

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

**«Методические особенности изучения стереометрических задач на построение
сечений многогранников в контексте подготовки к ЕГЭ»**

Студент

4.06.22
(подпись, дата)

Халашова Виктория Александровна
(ФИО полностью)

Руководитель

4.06.22
(подпись, дата)

Сорокина И.В.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

29.06.22
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 21.06.22 № 11)

Заведующий кафедрой

21.06.22
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отл (протокол заседания ГЭК от 06.07.22 № 6)

Секретарь ГЭК

06.07.22
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2022

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Теоретические основы построения сечений многогранников.....	6
1.1 Параллельное проектирование и его свойства.....	6
1.2 Построение сечений многогранников методом следов.....	7
1.3 Построение сечений многогранников методом внутреннего проектирования.....	11
Глава 2. Методика обучения построению сечений многогранников.....	16
2.1 Анализ изложения учебного материала по теме «Задачи на построение сечений многогранников» в школьных учебниках.....	16
2.2 Типология задач на построение сечений многогранников.....	19
2.3 Пояснительная записка к элективному курсу «Построение сечений многогранников».....	20
2.4 Тематическое планирование элективного курса.....	21
2.5 Технологические карты занятий элективного курса.....	23
2.6 Система упражнений.....	45
Заключение.....	65
Список использованной литературы.....	66
Приложения.....	68

Введение

Активно возрастающая потребность общества в специалистах, способных выполнять свои профессиональные обязанности на высоком уровне и быстро адаптироваться к изменяющимся условиям жизнедеятельности – быть профессионально мобильными, определяет соответствующие этим качествам требования к уровню освоения новым поколением общеобразовательных программ. Умение свободно оперировать пространственными образами является необходимым для успешного познания окружающей действительности. В связи с этим одной из основных задач при обучении математике, а конкретно – раздела стереометрии курса геометрии, в школе выступает формирование и развитие пространственного воображения и умения работать с пространственными объектами.

Результативность изучения стереометрии базируется не столько на теоретической составляющей, представленной в учебной литературе, сколько на способности учащегося видеть и правильно представлять различные пространственные конфигурации. Поэтому процесс формирования у учащихся пространственного воображения является самым важным и самым первым этапом в изучении курса стереометрии.

Практика позволяет убедиться в том, что правильное восприятие пространственных объектов не всем даётся легко. Этот навык возможно развивать через упражнения. Решение задач на построение пространственных фигур и действия с ними помогут преодолеть барьер в восприятии пространства и плоскости.

На наш взгляд, одними из наиболее эффективных упражнений такого характера являются задачи на построение сечений многогранников. Задачи на построение сечений многогранников уникальны ещё и тем, что способствуют глубокой систематизации теоретической базы стереометрии. На усвоение этой темы требуется немало времени. Но её изучение важно ещё и потому, что такие

задачи встречаются в заданиях Единого Государственного Экзамена профильного уровня.

Проблемой текущего исследования выступает поиск такой методики обучения старшеклассников решению задач на построение сечений многогранников, которая способствовала бы формированию прочной базы их пространственного мышления в контексте подготовки к ЕГЭ.

Исходя из сформулированной выше проблемы, была определена тема работы – «Методические особенности изучения стереометрических задач на построение сечений многогранников в контексте подготовки к ЕГЭ».

Объектом исследования является процесс обучения стереометрии в старшей школе.

Предметом – методика обучения старшеклассников построению сечений многогранников.

Цель исследования состоит в изучении методических особенностей обучения школьников решению задач на построение сечений многогранников при подготовке к ЕГЭ. Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

- 1) изучить соответствующую литературу по проблеме исследования, а именно: ввести понятие секущей плоскости и сечения многогранника, рассмотреть основные методы построения сечений, а также проанализировать школьные учебники на предмет содержания теоретического и практического материала по этой теме;

- 2) разработать элективный курс для обучения старшеклассников построению сечений многогранников в контексте подготовки к ЕГЭ.

Решению определённых выше задач способствовало использование таких методов как анализ психолого–педагогической, учебно-методической и математической литературы, учебников геометрии по теме исследования; наблюдение; сравнение.

Полученные результаты исследования могут быть использованы в работе учителя математики при подготовке обучающихся к ЕГЭ.

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованной литературы и приложений.

В первой главе изложены вопросы, касающиеся теоретических основ построения сечений многогранников. В частности, рассмотрено понятие параллельного проектирования и его свойства, изложены основные методы построения сечений – метод следов и метод внутреннего проектирования.

Вторая глава работы посвящена методическим разработкам по данной теме. Проведен анализ действующих школьных учебников по геометрии относительно изучаемого вопроса, произведена классификация задач на построение сечений открытого банка заданий ЕГЭ. Представлена рабочая программа элективного курса «Построение сечений многогранников», рассчитанного на учащихся 11 класса. Разработаны подробные конспекты нескольких занятий данного курса. Представлена подборка задач, отражающая разные методы решения, используемые в заданиях подобного рода.

Глава 1. Теоретические основы построения сечений многогранников

1.1 Параллельное проектирование и его свойства

При построении изображений плоской фигуры на плоскости, которой она принадлежит, не возникает никаких геометрических проблем. Чертёж в этом случае выступает либо точной копией оригинала, либо подобной ему фигурой.

Совсем иначе обстоит дело с изображением пространственных фигур на плоскости. Плоское изображение не может являться точной копией пространственного оригинала, потому как чертёж мы получаем, проектируя данную фигуру на плоскость проекций (изображений).

Существуют различные способы построения изображений пространственных фигур. Наиболее часто используемые из них – это метод центрального проектирования и метод параллельного проектирования.

Рассмотрим более подробно первый из них.

Пусть в пространстве задана плоскость α , на которой будем изображать фигуру; точка P , не принадлежащая плоскости α и называемая центром проектирования; F' – некоторая фигура в пространстве.

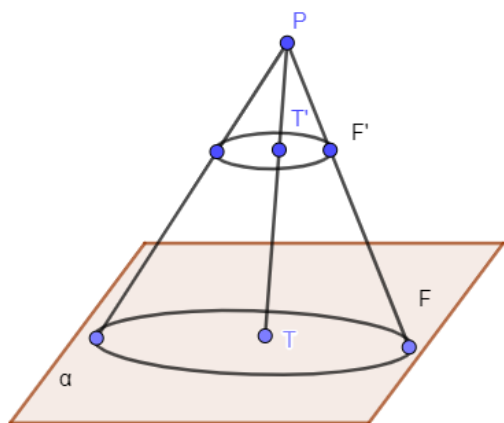


Рисунок 1 - Центральная проекция

Через каждую точку T' фигуры F' будем проводить проектирующий луч PT' . Затем найдём точку пересечения этого луча с плоскостью α . Полученная точка T – точка пересечения этих объектов называется центральной проекцией точки T' , а множество всех точек T , являющихся проекциями точек $T' \in F'$, называется центральной проекцией F' фигуры F' .

Главное преимущество описываемого выше метода – наглядность. Но при центральном проектировании не сохраняются многие свойства фигур, например,

не сохраняется понятие отрезка, параллельность, окружность может переходить в эллипс, гиперболу, параболу.

Перейдём к рассмотрению метода параллельного проектирования.

Пусть в пространстве имеется плоскость β . Возьмём некоторую прямую l , не параллельную заданной плоскости. Прямая l будет определять направление проектирования π .

Возьмём в пространстве произвольную фигуру, например, четырёхугольник $A'B'C'D'$.

Через каждую вершину данной фигуры проведём прямую, параллельную прямой l . Точки пересечения построенных прямых с плоскостью β A, B, C, D есть проекции точек A', B', C', D' при параллельном проектировании π : $\pi(A') = A, \pi(B') = B, \pi(C') = C, \pi(D') = D$.

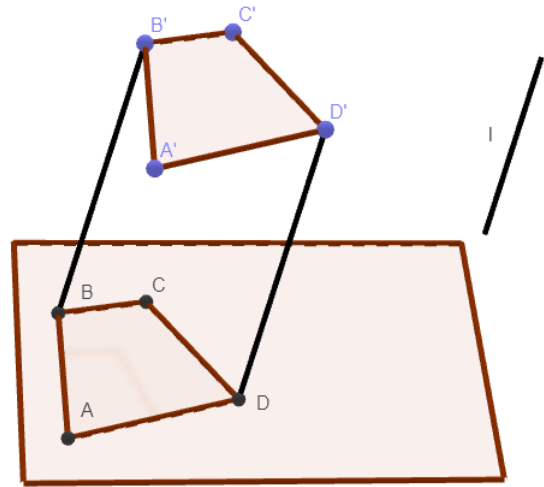


Рисунок 2 - Параллельная проекция

Четырёхугольник $ABCD$ – параллельная проекция четырёхугольника $A'B'C'D'$.

Стоит заметить, что в общем случае плоскость четырёхугольника $ABCD$ не параллельна плоскости β . Следовательно, отрезки не будут переходить в параллельные отрезки, то есть, например, $A'B' \nparallel AB$.

Направление проектирования так же может задаваться вектором.

Параллельное проектирование имеет следующие свойства:

Свойство 1. При параллельном проектировании прямая переходит в прямую.

Покажем, что прямая $M'N'$ переходит в прямую MN . Действительно, проводя через каждую точку прямой $M'N'$ проектирующие лучи, мы получим плоскость $M'N'MN$, пересекающую плоскость β по прямой MN .

Свойство 2. При параллельном проектировании параллельные прямые переходят в параллельные прямые.

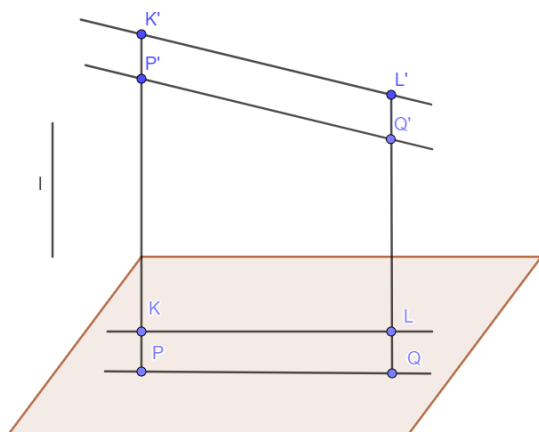


Рисунок 4 - Иллюстрация свойства 1

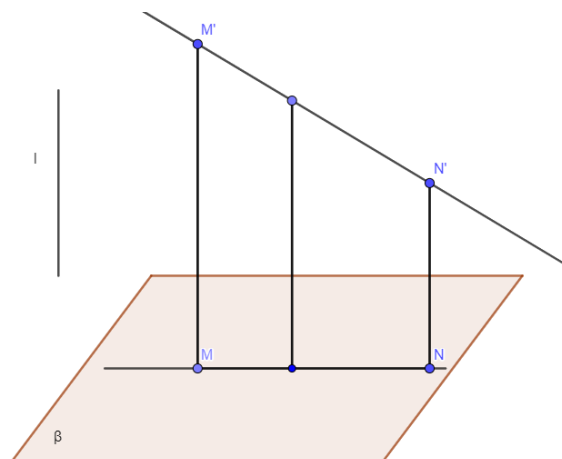


Рисунок 3 - Иллюстрация свойства 2

Покажем, что если $K'L' \parallel P'Q'$, то $KL \parallel PQ$. Построим проектирующие плоскости θ и τ , проходящие через прямые $K'L' \parallel P'Q'$ соответственно. Данные плоскости по определению являются параллельными, следовательно, пересекают плоскость β по параллельным прямым KL и PQ .

