$$\text{Для функции: } u(M, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(M, t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(M) \cdot T_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(M) \cdot C_k e^{\lambda_k t}$$

найдем коэффициенты C_k так, чтобы функция $u(M, t)$

$$\text{удовлетворяла еще и начальному условию } u \Big|_{t=0} = \sum_{k=1}^{\infty} C_k X_k(M) = g(M).$$

Таким образом, мы получим ряд Фурье по ортогональной системе функций X_k ; коэффициенты Фурье C_k найдем по формуле

$C_k = \frac{(g, X_k)}{(X_k, X_k)}$. В частном случае, когда функция $g(M)$ является линейной комбинацией функций $X_k(M)$, удобнее находить C_k методом сравнения коэффициентов при функциях $X_k(M)$.

Метод разделения переменных (метод Фурье). Метод Фурье для неоднородного уравнения и однородных граничных условий.

В данном параграфе рассмотрим метод разделения переменных для задач:

$$\begin{cases} u_t = Lu + f(M, t) \\ (\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})_{(\sigma)} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(M) \end{cases},$$

$$\begin{cases} u_{tt} = Lu + f(M, t) \\ (\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})_{(\sigma)} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(M), u_t|_{t=0} = \psi(M) \end{cases}$$

В этих задачах дифференциальное уравнение является неоднородным, и граничные условия – однородными.

Рассмотрим метод Фурье на примере второй задачи
$$\begin{cases} u_{tt} = Lu + f(M, t) \\ (\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})_{(\sigma)} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(M), u_t|_{t=0} = \psi(M) \end{cases}.$$

Решение состоит из нескольких этапов, как и в предыдущем параграфе.

1) Нахождение собственных функций $X_k(M)$ задачи
$$\begin{cases} LX = \lambda \cdot X \\ (\alpha X + \beta \frac{\partial X}{\partial n})_{(\sigma)} = 0 \end{cases}.$$

Данная система была рассмотрена в пункте 3 предыдущего параграфа. Ее решением является система ортогональных собственных функций $X_k(M)$ и система собственных значений λ_k ($k=1,2,\dots$).

2) Разложение в ряд Фурье по системе $X_k(M)$ всех функций рассматриваемой нами задачи:

$$u(M, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(M)$$

$$f(M, t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \cdot X_k(M), \text{ где } f_k = \frac{(f, X_k)}{(X_k, X_k)}$$

$$\varphi(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \cdot X_k(M), \text{ где } \varphi_k = \frac{(\varphi, X_k)}{(X_k, X_k)}$$

$$\psi(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \cdot X_k(M), \text{ где } \psi_k = \frac{(\psi, X_k)}{(X_k, X_k)}.$$

Коэффициенты $T_k(t)$ неизвестны, но мы найдем их далее.

3) Подстановка рядов для функций $u(M, t)$, $f(M, t)$, $\varphi(M)$, $\psi(M)$ в

$$\begin{cases} u_{tt} = Lu + f(M, t) \\ (\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})_{(\sigma)} = 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(M), u_t|_{t=0} = \psi(M) \end{cases}$$

а) подстановка рядов в дифференциальное уравнение

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k''(t) \cdot X_k(M) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cdot LX_k(M) + \sum_{k=0}^{\infty} f_k(t) \cdot X_k(M).$$

Учтем, что $LX_k(M) = \lambda_k X_k(M)$, и сравнивая коэффициенты при $X_k(M)$, мы получим дифференциальные уравнения для функций $T_k(t)$: $T_k''(t) = T_k(t) \cdot \lambda_k + f_k(t)$;

б) подстановка рядов в начальные условия:

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(0) \cdot X_k(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \cdot X_k(M) \Rightarrow T_k(0) = \varphi_k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k'(0) \cdot X_k(M) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \cdot X_k(M) \Rightarrow T_k'(0) = \psi_k.$$

Отметим, что граничные условия были учтены при отыскании функций $X_k(M)$. Таким образом, мы получили следующую задачу для функций $T_k(t)$:

$$\begin{cases} T_k''(t) = T_k(t) \cdot \lambda_k + f_k(t) \\ T_k(0) = \varphi_k, T_k'(0) = \psi_k \end{cases}$$

