МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Разработка элективного курса «Обратные тригонометрические функции»»

Студент 20.05.24 Канеева Ильнара Наильевна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель 20.05.24 Никитин Н.Д.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр 15.06.24 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 24.05.24 № 11)

Заведующий кафедрой 24.05.24 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 20.06.24 № 4)

Секретарь ГЭК 20.06.24 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2024

Оглавление

Введение 3

Глава 1. Обратные тригонометрические функции 7

1.1 Обратные тригонометрические функции $y = arcsinx, y = arccosx, y = arctgx, y = arcctgx$ 7

1.2 Методы решения уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции 7

1.3 Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями в олимпиадных задачах 25

Глава 2. Разработка элективного курса «Обратные тригонометрические функции» 33

2.1 Место и роль элективных курсов в системе школьного обучения 33

2.2 Тематическое планирование элективного курса «Обратные тригонометрические функции» 37

2.3 Разработка конспектов уроков, содержащихся в элективном курсе по теме «Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции» 42

2.4 Задачный материал для реализации элективного курса по теме «Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции» для подготовки к олимпиадам по математике 51

Заключение 58

Список используемых источников 61

Введение

В современном обществе, на этапе формирования личности основным моментом является её всестороннее развитие, а именно развитие её логического, нестандартного мышления. Формирование универсальных учебных действий способствует дальнейшей адаптации ребенка в жизни и профессиональной деятельности.

В последнее время происходит значительная трансформация образования в целом. В частности, трансформация математического образования, описанная в стандарте основного общего и полного образования, ориентирована на формирование знаний, умений и навыков учащихся, которые способствуют развитию конкурентоспособной личности высокого уровня.

Процесс обучения математике в школе с каждым годом порождает необходимость в углубленном её изучении. Это связано не только со стремлением достойного прохождения выпускных экзаменов (базовой и профильной математики), но и с тем, что при выборе той или иной профессиональной деятельности выпускника, на любом профиле обучения, одним из базовых предметов высшего учебного заведения является математика. Стоит отметить, что на современном этапе развития высшего образования, практически все вузы России, дают возможность получения высокого результата по вступительным экзаменам по математике за счет решения олимпиад. Российский совет олимпиад школьников ежегодно утверждает перечень олимпиад (текущий приказ Министерства науки и высшего образования Российской Федерации № 823 от 28.08.2023), которые способствуют расширению возможностей школьника выбрать желаемую специальности и получить достойное образование без лишних затруднений.

Однако, процесс подготовки к математическим олимпиадам на школьном уровне остается не отработанным и не структурированным.

В частности, тема тригонометрии в школьном курсе математики, в рамках классно-урочной системы, отражает лишь начальные сведения и дает базовые понятия о тригонометрических и обратных тригонометрических функция и действиях над ними.

Что касается заданий олимпиадного характера, стоит отметить, наличие в них сложных математических действий, рациональных переходов и вычислений, которые в школьном курсе алгебры и началах анализа практически не рассматриваются. Теория обратных тригонометрических функций и вовсе находится в стороне от изучения и, как правило, для ее изучения отводится минимальное количество часов классно-урочной системы. И все же, задания, связанные с обратными тригонометрическими функциями в олимпиадах по математики, присутствуют в достаточном количестве, что порождает необходимость в основательном и систематическом их изучении.

Таким образом, все выше сказанное требует тщательно спланированной учебной деятельности школьников, которая будет способствовать развитию знаний, умений и навыков не только на уровне школьного обучения, но и отвечать принципам развития высокого уровня математической культуры. Отметим, что для достижения высокого результата обучения в области математики педагогу необходимо планировать изучения профильной математики при помощи элективных курсов, темы которых будут заинтересовывать школьников и мотивировать на углубленное изучение математики в целом.

Важно отметить, что элективные курсы на старших этапах обучения также способствуют формированию профессиональной грамотности у учащихся, помогая им лучше понять особенности выбранной специализации и подготовиться к будущей профессиональной деятельности. Кроме того, элективные курсы способствуют развитию критического мышления, аналитических навыков и умений решать сложные задачи, что важно для успешной адаптации к быстро меняющемуся миру.

В рамках элективных курсов учащиеся также могут получить дополнительные знания и навыки, которые помогут им успешно поступить в высшие учебные заведения или выбрать профессиональную карьеру. Благодаря широкому выбору элективных курсов, учащиеся имеют возможность изучать интересующие их предметы более глубоко и основательно, что способствует их личностному развитию и раскрытию потенциала.

Кроме того, элективные курсы могут быть отличной площадкой для обмена знаниями и опытом между учащимися, что способствует развитию коммуникационных навыков и умений работы в коллективе. Таким образом, элективные курсы играют важную роль в процессе обучения, помогая учащимся не только расширить свои знания, но и развить ключевые компетенции, необходимые для успешной профессиональной деятельности.

Все выше сказанное отражает актуальность проблемы исследования в рамках выпускной квалификационной работы.

Таким образом, можно выделить проблему исследования - это недостаточная разработанность методических основ изучения обозначенного учебного материала.

Объектом исследования является процесс обучения алгебре и началам математического анализа общеобразовательной школы.

Предмет исследования: методика обучения учащихся теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» в курсе алгебры и начал математического анализа в общеобразовательной школе.

Цель исследования заключается в выявлении методических особенностей обучения теме «Обратные тригонометрические функции и их свойства» в курсе алгебры и начал математического анализа общеобразовательной школы в рамках элективного курса.

Для реализации поставленной цели необходимо решить ряд задач, а именно:

1. Изучить особенности понятия обратных тригонометрических функций $y = arcsinx, y = arccosx, y = arctgx, y = arcctgx$

2. Изучить методы решения уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции

3. Проанализировать уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями в олимпиадных задачах

4. Изучить место и роль элективных курсов в системе школьного обучения.

5. Разработать тематическое планирование элективного курса «Обратные тригонометрические фнкции».

6. Разработать конспект урока на тему «Решение уравнений и неравенств, содержащие обратные тригонометрические функции».

7. Разработать банк заданий для реализации элективного курса по теме «Решение уравнений и неравенств, содержащие обратные тригонометрические функции».

Методы исследования: изучение научно-методической литературы, анализ учебных материалов, изучение опыта работы педагогов современной школы, моделирование и структуризация задачного материала.

Практическая значимость работы заключается в том, что она может быть использована в качестве методического пособия для учителей при планировании и проведении уроков в рамках элективных курсов по математике.

Структура работы состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

Глава 1. Обратные тригонометрические функции

1.1 Обратные тригонометрические функции $y = arcsinx,\ y = arccosx, y = arctgx, y = arcctgx$

Обратные тригонометрические функции — это арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс.

Сначала дадим определения.

Арксинусом числа а называется число$\varphi \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, такое, что $\sin \varphi = a$. Или, можносказать, чтоэтотакойугол φ, принадлежащийотрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синускоторогоравенчислуа.

Арккосинусом числа а называется число$\varphi \in [0; \pi]$, такое, что $\cos \varphi = a$.

Арктангенсом числа а называется число $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, такое, что $\text{tg}\, \varphi = a$.

Арккотангенсом числа а называется число $\varphi \in (0; \pi)$, такое, что $\text{ctg}\, \varphi = a$.

К примеру, решим уравнение $\sin x = \frac{1}{4}$.

Понятно, что его решения соответствуют точкам на тригонометрическом круге, координата которых равна $\frac{1}{4}$ (рис. 1). И, что это не табличное значение синуса. Как же оформить решения?

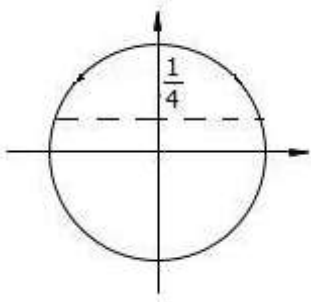


Рисунок 1 – Графическое решение тригонометрического уравнения

Нужно ввести новую функцию, обозначающую угол, синус которого равен данному числу а. Да, все уже догадались. Это арксинус.

Угол, принадлежащий отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус которого равен $\frac{1}{4}$ — это арксинус одной четвертой. И значит, серия решений нашего уравнения,

соответствующая правой точке на тригонометрическом круге, — это $\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n,\ \ n\in Z$.

А вторая серия решений нашего уравнения – это $\pi-\arcsin\frac{1}{4}+2\pi n,\ \ n\in Z$.

Осталось узнать – зачем в определении арксинуса упоминается, что это угол, принадлежащий отрезку $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$?

Углов, синус которых равен, например, $\frac{1}{4}$, бесконечно много. Нам нужно выбрать какой-то один из них. Мы выбираем тот, который лежит на отрезке $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

Посмотрим на тригонометрический круг (рис.2). Заметим, что на отрезке $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ каждому углу соответствует определенное значение синуса, причем только одно. И наоборот, любому значению синуса из отрезка$[-1;1]$ отвечает одно-единственное значение угла на отрезке $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$. Это значит, что на отрезке $[-1;1]$ можно задать функцию$y=arcsinx$ принимающую значения от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$.

Вспомним определение. Арксинусом числа a называется число $\varphi\in[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, такое, что $\sin\varphi=a$.

Обозначение: $\varphi=\arcsin a$ Область определения арксинуса – отрезок $[-1;1]$. Область значений – отрезок $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$.

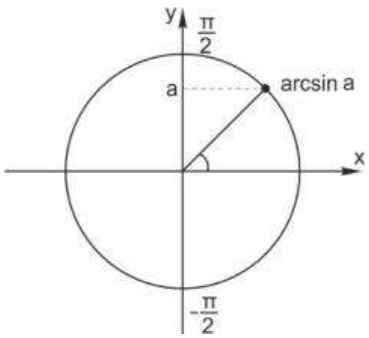


Рисунок 2 – Графическое представление значений арксинуса

Построим график функции $y=\arcsin x$.

Отмечаем значения x по горизонтальной оси, а значения y — по вертикальной.

Поскольку $x = \sin y$, следовательно, x лежит в пределах от -1 до 1.

Следовательно, областью определения функции y = arcsin x является отрезок $[-1; 1]$.

y принадлежит отрезку $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Это значит, что областью значений функции y = arcsin x является отрезок $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

График функции y=arcsinx весь помещается в области, ограниченной линиями $x = -1; x = 1; y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$.

По определению, арксинус нуля — это такое число из отрезка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус которого равен нулю. Что же это за число? Очевидно, что это ноль.

Аналогично, арксинус единицы — это такое число из отрезка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус которого равен единице. Очевидно, это $\frac{\pi}{2}$.

Продолжаем: $\arcsin\frac{1}{2}$ — это такое число из отрезка $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, синус которого равен $\frac{1}{2}$. Да, это $\frac{\pi}{6}$.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = \arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$

Строим график функции $y = \arcsin x$ (рис. 3).

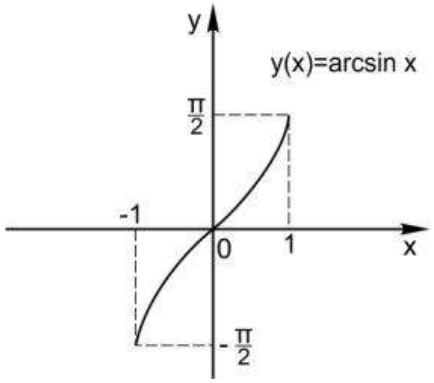


Рисунок 3 – График функции $y = \arcsin x$

Свойства функции $y = \arcsin x$.

1. Область определения $D(y)$: $x \in [-1; 1]$.

2. Область значений $E(y)$: $y \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

3. $\arcsin(-x) = \arcsin x$, то есть эта функция является нечетной. Ее график симметричен относительно начала координат.

4. Функция $y = \arcsin x$ монотонно возрастает. Ее наименьшее значение, равное $-\frac{\pi}{2}$, достигается при x=−1, а наибольшее значение, равное$\frac{\pi}{2}$, при x=1.

5. Что общего у графиков функций $y = \sin x$ и $y = \arcsin x$? Как-будтоони «сделаны по одному шаблону» — так же, как правая ветвь функции $y = x^2$ и график функции $y = \sqrt{x}$, или как графики показательной и логарифмической функций?

Предположим, что мы из обычной синусоиды вырезали небольшой фрагмент от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$, а затем развернули его вертикально — и мы получим график арксинуса.

То, что для функции $y = \sin x$ на этом промежутке — значения аргумента, то для арксинуса будут значения функции. Ведь синус и арксинус — взаимно-обратные функции.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Аналогично, определим функцию $y = \arccos x$. Только отрезок нам нужен такой, на котором каждому значению угла соответствует свое значение косинуса, а зная косинус, можно однозначно найти угол (рис. 4). Нам подойдет отрезок $[0; \pi]$.

Арккосинусом числа a называется число $\varphi \epsilon\ [0; \pi]$, такое, что $\cos \varphi = a$.

Обозначение: $\varphi = \arccos a$. Область определения арккосинуса — отрезок $[-1; 1]$. Область значений — отрезок $[0; \pi]$.

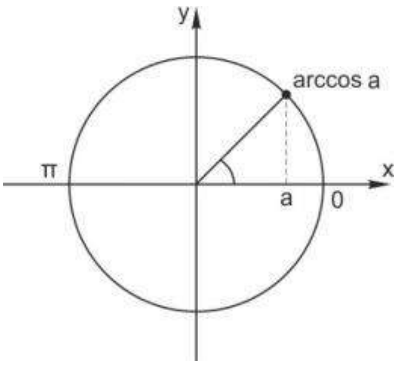


Рисунок 4 – Графическое представление значений арккосинуса

Отрезок $[0;\pi]$ выбран потому, что на нём каждое значение косинуса принимается только один раз. Иными словами, каждому значению косинуса, от -1 до 1, соответствует одно-единственное значение угла из промежутка $[0;\pi]$.

Арккосинус является функцией общего вида. Но мы можем использовать следующее очевидное соотношение:

$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$

Построим график функции $y = \arccos x$.

Нам нужен такой участок функции $y = \cos x$, на котором она монотонна, то есть принимает каждое свое значение ровно один раз.

Выберем отрезок $[0;\pi]$. На данном отрезке функция $y = \cos x$монотонно убывает, то есть соответствие между множествами $[0;\pi]$ и $[-1;1]$ взаимно однозначно. Каждому значению x соответствует свое значение y. На этом отрезке существует функция, обратная к косинусу, то есть функция $y = \arccos x$.Заполним таблицу, пользуясь определением арккосинуса.

Арккосинусом числа x, принадлежащего промежутку $[-1;1]$, будет такое число y, принадлежащее промежутку $[0;\pi]$, что $x = \cos y$.

Значит, $arcos\ 1 = 0$, поскольку $\cos 0 = 1$;

$arcos\ (-1) = \pi$, так как $\cos\pi = -1$;

$arcos\ 0 = \frac{\pi}{2}$, так как $\cos\frac{\pi}{2} = 0$;

$arcos\ \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$, так как $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

x	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
$y = \arccos x$	π	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	0

Графикфункции $y = \arccos x$представлен на рисунке 5.

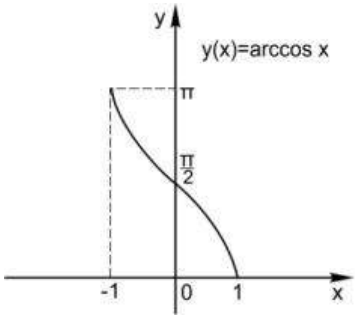


Рисунок 5 – График функции $y = arccos\, x$

Свойства функции $y = \arccos x$.

1. Область определения $D(y)$: $x \in [-1; 1]$.

2. Область значений $E(y)$: $y \in [0; \pi]$.

3. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.

Эта функция общего вида — она не является ни четной, ни нечетной.

4. Функция является строго убывающей. Наибольшее значение, равное π, функция y = arccosx принимает при $x = -1$, а наименьшее значение, равное нулю, принимает при $x = -1$.