Свойство 3. Параллельное проектирование сохраняет отношение трёх точек, лежащих на одной прямой, а также сохраняет отношение отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

Это следует из применения теоремы Фалеса к $\angle A'OA$.

1.2 Построение сечений многогранников методом следов

Введём определение понятия «сечение многогранника». В учебной литературе приводится следующее определение данного понятия.

Следует различать понятие секущей плоскости от понятия сечения многогранника.

Плоскость называется секущей плоскостью многогранника, если по обе стороны от неё имеются точки этого многогранника.

Сечение многогранника определяется как геометрическая фигура, представляющая собой многоугольник, сторонами которого являются отрезки, полученные в результате пересечения секущей плоскости и граней многогранника.

Существуют следующие методы построения сечений многогранников:

- 1) метод следов, или метод вспомогательных прямых;
- 2) метод внутреннего проектирования, где используются центральное и параллельное проектирования;
- 3) комбинированный метод, представляющий собой сочетание приёмов построения первых двух методов.

В этом параграфе мы остановимся на сущности метода следов, который ещё называют методом вспомогательных линий, и рассмотрим примеры задач, где возможно применить этот метод.

Введём следующий термин.

Следом будем называть прямую, по которой пересекаются секущая плоскость и одна из граней данного многогранника.

Поскольку следом является прямая, то для его построения будет достаточно найти две точки, то есть такие точки, которые принадлежат одновременно секущей плоскости и плоскости рассматриваемой грани.

Выделим основные правила построения сечения многогранника с использованием метода следов:

- 1) если даны или уже построены хотя бы две точки в плоскости какой-либо грани многогранника, то следом секущей плоскости в плоскости данной грани будет являться прямая, проходящая через эти две точки;
- 2) если дан или уже построен след в основании – прямая пересечения плоскости сечения и основания многогранника, - и имеется точка, лежащая в любой боковой грани, то нужно построить точку пересечения следа и этой боковой грани;
- 3) точку пересечения плоскости сечения с основанием можно определить как

точку пересечения любой прямой в плоскости сечения с её проекцией на плоскость основания.

Таким образом, суть метода следов состоит в построении вспомогательной прямой, являющейся изображением линии пересечения секущей плоскости с плоскостью какой-либо грани многогранника.

Практика показывает, что удобнее всего производить построение изображения линии пересечения секущей плоскости с плоскостью нижнего основания для призм и с плоскостью основания для пирамид. Используя метод следов, легко построить изображения точек секущей плоскости, принадлежащих боковым рёбрам или граням многогранника.

Стоит отметить, что применить метод следов к решению задачи на построение сечения многогранника возможно лишь в том случае, если имеется хотя бы одна пара точек, принадлежащих секущей плоскости и лежащих в одной грани многогранника.

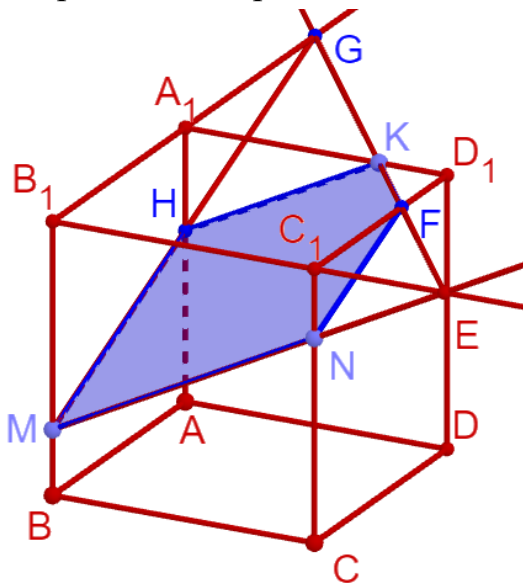


Рисунок 5 - Чертёж к задаче 1

Рассмотрим несколько задач, где имеет место решение посредством метода следов.

Задача 1. На ребре BB_1 куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ лежит точка M , на ребре CC_1 – точка N , на ребре $A_1 D_1$ – точка K . Постройте сечение куба плоскостью MNK .

Решение. Точки M и N принадлежат одной грани куба, поэтому, проведя через данные точки прямую MN , мы получим след секущей плоскости в грани $BB_1 CC_1$.

Заметим, что ребро $B_1 C_1$ лежит в одной грани с третьей точкой искомого сечения K и построенным следом MN . Построим точку E – точку пересечения $B_1 C_1$ и MN . Точки E и K принадлежат плоскости верхней грани куба, следовательно прямая EK является следом секущей плоскости в грани $A_1 B_1 C_1 D_1$.

Этот след пересекает ребро C_1D_1 в точке F, которая также принадлежит искомому сечению.

Ребро A_1B_1 лежит, с одной стороны, в одной плоскости (плоскости верхней грани) с прямой ЕК, и, с другой стороны, в одной грани с точкой сечения М. Построив точку G – точку пересечения ЕК и A_1B_1 , мы сможем построить прямую GM, являющуюся следом секущей плоскости в передней грани и пересекающую ребро AA_1 в точке сечения Н.

Соединяя отрезками все пары точек, принадлежащие сечению и лежащие в одной грани многогранника, получим многоугольник MNFKH, который и является искомым сечением куба.

1.3 Построение сечений многогранников методом внутреннего проектирования

Ещё одним часто используемым методом построения сечений многогранников является метод внутреннего проектирования.

Сущность данного метода построения сечений состоит в том, что, имея проекции точек секущей плоскости на основную плоскость (в качестве которой, как правило, выбирается нижнее основание, если сечение строится в призме, или основание, если рассматривается пирамида), можно найти дополнительные точки секущей плоскости.

При построении сначала проектируются точки на основную плоскость. Следующим шагом соединяются две спроектированные точки друг с другом и пересекаются прямой, которая образуется в результате соединения спроектированной точки и точки ребра, лежащего в основной плоскости. После чего, точка пересечения проектируется на прямую, образованную после соединения двух точек проекции. Затем третья точка и ранее спроектированная точка соединяются и пересекается прямой то ребро, точка которого была взята для получения пересечения.

Построения продолжают до тех пор, пока все точки, через которые проходит данное сечение, не будут построены.

Существует два вида проектирования: центральное и параллельное. Первое, как правило, используется при построении сечений пирамид, причём вершина пирамиды выступает в качестве центра проекции. Параллельное проектирование используется в основном при построении сечений призм.

Метод внутреннего проектирования в достаточной мере является универсальным и имеет определенные преимущества по сравнению с методом следов в тех случаях, когда нужный след секущей плоскости оказывается за пределами чертежа. Главный недостаток использования этого метода - "скученность" построений, обусловленная тем, что все они выполняются внутри многогранника. Но тем не менее, в случаях, когда след секущей плоскости не помещается на чертеже, а это возможно, если секущая плоскость составляет малый угол с плоскостью основания, рационально использовать метод внутреннего проектирования.

Рассмотрим использование этого метода в задаче на построение сечения пирамиды.

Задача 1. Построить сечение пирамиды $PABCDE$, проходящей через точки M , F , R , если данные точки принадлежат соответственно рёбрам PA , PC , PE .

Решение. Используя центральное проектирование, построим точки A , C , E - проекции соответственно точек M , F , R .

Обозначим секущую плоскость за α , а плоскость основания пирамиды - β .

В качестве четвёртой вершины четырёхугольника в основании примем вершину D , чтобы построить точку пересечения секущей плоскости с ребром PD .

Плоскости ADP и CPE пересекают плоскость основания $ABCDE$ по прямым AD и CE , пересекающимся в точке K , следовательно, прямая PK является прямой, по которой пересекаются плоскости ADP и CPE .

Прямая PK пересекает прямую $FR \in \alpha$ в точке K_1 , при этом $K_1 \in \alpha$. Тогда, так как точки M , K_1 и ребро PD лежат в одной плоскости APD , то прямая $MK_1 \cap$

$PD = Q$. Точка Q и есть точка пересечения секущей плоскости с ребром PD и, следовательно, одна из вершин искомого сечения.

Теперь построим точку пересечения секущей плоскости α с ребром PB.

Плоскости APD и BPE пересекают плоскость β по прямым соответственно AD и BE. $AD \cap BE = H$, поэтому $(APD) \cap (BPE) = PH$. $PH \cap MQ = H_1$, тогда

$RH_1 \cap PB = N$. Точка N есть точка пересечения секущей плоскости α с ребром PB и ещё одна вершина искомого сечения.

Построенный многоугольник $MNFQR$ – искомое сечение пирамиды.

Рассмотрим ещё одну задачу, где необходимо построить сечение призмы.

Задача 2. Построить сечение призмы $ABCDEA_1B_1C_1D_1E_1$ плоскостью, заданной

тремя точками: $M \in BB_1, P \in DD_1, Q \in EE_1$.

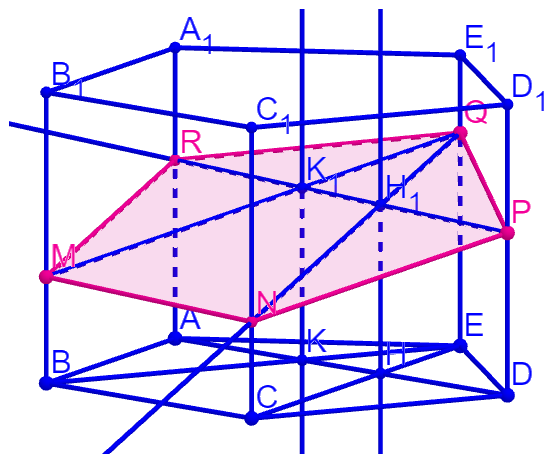


Рисунок 7 - Чертёж к задаче 2

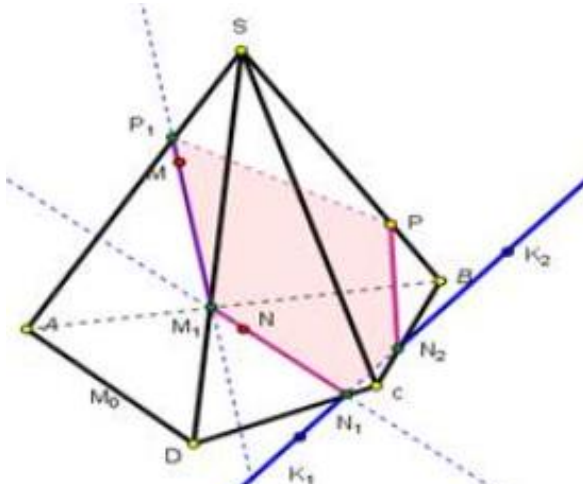
Решение. Обозначим секущую плоскость за α , а плоскость нижнего основания – за β .

Для построения искомого сечения необходимо построить точки пересечения плоскости α с рёбрами AA_1 и CC_1 .

Плоскости AA_1D и BB_1E пересекают плоскость β по прямым AD и BE соответственно. $AD \cap BE = K$. Из того, что эти плоскости проходят

через параллельные рёбра AA_1 и BB_1 призмы и имеют общую точку K, следует, что прямая $KK_1 = (AA_1D) \cap (BB_1E)$ параллельна ребру BB_1 . Пусть $KK_1 \cap QM = K_1 \in \alpha$. Так как $P \in \alpha, K_1 \in \alpha$, то и прямая $PK_1 \in \alpha$, причём $PK_1 \cap AA_1 = R$. Точка R и есть точка пересечения секущей плоскости α и ребра AA_1 и вершина искомого сечения.

