МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедра «Математика и суперкомпьютерное моделирование»

Курсовая работа
по дисциплине «Нелинейные дифференциальные уравнения»
на тему «Непрерывная зависимость решений ДУ от начальных данных и параметров»

Направление подготовки – 01.03.01 Математика
Профиль подготовки – Вычислительная математика и компьютерные науки

Выполнил студент: _____ Яковлева А.Д.
Группа: 19ВМ1

Руководитель:
к. ф.-м. н., доцент _____ Валовик Д.В.

Работа защищена с оценкой _____
Преподаватель _____
Дата защиты _____

2021

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

«УТВЕРЖДАЮ»
Зав. кафедрой МиСМ
_____ Смирнов Ю. Г.

ЗАДАНИЕ
на курсовую работу по дисциплине
«Нелинейные дифференциальные уравнения»
Тема: «Непрерывная зависимость решений ДУ от начальных данных и параметров»

а) Изучить литературу по теме курсовой работы.
б) Изложить реферативно изученный по теме теоретический материал.
в) Самостоятельно придумать и решить задачи по теме курсовой работы.

Руководитель работы, к. ф.-м. н., доцент Валовик Д.В.

Содержание

Введение 4

Глава I. Теоретическая часть 5

1.1 Основные определения и теоремы 5

Глава II. Практическая часть 9

2.1 Составление дифференциальных уравнений по данным их интегралов 9

2.3 Уравнения однородные и приводящиеся к ним 10

2.4 Уравнения линейные и приводящиеся к ним 13

2.5 Интегрирующий множитель 14

2.6 Уравнения, неразрешённые относительно производной 17

2.7 Особенные решения уравнений 18

2.8 Разные задачи 19

2.9 Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка 20

Заключение 26

Список используемой литературы 27

Введение

Для изучения некоторых физических явлений необходимо найти законы, которые могут связать физические величины, но, когда не получается найти их, можно воспользоваться их производными и дифференциалами, то есть записать выражение с одной или несколькими производными. Такое выражение называется дифференциальным уравнением.

В теоретической части работы я расскажу об основной теореме и замечаниях, связанных с непрерывной зависимостью решений дифференциальных уравнений от начальных данных и параметров. В практической части рассмотрю задачи, использующие знания по данной теории.

Глава I. Теоретическая часть

1.1 Основные определения и теоремы

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m), \end{cases} \tag{1}$$

где $f_1, \dots, f_n$ определены относительно $x, y_1, \dots, y_n$ в области

$$|x - x_0| \le a, \qquad \left|y_k - y_k^0\right| \le b, \qquad k = 1, \dots, n, \tag{2}$$

и относительно $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ в области $0 \le \lambda_k \le \lambda_k^{(1)}, k = 1, \dots, m,$ или

$$|\lambda_k| \le \lambda_k^{(1)}. \tag{3}$$

Теорема:

1. *Предположим, что* $f_k(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ *непрерывны относительно* $x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ *в области:* (2) и (3) *и, значит, ограничены*

$$|f_k(x, y, \lambda)| \le M, \tag{4}$$

где (x, y) *– любая точка области* (2)*, и* λ *из области* (3)*, а* M *– постоянная, не зависящая от* x, y и λ.

2. f_k, $k = 1, \dots, n$, *удовлетворяют условиям Липшица в области* (2) *относительно* $y_1, \dots, y_n$

$$|f_k(x, \bar{y}, \lambda) - f_k(x, \bar{\bar{y}}, \lambda)| \le L \sum_{k=1}^{n} |\overline{y_k} - \overline{\overline{y_k}}| \tag{5}$$

и L *– постоянная, не зависящая от* x, y и λ. *Тогда система* (1) *имеет единственное решение*

$$y_k = y_k(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m), \quad k = 1, \dots, n, \tag{6}$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$y_k(x_0) = y_k^0, \qquad k = 1, \dots, n, \tag{7}$$

это решение определенно и непрерывно дифференцируемо как функция от x в интервале

$$|x - x_0| \le h = min\left(a, \frac{b}{M}\right). \qquad (8)$$

Относительно $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ решение (6) равномерно непрерывно в интервале (3), т.е. имеем

$$\left|y_k(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) - y_k\left(x, \overline{\lambda_1}, \dots, \overline{\lambda_m}\right)\right| \le \varepsilon,$$

$$k = 1, \dots, n, \qquad \text{при } \left|\lambda_k - \overline{\lambda_k}\right| < \delta.$$

По любому ε здесь найдётся δ.