5. Функции $y = \cos x$ и $y = \arccos x$ являются взаимно обратными.

Следующие – арктангенс и арккотангенс.

Арктангенсом числа a называется число $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, такое, что $tg\ \varphi\ = a$.

Обозначение: $\varphi = arctg\ a$. Область определения арктангенса – промежуток $(-\infty; +\infty)$. Область значений – интервал $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

В определении арктангенса выколоты концы промежутка — точки $\pm\frac{\pi}{2}$, так как в этих точках тангенс не определён. Не существует числа a, равного тангенсу какого-либо из этих углов (рис. 6).

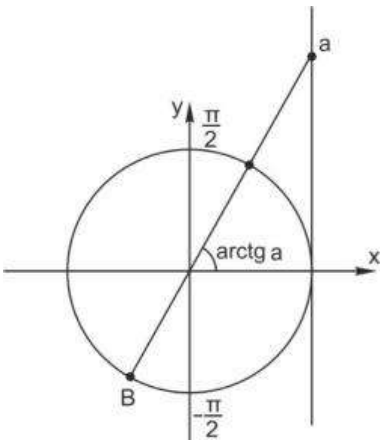


Рисунок 6 – Графическое представление значений арктангенса

Построим график арктангенса. По определению, арктангенсом числа x называется число y, принадлежащее интервалу $(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, такое, что $tg\ y = x$.

Поскольку арктангенс – функция обратная тангенсу, мы поступаем следующим образом.

Выбираем интервал графика функции $y = tg\ x$, где соответствие между x и y взаимно однозначное. На этом интервале функция $y = tg\ x$ принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$.

Тогда у обратной функции, то есть у функции $y = arctg\ x$, область, определения будет вся числовая прямая, от $-\infty$ до $+\infty$, а областью значений – интервал $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

Рассуждаем, как и при построении графиков арксинуса и арккосинуса.

$tg\ 0 = 0$, значит, $arctg\ 0 = 0$;

$tg\ \frac{\pi}{4} = 1$, значит, $arctg\ 1 = \frac{\pi}{4}$;

$tg\ \left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$, значит, $arctg\ (-1) = -\frac{\pi}{4}$.

На данном моменте можно порассуждать относительно следующего вопроса: для какого числа из интервала $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ значение тангенса стремится к бесконечности? Очевидно, это $\frac{\pi}{2}$.

А значит, и при бесконечно больших значениях x график арктангенса приближается к горизонтальной асимптоте $y = \frac{\pi}{2}$.

По аналогии, если x стремится кминус бесконечности, график арктангенса стремится к горизонтальной асимптоте $y = -\frac{\pi}{2}$.

График функции $y = arctg\ x$ изображен на рисунке 7.

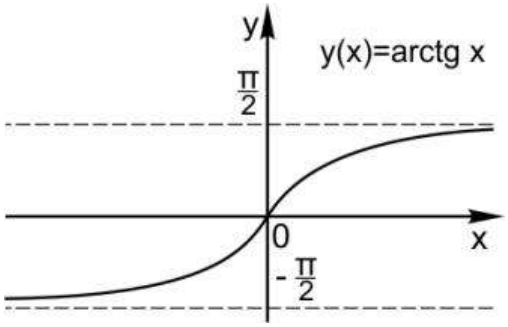


Рисунок 7 – График функции $y = arctg\ x$

Свойства функции $y = arctg\ x$.

1. Область определения $D(y)$: $x \in R$.

2. Область значений $E(y)$: $y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

3. Функция $y = arctg\ x$ нечетная.

4. Функция $y = arctg\ x$ является строго возрастающей.

5. Прямые $y = -\frac{\pi}{2}$ и $y = \frac{\pi}{2}$ — горизонтальные асимптоты данной функции.

6. Функции $y = tg\ x$ и $y = arctg\ x$ являются взаимно обратными — конечно, когда функция $y = tg\ x$ рассматривается на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Соответственно, определим функцию арккотангенс и построим ее график (рис. 8).

Арккотангенсом числа a называется число $\varphi\ \epsilon(0; \pi)$, такое, что $ctg\ \varphi = a$.

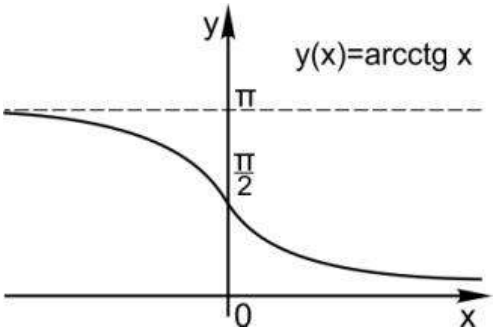


Рисунок 8 – График функции $y = arcctg\ x$

Свойства функции $y = arcctg\ x$.

1. Область определения $D(y)$: $x \in R$.

2. Область значений $E(y)$: $y \in (0; \pi)$.

3. Функция $y = arcctg\ x$ - общего вида, то есть ни четная, ни нечетная.

4. Функция $y = arcctg\ x$ является строго убывающей.

5. Прямые y = 0 и $y = \pi$— горизонтальные асимптоты данной функции.

6. Функции $y = ctg\ x$ и $y = arcctg\ x$ являются взаимно обратными, если рассматривать $y = ctg\ x$ на промежутке $(0; \pi)$.

1.2 Методы решения уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции

Обратные тригонометрические функции часто образуют большие затруднения для старшеклассников. Это связано прежде всего с тем, что школьная программа не отводит достаточно времени на изучение функций дуги.

Первым блоком может стать изучение основных свойств обратных тригонометрических функций и их области значений. Для этого необходимо уделить внимание определениям, графикам и основным тождествам, которые позволят студентам понять, каким образом можно работать с этими функциями.

Вторым блоком представления учебного материала может стать изучение методов решения уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции с помощью нестандартных методов решения, а именно равносильных переходов и преобразований. Обучающимся важно научиться применять теоретический материал на практике, отработать навыки его применения и закрепить полученные знания на многовариативных примерах.

Третий блок обучения необходимо посвятить решению уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции повышенного уровня. Задания, как например, задачи олимпиадного характера требуют к себе высокого внимания, применение нестандартных методов решения, полноту знаний, умений и навыков изучаемой темы.

Все уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции можно разбить на следующие блоки, которые отображены на рисунке 9.

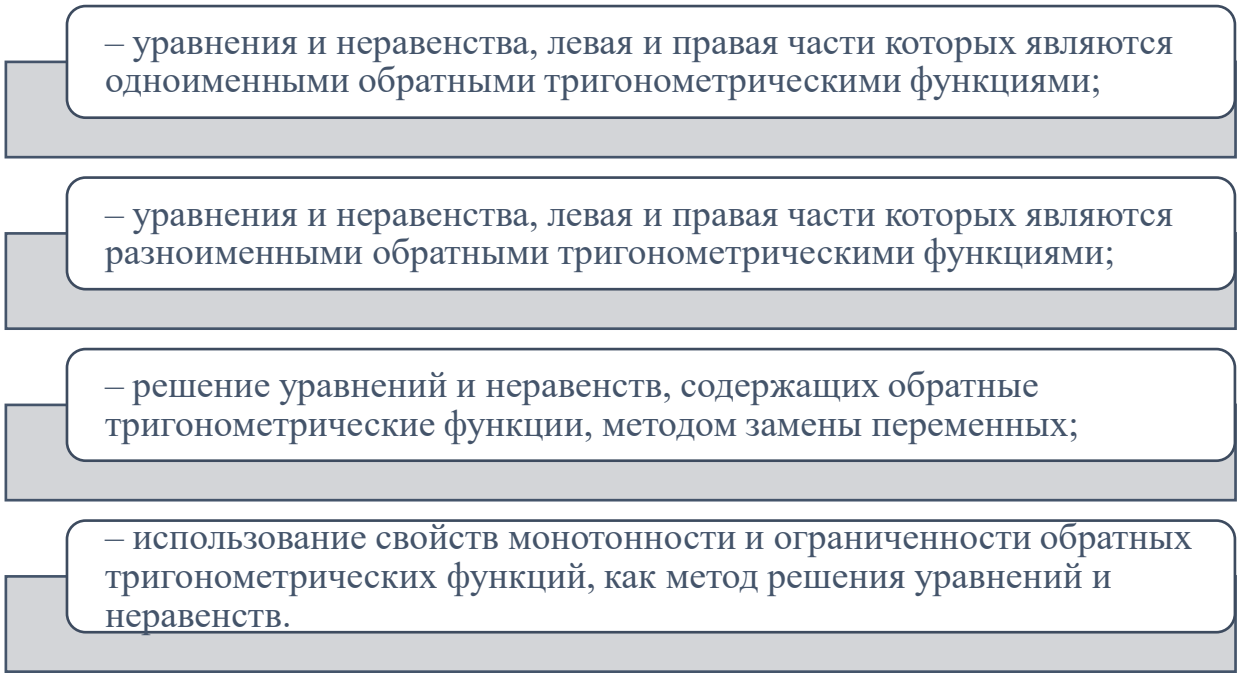


Рисунок 9 – Классификация уравнений и неравенств, содержащие обратные тригонометрические функции

Разберем подробно каждый из выделенных блоков.

1. Уравнения и неравенства, левая и правая части которых являются одноименными обратными тригонометрическими функциями.

Решение уравнений и неравенств, обе части которых являются одноименными обратнымитригонометрическими функциями различных аргументов, опирается на монотонности этих функций. Напомним, что функции y = arcsinx и y = arctgx монотонно возрастают, а функции y = arccosx и y = arcctgx монотонно убывают на своих областях определения. Поэтому справедливы следующие равносильные переходы:

1) а) $\arcsin f(x) = \arcsin g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \leq 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \leq 1; \end{cases}$

б) $\arcsin f(x) \leq \arcsin g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq g(x), \\ f(x) \geq -1 \\ g(x) \leq 1. \end{cases}$

2) а) $\arccos f(x) = \arccos g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |f(x)| \leq 1 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ |g(x)| \leq 1; \end{cases}$

б) $\arccos f(x) \leq \arccos g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq g(x), \\ f(x) \leq 1 \\ g(x) \geq -1. \end{cases}$

3) а) $arctg\ f(x) = arctg\ g(x) \leftrightarrow\ f(x) = g(x);$

б) $arctg\ f(x) \leq arctg\ g(x) \leftrightarrow\ f(x) \leq g(x).$

4) а) $arcctg\ f(x) = arcctg\ g(x) \leftrightarrow\ f(x) = g(x);$

б) $arcctg\ f(x) \leq arcctg\ g(x) \leftrightarrow\ f(x) \geq g(x).$

Заметим, что использование равносильности систем зависит от того, какое неравенство легче. А также, решать неравенство, входящее в систему, не всегда обязательно. Достаточно проверить корни, удовлетворяющие неравенству, найденные при решении уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $\arcsin(3x^2 - 4x - 1) = \arcsin(x + 1)$.

Решение.

$$\begin{cases} 3x^2 - 4x - 1 = x + 1, \\ |x + 1| \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x - 2 = 0, \\ |x + 1| \leq 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -\frac{1}{3}, \end{array}\right. \\ |x + 1| \leq 1 \end{cases} \rightarrow x = -\frac{1}{3}.$$

Ответ: $-\frac{1}{3}$.

Пример 2. Решить неравенство $\text{arc}tg(8x^2 - 6x - 1) \leq \text{arctg}(4x^2 - x + 8$.

Решение.

$$8x^2 - 6x - 1 \geq 4x^2 - x + 8 \rightarrow 4x^2 - 5x - 9 \geq 0 \rightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq -1, \\ x \geq \frac{9}{4} \end{array}\right. .$$

Ответ: $(-\infty: -1] \cup \left[\frac{9}{4}; +\infty\right)$.

Пример 3. Решить неравенство $3arcsin2x < 1$.

Решение.

$3arcsin2x < 1 \to arcsin2x < \frac{1}{3} \to arcsin2x < \arcsin\left(sin\frac{1}{3}\right) \to -1 \leq 2x < sin\frac{1}{3} \to -\frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}sin\frac{1}{3}$.

Ответ: $\left[-\frac{1}{2};\frac{1}{2}sin\frac{1}{3}\right)$.

Пример 4. Решить уравнение $\arcsin\frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}} + arcsin\frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}} = arcsin\frac{5x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}}$.

Решение. Из условия на область определения арксинуса имеем:

$$|x| \leq \frac{8\sqrt{21}}{5\sqrt{21}} \to x^2 \leq \frac{1344}{275}.$$

Вычисляя синус от обеих частей уравнения и учитывая, что $\cos(\arcsin(t)) > 0$и следовательно, $\sin(\arcsin(t)) = t$ и $\cos(\arcsin(t)) = \sqrt{1-t^2}$ получаем: $\frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}} \cdot \sqrt{1-\frac{11x^2}{16\cdot 21}} + \frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}} \cdot \sqrt{1-\frac{11x^2}{4\cdot 21}} = \frac{5x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}}$.

Перенося все в левую часть уравнения, упрощая и вынося общим множитель за скобки, имеем:

$\frac{x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}} \cdot \left(\sqrt{336-11x^2} + \sqrt{84-11x^2} - 5\sqrt{21}\right) = 0.$

Из данного уравнения следует, что или x = 0 (который, очевидно, подходит), или x является корнем уравнения

$$\sqrt{336-11x^2} + \sqrt{84-11x^2} = 5\sqrt{21}.$$

Из условия следует, что все их можно возвести в квадрат, получим: подкоренные выражения положительны. Поскольку обе части уравнения положительны, то

$336 - 11x^2 + 2\sqrt{(336-11x^2)\cdot(84-11x^2)} + 84 - 11x^2 = 525.$

Перенося всё кроме корня в правую часть уравнения, имеем:

$2\sqrt{(336-11x^2)\cdot(84-11x^2)} = 22x^2 + 105.$

Возводя ещё раз обе части уравнения в квадрат, получаем:

$4(336-11x^2)\cdot(84-11x^2) = 484x^4 + 4620x^2 + 11025.$

Или $23100x^2 = 101871.$

Таким образом, уравнение имеет ещё два возможных корня $x = \pm\frac{21}{10}$.

Ответ: 0; $\pm\frac{21}{10}$.

2. Уравнения и неравенства, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями.

При решении уравнений и неравенств, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями, пользуются тригонометрическими тождествами. Зачастую при решении уравнений такого типа целесообразно не поднимать вопрос о равносильности преобразований, а сразу переходить к уравнению-следствию и после его решения делать необходимую проверку.Рассужденияbудут примерно следующими.Пустьтребуетсярешитьуравнение arcsin$f(x)$=arccos$g(x)$.

Предположим,что x_0 - решение этого уравнения.

Обозначим arcsin$f(x_o)$=arccos$g(x_o)$черезa.Тогдаsin$a$=$f(x_o)$,cos$a$=$g(x_o)$,откуда$f^2(x_o)$ +$g^2(x_o)$=1 (1).

Таким образом,рассуждая аналогично получим следующие переходы:

$arctgf(x) = arcctgg(x) \to f(x) \cdot g(x) = 1$(2);

$arcsinf(x) = arcctgg(x) \to f^2(x) = \frac{1}{g^2(x)+1}$(3);

$arctgf(x) = arccosg(x) \to g^2(x) = \frac{1}{f^2(x)+1}$(4);

$arcsinf(x) = arctgg(x) \to f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1}$(5);

$arccosf(x) = arcctgg(x) \to f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1}$(6).

Пример 5. Решить уравнение $\arccos\frac{7x+5}{13} = \arcsin\frac{4x+1}{13}$.

Решение. По формуле (1) получаем: $(\frac{7x+5}{13})^2 + (\frac{4x+1}{13})^2 = 1 \to 65x^2 +$ $78ч - 143 = 0 \to \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -\frac{143}{65}. \end{array}\right.$ Корень $x = -\frac{143}{65}$ является посторонним. Следовательно ответ $x = 1$.