4) Нахождение решений $T_k(t)$ полученной задачи $\begin{cases} T_k''(t) = T_k(t) \cdot \lambda_k + f_k(t) \\ T_k(0) = \varphi_k, T_k'(0) = \psi_k \end{cases},$

тогда запись искомого решения будет $u(M, t) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t) \cdot X_k(M).$

Метод разделения переменных (метод Фурье). Метод Фурье для задачи с неоднородными граничными условиями.

В этом параграфе мы будем рассматривать задачи:

$$\begin{cases} u_t = Lu + f(M, t), M \in (D) \\ (\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})_{(\sigma)} = g_1(M, t) \quad , \\ u|_{t=0} = g_2(M) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_{tt} = Lu + f(M, t), M \in (D) \\ (\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n})_{(\sigma)} = g_1(M, t) \quad . \\ u|_{t=0} = g_2(M), u_t|_{t=0} = g_3(M) \end{cases}$$

Здесь (σ) – граница области (D) ; α, β одновременно не равны 0.

Если $\beta = 0$, то получаем граничное условие первого рода $u|_{\sigma} = g_1(M, t) / \alpha$.

Если $\alpha = 0$, то получаем граничное условие второго рода $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\sigma} = g_1(M, t) / \beta$.

Если $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$, то у нас получится граничное условие третьего рода.

Пусть область (D) – одномерная, то есть отрезок $[a, b]$; тогда граница σ состоит из двух точек $x = a, x = b$. Записывая граничные условия, мы учтем, что:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x} \text{ при } x = a, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ при } x = b.$$

Поэтому граничные условия примут вид:

$$\begin{cases} (\alpha_1 \cdot u - \beta_1 \cdot u'_x)|_{x=a} = g_1(t) \\ (\alpha_2 \cdot u + \beta_2 \cdot u'_x)|_{x=b} = g_2(t) \end{cases}.$$

Если на одном из концов интервала (a, b) , например в точке $x = a$, в операторе $Lu = Au'' + Bu' + Cu$ функции $A(x)$ или $B(x)$ не определены или $A(x) = 0$, то граничные условия будут иметь вид:

$$\begin{cases} |u|_{x=a} < \infty \\ (\alpha \cdot u + \beta \cdot u'_x) = g(t) \end{cases}.$$

Условие выражает $|u|_{x=a} < \infty$ естественное требование ограниченности решения.

Для решения задачи с неоднородными граничными условиями необходимо привести неоднородные граничные условия к однородным, а затем применить метод разделения переменных. Таким образом, следующий алгоритм решения:

- 1) Найти какую-нибудь функцию $w(x, t)$, удовлетворяющую неоднородным граничным условиям.

В зависимости от типа граничных условий и будем искать эту функцию в виде:

$$\text{а) для граничных условий вида } \begin{cases} (\alpha_1 \cdot u - \beta_1 \cdot u'_x)|_{x=a} = g_1(t) \\ (\alpha_2 \cdot u + \beta_2 \cdot u'_x)|_{x=b} = g_2(t) \end{cases} :$$

$w(x, t) = \begin{cases} cx^2 + dx, (1) \\ cx + d, (2) \end{cases}$, уравнение (1) получается, если $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; а (2) – в остальных случаях.

$$\text{б) для граничных условиях вида } \begin{cases} |u|_{x=a} < \infty \\ (\alpha \cdot u + \beta \cdot u'_x) = g(t) \end{cases} : w(x, t) = \begin{cases} cx, (1) \\ c, (2) \end{cases} ,$$

уравнение (1) получается, если $\alpha = 0$; а (2) – в остальных случаях.