Эта теорема доказывается повторением рассуждений, проведённых при доказательстве теоремы Пикара. Здесь так же, как в теореме Пикара, получим последовательности

$$y_k^{(0)}, y_k^{(l)}(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m), \qquad l = 1,2, \dots, \qquad k = 1, \dots, n, \qquad (9)$$

по формулам

$$y_k^{(l)} = y_k^{(0)} + \int_{x_0}^{x} f_k\left(x, y_1^{(l-1)}, \dots, y_n^{(l-1)}, \lambda_1, \dots, \lambda_m\right) dx. \qquad (10)$$

Как и в теореме Пикара, последовательности (9) равномерно относительно x и $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ сходятся к предельным функциям

$$y_k(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m), \qquad k = 1, \dots, n, \qquad (11)$$

откуда и следует утверждение теоремы.

Случай зависимости начальных значений от параметров

Рассмотрим систему (1) при условиях теоремы 1, но будем теперь считать начальные значения $\overline{x_0}$ и $\bar{y}_k^0$ непрерывными функциями от параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_m$, заданными в области (3), так что

$$\overline{x_0} = \overline{x_0}(\lambda_1, \dots, \lambda_m), \qquad \bar{y}_k^0 = \bar{y}_k^0(\lambda_1, \dots, \lambda_m), \qquad k = 1, \dots, n, \qquad (12)$$

И эти значения не выходят из области (2). Тогда, согласно предыдущему, имеем решение с такими начальными значениями

$$y_k = y_k(x, x_0(\lambda_1, \dots, \lambda_m), \bar{y}_1^0(\lambda_1, \dots, \lambda_m), \dots, \bar{y}_n^0(\lambda_1, \dots, \lambda_m), \lambda_1, \dots, \lambda_m),$$
$$k = 1, \dots, n, \qquad (13)$$

Это решение непрерывно и опредено относительно x в области

$$|\bar{x} = \overline{x_0}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)| \le h = \min\left(a(\lambda_1, \dots, \lambda_m), \frac{b(\lambda_1, \dots, \lambda_m)}{M}\right),$$

где

$$a(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = a + x_0 - \overline{x_0}(\lambda_1, \dots, \lambda_m),$$
$$x > \overline{x_0}(\lambda_1, \dots, \lambda_m),$$
$$a(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \overline{x_0}(\lambda_1, \dots, \lambda_m) - x_0 + a,$$
$$x < \overline{x_0}(\lambda_1, \dots, \lambda_m),$$
$$b(\lambda_1, \dots, \lambda_m) = \min\begin{cases} b + y_k^0 - \bar{y}_k^0(\lambda_1, \dots, \lambda_m), & k = 1, \dots, n, \\ \bar{y}_k^0(\lambda_1, \dots, \lambda_m) - y_k^0 + b, \end{cases}$$

И относительно $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ в области (3). В частности, если функции (2) не выходят из области

$$|x - x_0| \le a\delta, \qquad \left|y_k - y_k^0\right| \le b\delta, 0 < \delta < 1,$$

То относительно x решения (13) определены в оласти

$$|\bar{x} = \overline{x_0}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)| \le h = \min\left(x_0 + a - (x_0 + a\delta), \frac{y_0 + b - (y_0 + b\delta)}{M}\right)$$
$$= \min\left(a(1 - \delta), \frac{b(1 - \delta)}{M}\right).$$

Замечание 1: *предположим, что* $f_k(x, y, \lambda)$ *в* (1) *в области* (2) *представимы в виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов*

$$f_k(x, y, \lambda) = \sum_{\substack{l_1, \dots, l_m = 0 \\ p_1, \dots, p_n = 0}}^{\infty} \bar{f}_{k,l,p}(x) \lambda_1^{t_1} \dots \lambda_m^{t_m}$$
$$\times (y_1 - y_1^0)^{p_1} \dots (y_n - y_n^0)^{p_n}, \qquad (1_1)$$
$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m), \qquad y = (y_1, \dots, y_n), \qquad \left|y_k - y_k^0\right| \le \Delta, \qquad |\lambda_l| < \delta.$$

Тогда решение (6) *представимо виде абсолютно и равномерно сходящихся рядов*

$$y_k = \sum_{l_1,\dots,l_m=0}^{\infty} \bar{y}_{k,l_1,\dots,l_m}(x)\lambda_1^{t_1}\dots\lambda_m^{t_m},$$

$$k = 1,\dots,n, \qquad (6_1)$$

в области $|x - x_0| \le h,\ \ |\lambda_l| < \delta_1 < \delta.$

Замечание 2: *предположим, что* $f_1,\dots,f_n$ *в* (1) *суть степенные ряды по всем аргументам* x, y, λ*, абсолютно сходящиеся в области* $|x| < \delta, |y_k| < \delta, |\lambda_k| < \delta_1$*. Пусть и* (12) *суть ряды, абсолютно сходящиеся при*$|\lambda_k| < \delta_1$*, и при таких* λ *значения* $|\bar{x}_0|, |\bar{y}_k^0|$ *не превосходят* δ*, т.е. не выходят из области сходимости рядов, представляющих* $f_k(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