При решении неравенств, левая и правая части которых представляют собой разноименные обратные тригонометрические функции, целесообразно использовать метод интервалов, а в некоторых случаях учитывать свойства монотонных функций.

Пример 6. Решить неравенство $\arccos\frac{x+2}{5} \le \arcsin\frac{3x+1}{5}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \arccos\frac{x+2}{5} - \arcsin\frac{3x+1}{5}$. И решим неравенство $f(x) \le 0$ методом интервалов.

а) Найдем область определения функции. Для этого решим систему:

$$\begin{cases} \frac{|x+2|}{5} \le 1, \\ \frac{|3x+1|}{5} \le 1 \end{cases} \to \begin{cases} -7 \le x \le 3, \\ -2 \le x \le \frac{4}{3} \end{cases} \to -2 \le x \le \frac{4}{3};$$

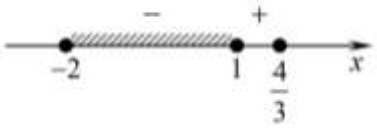
б) Найдем нули функции. Для этого решим уравнение

$$arcsin\frac{x+2}{5} = arccos\frac{3x+1}{5} \to \left(\frac{x+2}{5}\right)^2 + \left(\frac{3x+1}{5}\right)^2 = 1 \to x^2 + x - 2 = 0 \to$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -2 \end{array}\right.;$$

Корень x = -2 является посторонним.

в) Решим неравенство $f(x) \le 0$ методом интервалов: $f(2) < 0, f(\frac{3}{4}) > 0$.



Ответ: $[-2; 1]$.

При решении уравнений и неравенств, которые содержат параметры, возникает вопрос о равносильности преобразований. Чтобы преобразования сделать равносильными, следует учесть ограничения, связанные с областями определения обратных тригонометрических функций и множествами их значений. Например:

$$arcsinf(x) = arccosg(x) \to \begin{cases} f^2(x) + g^2(x) = 1, \\ f(x) \ge 0, \\ g(x) \ge 0 \end{cases}$$

$$arctgf(x) = arcctgg(x) \to \begin{cases} f(x) \cdot g(x) = 1, \\ f(x) > 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \cdot g(x) = 1, \\ g(x) > 0 \end{cases}.$$

3. Решение уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции методом замены переменных.

Есть такие уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции, которые можно свести калгебраическим, сделав определенную замену переменной. При этом необходимо помнить о естественных ограничениях на вводимую переменную, связанных с ограниченностью обратных тригонометрических функций.

Пример 7. Решить уравнение $12arctg^{2\frac{x}{2}} = \pi(3x + 5arctg\frac{x}{2})$.

Решение. Обозначим $t = arctg\frac{x}{2}$, где $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$.

После чего получим уравнение вида:

$$12t^2 - 5\pi t - 3\pi^2 = 0 \to \begin{bmatrix} t = \frac{3}{4}\pi, \\ t = -\frac{\pi}{3}. \end{bmatrix}$$

Так как $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$, то $t = -\frac{\pi}{3}$, откуда $arctg\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} \to \frac{x}{2} = -\sqrt{3} \to x = -2\sqrt{3}$.

Ответ: $-2\sqrt{3}$.

4. Решение уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции с использованием свойств монотонности и ограничения обратных тригонометрических функций.

Решение некоторых уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции, опирается на такие свойства этих функций, как монотонность и ограниченность. При этом используются следующие теоремы.

Теорема 1. Если функция$y = f(x)$монотонна, то уравнение вида $f(x) = c$ $(c = const)$ имеет не более одного решения.

Теорема 2. Если функция$y = f(x)$монотонно возрастает, а функция $y = g(x)$ монотонно убывает, то уравнение вида $f(x) = g(x)$ имеет не более одного решения.

Теорема 3. Если $\min f(x) = c = \max g(x)(c = const)$,то на множестве X уравнение вида $f(x) = g(x)$ равносильно системе $\begin{cases} f(x) = c, \\ g(x) = c. \end{cases}$

Пример 8. Решить уравнение $\arcsin\frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}} + arcsin\frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}} = arcsin\frac{5x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}}$.

Решение.В данном случае первую очередь, когда в задаче мы видим тригонометрические функции, нужно сразу вспоминать про ограничения на аргументы.

Из условия на область определения арксинуса имеем:

$|x| \le \frac{8\sqrt{21}}{5\sqrt{21}} \to x^2 \le \frac{1344}{275}$.

Найдя ограничения на x, можно использовать стандартную идею в арктриге, давайте возьмём прямую функцию от обратных. В нашем случае, функцию синуса от правой и левой части уравнения.

В правой части всё легко и понятно, а вот с левой явные проблемы. Нужно обратить внимание на то, что слева ни что иное, как синус суммы. Распишем его по формуле.Вычисляя синус от обеих частей уравнения и учитывая, что $\cos(\arcsin(t)) > 0$и следовательно, $\sin(\arcsin(t)) = t$ и $\cos(\arcsin(t)) = \sqrt{1-t^2}$ получаем: $\frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}} \cdot \sqrt{1 - \frac{11x^2}{16 \cdot 21}} + \frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}} \cdot \sqrt{1 - \frac{11x^2}{4 \cdot 21}} = \frac{5x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}}$.

Зная, что$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$. После чего получаем уравнение, которое при вынесении общего множителя разобьётся на два случая, когда x = 0 (не забудьте проверить, что он подходит), а также на второй случай, когда x≠0.

Во втором случае получается уравнение$\sqrt{(336 - 11x^2)} + \sqrt{(84 - 11x^2)} = 5\sqrt{21}$. Ограничения на x, которые мы считали в начале, тут нам помогут в утверждении, что подкоренные выражения положительные. Если несколько раз использовать тот факт, что правая и левая часть положительны и мы можем их возводить в

квадрат, то дорешать уравнение не составит труда, главное, не забудьте проверить, что корни уравнения подходят.

Перенося все в левую часть уравнения, упрощая и вынося общим множитель за скобки, имеем:

$$\frac{x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}} \cdot \left(\sqrt{336-11x^2}+\sqrt{84-11x^2}-5\sqrt{21}\right)=0.$$

Из данного уравнения следует, что или x = 0 (который, очевидно, подходит), или x является корнем уравнения

$$\sqrt{336-11x^2}+\sqrt{84-11x^2}=5\sqrt{21}.$$

Из условия следует, что все подкоренные выражения положительны. Поскольку обе части уравнения положительны, то их можно возвести в квадрат, получим:

$$336-11x^2+2\sqrt{(336-11x^2)\cdot(84-11x^2)}+84-11x^2=525.$$

Перенося всё кроме корня в правую часть уравнения, имеем:

$$2\sqrt{(336-11x^2)\cdot(84-11x^2)}=22x^2+105.$$

Возводя ещё раз обе части уравнения в квадрат, получаем:

$$4(336-11x^2)\cdot(84-11x^2)=484x^4+4620x^2+11025.$$

Или $23100x^2=101871.$

Таким образом, уравнение имеет ещё два возможных корня $x=\pm\frac{21}{10}$.

Ответ: 0; $\pm\frac{21}{10}$.

Пример 9. Решить неравенство

$$(18x^3-9x^2-2x+1)\cdot\arccos(-2x-1)\geq\arccos\left(\frac{1}{4sin50^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4sin40^\circ}\right).$$

Решение. Поскольку

$$\frac{1}{4\sin50^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4\sin40^\circ}=\frac{1}{4\cos40^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4\sin40^\circ}=\frac{\sin30^\circ\cdot\sin40^\circ+\cos30^\circ\cdot\cos40^\circ}{2\sin40^\circ\cdot\cos40^\circ}=\frac{\cos(40^\circ-30^\circ)}{\sin80^\circ}=\frac{\cos10^\circ}{\sin(90^\circ-10^\circ)}=1,$$ то получается неравенство $(18x^3-9x^2-2x+1)\cdot\arccos(-2x-1)\geq 0.$

Левая его часть определена при $|-2x-1|\leq 1$, поэтому$x\epsilon[-1;0]$. На этом отрезке первый сомножитель $(18x^3-9x^2-2x+1)=(2x-1)(3x-$

$1)(3x+1)$ не отрицателен при любых $x\epsilon\left[-\frac{1}{2};0\right]$ и отрицателен при $x\epsilon\left[-1;-\frac{1}{3}\right]$. Второй сомножитель всегда неотрицателен и равен нулю при $x=-1$. Поэтому $x\epsilon\left[-\frac{1}{3};0\right]\cup\{1\}$.

Ответ: $x\epsilon\left[-\frac{1}{3};0\right]\cup\{1\}$.

Пример 10. Решить уравнение $\arcsin\big(x(x+y)\big)+\arcsin\big(y(x+y)\big)=\pi$.

Решение. Так как $\arcsin t\le\frac{\pi}{2}$при $|t|\le 1$, то левая часть уравнения не превосходит $\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\pi$. Знак равенства возможен, если каждое слагаемое левой части равно $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\arcsin\big(x(x+y)\big)=\dfrac{\pi}{2},\\ \arcsin\big(y(x+y)\big)=\dfrac{\pi}{2}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\big(x(x+y)\big)=1,\\ \big(y(x+y)\big)=1\end{cases}$$

Пример 11.Решить неравенство

$arccosx+arccosx\sqrt{2}+arccosx\sqrt{3}\le\frac{3\pi}{4}$.

Решение. Заметим, что левая часть неравенства является монотонно убывающей функцией$f(x)=arccosx+arccosx\sqrt{2}+arccosx\sqrt{3}$ на отрезке $\left[-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$. Уравнение $f(x)=\frac{3\pi}{4}$ по теореме 1 имеет не более одного корня. Понятно, что $x=\frac{1}{2}$ является корнем данного уравнения, поэтому решением неравенства является отрезок $\left[\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Ответ: $\left[\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$.

Пример 12. Решить уравнение $2arcsin2x=3arccosx$.

Решение. Функция $y=2arcsin2x$ является монотонно возрастающей, а функция $y=3arccosx$ монотонно убывающей. Значит, число $x=\frac{1}{2}$ является корнем данного уравнения. В силу данных рассуждений и теоремы 2 этот корень единственный.

Ответ: $x = \frac{1}{2}$.

Пример 13. Докажите, что $4arctg\frac{1}{5} - arctg\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Рассмотрим, что такое $2arctg\frac{1}{5} = 2x, tgx = \frac{1}{5}, tg2x = \frac{2tgx}{1-tg^2x}, tg2x = \frac{5}{12}$, откуда $2arctg\frac{1}{5} = arctg\frac{5}{12}$.

Рассмотрим, что такое $2arctg\frac{5}{12} = 2x, tgx = \frac{5}{12}, tg2x = \frac{2tgx}{1-tg^2x}, tg2x = \frac{120}{119}$, откуда$2arctg\frac{5}{12} = arctg\frac{120}{119}$.

Теперь докажем, что $arctg\frac{120}{119} - arctg\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$. Заметим, что слева стоит число, которое больше нуля, но меньше, чем $\frac{\pi}{2}$, поэтому возьмем тангенс от обеих частей и проверим равенство: $tg\left(arctg\frac{120}{119} - arctg\frac{1}{239}\right) = \frac{tg\left(arctg\frac{120}{119}\right)+tg\left(arctg\frac{1}{239}\right)}{1-tg\frac{120}{119}\cdot tg\left(arctg\frac{1}{239}\right)} = \frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1-\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}} = 1$.

В данном теоретическом материале содержится понятия и равносильные преобразования, которые свойственны повышенному уровню изучения материала данной тематической линии. Данный теоретический материал необходимо рассматривать мимо классно-урочной системы, так как его объем велик и не всегда быстро и четко усвоен всеми обучающимися. Однако важность его изучения важна для дальнейшего его применения при решении задач повышенного уровня.

Стоит отметить, что отработка полученных в ходе изучения данного теоретического материла знаний, умений и навыков необходима на всех этапах обучения. Поэтому разбор контр-примеров необходим в соответствии с ведением тематической линии.

1.3 Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями в олимпиадных задачах

Процесс обучения математике в школе с каждым годом порождает необходимость в углубленном её изучении. Это связано не только со стремлением достойного прохождения выпускных экзаменов (базовой и профильной математики), но и с тем, что при выборе той или иной профессиональной деятельности выпускника, на любом профиле обучения, одним из базовых предметов высшего учебного заведения является математика. Стоит отметить, что на современном этапе развития высшего образования, практически все вузы России, дают возможность получения высокого результата по вступительным экзаменам по математике за счет решения олимпиад.

Обратные тригонометрические функции играют важную роль в олимпиадных заданиях, потому что они позволяют решать сложные задачи, связанные с нахождением углов и длин отрезков на плоскости. Умение с легкостью работать с обратными тригонометрическими функциями дает учащимся значительное преимущество при решении математических задач на соревнованиях. Также понимание тригонометрических функций и их обратных функций помогает учащимся лучше понимать материал, изучаемый в школе и применять полученные знания на практике.

В связи с этим, важно не только знать теоретический материал, но и уметь применять его на практике. Олимпиадные задания по тригонометрии требуют нестандартного подхода к решению задач и умения видеть скрытые связи между различными элементами задачи.

Таким образом, задания по тригонометрии в олимпиадах имеют огромное значение не только для повышения математических навыков учащихся, но и для их общего интеллектуального развития.

Характерные особенности нестандартной задачи повышенного уровня представлены на рисунке 10.

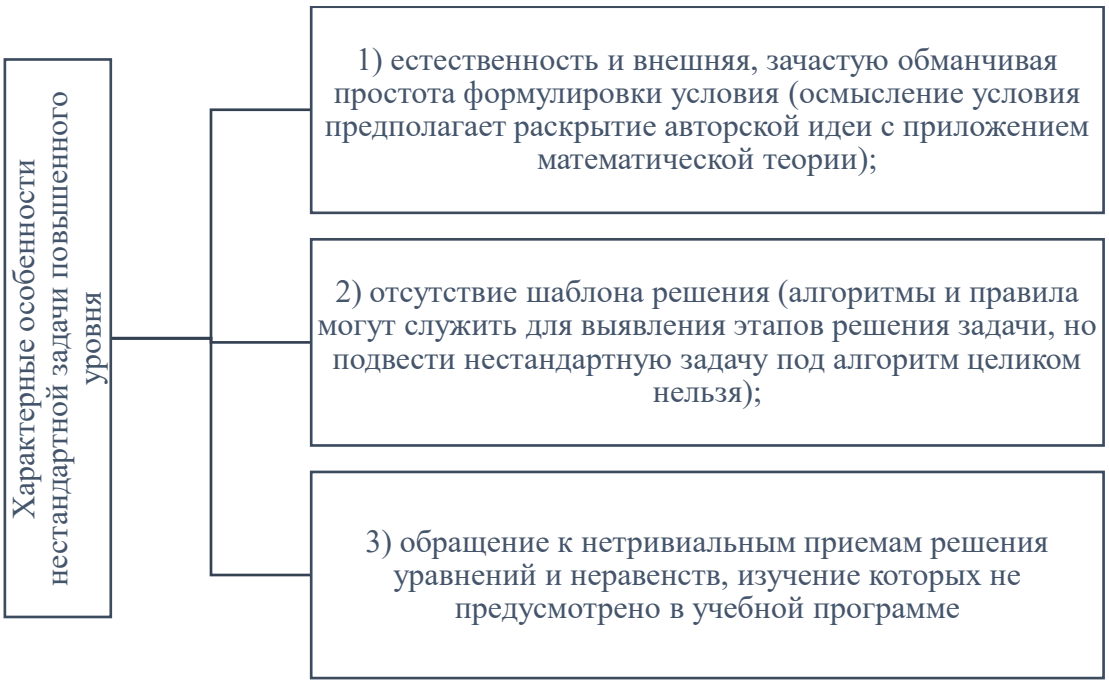


Рисунок 10 – Характерные особенности нестандартной задачи повышенного уровня

Проведем сравнительный анализ архивов олимпиад по математике на предмет наличия в них заданий, содержащих уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями. Сравнительный анализ проводился по разным этапам математических олимпиад.