При подстановке функции $w(x, t)$ в граничные условия найдем

$$\text{коэффициенты } c, d \text{ для условий } \begin{cases} (\alpha_1 \cdot u - \beta_1 \cdot u'_x)|_{x=a} = g_1(t) \\ (\alpha_2 \cdot u + \beta_2 \cdot u'_x)|_{x=b} = g_2(t) \end{cases} \text{ или коэффициент}$$

$$c \text{ для условий } \begin{cases} |u|_{x=a} < \infty \\ (\alpha \cdot u + \beta \cdot u'_x) = g(t) \end{cases}.$$

- 2) Решение первоначальной задачи находим в виде: $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$

И подставляем его в дифференциальное уравнение, граничные условия и начальные условия. В результате получим задачу для функции $v(x, t)$ с однородными граничными условиями.

- 3) Решить задачу для функции $v(x, t)$ методом Фурье, изложенным ранее.

Метод разделения переменных (метод Фурье). Решение задачи Дирихле для круга методом Фурье

Пусть дан круг радиусом R с центром в начале координат (Рисунок 1).

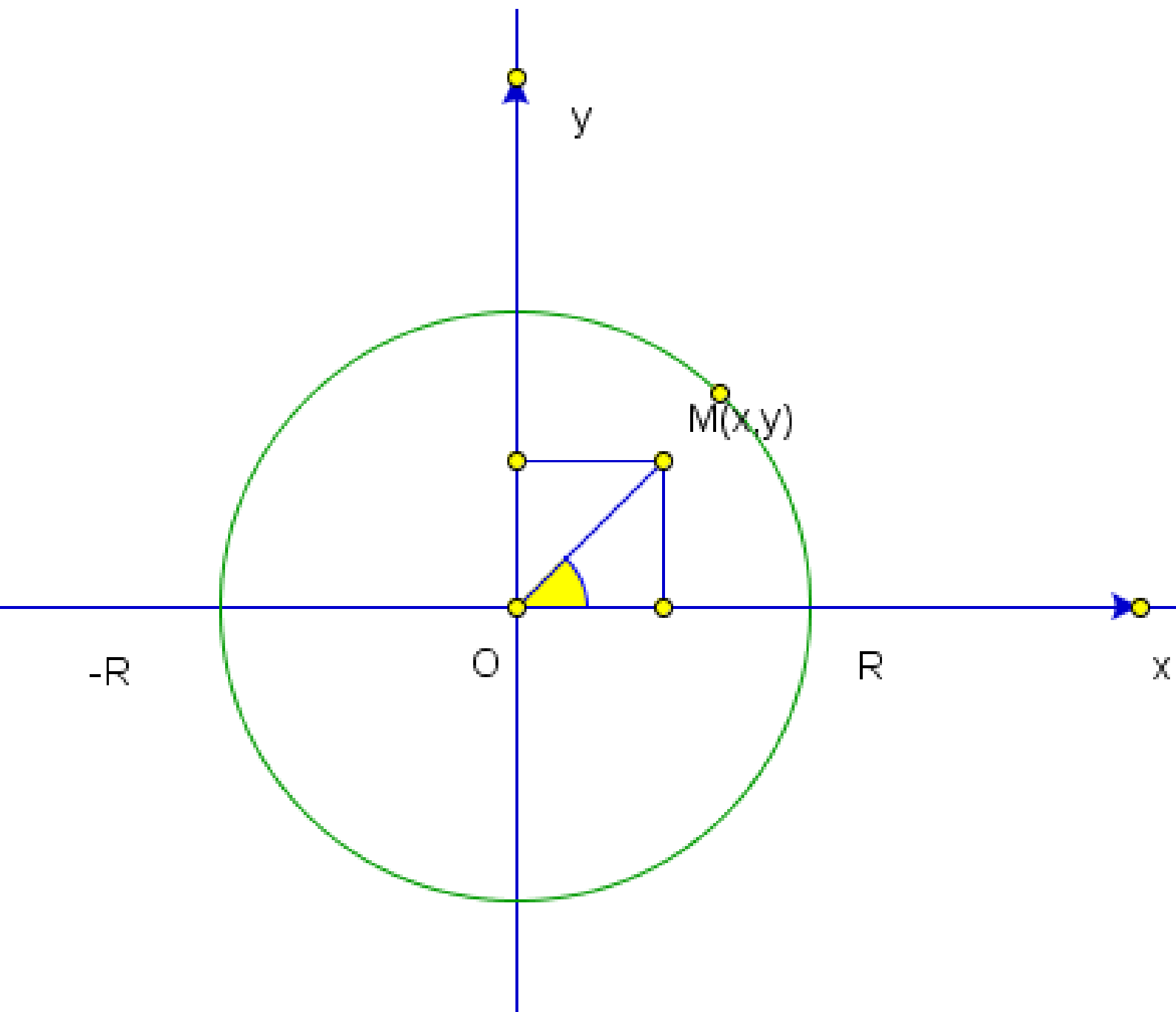


Рисунок 1.

Мы будем искать функцию $U(r, \varphi)$, гармоническую в круге и удовлетворяющую на его окружности условию $U|_{r=R} = f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ - заданная функция, непрерывная на окружности. Искомая функция должна удовлетворять в круге уравнению Лапласа $r^2 U''_{rr} + r U'_r + U''_{\varphi\varphi} = 0$.

Решаем уравнение методом Фурье. Предположим, что частное решение ищется в виде $U = Q(r) \cdot T(\varphi)$.

Тогда получим $r^2 \cdot Q''(r) \cdot T(\varphi) + r \cdot Q'(r) \cdot T(\varphi) + Q(r) \cdot T''(\varphi) = 0$.

Воспользуемся методом разделения переменных:

$$\frac{T''(\varphi)}{T(\varphi)} = -\frac{r^2 \cdot Q''(r) + r \cdot Q'(r)}{Q(r)}.$$