Это будет, если, например, область $|\lambda| < \delta_1$*взять достаточно малой так, чтобы* $\bar{y}_k^0$ *были близки к постоянным, лежащим в области* $|y_k| < \delta$ *сходимости рядов для* f_k*. Тогда и* (13) *суть степенные ряды от* $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ *и от* x *или, если угодно, от* $(x - \bar{x}_0)$*, абсонютно сходящиеся при* $|x| < \delta_2$ *(или* $|x - x_0| < \delta_2$*),* $|\lambda| < \delta_3$*. Это можно получить из последовательности Пикара*

$$y_k^{(l)} = y_k^0(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) + \int_{\bar{x}_0}^{x} f_k\left(x, y_1^{(l-1)}, \dots, y_n^{(l-1)}, \lambda_1, \dots, \lambda_m\right) dx,$$

$$k = 1,\dots,n, \ \ l = 1,2,\dots$$

Замечание 3: *если* $f_1,\dots,f_n$ *в* (1) *суть степенные ряды по переменным* y *и* λ*, абсолютно сходящиеся в области* $|x - x_0| \le a, |y| < \delta$*,* $|\lambda| < \delta$*, а в* (12) $\bar{y}_k^0$ *– ряды по переменным* $\lambda_1,\dots,\lambda_m$*, абсолютно сходящиеся в области* $|\lambda| < \delta_1$*, и при таких* λ *имеем* $|\bar{y}_k^0| < \delta$*, то и* (11) *суть ряды по положительным степеням* $\lambda_1,\dots,\lambda_m$*, абсолютно и равномерно сходящиеся в области* $|x - x_0| \le h \le \frac{\Delta}{M} \le a, |\lambda| < \delta_3$*, где* h *и* δ_3 *такие, что неравенства*

$$\left|y_k^{(l)}(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m) - y_k^{(0)}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)\right| < Mh$$

обеспечивают нахождение величин $y_k^{(l)}(x, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ *в области сходимости рядов для* $f_k(x, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$*, в которой* $|f_k| \le M$.

Глава II. Практическая часть

2.1 Составление дифференциальных уравнений по данным их интегралов

Найти дифференциальные уравнения следующего семейства линий с несколькими параметрами:

$$y = e^x(Ax = B)$$

Решение:

Продифференцируем данное уравнение дважды по переменной x и запишем следующие системы, состоящие из трех уравнений:

$$\begin{cases} y = Axe^x \\ y' = Axe^x + Ae^x \\ y'' = Axe^x + 2Ae^x \end{cases} \qquad \begin{cases} y = Be^x \\ y' = Be^x \\ y'' = Be^x \end{cases}$$

Исключим параметры из систем уравнений. Для этого сложим первое уравнение с последним и вычтем удвоенное второе. Таким образом, семейство кривых описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$y + y'' - 2y' = 0$$

2.2 Интегрирование полных дифференциалов

Проинтегрировать следующее уравнение:

$$xdx + ydy + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

Решение:

Сгруппируем:

$$\left(\frac{x}{y^2 + x^2} + y\right)dy + \left(x - \frac{y}{y^2 + x^2}\right)dx = 0$$

Данное уравнение является уравнением в полных дифференциалах, поскольку соответствующие частные производные равны:

$$\frac{\partial N}{\partial y} = \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}, \qquad \frac{\partial M}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}$$

Запишем систему уравнений для определения функции $F(x, y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = N(x,y) = x - \frac{y}{y^2+x^2} \\ \frac{\partial F}{\partial y} = M(x,y) = \frac{x}{y^2+x^2} + y \end{cases} \quad (1)$$

Проинтегрируем первое уравнение (1) по переменной x полагая, что y является константой. В результате получаем:

$$F(x,y) = \int_{x_0}^{x} \left(t - \frac{y}{y^2+t^2}\right) dt = \frac{x^2}{2} - arctg\left(\frac{x}{y}\right) + C(y)$$

Продифференцируем полученное равенство по y и приравняем ко второму уравнению (1):

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{y^2+x^2} + C'(y) = \frac{x}{y^2+x^2} + y$$