Рассмотрим подробно некоторые из них.

Пример 1.*Олимпиада «Будущие исследователи – будущее науки», заключительный этап, 2021 год, 11 класс*. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \arcsin(x) \cdot \arccos(x)$.

Решение. Тригонометрические функции, обратные синусу и косинусу, связаны соотношением: $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$. Выразив из данного выражения одно из слагаемых, получим:$\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$. Подставим данное выражение в уравнение. Тогда $y = \arcsin(x) \cdot \arccos(x)$ перепишется в виде $y = \arcsin(x) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\right) = \frac{\pi}{2}\arcsin(x) - \arcsin^2(x)$.

Осуществим замену: $t = \arcsin(x)$ и рассмотрим квадратичную функцию $y = \frac{\pi}{2}t - t^2$. Графиком ее является парабола. Так как старший

коэффициент меньше нуля, то ветви параболы направлены вниз. Это означает, что наибольшего значения функция$y = f(t)$достигает в вершине параболы, которую можно найти по формуле $\mathrm{t_o} = -\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}} = -\frac{\frac{\pi}{2}}{2\cdot(-1)} = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, $x = sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, тогда $y_{\text{наиб}} = arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^2}{16}$.

Множество значений $k = arcsinx$ составляет отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Поэтому для того, чтобы найти наименьшее значение функции $y = \arcsin(x) \cdot \arccos(x)$ необходимо в уравнение функции подставить крайнее значение аргумента из данного отрезка: при $k = -\frac{\pi}{2}$находим $x = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, откуда $y = \arcsin(-1) \cdot \arccos(-1) = -\frac{\pi}{2} \cdot \pi = -\frac{\pi^2}{2}$. На правой границе (при $k = \frac{\pi}{2}$)$x = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, то тогда $y = \arcsin(1) \cdot \arccos(1) = \frac{\pi}{2} \cdot 0 = 0$.

Следовательно, стоит сделать вывод о том, что $y_{\text{наим}} = -\frac{\pi^2}{2}$.

Ответ: $y_{\text{наим}} = -\frac{\pi^2}{2}$; $y_{\text{наиб}} = \frac{\pi^2}{16}$.

Пример 2. *Олимпиада «Объединенная межвузовская математическая олимпиада», отборочный этап, 2020 год, 11 класс.* Вычислите значение выражения $2arctg3 + arcsin\frac{3}{5}$.

Решение. Вычислим тангенс суммы $tg(2arctg3 + arcsin\frac{3}{5})$, зная, что $tg\left(2arctg3 + arcsin\frac{3}{5}\right) = \frac{tg(2arctg3)+tg(arcsin\frac{3}{5})}{1-tg(2arctg3)\cdot tg(arcsin\frac{3}{5})}$. Применим формулу тангенса двойного угла и воспользуемся тем, что $tg(arctgx) = x$, получим:

$$tg(2arctg3) = \frac{2tg(arctg3)}{1-(tg(arctg3))^2} = \frac{2\cdot 3}{1-3^2} = -\frac{3}{4}.$$

Чтобы определить значение $tg\left(arcsin\frac{3}{5}\right)$, необходимо обратиться к единичной окружности и найти значение с помощью определения синуса и теоремы Пифагора.

Из прямоугольного треугольника следует что длина катета вычисляется как $\sqrt{1^2-\frac{3}{5}^2}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$. Тогда тангенс искомого угла это отношение $\frac{3}{5}$ к $\frac{4}{5}$,следовательно$\frac{3}{4}$. Тогда и $tg\left(arcsin\frac{3}{5}\right)=tg\left(arctg\frac{3}{4}\right)=\frac{3}{4}$.

Подставим полученные значения в исходное выражение получим$tg\left(2arctg3+arcsin\frac{3}{5}\right)=\frac{-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}}{1-(-\frac{3}{4})\cdot\frac{3}{4}}=0$.

Соответственно, так как $tgx=0$, следовательно $x=\pi n, n\,\epsilon\, Z$. По определению $0<arcsin\frac{3}{5}<\frac{\pi}{2}$ и $0<arctg3<\frac{\pi}{2}$. Тогда $2\cdot 0-0<2arctg3+arcsin\frac{3}{5}<2\cdot\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}$, или $0<2arctg3+arcsin\frac{3}{5}<\frac{3\pi}{2}$. Из этих двух условий, можно сделать вывод о том, что выражение равно π.

Пример 3. *Олимпиада школьников «Покори Воробьевы горы!», заключительный этап, 10 класс, 2021/2022 учебный год.* Решить неравенство $(18x^3-9x^2-2x+1)\cdot\arccos(-2x-1)\geq\arccos(\frac{1}{4sin50^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4sin40^\circ})$.

Решение. Поскольку

$\frac{1}{4sin50^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4sin40^\circ}=\frac{1}{4cos40^\circ}+\frac{\sqrt{3}}{4sin40^\circ}=\frac{sin30^\circ\cdot sin40^\circ+cos30^\circ\cdot cos40^\circ}{2sin40^\circ\cdot cos40^\circ}=\frac{\cos(40^\circ-30^\circ)}{sin80^\circ}=\frac{cos10^\circ}{\sin(90^\circ-10^\circ)}=1$, то получается неравенство $(18x^3-9x^2-2x+1)\cdot\arccos(-2x-1)\geq 0$.

Левая его часть определена при $|-2x-1|\leq 1$, поэтому $x\epsilon[-1;0]$. На этом отрезке первый сомножитель $(18x^3-9x^2-2x+1)=(2x-1)(3x-1)(3x+1)$ не отрицателен при любых $x\epsilon\left[-\frac{1}{2};0\right]$ и отрицателен при $x\epsilon\left[-1;-\frac{1}{3}\right]$. Второй сомножитель всегда неотрицателен и равен нулю при $x=-1$. Поэтому $x\epsilon\left[-\frac{1}{3};0\right]\cup\{1\}$.

Ответ: $x\epsilon\left[-\frac{1}{3};0\right]\cup\{1\}$.

Пример 4. *Олимпиада «Объединенная межвузовская математическая олимпиада», заключительный этап, 2021 год, 11 класс.*Найдите все значения,

которые может принимать выражение $3arcsinx - 2arccosy$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Решение. Переберем случаи:

1) $x, y \geq 0. arcsinx \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\cos(arcsinx) = \sqrt{1 - x^2} = y$.

Тогда $arcsinx = arccosy$ и $3arcsinx - 2arccosy = arcsinx \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;

2) $x \geq 0 \geq y.\ arcsinx \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\cos(arcsinx) = \sqrt{1 - x^2} = -y$.

Тогда $\pi - arcsinx = arccosy$ и $3arcsinx - 2arccosy$

$$= 5arcsinx - 2\pi \in \left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right];$$

3)$y \geq 0 \geq x.\ arcsinx \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ и $\cos(arcsinx) = \sqrt{1 - x^2} = y$.

Тогда $arcsinx = -arccosy$ и $3arcsinx - 2arccosy$

$$= 5arcsinx - 2\pi \in \left[-\frac{5\pi}{2}; 0\right];$$

4) $x, y \leq 0. arcsinx \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ и $\cos(arcsinx) = \sqrt{1 - x^2} = -y$.

Тогда $\pi + arcsinx = arccosy$ и $3arcsinx - 2arccosy$

$$= arcsinx - 2\pi \in \left[-\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right].$$

Ответ: $\left[-\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Пример 5. *Олимпиада «Объединенная межвузовская математическая олимпиада», заключительный этап, 2022 год, 11 класс.*Решить уравнение $\arcsin\frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}} + arcsin\frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}} = arcsin\frac{5x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}}$.

Решение. Из условия на область определения арксинуса имеем:

$|x| \leq \frac{8\sqrt{21}}{5\sqrt{21}} \rightarrow x^2 \leq \frac{1344}{275}$.

Вычисляя синус от обеих частей уравнения и учитывая, что $\cos(\arcsin(t)) > 0$и следовательно, $\sin(\arcsin(t)) = t$ и $\cos(\arcsin(t)) = \sqrt{1 - t^2}$ получаем: $\frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}} \cdot \sqrt{1 - \frac{11x^2}{16 \cdot 21}} + \frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}} \cdot \sqrt{1 - \frac{11x^2}{4 \cdot 21}} = \frac{5x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}}$.

Перенося все в левую часть уравнения, упрощая и вынося общим множитель за скобки, имеем:

$$\frac{x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}} \cdot \left(\sqrt{336-11x^2}+\sqrt{84-11x^2}-5\sqrt{21}\right)=0.$$

Из данного уравнения следует, что или x = 0 (который, очевидно, подходит), или x является корнем уравнения

$$\sqrt{336-11x^2}+\sqrt{84-11x^2}=5\sqrt{21}.$$

Из условия следует, что все подкоренные выражения положительны. Поскольку обе части уравнения положительны, то их можно возвести в квадрат, получим:

$$336-11x^2+2\sqrt{(336-11x^2)\cdot(84-11x^2)}+84-11x^2=525.$$

Перенося всё кроме корня в правую часть уравнения, имеем:

$$2\sqrt{(336-11x^2)\cdot(84-11x^2)}=22x^2+105.$$

Возводя ещё раз обе части уравнения в квадрат, получаем:

$$4(336-11x^2)\cdot(84-11x^2)=484x^4+4620x^2+11025.$$

Или $23100x^2=101871$.

Таким образом, уравнение имеет ещё два возможных корня $x=\pm\frac{21}{10}$.

Ответ: 0; $\pm\frac{21}{10}$.

Пример 6. Докажите, что $4arctg\frac{1}{5}-arctg\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$.

Решение. Рассмотрим, что такое $2arctg\frac{1}{5}=2x, tgx=\frac{1}{5}, tg2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x}, tg2x=\frac{5}{12}$, откуда $2arctg\frac{1}{5}=arctg\frac{5}{12}$.

Рассмотрим, что такое $2arctg\frac{5}{12}=2x, tgx=\frac{5}{12}, tg2x=\frac{2tgx}{1-tg^2x}, tg2x=\frac{120}{119}$, откуда$2arctg\frac{5}{12}=arctg\frac{120}{119}$.

Теперь докажем, что $arctg\frac{120}{119}-arctg\frac{1}{239}=\frac{\pi}{4}$. Заметим, что слева стоит число, которое больше нуля, но меньше, чем $\frac{\pi}{2}$, поэтому возьмем

тангенс от обеих частей и проверим равенство: $tg\left(arctg\frac{120}{119}-arctg\frac{1}{239}\right)=$ $\frac{tg\left(arctg\frac{120}{119}\right)+tg\left(arctg\frac{1}{239}\right)}{1-tg\frac{120}{119}\cdot tg\left(arctg\frac{1}{239}\right)}=\frac{\frac{120}{119}-\frac{1}{239}}{1-\frac{120}{119}\cdot\frac{1}{239}}=1.$

Таким образом, опираясь на сравнительный анализ олимпиад по математике разного уровня, стоит сказать о том, что количество заданий включающие в себя уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции растет с каждым годом, а значит необходимость в организации методики обучения решению данного перечня задач возрастает. Тем самым можно сделать вывод о том, что тематическое планирование классно-урочной системы по математике по теме «Обратные тригонометрические функции» требует расширения и необходимости в организации дополнительных занятий, обучающихся по данной теме.

Олимпиадные задания требуют особого внимания, в соответствии с чем необходима организация элективных курсов по математики, которые направлены на подготовку школьников к олимпиадам по математике.

Проведение олимпиад по тригонометрии также способствует развитию соревновательного духа учеников и мотивирует их к самосовершенствованию. Участие в данных мероприятиях помогает выявить талантливых учеников в области математики и стимулирует их к дальнейшему изучению этой науки. Благодаря олимпиадам по тригонометрии ученики могут увидеть, как математика может быть применена на практике и какие интересные и сложные задачи можно решать с помощью тригонометрии.

Таким образом, задания по тригонометрии на олимпиадах играют важную роль в развитии математических навыков учеников, помогая им не только улучшить понимание темы, но и развить аналитическое мышление, логику и умение работать с нестандартными задачами.

Глава 2. Разработка элективного курса «Обратные тригонометрические функции»

2.1 Место и роль элективных курсов в системе школьного обучения

В современной концепции модернизации системы образования в России обучающимся предоставляют профильноеобучение на уровне старших классов общеобразовательной школы. На сегодняшний день профильное обучение стало обязательной частью при обучении в любой школе страны.

Процесс профильного обучения руководствуется следующими целями, которые отобразим на рисунке 12.

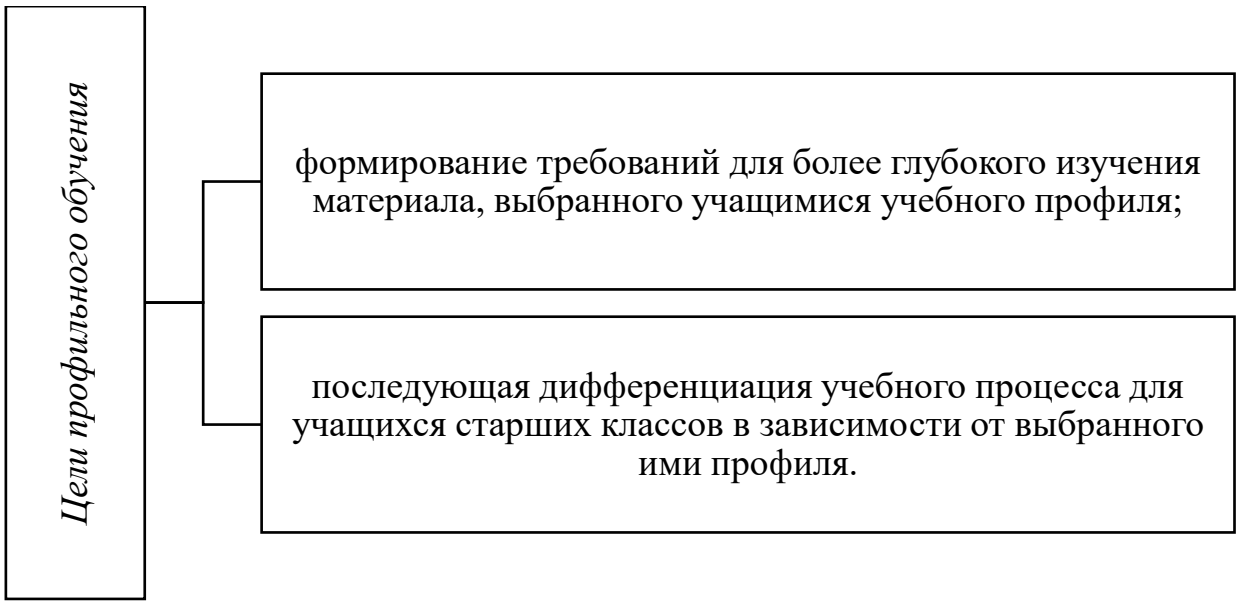


Рисунок 11 – Цели профильного обучения

Данные цели ставятся в соответствии с интересами самих школьников, их самоопределения личности с учетом предрасположенностью к дальнейшей профессиональной деятельности.

Профильное обучение реализуется с помощью организации соответствующих профилю обучения элективных курсов.

Элективные курсы - это обязательные предметы по выбору для старшеклассников, в задачи которых входит углубление, дополнение и развитие содержания профессиональных и базовых курсов, выбранных

учащимися образовательного профиля, а также развитие различных аспектов мышления. Элективные курсы проводятся за счет школьного компонента.