Приравнявая каждую часть полученного равенства к постоянной k^2 , мы получим два обыкновенных дифференциальных уравнения:

$$T''(\varphi) + k^2 T(\varphi) = 0, \quad r^2 \cdot Q''(r) + r \cdot Q'(r) - k^2 Q(r) = 0.$$

Из этих уравнений, если $k=0$, получим:

$$T(\varphi) = A + B\varphi$$

$$Q(r) = C + D \ln r$$

Если $k > 0$, то $T(\varphi) = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi$.

Решение второго уравнения будем искать в виде $Q(r) = r^m$, что даст

$r^2 m(m-1)r^{m-2} + rmr^{m-1} - k^2 r^m = 0$ или $r^m(m^2 - k^2) = 0$, то есть $m = \pm k$. Отсюда следует уравнение $Q(r) = Cr^k + Dr^{-k}$.

Заметим, что $U(r, \varphi)$ как функция от φ есть периодическая функция с периодом 2π , так как $U(r, \varphi) = U(r, \varphi + 2\pi)$. Поэтому из равенства $r^2 U''_{rr} + r U'_r + U''_{\varphi\varphi} = 0$ следует, что $B=0$, а в равенстве $T(\varphi) = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi$ k может принимать одно из значений: $1, 2, 3, \dots$ ($k > 0$).

Далее в равенствах $Q(r) = C + D \ln r$ и $Q(r) = Cr^k + Dr^{-k}$ должно быть $D = 0$, так как в противном случае функция будет иметь разрыв в точке $r = 0$ и не будет гармоническим в круге.

Таким образом, мы получим бесчисленное множество частных решений уравнения $U_{xx}'' + U_{yy}'' = F(x, y, U, U_x', U_y')$, непрерывных в круге, которые мы можем записать в виде: $U_0(r, \varphi) = \frac{A_0}{2}; U_n(r, \varphi) = (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \cdot r^n, n = 1, 2, \dots$

Теперь составим функцию: $U(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \cdot r^n$.