Получим уравнение для производной $C'(y)$:

$$C'(y) = y$$

Интегрируя, найдём функцию $C(y)$:

$$C(y) = \int_{y_0}^{y} tdt = \frac{y^2}{2} + c_1$$

Следовательно, общее решение уравнения описывается следующим неявным выражением:

$$F(x,y) = \frac{x^2}{2} - arctg\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{y^2}{2} + c_1$$

или

$$x^2 + y^2 - 2arctg\left(\frac{x}{y}\right) = c_1$$

2.3 Уравнения однородные и приводящиеся к ним

Решить следующие уравнения, выделив интегральную кривую, проходящую через данную точку $M(x_0, y_0)$, там, где она дана:

$$(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0; M(1,-1).$$

Решение:

Сгруппируем:

$$(x^2 + 2xy - y^2)dx = -(y^2 + 2xy - x^2)dy$$

Так как уравнение однородное, можно воспользоваться заменой $y = tx$. Тогда $dy = tdx + xdt$.

$$(t^2 + 2t - 1)x^2(tdx + xdt) = (t^2 - 2t - 1)x^2dx$$

Разделим уравнение на x^2:

$$(t^2 + 2t - 1)(tdx + xdt) = (t^2 - 2t - 1)dx$$

Сгруппируем уравнение по дифференциалам:

$$(t^2x + 2tx - x)dt = (-t^3 - t^2 - t - 1)dx$$

Вынесем множитель:

$$(t^2 + 2t - 1)xdt = (-t^3 - t^2 - t - 1)dx$$

Разделим на x и на $-t^3 - t^2 - t - 1$

$$\frac{(-t^2 - 2t + 1)dt}{(t + 1)(t^2 + 1)} = \frac{dx}{x}$$

Перед нами уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{-t^2 - 2t + 1}{(t + 1)(t^2 + 1)}dt = \int \frac{1}{x}dx$$

$$\frac{-t^2 - 2t + 1}{(t + 1)(t^2 + 1)} = \frac{At + B}{t^2 + 1} + \frac{C}{t + 1} = \frac{(C + A)t^2 + (B + A)t + C + B}{(t + 1)(t^2 + 1)}$$

$$\begin{cases} C + B = 1 \\ B + A = -2 \\ C + A = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -2 \\ B = 0 \\ C = 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{-t^2 - 2t + 1}{(t + 1)(t^2 + 1)}dt = \int \frac{1}{t + 1} - \frac{2t}{t^2 + 1}dt = \ln|t + 1| - \ln|t^2 + 1|$$

Вычислим полученные интегралы:

$$\ln|t + 1| - \ln|t^2 + 1| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\frac{t + 1}{t^2 + 1} = cx$$

Сделаем обратную замену $t = \frac{y}{x}$:

$$\frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y^2}{x^2}+1}=cx$$

$$xy=c(xy^2+x^3)-x^2$$

Найдём c, подставив начальные условия в общее решение:

$$xy=c(xy^2+x^3)-x^2 \quad \text{при} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \quad c=0$$

$$xy=-x^2$$

$$y+x=0$$

Решить уравнение:

$$(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$$

Проведём некоторые преобразования:

$$(x+y+1)dx=-(2x+2y-1)dy$$

$$y'=\frac{x+y+1}{1-2x-2y}=\frac{x+y+1}{1-2(x+y)}$$

Сделаем замену $x+y=z$, тогда получим:

$$1+y'=z'$$

$$y'=\frac{z+1}{1-2z}; \quad y'=z'-1$$

Из этого следует:

$$\frac{z+1}{1-2z}=z'-1$$

И, следовательно:

$$z'=\frac{z+1}{1-2z}+1=\frac{z+1-2z+1}{1-2z}=\frac{2-z}{1-2z}$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int\frac{1-2z}{2-z}dz=\int dx$$

$$\int\frac{2z-1}{z-2}dz=\left|\begin{matrix} z=x+2 \\ dz=dx \end{matrix}\right|=\int\frac{2(x+2)-1}{x}dx=\int 2dx+\int\frac{4}{x}dx-\int\frac{1}{x}dx=$$

$$=2x+3\ln|x|=2z+3\ln|z-2|-4$$

Вычислим полученные интегралы:

$$2z + 3\ln|z - 2| = x + c$$

Сделав обратную замену, получим:

$$2(x + y) + 3\ln|x + y - 2| = x + c$$

Проведём некоторые преобразования:

$$x + 2y + 3\ln|x + y - 2| = c$$

2.4 Уравнения линейные и приводящиеся к ним

Найти общий интеграл уравнения:

$$dx + (x + y^2)dy = 0.$$

Проведём некоторые преобразования:

$$(y^2 + x)y' = -1; \quad y' = \frac{1}{x'}$$

Тогда получим:

$$y^2 + x = -x'$$

Сгруппируем:

$$x' + x = -y^2$$

Перед нами линейное уравнение 1-го порядка $x' + a(y)x = b(y)$, где $a(y) = 1$ и $b(y) = -y^2$. Решим его методом Бернулли, сделав подстановку $x = uv$, $x' = uv' + u'v$, получим:

$$uv' + u'v + uv = -y^2$$

Сгруппируем:

$$u'v + u(v' + v) = -y^2$$

Решим первое уравнение:

$$v' + v = 0$$

$$\frac{dv}{dy} = -v$$

Проведём некоторые преобразования:

$$\frac{dv}{v} = -dy$$

Перед нами уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dv}{v} = \int -dy$$

Вычислим полученные интегралы:

$$\ln|v| = -y$$

$$v = \frac{1}{e^y}$$

Решим второе уравнение:

$$u'v + u(v' + v) = -y^2 \quad \text{при} \quad v = \frac{1}{e^y} \quad \text{и} \quad v' + v = 0$$

Тогда получим:

$$\frac{u'}{e^y} = -y^2$$

Проведём некоторые преобразования:

$$du = -y^2 e^y dy$$

Перед нами уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int du = \int -y^2 e^y dy$$

Вычислим полученные интегралы:

$$u = -y^2 e^y + 2ye^y - 2e^y + c$$

Сделав обратную замену, получим:

$$x = \frac{(-y^2 + 2y - 2)e^y + c}{e^y}$$

$$x = ce^{-y} - y^2 + 2y - 2$$

2.5 Интегрирующий множитель

Найти интеграл следующего уравнения:

$$(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0.$$

Проверим сначала, что данное уравнение не является уравнением в полных дифференциалах:

$$\frac{\partial N}{\partial y} = 2y, \frac{\partial M}{\partial x} = -2y$$

Как видно, частные производные не равны друг другу, поэтому уравнение не принадлежит к типу уравнений в полных дифференциалах. Попробуем вычислить интегрирующий множитель, чтобы преобразовать уравнение к указанному типу. Из условия: $M\frac{\partial \mu}{\partial x} - N\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)$ следует: пусть $\mu(x, y) = \mu(x)$, тогда $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 0$, и, следовательно, условие примет вид:

$$\frac{1}{\mu}\frac{d\mu}{dx} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right)$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial x}\right) dx$$

Вычислим полученные интегралы:

$$\ln|\mu| = -2\ln|x|$$

$$\mu = \frac{1}{x^2}$$

Умножим дифференциальное уравнение на $\frac{1}{x^2}$:

$$\left(\frac{y^2 + 1}{x^2} + 1\right) dx - \frac{2ydy}{x} = 0$$

Теперь перед нами уравнение в полных дифференциалах, так как:

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial y} = \frac{2y}{x^2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = N(x, y) = \frac{y^2 + 1}{x^2} + 1 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = M(x, y) = -\frac{2y}{x} \end{cases} \quad (1)$$

Проинтегрируем первое уравнение (1) по переменной x полагая, что y является константой. В результате получаем:

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{y^2+1}{t^2}+1\right)dt=x-\frac{y^2+1}{x}+C(y)$$

Продифференцируем полученное равенство по y и приравняем ко второму уравнению (1):

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-\frac{2y}{x}+C'(y)=-\frac{2y}{x}$$

Получим уравнение для производной $C'(y)$:

$$C'(y)=0$$

Интегрируя, найдём функцию $C(y)$:

$$C(y)=\int_{y_0}^{y}0dt=c_1$$

Следовательно, общее решение уравнения описывается следующим неявным выражением:

$$F(x,y)=x-\frac{y^2+1}{x}+c_1$$

или

$$x^2-y^2-1=c_1x$$

Найти интеграл уравнения:

$$xdy+ydx+y^2(xdy-ydx)=0$$

Сгруппируем уравнение по дифференциалам:

$$(y^2x+x)dy=(y^3-y)dx$$

Вынесем множитель:

$$x(y^2+1)dy=(y^3-y)dx$$

Поделим на x и на y^3-y:

$$\left(\frac{y}{(y-1)(y+1)}+\frac{1}{y(y-1)(y+1)}\right)dy=\frac{dx}{x}$$

Перед нами уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \left(\frac{y}{(y-1)(y+1)} + \frac{1}{y(y-1)(y+1)}\right) dy = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{y}{(y-1)(y+1)} dy = \int \frac{y}{y^2-1} dy = \left| \begin{matrix} t = y^2 - 1 \\ \frac{1}{2} dt = y dy \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{2t} dt = \frac{\ln|y^2-1|}{2}$$