Важно отметить, что элективные курсы на старших этапах обучения также способствуют формированию профессиональной грамотности у учащихся, помогая им лучше понять особенности выбранной специализации и подготовиться к будущей профессиональной деятельности. Кроме того, элективные курсы способствуют развитию критического мышления, аналитических навыков и умений решать сложные задачи, что важно для успешной адаптации к быстро меняющемуся миру.

В рамках элективных курсов учащиеся также могут получить дополнительные знания и навыки, которые помогут им успешно поступить в высшие учебные заведения или выбрать профессиональную карьеру. Благодаря широкому выбору элективных курсов, учащиеся имеют возможность изучать интересующие их предметы более глубоко и основательно, что способствует их личностному развитию и раскрытию потенциала.

Кроме того, элективные курсы могут быть отличной площадкой для обмена знаниями и опытом между учащимися, что способствует развитию коммуникационных навыков и умений работы в коллективе.

Таким образом, элективные курсы играют важную роль в процессе обучения, помогая учащимся не только расширить свои знания, но и развить ключевые компетенции, необходимые для успешной профессиональной деятельности.

Отметим, что элективные курса способствуют развитию и удовлетворению индивидуальным интересам школьников, их потребностям и склонностям к тому или иному профилю обучения. Элективные курсы являются одним из основных средством построения индивидуальной образовательной траектории школьника, что способствует реализации индивидуализации образования, а также осознанному самоопределению личности.

Выделим классификацию элективных курсов по следующим критериям, которые представлены на рисунке 12.

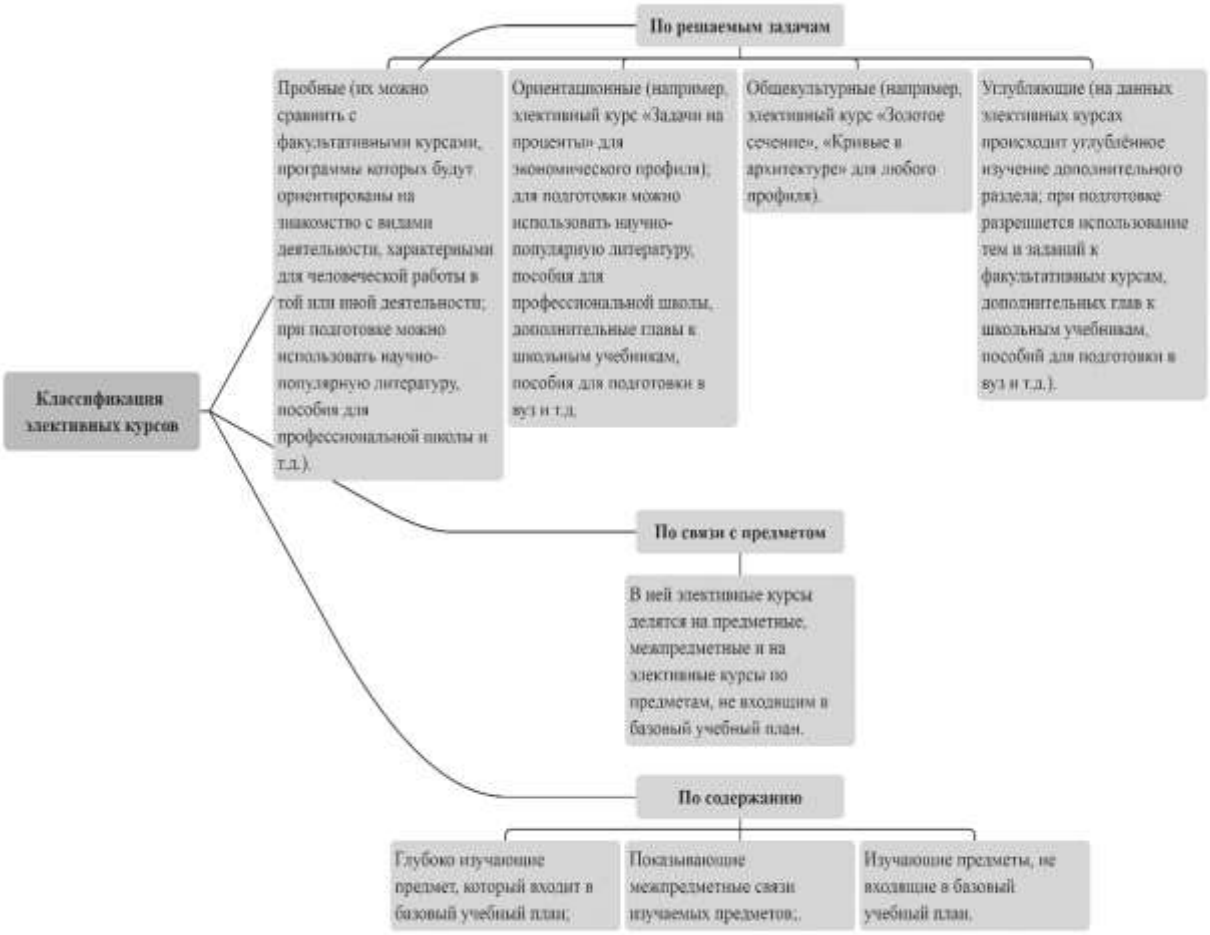


Рисунок 12 –Классификация элективных курсов

В соответствии с предложенной классификацией отметим, что часть выделенных курсов направлены на углубленное изучение методов, приемов и средств применения знаний в области математики на практике, а также при решении олимпиадных задач и выпускных экзаменов; другие – направлены на дополнительное изучение математики, а именно не характерным классно-урочной системе знаниям, которые могут быть применены в дальнейшем в межпредметных задачах.

Выделим некоторые требования, которые предъявляются к процессу организации и реализации элективных курсов в школе:

– для успешной реализации элективных курсов по математике необходима компетентная подготовка педагогов, которые будут вести эти

курсы. Педагоги должны иметь опыт работы с учащимися различных профилей, способны к реализации индивидуального подхода обучения, иметь навык адаптировать методику обучения в зависимости от потребностей того или иного контингента профилирующих классов; иметь навык быстрого и эффективного контроля результатов обучения, с целью выявления слабых мест программы обучения и своевременной её коррекции;

– организация элективных курсов по математике также требует от педагогов умения мотивировать учащихся на изучение данного предмета. Принцип мотивации обучения может быть реализован через интересные задачи, входящие в состав элективного курса; с помощью использования современных технологий обучения таких как интерактивные средства обучения, технологии критического мышления, технологию проектно-исследовательской деятельности. В данном контексте также стоит отметить и внутри коллективную атмосферу: важно, чтобы каждый обучающийся находящийся в коллективе элективного курса реализовывал свои идеи и возможности на уровне всех, задействован в той или иной деятельности должен быть каждый школьник;

– не менее важным является взаимодействие между педагогами, учащимися и их родителями на элективных курсах. Обратная связь является неотъемлемой частью полноценно и качественно функционирующего курса. Для этого необходимо своевременно подвергать обсуждениям процесса реализации элективного курса, а также результатов обучения школьников с ними самими, их классным руководителем и даже родителями, с целью выявления уровня интереса к изучаемому элективному курсу, а также с целью выявления слабых мест в организации элективного курса с целью его коррекции для успешного результата обучения.

2.2 Тематическое планирование элективного курса «Обратные тригонометрические функции»

В данном параграфе представлено тематическое планирование и методические рекомендации по организации элективного курса по теме «Обратные тригонометрические функции» для обучающихся 10-11 классов.

Курс направлен на овладение знаниями, навыками и умениями в области тригонометрии и задач, связанных с тригонометрическими преобразованиями, эквивалентностью вычислений значений аргументов обратных тригонометрических функций, использованием графической интерпретации обратных тригонометрических функций и поиском областей определения обратных тригонометрических функций.

Теоретическая часть курса раскрывает понятие обратных тригонометрических функций, их свойства, и графики, область определения и область значения обратных тригонометрических функций, а также вывод равносильных переходов при решении уравнений и неравенств с обратными тригонометрическими функциями.

Практическая часть курса направлена на применение полученных знаний на практике, для решения уравнений и неравенств, содержащие обратные тригонометрические функции; вычисление значений аргументов обратных тригонометрических функций.

Первым блоком может стать изучение основных свойств обратных тригонометрических функций и их области значений. Для этого необходимо уделить внимание определениям, графикам и основным тождествам, которые позволят студентам понять, каким образом можно работать с этими функциями.

Вторым блоком представления учебного материала может стать изучение методов решения уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции с помощью нестандартных методов решения, а именно равносильных переходов и преобразований. Обучающимся важно

научиться применять теоретический материал на практике, отработать навыки его применения и закрепить полученные знания на многовариативных примерах.

Третий блок обучения необходимо посвятить решению уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции повышенного уровня. Такие задачи как задачи олимпиадного характера требуют к себе особого внимания, использование нестандартных методов решения, полноту знаний, умений и навыков изучаемой темы.

В качестве проверки контроля знаний в рамках элективного курса предполагаются самостоятельные работы индивидуального, группового характера, а также проектно-исследовательские работы с применением информационно-коммуникационных технологий. В качестве итогового контроля результатов обучения предполагается дифференцированная контрольная работа, ориентированная на проверку всех знаний, умений и навыков, полученных в процессе освоения всей тематической линии курса. В качестве рефлексии, обучающиеся смогут проверить сами себя и сопоставить свои результаты с помощью интерактивных средств обучения.

Кроме того, на занятиях учащиеся будут активно использовать компьютерные программы для работы с тригонометрическими функциями и обратными тригонометрическими функциями. Это дает возможность лучше понять материал и закрепить полученные навыки. Такой подход к обучению позволит студентам не только углубить свои знания в данной области, но и научиться применять их на практике в решении различных задач и проблем.

В практической части курса учащиеся будут решать разнообразные уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции, а также применять полученные знания на практике. Это поможет им закрепить материал и научиться применять его в решении реальных задач.

Кроме того, учащиеся будут активно участвовать в уроках, решать задачи в группах, обсуждать различные подходы к их решению и анализировать ошибки. Это позволит им развить навыки коммуникации,

сотрудничества и самостоятельности в обучении математике.

Предлагаемый элективный курс имеет следующие цели обучения, которые представлены на рисунке 13.

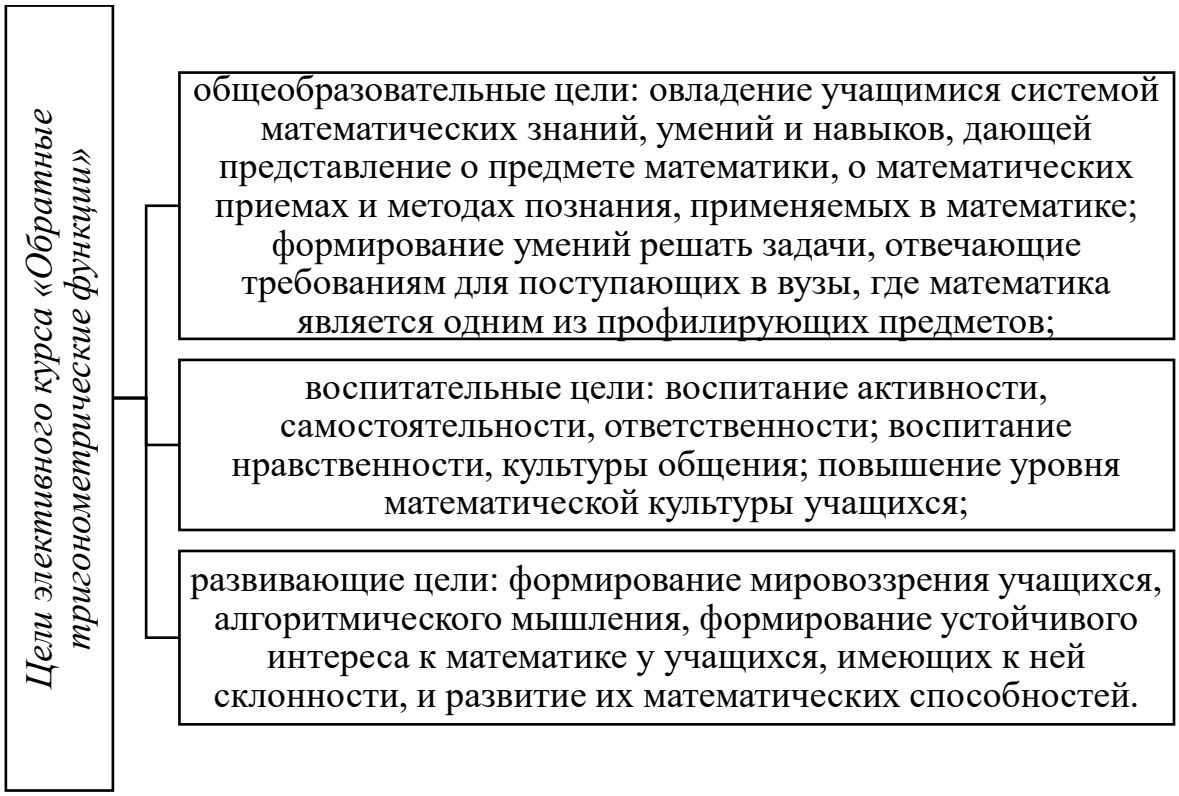


Рисунок 13 – Цели элективного курса «Обратные тригонометрические функции»

Для достижения поставленных целей, необходимо решить следующие задачи, которые представлены на рисунке 14.

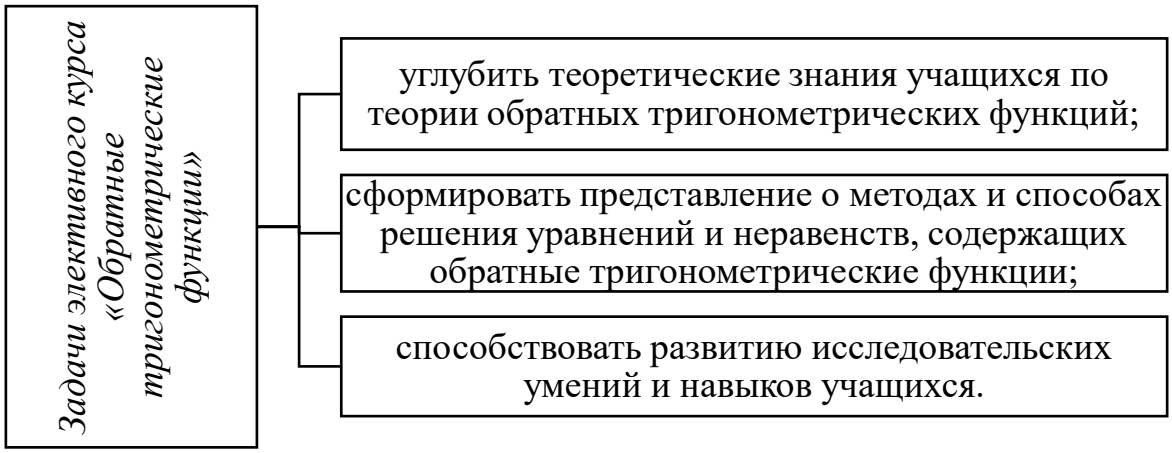


Рисунок 14 – Задачи элективного курса «Обратные тригонометрические функции»

Сформулируем требованиякуровнюусвоенияэлективного курса «Обратные тригонометрические функции» и отобразим их в виде схемы на рисунке 15.