Комбинированный метод построения сечений многогранников, как следует из его названия, представляет собой комбинацию метода следов и метода внутреннего проектирования.



Решение. Используя центральное проектирование и выбрав в качестве центра проектирования точку S и в

Соединяя отрезками все пары точек, принадлежащие сечению и лежащие в одной грани пирамиды, получим многоугольник $M_1N_1N_2PP_1$, который и является искомым сечением плоскостью MNP .

Задача 2. На ребре SC пирамиды $SABCD$ лежит точка P , в грани SAB – точка Q , а внутри пирамиды, в плоскости SBD , – точка R (рис.3). Построить след секущей плоскости PQR .

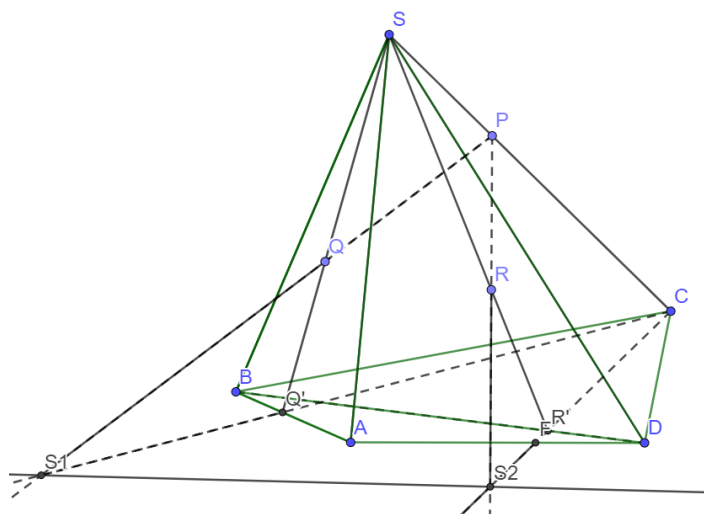


Рисунок 9 - Чертёж к задаче 2

Решение. Выполним проектирование точек P , Q и R на плоскость ABC , приняв вершину S за центр проектирования. Получим точку P' , совпадающую с точкой C , точку Q' — на ребре AB и точку R' — на диагонали BD .

Прямые PP' и QQ' пересекаются, поэтому принадлежат одной плоскости.

Тогда в одной плоскости лежат также прямые PQ и $P'Q'$. Построим точку $S1$ — точку пересечения этих прямых. По построению она принадлежит прямой PQ , т. е. принадлежит и секущей плоскости. Помимо этого, точка $S1$ лежит также и на прямой $P'Q'$, т. е. в плоскости основания. Таким образом, точка $S1$ лежит на линии пересечения секущей плоскости с плоскостью основания, т.е. на следе секущей плоскости.

Аналогично строится точка $S2$ — точка пересечения прямых PR и $P'R'$. Точка $S2$ также принадлежит следу секущей плоскости.

Итак, прямая $S1S2$ - искомый след секущей плоскости.

Глава 2. Методика обучения решению задач на построение сечений многогранников

2.1 Анализ изложения учебного материала по теме «Задачи на построение сечений многогранников» в школьных учебниках

Рассмотрим подходы к изложению темы «Задачи на построение сечений многогранников», представленные в школьных учебниках.

В учебной программе за 10 класс отводится недостаточно времени на изучение задач на построение сечений многогранников. В подтверждение сказанному, в учебнике Л.С. Атанасяна на эту тему отводится всего два часа, причём сопровождающих данную тему задач всего восемь. Данный учебник предполагает рассмотрение темы «Задачи на построение сечений многогранников» в рамках главы «Параллельность прямых и плоскостей». В параграфе содержится определения понятий «секущая плоскость тетраэдра (параллелепипеда)», «сечение тетраэдра (параллелепипеда)», а также примеры задач на построение сечений этих фигур, среди которых есть задачи на построение сечения тетраэдра и параллелепипеда через три точки, на вычисление (нахождение отношения площадей сечения). Таким образом учащиеся знакомятся с понятием секущей плоскости и сечения на примере тетраэдра и параллелепипеда. Всего в трёх задачах из учебника Л.С. Атанасяна предлагается отметить проекцию прямой на боковую грань. Это является предпосылками к неполному формированию таких ключевых понятий как перпендикуляр, проекция, угол между прямой и плоскостью, поскольку не соблюдается принцип варьирования существенных признаков. [4]

На наш взгляд, корректнее было бы поместить тему «Построение сечений многогранников» после изучения темы «Многогранники».

Учебник А.В. Погорелова предусматривает изучение построения сечений многогранников в курсе стереометрии в первом полугодии 11 класса - раздел:

«Многогранники». Изучая материал по темам: «Многогранник. Призма. Поверхность призмы. Сечение призмы плоскостью», «Пирамида. Поверхность пирамиды. Усеченная пирамида» учащиеся знакомятся с построением сечения призмы и пирамиды плоскостями, параллельными боковым ребрам (диагональные сечения), а также с построением сечения плоскостью, проходящей через данную прямую на плоскости одного из оснований многогранника (след секущей плоскости на плоскости основания). Учащимся предлагаются следующие задачи: на построение (построение сечений четырехугольной призмы и пирамиды плоскостью, проходящей через три данные точки; построение сечения треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через сторону основания и данную точку на противоположном ребре); на вычисление (отыскание площади сечения; боковой поверхности многогранника при известной площади диагонального сечения и др.). [11]

В вышеперечисленных учебниках по геометрии теоретический материал по указанным темам сопровождается однотипными иллюстрациями, в частности, построение проекции диагонали многогранника практически всегда выполняется на его нижнее основание. Обзор учебников показал, что из приведённых 18 проекций только одна была проведена на боковую грань.

В учебнике «Геометрия 10-11», разработанном А.Д. Александровым, определение сечения приводится в первой главе «Основания стереометрии». В этой главе представлены задачи на распознавание сечения, на построение сечения тетраэдра и пирамиды плоскостью, проходящей через три точки. [1]

Отличительной особенностью учебника «Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия (базовый и углублённый уровень)» авторского коллектива: Козлов В. В., Никитин А. А., Белоносов В. С. и др. является отказ от традиционного деления математики на несколько дисциплин: арифметику, алгебру, геометрию, основы математического анализа и тригонометрию и содержание перечисленные предметы в едином курсе. В данном учебнике представлены три уровня изложения материала, которые

отличаются не только объёмом, но и уровнем сложности и глубиной изложения. Первый уровень содержит сведения и умения, которыми необходимо овладеть каждому обучающемуся. Второй уровень - тот математический материал, который необходим для поступления в технические ВУЗы, а третий уровень - для желающих продолжать обучение на математическом факультете университета. Изучение сечений многогранников предполагается в 10 классе. В второй главе «Начала стереометрии» происходит знакомство обучающихся с понятием пирамиды и примерами построения их сечений. В девятой главе под названием «Сечения» рассматриваются различные методы построения сечений многогранников на конкретных примерах (названия методов в явном виде не выделяются); построение сечения, проходящего через три точки; примеры задач на построение сечений, параллельных прямым и плоскостям, а также практические приёмы использования сечений на практике.

Понятие многогранника рассматривается в учебнике Е. В. Потоскуева и Л. И. Звавича в 11 классе, а сами методы построения сечений многогранников и задачи на построение их сечений представлены в дополнениях задачника «Геометрия 10 класс». В нём описаны три основных метода построения сечений многогранников: метод следов, метод внутреннего проектирования и комбинированный метод. Данные методы рассматриваются на конкретных примерах задач с пошаговым описанием построений и раскрытием их сущности. Следует отметить, что авторы объясняют случаи, в которых целесообразно применять тот или иной метод.

Учебник И.М. Смирновой и В.А. Смирнова двухуровневый: с учётом параграфов со звёздочкой он соответствует профильному уровню, без их учёта - базовому. В Главе II «Параллельность в пространстве» содержится параграф под названием «Сечения многогранников». Учащиеся знакомятся с такими основными понятиями, как сечение многогранника плоскостью, диагональные сечения призмы и пирамиды, а также вводится понятие усечённой пирамиды и её основания. Среди материала для закрепления встречаются упражнения,

требующие только устного ответа (Какой фигурой является сечение многогранника плоскостью? Может ли в сечении куба плоскостью получиться: а) квадрат, б) прямоугольник), так и упражнения, для выполнения которых требуются построения и расчёты, - упражнения на вычисление: периметра сечения, площади сечения. Также встречаются упражнения повышенного уровня сложности.

Таким образом, в результате выполненного анализа установлено:

1. Во всех учебниках рассматриваются задачи на построение сечений многогранников плоскостью, проходящей через 3 точки.
2. Встречаются задачи с дополнительным условием - условием параллельности.
3. Помимо явных определений понятий сечения и секущей плоскости, встречаются также и разъяснения этих понятий.
4. Методы решения задач на построение сечений даются неявно - на примере решения отдельных задач.
5. Приёмы и их описание построения сечений многогранников отсутствуют.

2.2 Типология задач на построение сечений многогранников

В результате анализа открытого банка заданий ЕГЭ мы выяснили, что навыки построения сечений многогранников требуются для решения учащимися задания №13 (стереометрическая задача из второй части).

Главный вопрос (вопросы) всех прототипов этого задания имеет вычислительный и доказательный характер. Построение сечения является промежуточным этапом решения. В связи с этим, отобранные нами в систему упражнений для элективного курса прототипы 13 задания, были классифицированы по условию, задающему секущую плоскость, и

переформулированы таким образом, чтобы непосредственно построение сечения выступало основной целью.

Нами была составлена следующая типология - задачи на построение сечения многогранника:

1. проходящего через три точки, взятые на рёбрах или их продолжениях;
2. проходящего через точку на ребре и параллельно двух прямым;
3. проходящего через две точки на рёбрах и параллельно прямой;
4. проходящего через прямую параллельно другой прямой;
5. проходящего через точку параллельно плоскости;
6. проходящего через прямую перпендикулярно плоскости (основания);
7. проходящего через две точки перпендикулярно плоскости;
8. проходящего через точку на ребре и перпендикулярно прямой;
9. проходящего через две точки перпендикулярно прямой.

2.3 Пояснительная записка к элективному курсу «Построение сечений многогранников»

Элективный курс «Построение сечений многогранников» разработан для обучающихся 11 класса общеобразовательной школы и рассчитан на 14 учебных часов (1 час в неделю).

Опираясь на вышеизложенный анализ основных школьных учебников, можно сделать вывод о том, что теме «Сечения многогранников» на уроках геометрии уделяется недостаточно внимания, следствием чего выступает поверхностное освоение учащимися данной темы и слабые навыки построений, а некоторые задания ЕГЭ предполагают наличие у обучающегося твёрдо сформированных пространственных представлений и умения выполнять построения сечений многогранников. Данный факт обосновывает актуальность разработанного нами элективного курса.

Основополагающей целью элективного курса является создание педагогом условий и возможностей для максимального развития познавательных способностей учащихся, их пространственного мышления, представлениях о способах построения сечений многогранников, а также приобретения ими опыта решения задач на построение сечений многогранников в контексте подготовки к Единому Государственному Экзамену.