Эта функция вследствие линейности и однородности уравнения Лапласа также служит его решением. Нам осталось только определить величины A_0, A_n, B_n так, чтобы эта функция удовлетворяла условию: $U|_{r=R} = f(\varphi)$, то есть

$$f(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \cdot R^n. \text{ Здесь мы имеем разложение функции } f(\varphi)$$

в ряд Фурье в промежутке $[-\pi; \pi]$. В силу известных формул, мы можем найти:

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau, \quad A_n = \frac{1}{\pi R^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos n\tau d\tau, \quad B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin n\tau d\tau.$$

Таким образом, решение уравнения Лапласа в круге нашли в виде ряда

$$U(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) \cdot r^n \text{ с коэффициентами } A_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) d\tau,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi R^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \cos n\tau d\tau, \quad B_n = \frac{1}{\pi R^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \sin n\tau d\tau.$$

Перепишем это решение в виде $U(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R} \right)^n \cos n(\tau - \varphi) \right] d\tau$.

Теперь упростим полученный результат. Пусть $\frac{r}{R} = \rho, \tau - \varphi = t$. Представим

$$\text{выражение в скобках в виде: } \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n \cos nt = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos nt - \frac{1}{2}.$$

Рассмотри ряд: $\sum_{n=0}^{\infty} (\rho e^{it})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos nt + i \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \sin nt$.

Этот ряд сходится при $\rho < 1$, и его сумма равна:

$$\frac{1}{1 - \rho e^{it}} = \frac{1}{1 - \rho \cos t - i \rho \sin t} = \frac{1 - \rho \cos t + i \rho \sin t}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2}$$

Отсюда следует $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n \cos nt - \frac{1}{2} = \frac{1 - \rho \cos t}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2} - \frac{1}{2} = \frac{1 - \rho^2}{2(1 - 2\rho \cos t + \rho^2)}$.

Если вернемся к прежним обозначениям, то получим:

$$U(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau) \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau.$$

Таким образом, получим решение задач Дирихле для круга в виде интеграла Пуассона.

Практическое применение метода разделения переменных для решения задачи Дирихле для круга.

Задача 1.

Решить задачу Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в круге $0 \leq r < 1, 0 \leq \varphi < 2\pi$ (r, φ)- полярные координаты, на границе которого искомая функция $u(r, \varphi)$ имеет следующие значения: $u(1, \varphi) = \cos 9\varphi$

Решение этой задачи по методу Фурье получается в виде:

$$u(r, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi).$$

Здесь: A_n, B_n - коэффициенты, определяемые по граничным условиям.

Обозначим $g(\varphi) = u(1, \varphi)$.

$$\text{При } r = 1, \quad u(1, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = g(\varphi).$$

То есть, разложение функции $u(r, \varphi)$ в ряд Фурье отличается от разложения функции $u(1, \varphi) = g(\varphi)$ множителями r^n . Поэтому, чтобы получить решение искомой задачи, необходимо дописать множители при соответствующих членах разложения функции $u(1, \varphi) = g(\varphi)$.

В задании граничное условие имеет вид $u(1, \varphi) = \cos 9\varphi$. Поэтому решение задачи Дирихле будет $u(r, \varphi) = r^9 \cos 9\varphi$.

Ответ: $u(r, \varphi) = r^9 \cos 9\varphi$.

Задача 2.

Найти стационарное распределение температуры на тонкой однородной круглой пластине радиусом R , верхняя половина которой поддерживается при температуре 1° , а нижняя – при температуре 0° .

Решение задачи можно выписать в виде интеграла Пуассона, который мы получили в предыдущем параграфе.

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\tau - \varphi) + r^2} d\tau.$$

Пусть точка (r, φ) расположена в верхнем полукруге, то есть $0 < \varphi < \pi$; тогда

$\tau - \varphi$ изменяется от $-\varphi$ до $\pi - \varphi$, и этот интервал длины π не содержит точек $\pm \pi$. Поэтому введем подстановку $\operatorname{tg} \frac{\tau - \varphi}{2} = t$, откуда $\cos(\tau - \varphi) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, $d\tau = \frac{2dt}{1 + t^2}$.

$$\text{Тогда получим: } u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}^{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{2}} \frac{R^2 - r^2}{(R - r)^2 + (R + r)^2 t^2} dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{R + r}{R - r} t \right) \Bigg|_{-\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}}^{\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}$$