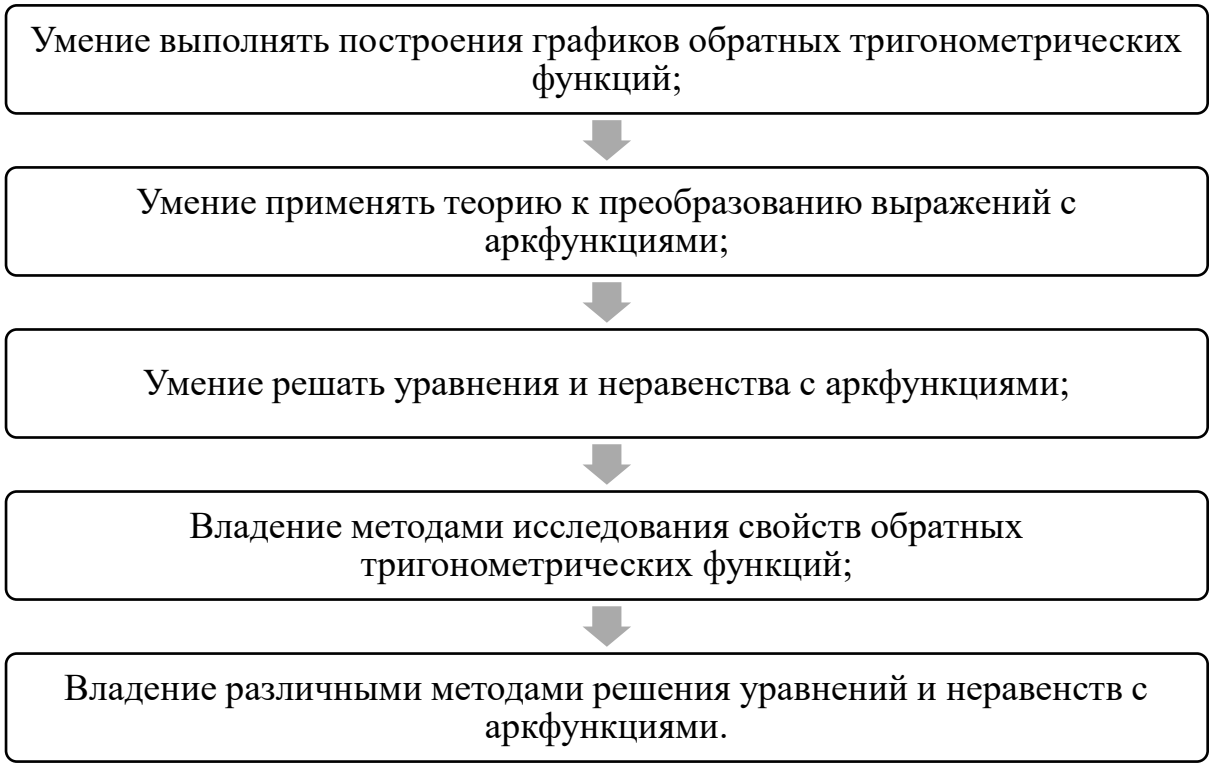


Рисунок 15 – Требования к уровню усвоения элективного курса «Обратные тригонометрические функции»

Курс рассчитан на 17 часов, в его программу могут вноситься коррективы.Учитываяособенностикласса,школы,уровеньподготовкиучащихся,учительможетизменять последовательностьизучения материала, уровеньего сложности, самостоятельно распределять часы и выбирать конкретныеформы занятий (таблица 1).

В итоге, прохождение данного курса поможет учащимся не только успешно справиться с темой обратных тригонометрических функций на школьных экзаменах, но и подготовит их к более сложным математическим задачам, которые могут встретиться им в будущем, например, при поступлении в вузы или при решении профессиональных задач.

Таблица 1 – Учебно-тематический план курса

№	Темы курса	Всего часов	Форма контроля
1	Обратные тригонометрические функции и их свойства (определения аркфункций, их свойства и графики)	2	Вводное тестирование
2	Построение и преобразование графиков обратных тригонометрические функций	2	Проверочная работа
3	Тригонометрические операции над обратными тригонометрическими функциями	1	Самостоятельная работа
4	Обратные тригонометрические операции над тригонометрическими функциями	1	Самостоятельная работа
5	Решение простейших уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции	3	Самостоятельная работа
6	Решение уравнений и неравенств, обеими частями которых являются одноименные обратные тригонометрические функции	2	Самостоятельная работа
7	Решение уравнений и неравенств, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями	2	Самостоятельная работа
8	Решение уравнений и неравенств частного вида (олимпиадного характера)	2	Самостоятельная работа
9	Обобщение пройденного материала	1	
10	Зачетное занятие	1	Контрольная работа

Метапредметные и личностные результаты играют ключевую роль в формировании универсальных учебных умений, которые применимы не только в учебной деятельности, но и в повседневной жизни. Они способствуют развитию самостоятельности, креативности и успешной социализации личности, что является неотъемлемой частью современного образовательного процесса. В итоге, обучение, ориентированное на достижение данных результатов, способствует формированию готовности к самореализации и успешной жизненной карьере.

2.3 Разработка конспектов уроков, содержащихся в элективном курсе по теме «Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции»

В данном параграфе приведены конспекты уроков по некоторым из тем предлагаемого элективного курса. Занятия рассчитаны на 1 час.

Конспекты содержат подробные, развернуты задания с решениями и пояснениями. Каждый из уроков организуется по принципу индивидуализации обучения, тем самым способствуя прочному усвоению знаний, умений и навыков в изучаемой теме.

При разработке конспектов уроков использовались информационно-коммуникационные технологии и цифровые средства обучения математике, что отвечает принципам цифровизации и информатизации образования.

Тема урока: «Решение уравнений и неравенств, правая и левая часть которых разноименные обратные тригонометрические функции».

Цель урока: изучение методов решения уравнений и неравенств, уравнений и неравенств, правая и левая часть которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями.

Занятие целесообразно начать с рассмотрения примера на использование тригонометрических тождеств для перехода к уравнению, которое является следствием исходного уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $\arcsin f(x) = \arccos g(x)$.

Предположим,что x_0 – решение этого уравнения.

Обозначим $\arcsin f(x_o) = \arccos g(x_o)$ через a. Тогда $\sin a = f(x_o)$, $\cos a = g(x_o)$, откуда $f^2(x_o) + g^2(x_o) = 1$.

Обращаем внимание на то, что корнем уравнения может быть не только число x_0, для которого $f(x_o) \geq 0$ и $g(x_o) \geq 0$. В противном случае множество значений обеих частей уравнения не пересекаются.

В процессе занятия, обучающиеся разбиваются на пять групп, каждой из которой дается индивидуальное задание: доказать следующие тождества и

получить тождественно равный переход.

Задания 1 группе: $arctgf(x) = arcctgg(x) \to f(x) \cdot g(x) = 1.$

Задания 2 группе: $arcsinf(x) = arcctgg(x) \to f^2(x) = \frac{1}{g^2(x)+1}.$

Задания 3 группе: $arctgf(x) = arccosg(x) \to g^2(x) = \frac{1}{f^2(x)+1}.$

Задания 4 группе $arcsinf(x) = arctgg(x) \to f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1}.$

Задания 5 группе: $arccosf(x) = arcctgg(x) \to f^2(x) = \frac{g^2(x)}{g^2(x)+1}.$

Результаты работы, обучающиеся фиксируют на доске и в тетради для дальнейшего применения формул при решении уравнений и неравенств.

Далее педагог предлагает решить несколько заранее заготовленных уравнений, чтобы отработать навыки применения полученных ранее тождественно равных переходов на практике, при решении уравнений и неравенств.

Пример 2. Решить уравнение $arctg\ (2x-1) = arcctg(3x-2).$

Решение.Применяемпереход $arctgf(x) = arcctgg(x) \to f(x) \cdot g(x) = 1$

Получаем: $arctg\ (2x-1) = arcctg(3x-2) \to\ (2x-1) \cdot (3x-2) = 1 \to 6x^2 - 7x + 1 = 0 \to \begin{bmatrix} x = \frac{1}{6}, \\ x = 1. \end{bmatrix}$

Корень $x = \frac{1}{6}$является посторонним, так как не удовлетворяет условию $(3x-2) > 0.$

Ответ: $x = 1.$

Пример 3. Решить уравнение $\arcsin x = arcctgx.$

Решение.Применяемпереход $arcsinf(x) = arcctgg(x) \to f^2(x) = \frac{1}{g^2(x)+1}.$

Получаем: $\arcsin x = arcctgx \to x^2 = \frac{1}{x^2+1} \to x^4 + x^2 - 1 = 0 \to$

$$\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \\ x=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \end{array}\right.$$

Корень $x=-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ является посторонним, так как не удовлетворяет условию $x>0$.

Ответ: $x=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$.

Пример 4. Решить уравнение $arctg|x|=arccos2x$.

Решение.Применяемпереход $arctgf(x)=arccosg(x)\rightarrow g^2(x)=\frac{1}{f^2(x)+1}$.

Получаем: $arctg|x|=arccos2x\ \rightarrow 4x^2=\frac{1}{x^2+1}\rightarrow 4x^4+4x^2-1=0\rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} x=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ x=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \end{array}\right.$$

Корень $x=-\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ является посторонним, так как не удовлетворяет условию $x\geq 0$.

Ответ: $x=\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

Пример 5. Решить уравнение $\arcsin\frac{\sqrt{x+2}}{2}=arctg\sqrt{\frac{2}{3x+1}}$.

Решение.Применяемпереход $arcsinf(x)=arctgg(x)\rightarrow f^2(x)=\frac{g^2(x)}{g^2(x)+1}$.

Получаем: $\arcsin\frac{\sqrt{x+2}}{2}=arctg\sqrt{\frac{2}{3x+1}}\rightarrow\frac{x+2}{4}=\frac{2}{3x+1}\rightarrow x^2+3x-6=$

$$0\rightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{33}-3}{2} \\ x=-\frac{\sqrt{33}+3}{2} \end{array}\right.$$

Корень $x=-\frac{\sqrt{33}+3}{2}$ является посторонним, так как не удовлетворяет условию$\begin{cases}\sqrt{x+2}\geq 0,\\ \sqrt{3x+1}>0.\end{cases}$

Ответ:$x=\frac{\sqrt{33}-3}{2}$.

Пример 6. Решить уравнение $\arccos(cosx)=arctg(sinx)$.

Решение. Применяем переход $arctgf(x)=arccosg(x)\to g^2(x)=\frac{1}{f^2(x)+1}$.

Получаем: $\arccos(cosx)=arctg(sinx)\to\frac{1}{\sin^2 x+1}=\cos^2 x\to\cos^2 x\cdot\sin^2 x+\cos^2 x-1=0\to 4\cos^2 x\cdot\sin^2 x+4\cos^2 x-4=0\to 4\sin^2 2x+4\cos^2 x-4=0\to 4\cdot\frac{1}{4}(1-cos4x)+4\cos^2 x-4=0\to -2cos4x+4\cos^2 x-2=0\to -2\cos^2 2x+2\sin^2 2x+4\cos^2 x-2=0\to -4\cos^2 2x+4\cos^2 x=0\to 2\cos^2 2x-cos2x-1=0.$

Пусть $cos2x=t$, тогда последнее уравнение примет вид:

$$2t^2-t-1=0\to\begin{bmatrix}t=1,\\ t=-\frac{1}{2}.\end{bmatrix}$$

Вернемся к замене, получим:

$$\begin{bmatrix}cos2x=1,\\ cos2x=-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}x=\frac{\pi n}{2},n\in Z,\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k,k\in Z\end{bmatrix}.$$

Корни вида $x=\frac{3\pi}{2}+2\pi n, x=\pi+2\pi n, x=-\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$ являются посторонними, так как не удовлетворяют условию $\begin{cases}2sinx\geq 0,\\ cosx>0\end{cases}$.

Ответ: $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, x=2\pi n, x=\frac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$.

Тема урока: «Решение уравнений и неравенств частного вида (олимпиадного характера)».

Цель урока: изучение методов решения уравнений и неравенств, уравнений и неравенств, частного вида (олимпиадного характера).

Занятие целесообразно организовать по принципу урока-исследования.

Следует начать с рассмотрения примера на применение тригонометрических преобразований и актуализации знаний об области определения обратных тригонометрических функций. Однако, необходимо поставить задачу обучающимся следующей формулировки: задания выполняются самостоятельно, однако если появляются затруднения, можно воспользоваться подсказками, которые расположены на экране проектора (заранее необходимо подготовить презентацию с подсказками).

Пример 1. Решить уравнение $\arcsin\frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}} + arcsin\frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}} = arcsin\frac{5x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}}$.

Подсказка 1. В первую очередь, когда в задаче мы видим тригонометрические функции, нужно сразу вспоминать про ограничения на аргументы.

Подсказка 2. Когда мы найдём ограничения на x, можно использовать стандартную идею в арктриге, давайте возьмём прямую функцию от обратных. В нашем случае, функцию синуса от правой и левой части уравнения.

Подсказка 3.В правой части всё легко и понятно, но вот с левой явные проблемы. Давайте обратим внимание на то, что слева у нас ни что иное, как синус суммы. Распишем его по формуле.

Подсказка 4. Воспользуемся тем, что $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$. После чего получаем уравнение, которое при вынесении общего множителя разобьётся на два случая, когда x = 0 (не забудьте проверить, что он подходит), а также на второй случай, когда x≠0.

Подсказка 5. Во втором случае получается уравнение $\sqrt{(336-11x^2)} + \sqrt{(84-11x^2)} = 5\sqrt{21}$. Ограничения на x, которые мы считали в начале, тут нам помогут в утверждении, что подкоренные выражения положительные. Если несколько раз использовать тот факт, что правая и левая часть положительны и мы можем их возводить в квадрат, то дорешать уравнение не составит труда, главное, не забудьте проверить, что корни уравнения подходят.

Решение. Из условия на область определения арксинуса имеем:

$$|x| \le \frac{8\sqrt{21}}{5\sqrt{21}} \to x^2 \le \frac{1344}{275}.$$

Вычисляя синус от обеих частей уравнения и учитывая, что $\cos(\arcsin(t)) > 0$и следовательно, $\sin(\arcsin(t)) = t$ и $\cos(\arcsin(t)) = \sqrt{1-t^2}$ получаем: $\frac{x\sqrt{11}}{2\sqrt{21}} \cdot \sqrt{1-\frac{11x^2}{16\cdot 21}} + \frac{x\sqrt{11}}{4\sqrt{21}} \cdot \sqrt{1-\frac{11x^2}{4\cdot 21}} = \frac{5x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}}$.

Перенося все в левую часть уравнения, упрощая и вынося общим множитель за скобки, имеем:

$$\frac{x\sqrt{11}}{8\sqrt{21}} \cdot \left(\sqrt{336-11x^2} + \sqrt{84-11x^2} - 5\sqrt{21}\right) = 0.$$

Из данного уравнения следует, что или x = 0 (который, очевидно, подходит), или x является корнем уравнения

$$\sqrt{336-11x^2} + \sqrt{84-11x^2} = 5\sqrt{21}.$$

Из условия следует, что все подкоренные выражения положительны. Поскольку обе части уравнения положительны, то их можно возвести в квадрат, получим:

$$336 - 11x^2 + 2\sqrt{(336-11x^2)\cdot(84-11x^2)} + 84 - 11x^2 = 525.$$

Перенося всё кроме корня в правую часть уравнения, имеем:

$$2\sqrt{(336-11x^2)\cdot(84-11x^2)} = 22x^2 + 105$$

Возводя ещё раз обе части уравнения в квадрат, получаем:

$$4(336-11x^2)\cdot(84-11x^2) = 484x^4 + 4620x^2 + 11025$$

Или $23100x^2 = 101871$.

Таким образом, уравнение имеет ещё два возможных корня $x = \pm\frac{21}{10}$.

Ответ: 0; $\pm\frac{21}{10}$.

Пример 2. Найдите все значения, которые может принимать выражение $3arcsinx - 2arccosy$ при условии $x^2 + y^2 = 1$.