Успешность изучения данного элективного курса характеризуется достижением следующих результатов:

1. Обучающийся должен иметь представление о:
 - месте курса в общеобразовательной программе;
 - различных способах построения сечений многогранников;
 - практическом использовании этих способов.
2. Обучающийся должен знать:
 - сущность методов построения сечений.
3. Обучающийся должен уметь:
 - классифицировать задачи на построение сечений по используемому методу построения;
 - анализировать и находить способ решения конкретной задачи;
 - грамотно применять в решении методы построения сечений.

Также следует отметить, что на протяжении всего курса важно проводить соответствующие этапам изучения контролирующие мероприятия для отслеживания уровня овладения теми или иными знаниями или навыками.

2.4 Тематическое планирование элективного курса

Таблица 1 – Тематическое планирование элективного курса
«Построение сечений многогранников»

№ занятия	Тема занятия	Решаемые задачи
-----------	--------------	-----------------

1	Основные аксиомы и теоремы стереометрии. Понятие сечения многогранника	1.2
2	Построение сечений многогранников методом следов	1.1, 1.15, 1.16, 1.17
3		1.5, 1.8, 1.10, 1.13
4		1.11, 1.12, 1.7, 1.4
5	Контрольная работа по теме «Применение метода следов при построении сечений многогранников»	1.9, 1.14
6	Построение секущей плоскости многогранника, параллельной прямой (-ым) или плоскости	2.1, 2.2, 2.3, 2.5
7		3.1, 3.2, 3.3, 3.6
8		4.1, 4.2, 4.5, 4.6
9		5.1, 5.2, 5.3, 5.5
10	Контрольная работа по теме «Построение секущей плоскости многогранника, параллельной прямой (-ым) или плоскости»	2.6, 3.4, 4.3, 5.4
11	Построение секущей плоскости многогранника, перпендикулярной прямой (-ым) или плоскости	6.1, 6.2, 6.4
12		7.1, 7.2
13		8.2, 9.1
14	Контрольная работа по теме «Построение секущей плоскости многогранника, перпендикулярной прямой (-ым) или плоскости»	6.3, 8.1, 9.1

2.5 Технологические карты занятий элективного курса

Таблица 2 – Технологическая карта занятия «Построение сечений многогранников методом следов»

Предмет	Геометрия
Класс	11
Тип урока	Урок открытия нового знания
Цель	<p>Образовательные:</p> <ol style="list-style-type: none">1) актуализировать понятие следа секущей плоскости;2) вспомнить сущность метода следов построения сечений многогранников;3) научить применять данный метод при построении сечений пирамид и призм. <p>Развивающие:</p> <ol style="list-style-type: none">1) развивать навыки мыслительных операций;2) развивать пространственные представления и пространственное мышление;3) развивать математический кругозор. <p>Воспитательные:</p> <ol style="list-style-type: none">1) способствовать пониманию необходимости умственных усилий для успешности обучения;2) развивать самостоятельность;

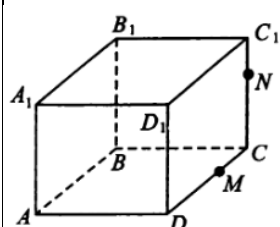
	3) развивать умение высказывать и аргументированно отстаивать собственное мнение, выслушивать мнение других, а также умение вести диалог.
Основные термины	Многогранник, ребро, грань, секущая плоскость многогранника, сечение многогранника, след секущей плоскости, метод следов
Форма работы	Фронтальная, работа в парах
Оборудование	Линейка, карточки с заданиями
Планируемый результат	
Предметные умения: 1) умения применять метод следов при построении сечений пирамид и призм.	<p>Коммуникативные УУД:</p> <p>1) умение точно, чётко и полно выражать свои мысли в устной форме;</p> <p>2) умение выслушивать собеседника.</p> <p>Личностные УУД:</p> <p>1) формирование интереса к изучаемой теме;</p> <p>2) умение извлекать нужную информацию;</p> <p>3) умение делать выводы;</p> <p>4) умение производить самооценку успешности учебной деятельности.</p> <p>Познавательные УУД:</p>

			<p>1) умение выполнять учебные действия в устной и письменной формах;</p> <p>2) умение различать новый материал от уже известного;</p> <p>3) умение самостоятельно составлять алгоритм деятельности;</p> <p>4) умение пользоваться математическими символами;</p> <p>5) умение выстраивать логическую цепочку рассуждений.</p> <p>Регулятивные УУД:</p> <p>1) умение определять и формулировать цель урока;</p> <p>2) умение производить оценку правильности действий;</p> <p>3) умение планировать собственные действия согласно поставленной задаче;</p> <p>4) умение вносить поправки в действие после его окончания на основе выявленных ошибок.</p>
Технология изучения			
Этап урока	Деятельность учителя		Деятельность обучающихся

<p style="text-align: center;">Организационный</p>	<p>- Здравствуйте, ребята! Как вам известно, в задании №13 Единого Государственного Экзамена по математике встречаются задачи, где для того, чтобы решить их, прежде всего, нужно уметь правильно построить сечения многогранника. А вы умеете делать это оперативно? На прошлом занятии мы повторили основные аксиомы и теоремы стереометрии, которые понадобятся нам на сегодняшнем занятии, где мы с вами рассмотрим один из способов построения сечения многогранника и научимся пользоваться им. Желаю нам продуктивной работы на этом занятии. Запишите в своих тетрадях сегодняшнее число и тему занятия.</p>	<p>Приветствуют учителя. Включаются в ритм занятия. Ведут записи в тетрадях.</p>
--	--	--

- На прошлом занятии мы с вами вспомнили основные аксиомы и теоремы стереометрии.

Предлагаю вам выполнить следующее задание.



Задание 1.

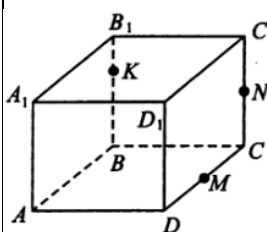
Дан куб

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. На его ребре CD отмечена точка M , а на ребре CC_1 - точка N .

1) Какой грани принадлежит отрезок MN и почему?

2) Какой из граней куба параллелен отрезок MN ?

Обоснуйте свой ответ.



Задание 2.

Рассмотрим тот же куб.

Изобразите его

в своих тетрадах. Точки M и N – середины рёбер CD и CC_1 . Точка K делит ребро BB_1 в отношении $1:2$, считая от вершины B_1 .

1) Какая из граней параллельна плоскости $CC_1 D_1$?

Выполняют задание.

- Грани $CC_1 D_1 D$. Потому что оба конца этого отрезка принадлежат данной грани.

- Грани $ABB_1 A_1$, так как он лежит в грани $CC_1 D_1 D$. Изображают куб.

- Грань $ABB_1 A_1$.

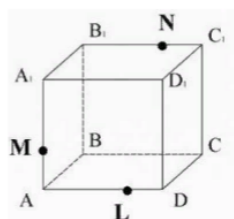
Выполняют построение на доске и в тетрадах.

- Грани $ABB_1 A_1$

- Ребро AB .

	<p>2) Постройте прямую, содержащую точку К и параллельную отрезку MN. Какой грани принадлежит полученная прямая?</p> <p>3) Какое ребро куба пересекает построенная прямая?</p>	
--	--	--

- Рассмотрим следующую задачу.



Задача 1.

Постройте сечение куба

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точки M, N, L, где данные точки делят соответствующие рёбра в отношении 1:2, считая от вершин A, C_1 , D.

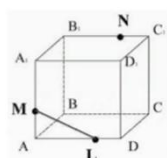
Учитель выполняет построение куба на доске.

- Ребята, чем задана секущая плоскость данного куба?

- Что необходимо построить, чтобы получить

непосредственно сечение куба?

- Принадлежат ли какой-нибудь грани две точки секущей плоскости?



- Что мы получим, соединяя их?

- А если мы продолжим этот отрезок до прямой?

Выполняют построение в тетрадах.

- Три точки.

- Отрезки пересечения секущей плоскости со всеми его гранями.

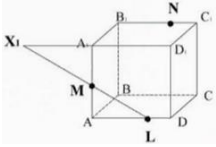
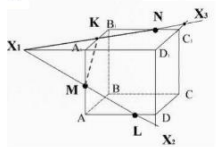
- Да, грани $AA_1 D_1 D$.

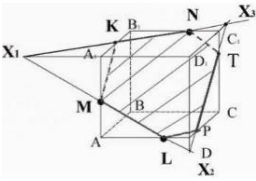
- Отрезок, являющийся пересечением секущей плоскости с гранью $AA_1 D_1 D$.

- Прямую пересечения секущей плоскостью в грани $AA_1 D_1 D$.

Высказывают различные варианты ответов.

	<p>- Действительно. Постройте этот отрезок. Кто помнит из курса стереометрии 10 класса, как называется такая прямая?</p> <p>- Полученная нами прямая в терминологии изучаемого метода называется следом секущей плоскости в грани AA_1D_1D.</p> <p>- Стало быть, для построения сечения куба, что мы должны построить в рамках новой терминологии?</p> <p>- Давайте начнём с грани верхнего основания. Ребята, скажите ещё раз, чем является след?</p> <p>- Что необходимо знать, чтобы построить конкретную прямую?</p> <p>- Известна ли нам уже какая-то точка следа в верхнем основании?</p> <p>- Давайте найдём ещё одну. Какое условие ещё мы можем использовать?</p> <p>- Будет ли он пересекать грань верхнего основания? И если да, то где лежит точка пересечения?</p>	<p>- Следы секущей плоскости во всех гранях куба.</p> <p>- Прямой</p> <p>- Две точки этой прямой</p> <p>- Да, это точка N</p> <p>- Построенный след в грани AA_1D_1D</p> <p>- Да, будет, на прямой пересечения грани AA_1D_1D и грани $A_1B_1C_1D_1$</p> <p>- Следу секущей плоскости в грани $A_1B_1C_1D_1$</p> <p>- Соединить точки N и X_1</p> <p>- Отрезок KN</p> <p>- Необходимо построить точку пересечения следа и этой грани</p> <p>- К, М</p>
--	--	---

	<p>- Построим эту точку</p>  <p>пересечения и назовём её X_1.</p> <p>Чему ещё будет принадлежать точка X_1?</p> <p>- Как его построить?</p> <p>- Построим его. Пусть точка пересечения следа с ребром A_1B_1 – точка К. Где на чертеже ещё одна сторона искомого сечения?</p> <p>- Ребята, давайте сформулируем правило построения следа секущей плоскости, если дана точка в какой-либо грани и след в плоскости смежной грани?</p> <p>- Какие уже построенные точки также принадлежат одной грани?</p> <p>- Следовательно, что представляет из себя отрезок, их соединяющий?</p> <p>- Построим его. А теперь построим след в плоскости DD_1C_1C. Какие точки задают этот след?</p> <p>- Построим точку пересечения следа ML с</p> 	<p>- Ещё одну сторону сечения или след секущей плоскости в грани AA_1B_1B</p> <p>- Можно построить точку пересечения следа ML с гранью DD_1C_1C - Построить точку пересечения следа KN с той же гранью</p> <p>- Это отрезок, соединяющий точку Т – точку пересечения X_2X_3 с CC_1 с точкой Р – точкой пересечения X_2X_3 с CD</p> <p>- Нет, не построили след в грани нижнего основания</p> <p>- Точками L и Р</p> <p>- Пятиугольник $MKNTP$</p> <p>- Метод следов</p>
--	--	--