$$\frac{1}{y(y-1)(y+1)} = \frac{A}{y+1} + \frac{B}{y} + \frac{C}{y-1} = \frac{(C+B+A)y^2 + (C-A)y - B}{y(y+1)(y-1)}$$

$$\begin{cases} -B = 1 \\ C - A = 0 \\ C + A + B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -1 \\ C = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int \frac{dy}{y(y-1)(y+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y+1} - \int \frac{dy}{y} + \frac{1}{2}\int \frac{dy}{y-1} =$$

$$= \frac{\ln|y+1|}{2} - \ln|y| + \frac{\ln|y-1|}{2}$$

Вычислим полученные интегралы:

$$\frac{\ln|y^2-1|}{2} + \frac{\ln|y+1|}{2} - \ln|y| + \frac{\ln|y-1|}{2} = \ln|x| + \ln|c|$$

$$\ln\left|\frac{y^2-1}{y}\right| = \ln|x| + \ln|c|$$

$$y^2 - 1 = cxy$$

2.6 Уравнения, неразрешённые относительно производной

Решить уравнение:

$$y'^2 - 2xy' - 1 = 0$$

Сделаем замену $p = y'$ и получим:

$$x = \frac{p}{2} - \frac{1}{2p}$$

Возьмём полный дифференциал от обеих частей равенства:

$$dx = \frac{dp}{2p^2} + \frac{dp}{2}$$

Подставим $dx = \frac{dy}{p}$ и вычислим:

$$dy = p\left(\frac{dp}{2p^2} + \frac{dp}{2}\right)$$

Сгруппируем по дифференциалам:

$$dy = \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2p}\right)dp$$

Перед нами уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int dy = \int \left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2p}\right)dp$$

Вычислим полученные интегралы:

$$y = \frac{\ln|p|}{2} + \frac{p^2}{4} + c$$

Сделаем обратную замену $p = \pm\sqrt{x^2+1} + x$ и подставим в уравнение:

$$y = \frac{2\ln\left|\pm\sqrt{x^2+1} + x\right| + \pm 2\sqrt{x^2+1} + 2x^2 + 4\mathrm{c} + 1}{4}$$

$$y = \frac{\ln\left|\pm\sqrt{x^2+1} + x\right|}{2} + \frac{\pm\sqrt{x^2+1}}{2} + \frac{x^2}{2} + c$$

2.7 Особенные решения уравнений

Найти особенное решение уравнения:

$$2xy(1 + y'^2) - (xy' + y)^2 = 0.$$

Решение:

Продифференцируем по y':

$$4xyy' - 2x^2y' - 2xy = 0$$

Разделим уравнение на $2x$:

$$2yy' - xy' - y = 0$$

Сгруппируем:

$$(2y - x)y' - y = 0$$

Умножим уравнение на dx:

$$(2y - x)dy - ydx = 0$$

Найдём частные производные:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \frac{\partial N}{\partial x} = -1$$

Запишем систему уравнений для определения функции $F(x, y)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = N(x, y) = 2y - x \\ \frac{\partial F}{\partial y} = M(x, y) = -y \end{cases} \quad (2)$$

Проинтегрируем второе уравнение (2) по переменной x полагая, что y является константой. В результате получим:

$$F(x, y) = \int_{x_0}^{x} -ydt = -yx + C(y)$$

Продифференцируем полученное равенство по y и приравняем к первому уравнению (2):

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x + C'(y) = 2y - x$$

Получим уравнение для производной $C'(y)$:

$$C'(y) = 2y$$

Интегрируя, найдём функцию $C(y)$:

$$C(y) = \int_{y_0}^{y} 2tdt = y^2 + c_1$$

$$y^2 - yx = 0$$

Разделим уравнение на y:

$$y = x$$

2.8 Разные задачи

Найти интеграл уравнения:

$$xy' + 2y = \sqrt{y}.$$

Решение:

Сгруппируем:

$$xy' = \sqrt{y} - 2y$$

Разделим на x:

$$y' = \frac{\sqrt{y} - 2y}{x}$$

Преобразуем $y' = \frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y} - 2y}{x}$$

Умножим уравнение на dx и разделим на $(\sqrt{y} - 2y)$:

$$\frac{dy}{\sqrt{y} - 2y} = \frac{dx}{x}$$

Перед нами уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{1}{\sqrt{y} - 2y} dy = \int \frac{dx}{x}$$