Подсказка 1. x² + y² = 1. Если бы мы рисовали график этой фигуры, получилась бы окружность радиуса 1, единичную окружность –то есть то,

что (x; y) (точка на окружности) - это синус и косинус какого-то угла, например, угла t. То есть x = sin(t), y = cos(t). Теперь нам важно рассмотреть, что произошло с выражением из условия.

Подсказка 2. Рассмотрим 4 вида углов, в зависимости от того, в какой координатной четверти находится t, начнем с первой. Тогда $\sin(\arcsin(t)) = t$, $\cos(\arccos(t)) = t$. Легко и просто определяем, в каких пределах это выражение лежит. Поработаем со второй координатной четвертью: с $\cos(\arccos(t))$ ничего не меняется, а вот $\sin(\arcsin(t))$ так просто не получится - ведь итоговое выражение должно лежать в пределах значений арксинуса, а это значит, что мы должны подогнать угол в синусе так, чтобы он был от -π/2 до π/2 (помним, что sin(α) = sin(π-α)).

Подсказка 3.Продолжаем в том же духе, менять что-то вскоре придется и в арккосинусе: так, для 3 и 4 координатных четвертей угол будет от π до 2π, а нам нужно получить арккосинус, то есть от 0 до π. Значит, нужно будет заменить аргумент в арккосинусе на 2π - x (вспоминаем здесь свойства косинуса, а также то, что его период равен 2π).

Подсказка 4. Таким образом, для каждого угла у нас получилось возможные значения выражения из условия - остается только сделать объединение этих отрезков, что и будет нашим ответом.

Решение. Переберем случаи:

1) $x, y \geq 0. arcsinx \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\cos(arcsinx) = \sqrt{1-x^2} = y.$

Тогда $arcsinx = arccosy$ и $3arcsinx - 2arccosy = arcsinx \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right];$

2) $x \geq 0 \geq y.\ arcsinx \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и $\cos(arcsinx) = \sqrt{1-x^2} = -y.$

Тогда $\pi - arcsinx = arccosy$ и $3arcsinx - 2arccosy$

$$= 5arcsinx - 2\pi \in \left[-2\pi; \frac{\pi}{2}\right];$$

3) $)y \geq 0 \geq x.\ arcsinx \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ и $\cos(arcsinx) = \sqrt{1-x^2} = y.$

Тогда $arcsinx = -arccosy$ и $3arcsinx - 2arccosy$

$$= 5arcsinx - 2\pi \in \left[-\frac{5\pi}{2}; 0\right];$$

4) $x, y \leq 0. arcsinx \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ и $\cos(arcsinx) = \sqrt{1 - x^2} = -y.$ Тогда $\pi + arcsinx = arccosy$ и $3arcsinx - 2arccosy = arcsinx - 2\pi \in \left[-\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Ответ: $\left[-\frac{5\pi}{2}; -2\pi\right]$.

Пример 3. Изобразите (с обоснованием) на координатной плоскости Охумножество решений неравенства

$$(y^2 - arcsin^2(sinx)) \cdot (y^2 - arcsin^2\left(\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)) \cdot (y^2 - arcsin^2\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)) < 0.$$

Подсказка 1. Мы работаем с арксинусами, в аргументах которых синусы прибавление к аргументу синуса 2π (или вычитание) ничего не изменит. Значит, нам достаточно работать только с отрезком длины 2π, возьмем, например, от -π/2 до 3π/2. Посмотрим на то, как именно раскрывается arcsin(sin(x)) на отрезках от -π/2 до π/2 и от π/2 до 3π/2.

Подсказка 2. На первом отрезке арксинус превратится в x^2, а на втором - в $(\pi-x)^2$. Тогда мы можем, грамотно применив разность квадратов, нарисовать области, которые нам подходят. Достаточно будет выбрать одну, и если она не будет подходить, то все соседние к ней подойдут, ведь при переходе через «ноль» будет меняться знак исходного выражения.

Подсказка 3. Важно отметить, что скобки отличаются собой только аргументами синуса, а это значит, что графики этих выражений будут идентичны и смещены друг от друга на расстояние π/3. Поэтому получится очень много квадратиков (так как изначально график любой изначальной скобки и составлял цепочку квадратов), и именно отсюда, после получения цепочек квадратиков нужно будет найти один подходящий, а затем дважды переходить через «ноль» и закрашивать нужную область.

Решение. Выражение слева не меняется при изменении x на период 2π. Поэтому достаточно разобраться с графиком на отрезке 2π, например, $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$. Если $x\epsilon\ \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то $arcsin^2(sinx)=x^2$.

Если $x\epsilon\ \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, то $arcsin^2(sinx)=(\pi-x)^2$.

Рассмотрим в выражении из условия первую скобку, для второй и третьей построение будет аналогичным, но со сдвигом на $\frac{\pi}{3}$.

Если $x\epsilon\ \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то получаем неравенство $(y-x)(y+x)<0$.

Если $x\epsilon\ \left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$, то получаем неравенство $(y+\pi-x)(y+x-\pi)<0$.

Теперь рассмотрим график функции (рисунок 16), отметим области под одной прямой и над другой прямой (заранее на экране проектора необходимо подготовить программу 1С:Математический конструктор или GeoGebra с введенными неравенствами и открыть фрейм графика):

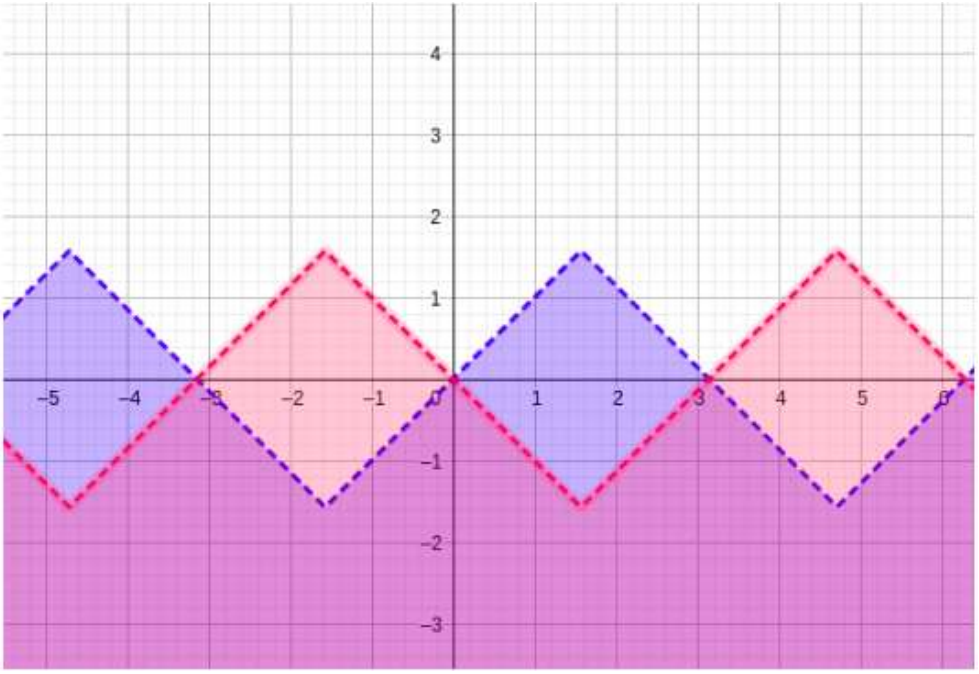


Рисунок 16 – График искомой области определения

$y^2-arcsin^2(sinx)<0$ в квадратах. Для второй и третьей скобки будут те же квадраты, только сдвинутые на $\frac{\pi}{3}$ и на $-\frac{\pi}{3}$ по оси Ох. Данная область и будет являться ответом.

Результатом такого подхода к обучению становятся компетентные личности, способные успешно решать разнообразные задачи, осуществлять самостоятельно поиск информации, анализировать и оценивать полученные данные, принимать обоснованные решения. Это важные качества для успешной адаптации к быстро меняющимся условиям современного мира и подготовки к профессиональной деятельности.

Метапредметные и личностные результаты играют ключевую роль в формировании универсальных учебных умений, которые применимы не только в учебной деятельности, но и в повседневной жизни. Они способствуют развитию самостоятельности, креативности и успешной социализации личности, что является неотъемлемой частью современного образовательного процесса.

В итоге, обучение, ориентированное на достижение данных результатов, способствует формированию готовности к самореализации и успешной жизненной карьере.

Учащимся, решая задания по тригонометрии на олимпиадах, необходимо обладать не только теоретическими знаниями, но и уметь применять их на практике. Важно уметь выполнять сложные вычисления, использоватьсвойства тригонометрических функций и правильно составлять уравнения. Эти навыки не только способствуют решению определенных задач, но и укрепляют логическое и аналитическое мышление учащихся.

2.4 Задачный материал для реализации элективного курса по теме «Уравнения и неравенства содержащие обратные тригонометрические функции» для подготовки к олимпиадам по математике

В данном параграфе представлена система упражнений, которая направлена на полноценную реализацию элективного курса по теме «Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции». Система упражнений построена в соответствии с тематическим

планом, элективного курса, который выделен в параграфе 2.3. Система упражнений позволяет в полном объеме реализовать практическую деятельность при изучении каждой темы курса.

Задания системы упражнений представлены в соответствии с каждой из тем элективного курса и отличаются вариативностью представления, что способствует повышению уровня индивидуализации обучения, а также отвечает принципу мотивации обучения школьников.

Задания системы упражнений построены по принципу «от простого к сложному», который нацелен на реализацию последовательности обучения.

Отметим, что с данным набором упражнений каждое занятие будет отвечать принципам полноты и дифференциации обучения.

Такие занятия могут также способствовать формированию у учащихся целеустремленности и настойчивости в достижении поставленных целей.

В итоге, элективный курс по математике, содержащий задачи с обратными тригонометрическими функциями, может стать не только средством повышения интеллектуального уровня учащихся, но и способствовать формированию ценностей таких как упорство, командный дух и интерес к научным знаниям.

Рассмотрим подробно каждый блок системы заданий.

Задания для темы «Обратные тригонометрические функции и их свойства (определения аркфункций, их свойства и графики)».

1. Вычислить:

   1) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

   2) $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{2}\right)$;

   3) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\arccos\frac{5}{14}\right)$;

   4) $\arccos\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)$;

   5) $\cos\left(arcctg\,(-\sqrt{3})+\ arctg\,\left(-\sqrt{3}\right)+\arcsin\frac{1}{2}\right)$;

6) $\arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$;

7) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right) - arctg\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

1) C

Задания для темы «Решение простейших уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции».

2. Решить уравнения, используя определение обратных тригонометрических функции.

1) $4arctg\ \frac{3x-1}{x+3} = \pi$;

2) $4arctg\ (x^2 - 3x + 3) = \pi$;

3) $\arcsin\left(tg\ \frac{\pi}{4}\right) - \arcsin\sqrt{\frac{3}{x}} - \frac{\pi}{6} = 0$.

Задания для темы «Решение уравнений и неравенств, обеими частями которых являются одноименные обратные тригонометрические функции».

3. Решить уравнения методом введения новой переменной:

1) $2(\arcsin x)^2 - 5\arcsin x + 2 = 0$;

2) $2(\arcsin x)^2 + \pi^2 = 3\pi\arcsin x$;

3) $9(\arccos 2x)^2 - 3\pi\arccos 2x = 2\pi^2$.

Задания для темы «Решение уравнений и неравенств, левая и правая части которых являются разноименными обратными тригонометрическими функциями».

4. Решить уравнение (неравенство) используя тождества:

1) $\arcsin x = \arccos\sqrt{1-x^2}$;

2) $\arccos x = \arcsin\sqrt{1-x^2}$;

3) $\arccos|x| = \arcsin 2x$;

4) $\arccos x + \arccos\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$;

5) $\arcsin(2-2x) < \arccos x$;

6) $\arcsin 2x < \arccos(1-x)$;

7) $\arcsin 2x + \arccos(1-x) < 0$.

5. Решить уравнения, взяв синус (косинус) от обеих частей уравнения.

Решая таким методом, нужно учитывать, что равенство тригонометрических функций влечет за собой равенство углов, если эти углы лежат, например, в 1 четверти.

1) $2\arcsin 2x = \arccos 7x;$
2) $2\arcsin x = \arccos 2x;$
3) $\arcsin 2x + \arcsin x = \frac{\pi}{3}.$

Задания для темы «Решение уравнений и неравенств частного вида».

6. Решить уравнение (неравенство), используя тождество $\arcsin m + \arccos m = \frac{\pi}{2}.$

1) $\arcsin\left(x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$
2) $\arcsin\frac{5x-1}{3} + 2\arccos\frac{5x-1}{3} = \frac{5\pi}{6};$
3) $\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{6};$
4) $\arcsin x + 2\arccos x > \frac{2\pi}{3}.$

7. Решить уравнение (неравенство) функциональным методом.

1) $\frac{3}{\pi}\arccos(x-1) = 3 + \sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2};$
2) $\arccos(x+4) = -\log^2{}_3(x^2 - 8);$
3) $\frac{4}{\pi}\arcsin(x-1) = 2 + \sqrt{x^2 - x - 2};$
4) $2^x > \arcsin x - \frac{\pi}{2};$
5) $2^{\arccos x} > \arccos x - \pi;$
6) $3\arcsin x + \pi x - \pi = 0;$
7) $\arcsin(-x) = \pi \cdot 4^x \cdot 3^{4x+1}.$

8. Докажите, что уравнение не имеет решений.

1) $\log_2(x-7)\arccos x = 0;$
2) $\arcsin(x+2) + \sqrt{2x - x^2} = x - 2.$

9. Решить уравнение:

1) $\arcsin(x^2-2x+2)=\frac{\pi x}{2}$;

2) $\arccos(6x-x^2-10)=\frac{\pi x}{3}$.

10. Решить неравенство:

1) $\arcsin\frac{2}{x}+\sqrt{x-1}>1$;

2) $\sqrt{x-1}+2^{\arcsin\frac{1}{x}}>1$.

Задания для итоговой контрольной работы учащихся.

1. Найти значение выражения:

1) $\cos\left(arctg\ \left(-\frac{3}{7}\right)\right)$;

2) $tg\ \left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$;

3) $\arcsin\left(\sin\frac{33\pi}{7}\right)$;

4) $\sin\left(arctg\ \left(-\frac{5}{4}\right)\right)$;

5) $ctg\left(\arcsin\frac{5}{6}\right)$;

6) $\arccos\left(\cos\left(\frac{46\pi}{7}\right)\right)$

2. Упростить выражение:

1) $\cos(\arccos x+\arccos y)$;

2) $\sin(2arcctg\ x)$;

3) $\sin(\arccos x+\arcsin y)$;

4) $\cos(2arctg\ x)$

3. Найти область определения, множество значений функции. Построить график.

1) $y=\sin(\arcsin x)+1$;

2) $y=\cos(\arccos x)-1$.

4. Решить неравенство:

1) $\arccos x<\frac{\pi}{3}$;

2) $\arccos(1-x)<\arcsin(1-x)$;

3) $\arcsin x<\arcsin(1-x)$;

4) $\arccos(x+1)>\arcsin(x+1)$.

5. Решить уравнение:

1) $\arcsin x-\arccos x=\frac{\pi}{6}$;

2) $4arctg\ (2x^{-1}-x)=\pi$

6. Решить уравнение функциональным методом.

1) $\log_2(x^2-9)\cdot\arccos x=0$;

2) $\sqrt[6]{x^2-4}\arcsin x = 0$;

3) $\arcsin x = \frac{\pi}{3}(1-x)$;

4) $3\arccos x = \frac{\pi}{2}(1+2x)$;

5) $\frac{1}{\pi}\arcsin(-x) = \frac{1}{2} + (x^4 + 2x^3 + x^2)$;

6) $\frac{2}{\pi}\arccos(-0{,}5x) = 2 + (x^2 - x - 2)^8$.