	<p>гранью DD_1C_1C. Он пересечёт ребро DD_1 в точке, например, X_2. Как найти ещё одну точку искомого следа? Подсказка: используйте ещё один построенный след.</p> <p>- Построим точку пересечения X_3. Найдите теперь сторону искомого сечения.</p>  <p>- Мы построили следы во всех гранях?</p> <p>- Какими точками он задан?</p> <p>- Назовите искомое сечение куба.</p> <p>- Молодцы, ребята! Как вы думаете, каково название метода, применяемого нами?</p> <p>- Используемый нами метод называется методом следов. Этот метод удобно использовать, если секущая плоскость задана тремя точками, две из которых принадлежат одной грани многогранника. Запишите это в свои тетради.</p>	<p>Делают записи в тетрадях.</p> <p>- Можно построить след секущей плоскости в грани ASC, соединив точки P и Q.</p> <p>- Да, след PR в основании.</p> <p>- Ещё одной точки.</p> <p>- Эта точка должна принадлежать и секущей плоскости, и плоскости рассматриваемой грани. Для этого изображаем точку пересечения следа PR с гранью CSB.</p> <p>- На ребре BC.</p>
--	---	---

	<p>- Вы познакомились с этим методом на уроках геометрии в 10 классе. Но тогда вы применяли его только для построения сечений параллелепипеда и тетраэдра. А теперь рассмотрим задачу на построение сечений пирамиды.</p> <div data-bbox="507 667 710 936" data-label="Image"> </div> <p>Задача 2. Постройте сечение 3-угольной пирамиды SABCD плоскостью, которая проходит через точки P, Q, R.</p> <p>- С чего можно начать построение искомого сечения?</p> <p>- Изобразим этот след. Можно ли аналогично изобразить ещё один след? Какой?</p> <p>- Теперь давайте отыщем след в грани CSB. Чего не хватает для изображения следа в этой грани?</p> <p>- Как мы находили вторую точку следа в прошлой задаче?</p>	<p>- Соединим точки Q и P, так как они лежат в одной плоскости и образуют след.</p> <p>- Найдите точку пересечения прямой QT с ребром SB, чтобы построить оставшиеся стороны сечения.</p> <p>- Соединим пары точек, лежащих в одной плоскости, отрезком: QF, RF.</p>
--	--	--

	<p>- Найдём точку пересечения прямой PR с плоскостью грани CSB. Где будет лежать данная точка?</p> <p>- Назовём её T. Каков будет следующий шаг?</p> <p>- Мы построили след. Что мы должны сделать теперь?</p> <p>- Пусть QT пересекает SB в точке F. Следующий шаг?</p> <div data-bbox="534 1137 726 1361" data-label="Image"> </div> <p>- Теперь смотрим: можно ли пройти по линиям сечения, принадлежащим граням пирамиды, от точки P и снова попасть в нее непрерывной ломаной? Если да, то построение окончено. У нас такая ломаная замкнута: P-Q-F-R-P. Это и есть сечение.</p>	
--	---	--

<p>Применение новых знаний</p>	<p>- У вас на партах лежит раздаточный материал в виде нескольких изображений многогранников (в частности, призм и пирамид). Ваша задача сейчас – работая в парах, построить сечения данных многогранников.</p> <p>Каждая пара учащихся получает карточки (Приложение 1), на которых изображено 2 многогранника (пирамида и призма) и три точки, лежащие на их рёбрах. На этих карточках они выполняют построение и описывают его ход, консультируются с учителем в случае затруднений. После чего выполнятся проверка правильности построений с помощью заранее подготовленных моделей в программе Geogebra и исправляются ошибки.</p>	<p>Выполняют задание.</p>
<p>Рефлексия учебной деятельности</p>	<p>- Ребята, в качестве домашнего задания вам нужно будет выполнить задания на карточках (Приложение 2)</p>	<p>Высказывают своё мнение.</p>

	<p>Использует приём «Плюс-минус-интересно».</p> <p>Обучающимся предлагается устно заполнить таблицу, состоящую из столбцов «Плюс», «Минус», «Интересно». В первом столбце отмечается всё то, что оказалось полезным и понятным, во втором – то, что не понравилось, осталось непонятным, а в третьем – то, что вызвало интерес и желание узнать больше.</p>	
--	---	--

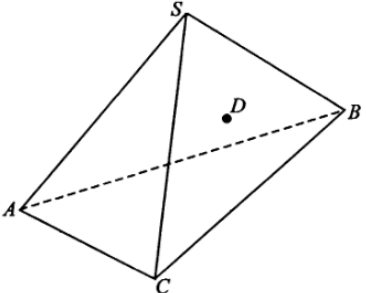
Таблица 3 – «Технологическая карта занятия по теме «Построение секущей плоскости, параллельной прямой (-ым) или плоскости»

Предмет	Геометрия
Класс	11
Тип урока	Урок открытия нового знания
Цель	<p>Образовательные:</p> <p>1) создать условия для обучения школьников построению секущей плоскости многогранника, параллельной некоторой прямой.</p> <p>Развивающие:</p> <p>1) развивать навыки мыслительных операций;</p>

	<p>2) развивать пространственные представления и пространственное мышление;</p> <p>3) развивать математический кругозор.</p> <p>Воспитательные:</p> <p>1) способствовать пониманию необходимости умственных усилий для успешности обучения;</p> <p>2) развивать самостоятельность;</p> <p>3) развивать умение высказывать и аргументированно отстаивать собственное мнение, выслушивать мнение других, а также умение вести диалог.</p>
Основные термины	<p>Многогранник, ребро, грань, секущая плоскость многогранника, сечение многогранника, параллельные прямые, параллельные плоскости, скрещивающиеся прямые</p>
Форма работы	Фронтальная, работа в мини-группах
Оборудование	Линейка, карточки с заданиями
Планируемый результат	
Предметные умения:	Коммуникативные УУД:

<p>1) умение строить секущую плоскость многогранника, проходящую через точку и параллельно двум прямым.</p>	<p>1) умение точно, чётко и полно выражать свои мысли в устной форме;</p> <p>2) умение выслушивать собеседника.</p> <p>Личностные УУД:</p> <p>1) формирование интереса к изучаемой теме;</p> <p>2) умение извлекать нужную информацию;</p> <p>3) умение делать выводы;</p> <p>4) умение производить самооценку успешности учебной деятельности.</p> <p>Познавательные УУД:</p> <p>1) умение выполнять учебные действия в устной и письменной формах;</p> <p>2) умение различать новый материал от уже известного;</p> <p>3) умение самостоятельно составлять алгоритм деятельности;</p> <p>4) умение пользоваться математическими символами;</p> <p>5) умение выстраивать логическую цепочку рассуждений.</p> <p>Регулятивные УУД:</p>
---	--

		1) умение определять и формулировать цель урока; 2) умение производить оценку правильности действий; 3) умение планировать собственные действия согласно поставленной задаче; 4) умение вносить поправки в действие после его окончания на основе выявленных ошибок.
Технология изучения		
Этап урока	Деятельность учителя	Деятельность обучающихся
Организационный	- Добрый день, ребята! Мы с вами продолжаем подготовку к ЕГЭ, а в частности, к стереометрическим задачам, где необходимо уметь строить сечения многогранников. Столкнулись ли вы с затруднениями при выполнении домашнего задания? Начнём занятие с повторения.	Приветствуют учителя. Включаются в ритм занятия.
Актуализация опорных знаний и умений	Задание 1. Продолжите утверждение: а) Плоскость в пространстве можно задать через... б) Две плоскости параллельны, если ...	Работают устно.

	<p>в) Если плоскость проходит через прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения этих плоскостей ...</p> <p>.</p> <p>г) Две прямые в пространстве называются скрещивающимися, ...</p> <p>д)</p>  <p>Прямая и плоскость параллельны, если ...</p> <p>Задание 2. Имеется треугольная пирамида $SABC$. Внутри грани SBC взята точка D. Через точку D проведите прямые, параллельные:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) BC; 2) SC; 3) SB. 	<p>Несколько учащихся выполняют построение на доске, остальные – в тетрадях.</p>
Открытие нового знания	- Рассмотрим задачу из открытого банка заданий ЕГЭ.	

	<div data-bbox="555 174 798 362" data-label="Image"> </div> <p>Задача 1.</p> <p>Построить сечение правильной четырёхугольной пирамиды, проходящее через середину K бокового ребра AP и параллельно прямым PB и BC.</p> <p>- Давайте рассуждать. Нам необходимо, чтобы секущая плоскость содержала точку K и была параллельна двум рёбрам пирамиды. Скажите, рёбра PB и BC являются какими?</p> <p>- Что могут задавать две пересекающиеся прямые в пространстве?</p> <p>- Получается, чему должна быть параллельна секущая плоскость?</p> <p>- Исходная задача свелась к построению двух параллельных плоскостей. Ребята, а какие плоскости называются параллельными?</p> <p>- Вы назвали определение параллельных плоскостей. А теперь вспомните признак.</p>	<p>- Пересекающимися</p> <p>- Плоскость</p> <p>- Плоскости PBC</p> <p>- Плоскости, не имеющие общих точек</p> <p>- Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости</p> <p>- Да, прямые PB и BC в плоскости PBC</p> <p>- Точкой K</p> <p>- Необходимо построить две</p>
--	---	--

	<p>- Имеется ли у нас пара пересекающихся прямых в какой-либо плоскости?</p> <p>- Чем задана плоскость, параллельная плоскости PBC?</p> <p>- Что осталось построить, в соответствии с признаком, для построения плоскости, параллельной PBC и проходящей через точку K.</p> <p>- Построим их. Назовём точку пересечения прямой, параллельной PB, с AB – L, а точку пересечения прямой, параллельной BC, с PD – N. Выражаясь в терминологии метода следов, следа в какой плоскости не хватает для построения сечения?</p> <p>- Можем ли мы использовать метод следов в данной ситуации? Если нет, то почему? Давайте подумаем, как нам построить сторону сечения, принадлежащую плоскости основания пирамиды. Какой</p>	<p>пересекающиеся прямые, параллельные прямой PB и BC и содержащие точку K</p> <p>- Следа в плоскости основания</p> <p>Обосновывают невозможность использования метода следов</p> <p>- Параллельно прямой BC</p> <p>- Плоскости основания</p> <p>- Она параллельна прямой KN</p> <p>- KLMN</p>
--	--	--

	<p>плоскости параллельна прямая KN, помимо плоскости PBC?</p> <p>Как мы построили эту прямую?</p> <p>- Какой ещё плоскости принадлежит BC?</p> <p>- Значит, KN параллельна плоскости основания.</p> <p>Получается, что секущая плоскость проходит через прямую KN, которая параллельна плоскости основания, и пересекает плоскость основания. Что можно сказать о линии пересечения секущей плоскости с плоскостью основания?</p> <p>- Таким образом мы получили недостающий след в основании и теперь можем назвать искомое сечение.</p> <p>- Рассмотрим ещё один вариант задачи такого типа.</p> <p>Задача 2. Постройте сечение параллелепипеда ABCDA₁B₁C₁D₁ плоскостью, проходящей через точку M – середину ребра AD и параллельно прямым BD и CB₁.</p>	<p>- Они скрещивающиеся</p> <p>- Через точку M построить сначала прямую, параллельную BD, а затем – параллельную CB₁</p> <p>- MPT</p>
--	---	--