Вычислим полученные интегралы:

$$\ln\left|1 - 2\sqrt{y}\right| = \ln|c| - \ln|x|$$

Проведем некоторые преобразования:

$$1 - 2\sqrt{y} = \frac{c}{x}$$

$$\sqrt{y} = \left(\frac{c}{x} - 1\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{c}{2x}$$

$$y = \left(\frac{1}{2} - \frac{c}{2x}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{c}{2x} + \frac{c^2}{4x^2}$$

$$x^2 y = (x - c)^2$$

2.9 Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка

Решить уравнение:

$$y''' sin^4 x = sin\, 2x$$

Решение:

Разделим на $sin^4 x$:

$$y''' = \frac{sin\, 2x}{sin^4 x}$$

Преобразуем $y''' = \frac{d(y'')}{dx}$:

$$\frac{d(y'')}{dx} = \frac{sin\,2x}{sin^4x}$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int d(y'') = \int \frac{sin\,2x}{sin^4x}\,dx$$

Вычислим полученные интегралы:

$$y'' = c_1 - \frac{1}{sin^2x}$$

Преобразуем $y'' = \frac{d(y')}{dx}$:

$$\frac{d(y')}{dx} = c_1 - \frac{1}{sin^2x}$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int d(y') = \int \left(c_1 - \frac{1}{sin^2x}\right) dx$$

Вычислим полученные интегралы:

$$y' = ctg(x) + c_1x + c_2$$

Преобразуем $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = ctg(x) + c_1x + c_2$$

Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int dy = \int (ctg(x) + c_1x + c_2)\,dx$$

Вычислим полученные интегралы:

$$y = \ln|sin(x)| + \frac{c_1x^2}{2} + c_2x + c_3$$

$$y = \ln|sin(x)| + c_1x^2 + c_2x + c_3$$

Следующее уравнение сводится к уравнению низшего порядка простыми подстановками: $y' = u$, $y'' = u$ и т.д.

$$y'''(1 + y'^2) - 3y'y''^2 = 0$$

Решение:

Сделаем замену $y' = u$, тогда $y'' = uu'$, $y''' = u^2u'' + uu'^2$ и получим:

$$(u^2u'' + uu'^2)(1 + u^2) - 3u^3u'^2 = 0$$

Сократим уравнение на u:

$$u^3u'' + uu'' - 2u^2u'^2 + u'^2 = 0$$

Сделаем замену $u' = v$, тогда $u'' = vv'$ и получим:

$$u^3vv' + uvv' - 2u^2v^2 + v^2 = 0$$

Сократим уравнение на v:

$$(u^3 + u)v' + (1 - 2u^2)v = 0$$

Проведём некоторые преобразования и получим:

$$\frac{dv}{v} = \left(\frac{2u^2 - 1}{u^3 + u}\right)du$$

Перед нами уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \left(\frac{2u}{u^2 + 1} - \frac{1}{u(u^2 + 1)}\right)du$$

$$2\int \frac{u}{u^2 + 1}du = \left|\begin{matrix} x = u^2 + 1 \\ \frac{1}{2}dx = udu \end{matrix}\right| = 2\int \frac{1}{2x}dx = \ln|x| = \ln|u^2 + 1|$$

$$-\int \frac{du}{u(u^2 + 1)} = \left|\begin{matrix} x = u^2 + 1 \\ \frac{1}{2}dx = udu \end{matrix}\right| = -\int \frac{1}{2x^2 - 2x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x(x - 1)}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x - 1| = \frac{1}{2}\ln|u^2 + 1| - \ln|u|$$

Вычислим полученные интегралы:

$$\ln v = \frac{3}{2}\ln|u^2 + 1| - \ln|u| + c$$

$$v = \frac{e^c(u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{u} = \frac{c_1(u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{u}$$

Сделав обратную замену $v = u'$, получим:

$$u' = \frac{c_1(u^2 + 1)^{\frac{3}{2}}}{u}$$

Проведём некоторые преобразования и получим:

$$\frac{udu}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}} = c_1 dy$$

Перед нами уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{u}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}} du = \int c_1 dy$$

$$\int \frac{u}{(u^2+1)^{\frac{3}{2}}} du = \left| \begin{matrix} x = u^2+1 \\ \frac{1}{2}dx = udu \end{matrix} \right| = \int \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{x}} = -\frac{1}{\sqrt{u^2+1}}$$