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{R + r}{R - r} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{R + r}{R - r} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\frac{R + r}{R - r} \left(\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right)}{1 - \left(\frac{R + r}{R - r} \right)^2} = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R^2 - r^2}{2Rr \sin \varphi}$$

$$\text{Или } \operatorname{tg}(u\pi) = -\frac{R^2 - r^2}{2Rr \sin \varphi}.$$

Так как правая часть отрицательна, то u при $0 < \varphi < \pi$ удовлетворяет

неравенствам $\frac{1}{2} < u < 1$. Для этого случая получаем решение $\operatorname{tg}(\pi - u\pi) = \frac{R^2 - r^2}{2Rr \sin \varphi}$,

$$\text{или } u = 1 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R^2 - r^2}{2Rr \sin \varphi}, 0 < \varphi < \pi.$$

Если же точка расположена в нижнем полукруге, то есть $\pi < \varphi < 2\pi$, то интервал $(-\varphi, \pi - \varphi)$ изменения $\tau - \varphi$ содержит точку $-\pi$, но не содержит 0, и мы можем сделать подстановку $\operatorname{ctg} \frac{\tau - \varphi}{2} = t$, откуда $\cos(\tau - \varphi) = \frac{-1 + t^2}{1 + t^2}$, $d\tau = -\frac{2dt}{1 + t^2}$.

Тогда для этих значений φ имеем:

$$u(r, \varphi) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2}}^{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \frac{R^2 - r^2}{(R + r)^2 + (R - r)^2 t^2} dt = -\frac{1}{\pi} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{R - r}{R + r} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) + \operatorname{arctg} \left(\frac{R - r}{R + r} \operatorname{ctg} \frac{\varphi}{2} \right) \right].$$

Проводя аналогичные преобразования, найдем u .

$$u = -\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{R^2 - r^2}{2Rr \sin \varphi}, \pi < \varphi < 2\pi.$$

Так как правая часть теперь положительна ($\sin \varphi < 0$), то $0 < u < \frac{1}{2}$.

Ответ: $0 < u < \frac{1}{2}$

Заключение

В данной работе изучался способ решения задач Дирихле для круга методом разделения переменных.

В рамках проделанной нами работы были рассмотрены следующие аспекты: метод Фурье для однородного уравнения и однородных граничных условий, Метод Фурье для неоднородного уравнения и однородных граничных условий, Метод Фурье для задачи с неоднородными граничными условиями. Также мы рассмотрели метод Фурье для задачи Дирихле для круга. Помимо этого, были приведены примеры различных задач Дирихле для круга, решаемых методом разделения переменных.

В ходе работы цель и соответствующие ей задачи были достигнуты.

Подводя общую черту, можно сказать, что изучение способа решения задач Дирихле для круга методом разделения переменных является важной областью в математике, поскольку они помогают разрешать задачи во многих областях, включая физику.

Список использованной литературы

1. Арсенин В.Я. Методы математической физики и специальные функции / В.Я. Арсенин. М.: Наука, 1994
2. Голоскопов Д.П. Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple / Д.П. Голоскопов. СПб., 2004
3. Минькова Р.М. Математическая физика. Сборник типовых расчетов. / Р.М. Минькова, В. В. Трещева. Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2007 56 с.
4. Минькова Р.М. Методы математической физики: в 2 ч. / Р.М. Минькова, Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008 Ч.1.
5. Леликова Е.Ф. Методы математической физики: в 2 ч. / Е.Ф. Леликова, Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2008 Ч.2.
6. Минькова Р.М. Функции комплексного переменного и операционное исчисление: учебное пособие /Р.М. Минькова, Екатеринбург: УГТУ-УПИ, 2010
7. Минькова Р.М. Математическая физика в примерах Р.М. Минькова, Екатеринбург: УрФУ, 2012
8. Методы математической физики: Учебное пособие / Минькова Р.М., 2013
9. Уравнения математической физики и приближенные методы решений дифференциальных уравнений: Учебное пособие/ А. М. Завьялов, Р.Б. Карасева, 2002