	<p>- Прямая BD является диагональю основания, а прямая CB_1 – диагональю задней грани. Каково взаимное расположение прямых BD и CB_1?</p> <p>- Получается, секущая плоскость должна проходить через точку M и быть параллельна двум скрещивающимся прямым. Как построить такую плоскость?</p> <p>- Действительно, сначала через точку M проведём прямую, параллельную BD. Пусть она пересекает ребро AB в точке P. А затем через ту же точку M проведём прямую, параллельную CB_1, которая пересечёт ребро AA_1 в точке T. Назовите искомое сечение.</p>	
Применение новых знаний	<p>- Теперь я предлагаю вам самостоятельно попрактиковаться в решении задач этого типа. Разбейтесь на мини-группы, по 4-5 человек в каждой. Каждой группе я сейчас раздам карточки с двумя задачами. На их решение вам</p>	<p>Обучающиеся в течение 10 минут выполняют задание (Приложение 3) в мини-группах, а затем представляют свои решения и обсуждают их.</p>

	<p>будет отведено 10 минут. После чего, один представитель из каждой группы должен будет представить решение задач на доске с комментированием каждого этапа решения и ответить на вопросы, возникшие у одноклассников.</p>	
<p>Рефлексия учебной деятельности</p>	<p>- Сейчас я раздам вам карточки с заданиями для домашней работы (Приложение 4).</p> <p>В качестве рефлексии предлагает устно проанализировать собственные ошибки и возможности для их предотвращения в дальнейшем.</p>	<p>Анализируют свои ошибки и озвучивают их.</p>

2.6 Система упражнений

Задачи на построение сечения многогранника, проходящего:

1. через 3 точки на рёбрах или их продолжениях:

1.1. Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Точка N – середина ребра A_1C_1 . Постройте сечение призмы плоскостью BAN .

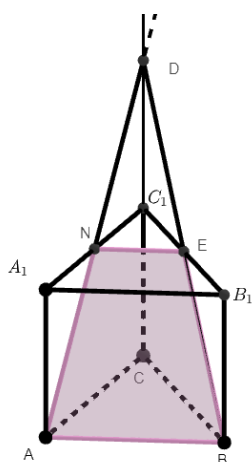


Рисунок 10 -
Чертёж к
задаче 1.1

Решение: 1) Проводим след AN ;

2) $AN \cap CC_1 = D$;

3) $BD \cap B_1C_1 = E$;

4) соединяем точки N и E .

$ANEB$ – искомое сечение.

Рекомендации: учителю стоит обратить внимание учащихся на не единственное решение этой задачи. Второй способ решения подразумевает использование теоремы: если плоскость содержит прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения

этих двух плоскостей параллельна этой прямой.

1.2. В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ все рёбра равны, точка M — середина ребра AS . Постройте сечение пирамиды плоскостью BMD .

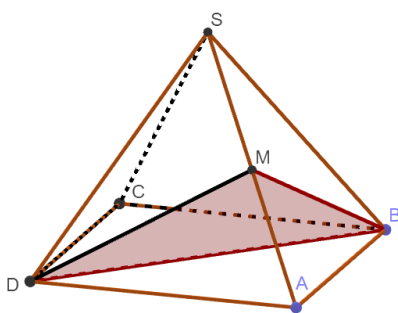


Рисунок 11 - Чертёж к
задаче 1.2

Решение: 1) Соединяем точки B и M ;

2) соединяем точки B и D ;

3) соединяем точки M и D .

BMD – искомое сечение.

Рекомендации: поскольку задача не требует

дополнительных построений и использования

специальных методов, её можно использовать на

занятии по теме «Основные аксиомы и теоремы стереометрии. Понятие сечения многогранника».

1.3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A' B' C' D'$ точка K делит ребро AA' в отношении $1:6$, считая от вершины A , а точка S является серединой ребра $B' C'$. Постройте сечение данного многогранника плоскостью KSD' .

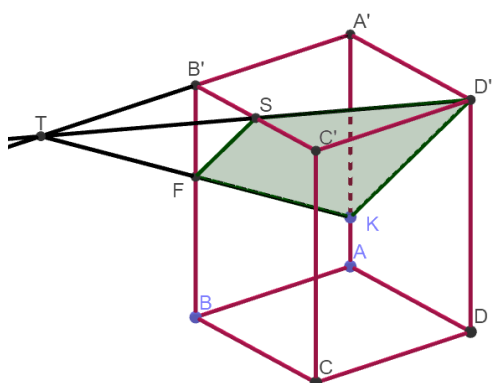


Рисунок 12 - Чертёж к задаче 1.3

Решение: 1) Соединяем точки D' и S ;
2) соединяем точки K и D' ;
3) $D'S \cap A'B' = T$;
4) $KT \cap BB' = F$.

$KFSD'$ - искомое сечение.

Рекомендации: учитель должен обратить

внимание учащихся на существование другого решения.

1.4. Дан тетраэдр $SABC$ с вершиной в точке S .

Основание H высоты SH этого тетраэдра есть середина отрезка SS' . Точка F – середина ребра SA , а точка E делит ребро BC в отношении $2:7$, считая от вершины B . Постройте сечение тетраэдра плоскостью $S'EF$.

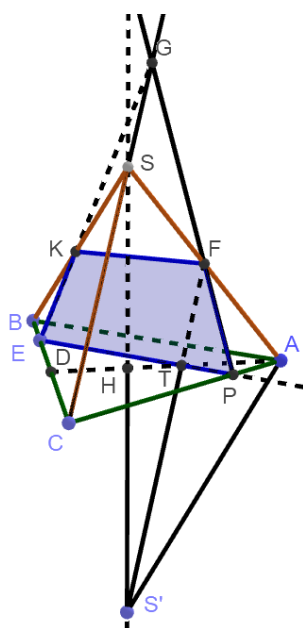


Рисунок 14 - Чертёж к задаче 1.4

Решение: 1) Пусть AD – медиана основания;
2) В $\triangle ASS'$ $S'F$ – медиана. $S'F \cap AD = T$;
3) $TE \cap AC = P$;
4) $PF \cap CS = G$;
5) $GE \cap SB = K$.

$PFKE$ – искомое сечение.

1.5. Дана правильная призма $ABCA' B' C'$. Точка M –

середина ребра AC . Постройте

сечения призмы плоскостью $BB'M$.

Решение: построим отрезок $MK \parallel BB'$, $K \in AC$.

$MKBV'$ - искомое сечение.

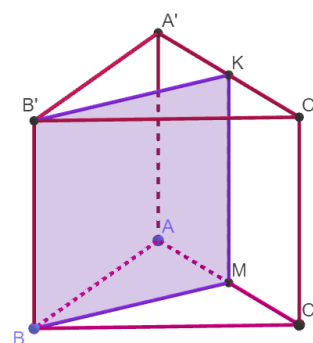


Рисунок 13 - Чертёж к задаче 1.5

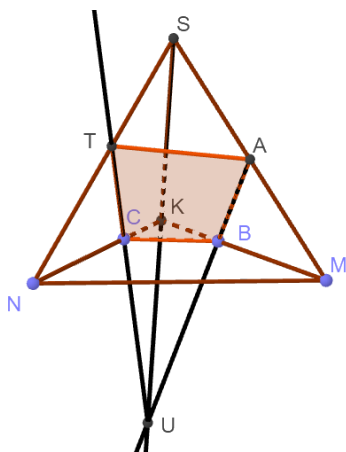


Рисунок 15 -
Чертёж к задаче 1.6

1.6. Дана 3-угольная пирамида $SMNK$, основанием которой является прямоугольный треугольник MNK с прямым углом K . На рёбрах MK и NK выбраны соответственно точки B и C так, что $MB:BK=NC:CK=2:1$. Точка A – середина ребра SM . Постройте сечение пирамиды плоскостью ABC .
Решение: 1) $AB \cap SK = U$;
2) $UC \cap SN = T$.

$ABCT$ – искомое сечение.

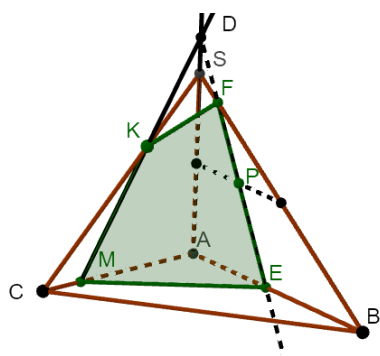


Рисунок 16 -
Чертёж к задаче 1.7

1.7. В пирамиде $SABC$ с вершиной в точке S точка K делит ребро SC в отношении $1:2$, считая от вершины S , точка M – ребро AC в отношении $1:4$, считая от вершины C , а точка P – середина средней линии треугольника ASB . Постройте сечение пирамиды плоскостью KMP .
Решение: 1) $MK \cap SA = D$;
2) $DP \cap SB = F$;

3) $DP \cap AB = E$.

$MKFE$ – искомое сечение.

1.8. В кубе $ABCD A'B'C'D'$ точка X является серединой ребра $A'D'$, точка Z лежит на отрезке AB' так, что $AZ:ZB'=2:1$, а точка Y – это точка пересечения отрезков BC' и CB' . Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки X, Y, Z .

Решение: 1) $A'E \parallel XY, E \in BB', Z \in A'E$;

2) $D'F \parallel A'E, F \in CC'$.

$A'D'FE$ – искомое сечение.

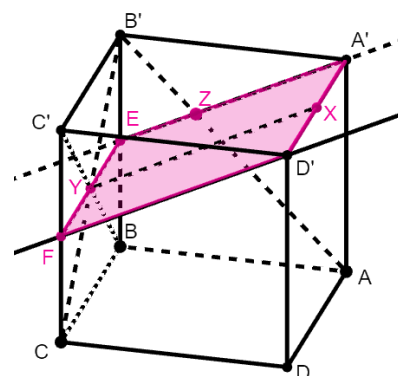
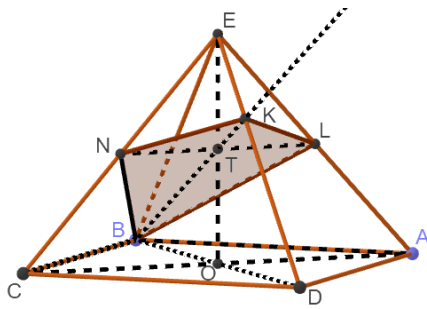


Рисунок 17 -
Чертёж к задаче 1.8

1.9. Основанием четырёхугольной пирамиды EABCD является параллелограмм



ABCD. Точка N – середина ребра EC, L – середина EA. Постройте сечений пирамиды плоскостью BNL.

Решение: 1) $AC \cap BD = O$;

2) $LN \cap EO = T$;

3) $BT \cap ED = K$.

Рисунок 18 -

Чертёж к задаче 1.9

BLKN – искомое сечение.

1.10. Дана правильная шестиугольная пирамида

SABCDEF с вершиной S. Постройте плоскость, проходящую через середины H

и J рёбер SA и SD соответственно и вершину C.

Решение: 1) $B \in \alpha$;

2) $HJ \cap SG = K$;

3) $BK \cap SE = M$;

4) $CK \cap SF = L$.

BCJMLH – искомое сечение.