Вычислим полученные интегралы:

$$-\frac{1}{\sqrt{u^2+1}} = c_1 y + c_2$$

Проведём некоторые преобразования и получим:

$$u^2 = \frac{1}{(c_1 y + c_2)^2} - 1$$

Сделав обратную замену $u = y'$, получим:

$$y'^2 = \frac{1}{(c_1 y + c_2)^2} - 1$$

Решим уравнение относительно y':

$$\begin{cases} y' = -\dfrac{\sqrt{-(c_1 y + c_2)^2 + 1}}{c_1 y + c_2} & (3) \\ y' = \dfrac{\sqrt{-(c_1 y + c_2)^2 + 1}}{c_1 y + c_2} & (4) \end{cases}$$

Вычислим (3):

Проведём некоторые преобразования и получим:

$$\frac{c_1 y + c_2}{\sqrt{-(c_1 y + c_2)^2 + 1}} dy = -dx$$

Перед нами уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{c_1 y + c_2}{\sqrt{-(c_1 y + c_2)^2 + 1}} dy = \int -dx$$

$$\int \frac{c_1 y + c_2}{\sqrt{-(c_1 y + c_2)^2 + 1}} dy = -\int \frac{-2{c_1}^2 y - 2c_1 c_2}{2c_1 \sqrt{-(c_1 y + c_2)^2 + 1}} dy =$$

$$= \begin{vmatrix} x = -(c_1 y + c_2)^2 + 1 \\ dx = (-2{c_1}^2 y - 2c_1 c_2) dy \end{vmatrix} = -\frac{1}{2c_1} \cdot 2\sqrt{x} = -\frac{\sqrt{x}}{c_1} = -\frac{\sqrt{-(c_1 y + c_2)^2 + 1}}{c_1}$$

Вычислим полученные интегралы:

$$-\frac{\sqrt{-(c_1 y + c_2)^2 + 1}}{c_1} = c_3 - x$$

Вычислим (4):

Проведём некоторые преобразования и получим:

$$\frac{c_1 y + c_2}{\sqrt{-(c_1 y + c_2)^2 + 1}} dy = dx$$

Перед нами уравнение с разделяющимися переменными. Проинтегрируем обе части уравнения:

$$\int \frac{c_1 y + c_2}{\sqrt{-(c_1 y + c_2)^2 + 1}} dy = \int dx$$

Вычислим полученные интегралы:

$$-\frac{\sqrt{-(c_1 y + c_2)^2 + 1}}{c_1} = x + c_4$$

$$-\frac{\sqrt{-(c_1 y + c_2)^2 + 1}}{c_1} = c_3 - x, \qquad -\frac{\sqrt{-(c_1 y + c_2)^2 + 1}}{c_1} = x + c_4$$

Следующее уравнение легко интегрируется подстановками: $y - xy' = u$, $yy' = u$ и $y \pm x = u$.

$$y''^2 - 2xy'' + x^2 = y^2$$

Решение:

Проведём некоторые преобразования:

$$(y'' - x)^2 = y^2$$

Преобразуем уравнение в два линейных и получим:

$$y'' - y = x \quad \text{и} \quad y'' + y = x$$

Решим $y'' - y = x$:

$$y'' - y = 0$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

Найдём корни:

$$\lambda_1 = 1, k = 1$$

$$\lambda_2 = -1, k = 1$$

Общее решение:

$$\bar{y} = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$$

Частное решение:

$$y_0 = -x$$

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - x$$

Решим $y'' + y = x$:

$$y'' + y = 0$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

Найдём корни:

$$\lambda_1 = i, k = 1$$

$$\lambda_2 = -i, k = 1$$

Общее решение:

$$\bar{y} = c_1 \sin(x) + c_2 \cos(x)$$

Частное решение:

$$y_0 = x$$

$$y = c_1 \, sin(x) + c_2 \, cos(x) + x$$

$$(y - c_1 \, sin(x) - c_2 \, cos(x) - x)(y - c_1 e^x - c_2 e^{-x} + x) = 0$$

Заключение

Большинство законов, которым подчиняются физические явления, можно описать в виде математического уравнения, в котором будет выражена зависимость между какими-то величинами. Уравнения, содержащие одну или несколько производных, называются дифференциальными.

Параметры, содежащиеся в дифференциальных уравнениях, описывающих физические процессы, не могут быть измерены точно, поэтому существует некоторая погрешность.

В своей курсовой работе я раскрыла начальные сведения о непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от начальных данных и параметров:

- в теоретической части работы рассказала об основной теореме и замечаниях, связанных с непрерывной зависимостью решений дифференциальных уравнений от начальных данных и параметров;
- в практической части рассмотрела задачи, использующие знания по данной теории.

Список используемой литературы

1. Бибиков Ю.Н. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Высшая школа, 1991.

2. Еругин Н.П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1979

3. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001

4. Филиппов А.Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений. – М.: КомКнига, 2007

5. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004