Для лучшего изучения темы «Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции» предложена система упражнений, включающая различные типы задач и способы их решения. В рамках этой системы учащиеся смогут ознакомиться с основными свойствами обратных тригонометрических функций, научиться применять их при решении уравнений и неравенств, а также совершенствовать навыки работы с тригонометрическими тождествами.

Кроме того, система упражнений включает в себя задания разной степени сложности, что позволяет студентам с разным уровнем подготовки эффективно осваивать материал. Для удобства оценки своего прогресса студентам предлагается система контрольных заданий, которая поможет им отслеживать свои ошибки и улучшать свои навыки.

Благодаря данной системе упражнений обучающиесясмогут не только освоить тему «Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции», но и приобрести навыки самостоятельного решения задач и анализа результатов. Это позволит им успешно справиться с дальнейшим изучением математики и применить полученные знания в практической деятельности.

Данный набор заданий не только помогают обучающимся углубить свои знания в определенной области, но и способствуют развитию их аналитического мышления, логического мышления и способности к принятию решений. Ученики, пройдя такие курсы, приобретают навыки самостоятельного и креативного мышления, что положительно сказывается

на их общем интеллектуальном развитии. Кроме того, элективные курсы способствуют формированию интереса к изучаемой теме и мотивируют студентов к дальнейшему самообразованию и профессиональному росту.

Важным аспектом элективных курсов является возможность индивидуализации обучения в зависимости от потребностей и способностей каждого ученика. Преподаватели могут адаптировать программу курса под конкретную группу обучающихся, учитывая их уровень подготовки, интересы и цели обучения. Такой подход позволяет наиболее эффективно использовать учебное время и достигать оптимальных результатов обучения.

Таким образом, данный набор заданий обеспечивает полноценную реализацию элективного курса по теме «решение уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции» и позволяет сформировать прочные знания, умения и навыки в процессе обучения математики.

Заключение

В ходе исследования в рамках выпускной квалификационной работы были актуализированы методики преподавания темы «Обратные тригонометрические функции». В процессе разработки элективного курса были отобраны задания, которые включены в перечень заданий олимпиад по математики для старших классов. Тем самым, сформированный набор заданий помогает расширить математический кругозор обучающихся, а также сформировать прочные знания, умения и навыки, которые необходимы для сдачи выпускных экзаменов в старших классах.

Актуальность исследования в рамках выпускной квалификационной работы обусловлена тем, что задания олимпиадного характера, в которых присутствуют уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции, и наличие в них сложных математических действий, рациональных переходов и вычислений, практически не рассматриваются в школьном курсе алгебры и началах анализа. В связи с этим требуется тщательно спланированная учебная деятельность школьников, которая будет способствовать развитию знаний, умений и навыков не только на уровне школьного обучения, но и отвечать принципам развития высокого уровня математической культуры. Отметим, что для достижения высокого результата обучения в области математики педагогу необходимо планировать изучения профильной математики при помощи элективных курсов, темы которых будут заинтересовывать школьников и мотивировать на углубленное изучение математики в целом.

Важно отметить, что элективные курсы на старших этапах обучения также способствуют формированию профессиональной грамотности у учащихся, помогая им лучше понять особенности выбранной специализации и подготовиться к будущей профессиональной деятельности. Кроме того,

элективные курсы способствуют развитию критического мышления, аналитических навыков и умений решать сложные задачи, что важно для успешной адаптации к быстро меняющемуся миру.

В ходе методической разработки была предложена система заданий, благодаря широкому спектру упражнений которой и разнообразию подходов к их решению, обучающиеся имеют возможность выбирать наиболее подходящий для них способ решения задач. Это способствует развитию креативного мышления и навыков самостоятельной работы. Таким образом, система упражнений по решению уравнений и неравенств с обратными тригонометрическими функциями является эффективным инструментом для развития математических навыков студентов и подготовки их к успешной сдаче элективного курса.

Задания системы упражнений представлены в соответствии с каждой из тем элективного курса и отличаются вариативностью представления, что способствует повышению уровня индивидуализации обучения, а также отвечает принципу мотивации обучения школьников. С данным набором упражнений каждое занятие будет отвечать принципам полноты и дифференциации обучения. Такие занятия могут также способствовать формированию у учащихся целеустремленности и настойчивости в достижении поставленных целей.

В итоге, элективный курс по математике, содержащий задачи с обратными тригонометрическими функциями, может стать не только средством повышения интеллектуального уровня учащихся, но и способствовать формированию ценностей таких как упорство, командный дух и интерес к научным знаниям.

В ходе исследования были решены следующие задачи:

1. Раскрыты особенности понятия обратных тригонометрических функций $y = arcsinx, y = arccosx, y = arctgx, y = arcctgx.$

2. Раскрыты методы решения уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции.

3. Проанализированы архивы олимпиад на наличие в них заданий по решению уравнений и неравенства с обратными тригонометрическими функциями.

4. Раскрыты место и роль элективных курсов в системе школьного обучения.

5. Разработано тематическое планирование элективного курса «Обратные тригонометрические функции».

6. Разработаны конспекты урока на тему «Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции».

7. Разработан банк заданий для реализации элективного курса по теме «Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции».

Методы исследования: изучение научно-методической литературы, анализ учебных материалов, изучение опыта работы педагогов современной школы, моделирование и структуризация задачного материала.

Практическая значимость работы заключается в том, что она может быть использована в качестве методического пособия для учителей при планировании и проведении уроков в рамках элективных курсов по математике.

Данный методический блок и система задач были частично апробирован в ходе личной профессиональной деятельности. Результаты апробации дали положительные результаты, что свидетельствует о дальнейшем изучении и проработки выбранной темы исследования.

Список используемых источников

1. Андронов И. К. Курс тригонометрии, развиваемый на основе реальных задач: пособие для учителей / И.К. Андронов, А.К. Окунев. 2-е изд. испр. и доп. М.: Просвещение, 1967. 648 с.
2. Бородуля И. Т. Тригонометрические уравнения и неравенства: кн. для учителя [Электронный ресурс] / И.Т. Бородуля. М.: Просвещение, 1989. 239 с. URL: http://www.mathedu.ru/mathteach/trigonometry. Заглавие с экрана. (дата обращения 12.12.2023).
3. Глейзер Г. И. История математики в школе : пособие для учителей / Г.И. Глейзер. М.: Просвещение, 1964. 375 с.
4. Голуб Г. Б. Предпрофильная подготовка учащихся : рекомендации по организации и проведению / Г. Б. Голуб, А. В. Великанова; под ред. проф. Е.Я. Когана. Самара: Учебная литература, 2006. 160 с.
5. Дроздов В. Б. Аркфункции в задачах // Математика в школе. 2010. № 4. С. 31–35.
6. Иванова Т. А. Теория и технология обучения математике в средней школе : учеб.пособие для студентов математических специальностей педагогических вузов / Т. А. Иванова, [и др.]. 2-е изд., испр. и доп. Н. Новгород: НГПУ, 2009. 355 с.
7. Использование компьютерных технологий в преподавании математики. URL:http://engjournal.ru/articles/736/736.pdf. Заглавие с экрана. (дата обращения 12.05.2024).
8. Колмогоров А. Н. Алгебра и начала математического анализа : учеб.для 10–11 кл. сред. шк. / А. Н. Колмогоров. 17-е изд. М.: Просвещение, 2008. 384 с.
9. Колягин Ю.М. Профильная дифференциация обучения математике // Математика в школе. 1990. №4. С. 21–27.

10. Концепция профильного обучения на старшей ступени общего образования // Официальные документы в образовании. 2002. №27. С. 3–12.

11. Кузнецов А. А. Базовые и профильные курсы: цели, функции, содержание // Педагогика. 2004. №2. С. 28–33.

12. Литвиненко В. Н. Практикум по элементарной математике: Алгебра. Тригонометрия: учеб.пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. инстов / В.Н Литвиненко, А.Г. Мордкович. М.: Просвещение, 1991. 352 с.

13. Лунгу К. Н. Задачи по математике: учеб.пособие для вузов. М.:Физматлит, 2008. 336 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=82619&sr=1.Заглавие с экрана. (дата обращения: 17.01.2024).

14. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа: учеб.для 10 кл. сред. шк. 6-е изд. М.: Мнемозина, 2009. 424 с.

15. Немова Н. В. Управление системой профильного обучения в школе: метод.пособие // М.: Сентябрь, 2005. 160 с.

16. Нифонтов В. И. Структура и содержание учебных программ элективных курсов/В. И. Нифонтов. Екатеринбург: МБУ ИМЦ «Екатеринбургский Дом Учителя», 2012. 19 с.

17. Новиков А. И. Тригонометрические функции, уравнения и неравенства: учеб. Пособие. М.:Физматлит, 2010. 260 с. URL: http://biblioclub.ru/index.php? page=book_red&id=68869&sr=1.Заглавие с экрана. (дата обращения: 17.01.2024).

18. Пестерева В. Л. Методика обучения и воспитания (математика): учеб.пособие для организации самостоят. раб. студентов заоч. отд. мат. фак. высш. учеб. заведений, обучающихся по направлению 44.03.01.62 «Пед. образование», профиль «Математика».Перм. гос. гуманит.–пед. ун-т. Пермь, 2015. 163 с.

19. Письмо о методических рекомендациях по реализации элективных курсов. Министерство образования науки и российской

федерации от 4 марта 2010 г. № 03-413 URL :http://usperm.ru/docs/o-metodicheskih-rekomendaciyah-po-realizacii- elektivnyh-kursov. Заглавие с экрана. (дата обращения: 26.02.2024).

20. Полещук В. А. Особенности элективных курсов и их влияние на профессионализацию // Научно-методический электронный журнал «Концепт». 2015. Т. 26. С. 46–50.

21. Потапов М. К. Алгебра и анализ элементарных функций: справочник. М.: Наука, 1981. 560 с.

22. Рихтер Т. В. Современные тенденции естественно-математического образования: школа – вуз : материалы Международной научно-практической конференции, 13 – 14 апреля 2018 года: в 2 ч. Ч. 2 / Соликамский государственный педагогический институт (филиал) ФГБОУ ВО «ПГНИУ», ООО «Типограф»; Т.В. Рихтер, составление. Соликамск: СГПИ, 2018.

23. Сиротина И. К. Математика: учебное пособие для подготовки к централизованному тестированию и экзамену: учеб. Пособие.Минск: Тетра-Системс, 2010. 400 с.

24. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования / М-во образования и науки Рос. Федерации. – 6-е изд., перераб. М.: Просвещение, 2017. 61 с. (Стандарты второго поколения).

25. Федеральный закон «Об образовании в Российской Федерации». Новосибирск: Норматика, 2016. 144 с. (Кодексы. Законы. Нормы).

26. Шеина Г. В. Теория и практика решения задач по алгебре. Часть 1:учеб.пособие / Г. В. Шеина. М.: Прометей, 2015. 100 с.

27. Шершнева В. А. Сборник прикладных задач по математике: учеб. пособие / В. А. Шершнева, О. А. Карнаухова. 2-е изд. испр. и доп/ Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2011. 220 с.

28. Шестаков С. А. Уравнения и неравенства, содержащие обратные тригонометрические функции // Первое сентября : еженед. учеб.-метод. приложение к газете «Математика». 2000. №14. С. 19–23.

29. Элективные курсы по математике: учебно-методические рекомендации. / М.В. Крутихина, [и др.]. Киров, ВятГГУ. 2006. 40 с.

30. Энциклопедический словарь юного математика: учеб.пособие / сост. А.П. Савин. М.: Педагогика, 1989. 352 с.

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»

Утверждаю: зав. кафедрой
«21» 09. 2023 г.
Паньженский В. И.

Задание

По ВКР студента Янборисовой Ильнары Наильевны

Тема работы «Разработка элективного курса «Обратные тригонометрические функции»»
Утверждена приказом по Университету от «26.09.» 2023 г. № 0971 а/о

Срок сдачи студентом законченной работы 20. 05. 2024 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов:	Сроки выполнения этапов	Примечания
1.	Изучение особенностей понятия обратных тригонометрических функций, методов их решения.	Сентябрь 2023 г.	Выполнено
2.	Уравнения и неравенства с обратными тригонометрическими функциями в олимпиадных задачах, сравнительный анализ данных олимпиад.	Октябрь 2023 г.	Выполнено
3.	Изучение места и роли элективных курсов в системе школьного обучения.	Ноябрь 2023 г.	Выполнено
4.	Тематическое планирование элективного курса «Решение уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции».	Декабрь 2023 г.	Выполнено
5.	Разработка конспекта урока на тему «Решение уравнений и неравенств, содержащие обратные тригонометрические функции».	Январь 2024 г.	Выполнено
6.	Создание банка заданий для реализации элективного курса по теме «Решение уравнений и неравенств, содержащие обратные тригонометрические функции».	Февраль – март 2024 г.	Выполнено
7.	Оформление библиографического списка.	Апрель 2024 г.	Выполнено
8.	Подготовка текста выступления.	Май 2024 г.	Выполнено

Дата выдачи задания «18» 09 2023 г.

Руководитель _____ Никитин Н. Д.
(подпись) (Ф. И.О.)

Задание принял к исполнению

_____ Янборисова Ильнара Наильевна
(подпись) (Ф. И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Канеевой Ильнары Наильевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Канеева Ильнара Наильевна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Разработка элективного курса «Обратные тригонометрические функции»», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлена с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

подпись
16.05.2024
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 16.05.2024
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР _____ Н. Д. Никитин
подпись И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему: *«Разработка элективного курса «Обратные тригонометрические функции»*
студентки 4 курса И. Н. Канеевой

направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
профиля «Математика»
Руководитель ВКР Н. Д. Никитин



Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - http://pnzgu.antiplagiat.ru

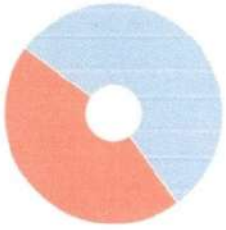


Отчет о проверке

Автор: Канеева Ильнара Наильевна
Название документа: ВКР _ Канеева И.Н.

Проверяющий: Никитина Ольга Геннадьевна
Организация: Пензенский государственный университет

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения: 44,61%
Оригинальность: 55,39%
Цитирования: 0%
Самоцитирования: 0%

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

20.05.2024 — дд.мм.гггг.
подпись
Н. Д. Никитин — И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Разработка элективного курса «Обратные тригонометрические функции»»
студентки Канеевой Ильнары Наильевны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование,
профиль подготовки «Математика», гр. 20ФПМ1

В школьном курсе алгебры не рассматриваются методы решения уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции. Это влияет в первую очередь на успешное участие учащихся в олимпиадах различного уровня, так как в заданиях многих олимпиад встречаются задачи по этой теме. Этот пробел в обучении ученик может ликвидировать, посещая элективный курс «Обратные тригонометрические функции». Отсюда следует, что выбранная тема выпускной квалификационной работы актуальна.

Работа Канеевой Ильнары Наильевны состоит из введения, двух глав, заключения и списка литературы. В первой главе приведены определения обратных тригонометрических функций, их свойства и графики. В этой же главе изложены основные методы решения уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции. Приводятся примеры решения уравнений и неравенств по этой теме, в частности, уравнений и неравенств с обратными тригонометрическими функциями в олимпиадных задачах.

Во второй главе рассмотрено место и роль элективных курсов в системе школьного обучения. Приведено учебно-тематическое планирование элективного курса «Обратные тригонометрические функции». Разработаны конспекты двух уроков по темам элективного курса. Приведен задачный материал для подготовки к олимпиадам по математике.

Работа Канеевой Ильнары Наильевны является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован автором при работе в школе.

Выпускная квалификационная работа Канеевой Ильнары Наильевны заслуживает оценки «отлично».

Руководитель ВКР Никитин Николай Дмитриевич, доцент кафедры «Математическое образование», к.ф.-м.н. _____