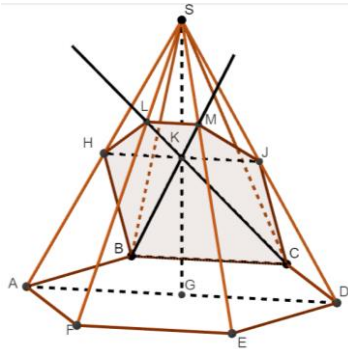


Рисунок 19 -

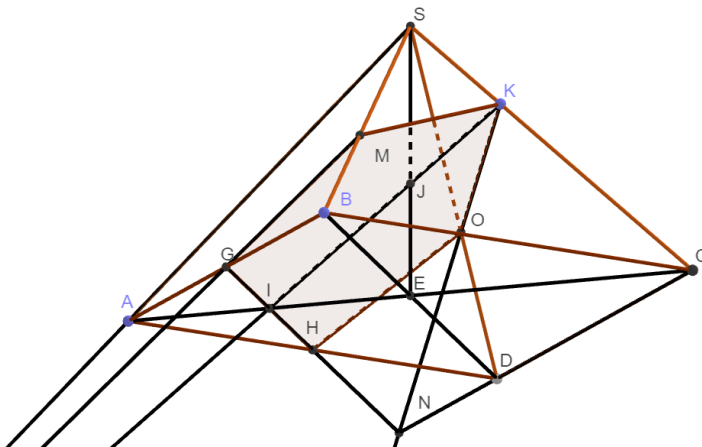
Чертёж к задаче 1.10

1.11. Дана правильная четырёхугольная пирамида

SABCD. На её ребре SC выбрана точка K такая, что

$SK:KC = 1:2$. Через середины рёбер AB и AD и точку K провели плоскость.

Найдите сечение пирамиды данной плоскостью.



Решение: 1) $AG = GB, AH = HD$;

2) $GH \cap AC = I$;

3) $IK \cap SE = J$;

4) $IK \cap SA = L$;

5) $LG \cap SB = M$;

6) $GH \cap CD = N$;

7) $KN \cap SD = O$.

GHOKM – искомое сечение.

Рисунок 20 - Чертёж к задаче 1.11

Рекомендации: задача может быть предложена учащимся на контрольной работе по теме «Построение сечений многогранников методом следов», поскольку она требует систематизации полученных знаний при изучении этой темы.

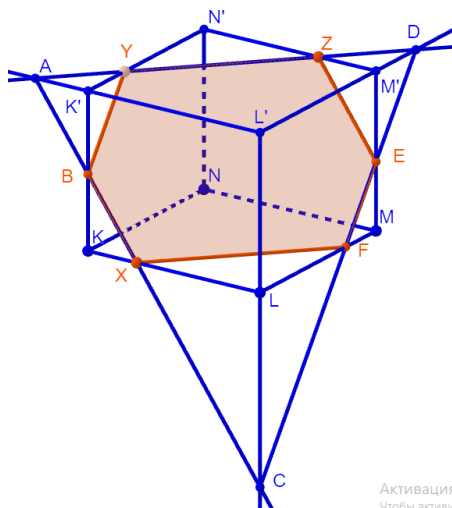


Рисунок 21 - Чертёж к задаче 1.12

1.12. Дана правильная четырёхугольная призма $KLMNK'L'M'N'$. На рёбрах KL , $K'N'$, $M'N'$ взяты соответственно точки X , Y , Z так, что $KX:XL = K'Y:YN' = M'Z:ZN' = 1:2$. Постройте сечение призмы, проходящее через точки X , Y , Z .

Решение:

- 1) $YZ \cap K'L' = A$;
- 2) $AX \cap KK' = B$;
- 3) $AX \cap LL' = C$;
- 4) $YZ \cap L'M' = D$;

5) $CD \cap MM' = E$;

6) $CD \cap LM = F$.

$XBYZEF$ – искомое сечение.

1.13. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A'B'C'D'$ точки E и F являются серединами рёбер $A'B'$ и CC' соответственно. Постройте сечение данного многогранника, проходящее через точки A , E , F .

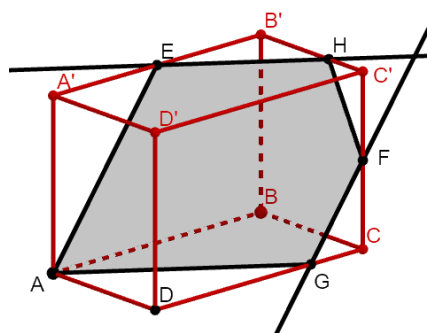


Рисунок 22 - Чертёж к задаче 1.13

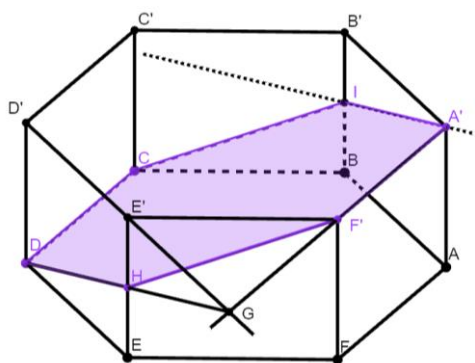
Решение: 1) $FG \parallel AE, G \in CD$;

2) $EH \parallel AG, H \in C'B'$.

$AENFG$ – искомое сечение.

1.14. Секущая плоскость правильной шестиугольной призмы $ABCD A'B'C'D'$ проходит через точки C , A' , F' .

Решение:



- 1) $CD \parallel A'F'$;
- 2) $A'F' \cap E'D' = G$;
- 3) $DG \cap EE' = H$;
- 4) $A'I \parallel DH, I \in BB'$.

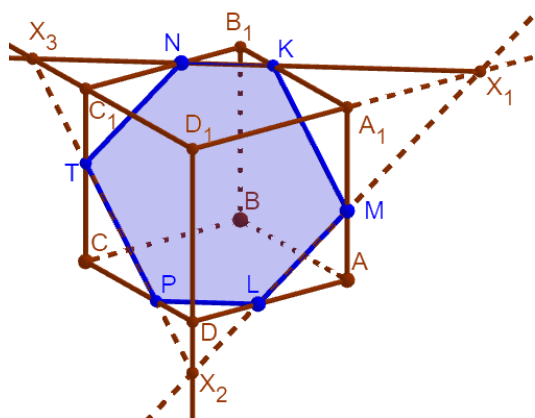
$CDHF'A'I$ – искомое сечение.

Рисунок 23 - Чертёж к задаче 1.14

1.15. Постройте сечение куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

плоскостью, проходящей через точки M, N, L .

Решение:



- 1) $ML \cap A_1 D_1 = X_1$;
- 2) $X_1 N \cap A_1 B_1 = K$;
- 3) $ML \cap DD_1 = X_2$;
- 4) $KN \cap C_1 D_1 = X_3$;
- 5) $X_2 X_3 \cap CC_1 = T$;
- 6) $X_2 X_3 \cap CD = P$.

$PTNKML$ - искомое сечение.

Рисунок 24 - Чертёж к задаче 1.15

1.16. Постройте сечение 3-угольной пирамиды $SABC$

плоскостью, которая проходит через точки P, Q, R .

Решение:

- 1) $PR \cap BC = T$;
- 2) $TQ \cap SB = F$.

$PQFR$ – искомое сечение.

1.17. Построить сечение четырехугольной правильной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точки M, O, N .

Решение:

- 1) $RM \cap AD = E$;
- 2) $OR \cap CD = F$;

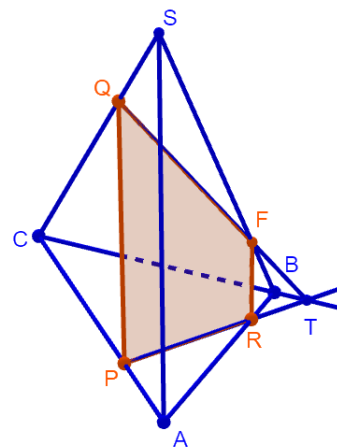


Рисунок 25 - Чертёж к задаче 1.16

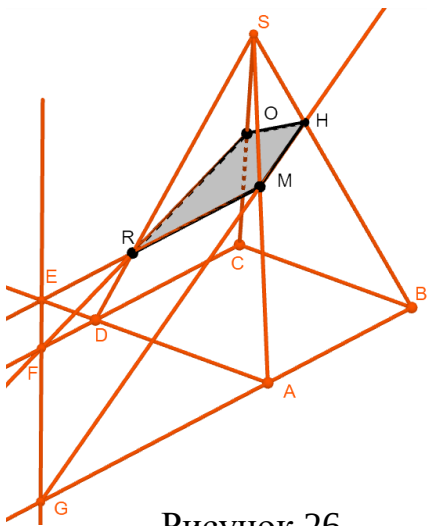


Рисунок 26 -
Чертёж к задаче
1.17

$$3) EF \cap AB = G;$$

$$4) GM \cap SB = H.$$

ROHM – искомое сечение.

2. через точку на ребре и параллельно двум
прямым:

2.1. Построить сечение правильной четырёхугольной пирамиды, проходящее через середину К бокового ребра AP и параллельно прямым PB и BC.

Решение:

$$1) KF \parallel PB, F \in AB;$$

$$2) KG \parallel BC, G \in PD;$$

$$3) FH \parallel KG, H \in CD.$$

KGHF – искомое сечение.

2.2. Постройте сечение параллелепипеда

$ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ плоскостью, проходящей через точку М – середину ребра AD и параллельно прямым BD и CB_1 .

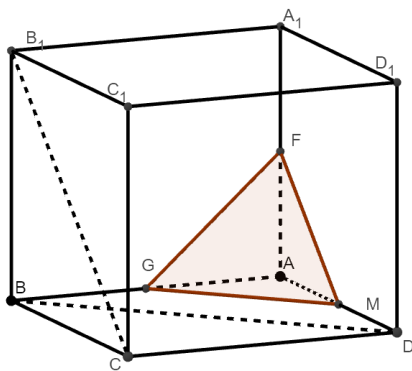


Рисунок 28 -
Чертёж к задаче 2.2

Решение:

$$1) MF \parallel CB_1, F \in AA_1;$$

$$2) MG \parallel BD, G \in AB.$$

MGF – искомое сечение.

2.3. Дана треугольная пирамида ABCD с вершиной в точке A. Точка G – точка

пересечения медиан
треугольника ABC.

Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку G и параллельно прямым AB и CD.

Решение: 1) $HI \parallel AB, G \in HI, H \in AC, I \in BC$;

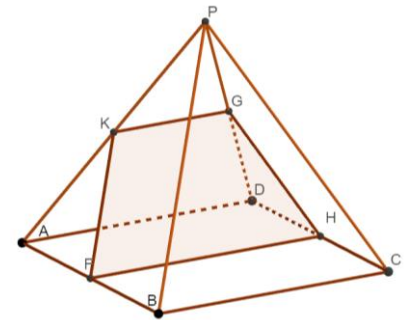


Рисунок 27 -
Чертёж к задаче 2.1

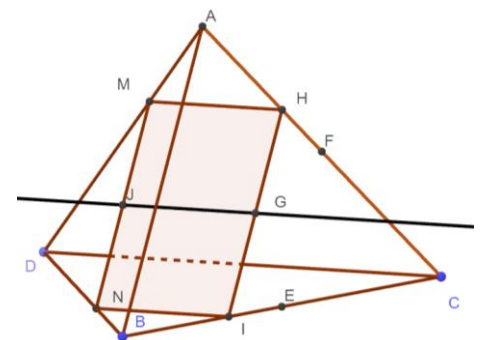


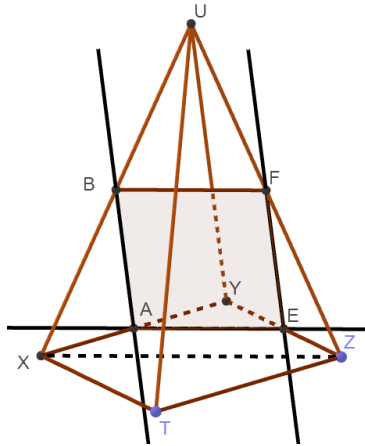
Рисунок 29 -
Чертёж к задаче 2.3

2) $GJ \parallel CD, J \in (ABD)$;

3) $MN \parallel HI, J \in MN, M \in AD, N \in BD$.

MHIN – искомое сечение.

2.4. Основанием четырёхугольной пирамиды UXYZT является параллелограмм XYZT. Точка А делит ребро XU пополам. Постройте сечение пирамиды плоскостью, содержащей точку А и проходящей параллельно прямым XZ и UY.



Решение:

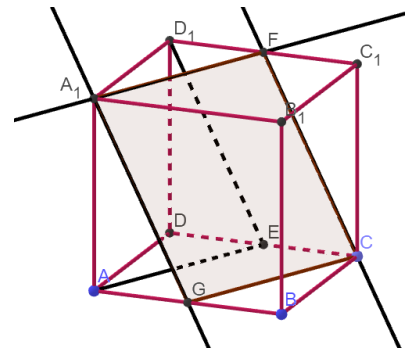
1) $AE \parallel XZ, E \in YZ$;

2) $AB \parallel UY, B \in UX$;

3) $EF \parallel UY, F \in UZ$.

Рисунок 30 -
Чертёж к задаче 2.4

2.5. Серединой ребра CD куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является точка Е. Постройте сечение куба, проходящее через эту точку параллельно прямым АЕ и $D_1 E$.



Решение: 1) $A_1 F \parallel AE, F \in C_1 D_1$;

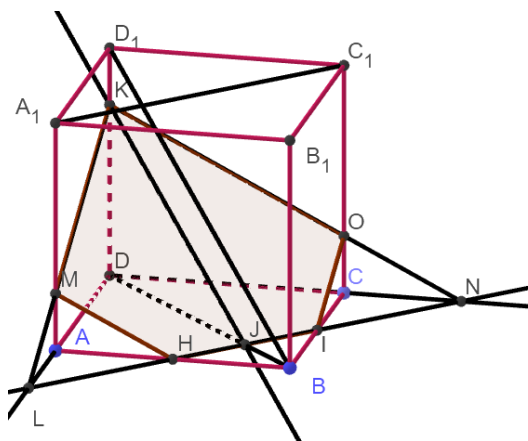
2) $A_1 G \parallel D_1 E, G \in AB$;

3) $GC \parallel AE$.

$A_1 FCG$ – искомое сечение.

Рисунок 31 -
Чертёж к задаче 2.5

2.6. Постройте сечение куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, проходящее через точку Н – середину ребра АВ и параллельно прямым Через середину ребра АВ куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ проведена плоскость, параллельная прямым BD_1 и $A_1 C_1$.



Решение:

1) $HI \parallel A_1C_1, I \in BC$;

2) $HI \cap BD = J$;

3) $JK \parallel BD_1, K \in DD_1$;

4) $CD \cap HI = N$;

5) $KN \cap CC_1 = O$;

Рисунок 32 - Чертёж к задаче 2.6

6) $AD \cap HI = L$;

7) $LK \cap AA_1 = M$.

НМКОИ – искомое сечение.

3. через две точки на рёбрах и параллельно прямой:

3.1. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCD A'B'C'D'$, в основании которого лежит квадрат. Точка К – середина ребра BB' . Постройте сечение данного многогранника плоскостью, проходящей через точки К и C' и параллельно прямой BD' .

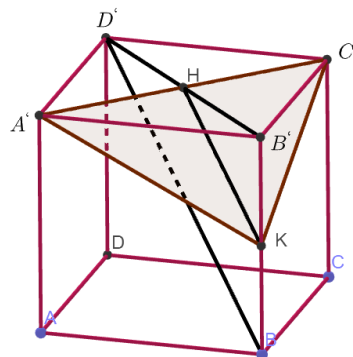


Рисунок 33 - Чертёж к задаче 3.1

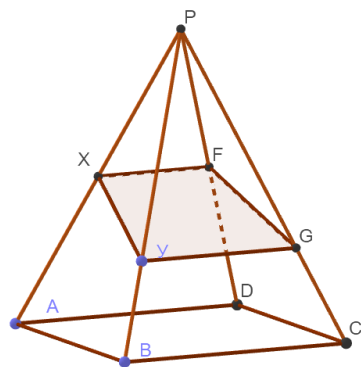
Решение: 1) $B'H = HD'$;

2) $KH \parallel BD'$;

3) $C'H \cap AA' = A'$.

$KA'A'$ - искомое сечение.

3.2. Все рёбра правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ равны. Точка X – середина бокового ребра PA , а точка Y делит боковое ребро PB в отношении 1:2, считая от вершины B . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки X и Y и параллельно ребру AD .



Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки X и Y и параллельно ребру AD .

Решение: 1) $XF \parallel AD, F \in PD$;

2) $YG \parallel AD, G \in PC$.

$XFGY$ – искомое сечение.

3.3. На боковом ребре PB правильной четырёхугольной пирамиды $PABCD$ выбрана точка M , которая делит его в отношении 1:2, считая от вершины B . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точки C и M и параллельно диагонали нижнего основания BD .

Решение:

1) $MU \parallel BD, U \in PD$;

2) $OC \parallel BD, AB \cap OC = O$;

3) $OM \cap PA = Q$.

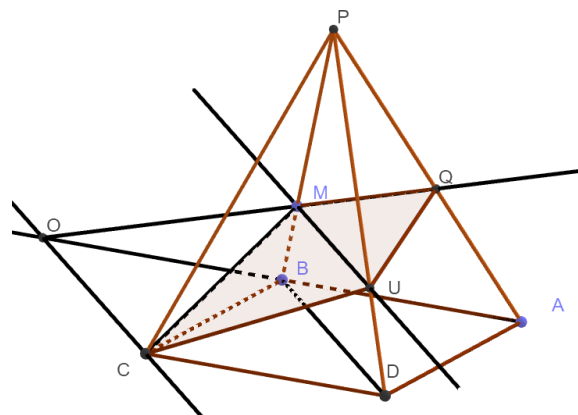


Рисунок 35 -
Чертёж к задаче 3.3

CMQU – искомое сечение.

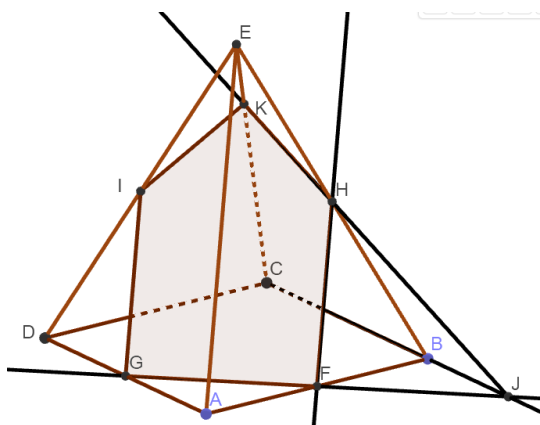


Рисунок 36 - Чертёж к задаче 3.4

3.4. Постройте сечение правильной четырёхугольной пирамиды EABCD с вершиной E, проходящее через середины рёбер AB и AD параллельно ребру EA.

Решение:

$$1) AG = GD, AF = FB;$$

$$2) GI \parallel EA, I \in ED;$$

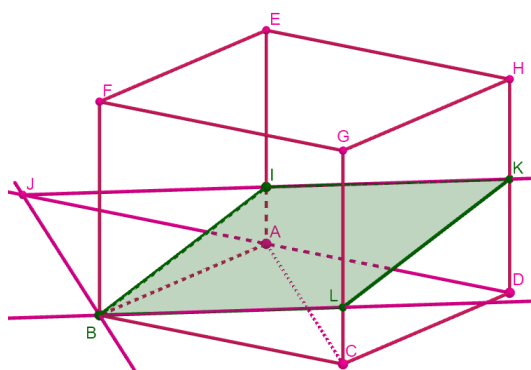
$$3) FH \parallel EA, H \in EB;$$

$$4) FG \cap BC = J;$$

$$5) JH \cap EC = K.$$

GIKHF – искомое сечение.

3.5. В правильной четырёхугольной призме ABCDEFGH точка I делит ребро AE в отношении 1:2, считая от вершины A. Через точки B, I проведена плоскость параллельно прямой AC. Постройте сечение призмы этой плоскостью.



$$\text{Решение: } 1) BJ \parallel AC, BJ \cap AD = J;$$

$$2) BI \cap DH = K;$$

$$3) BL \parallel IK, L \in CG.$$

BIKL – искомое сечение.

Рисунок 37 - Чертёж к задаче 3.5

3.6. Дана правильная шестиугольная призма $ABCDEF GHA_1B_1C_1D_1E_1F_1G_1H_1$. Точка М делит ребро CC_1 в отношении 1:2, считая от вершины С. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точки М и А и параллельно прямой H_1E_1 .

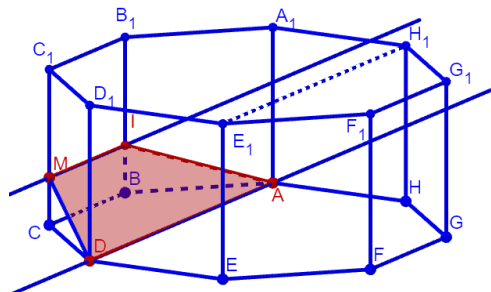


Рисунок 38 - Чертёж к задаче 3.6

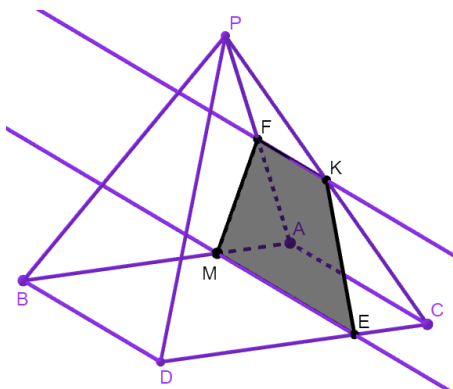
Решение:

1) $MI \parallel H_1E_1, I \in BB_1$;

2) $AD \parallel H_1E_1$.

MIAD – искомое сечение.

3.7. Основанием пирамиды PABCD является параллелограмм ABCD. Точка М лежит на ребре АВ так, что $AM:MB=1:2$, а точка К является серединой ребра РС. Через точки М и К и параллельно прямой ВD проведена плоскость. Постройте сечение пирамиды этой плоскостью.



Через точки М и К и параллельно прямой ВD проведена плоскость. Постройте сечение пирамиды этой плоскостью.

Решение: 1) $ME \parallel BD, E \in CD$;

2) $KF \parallel AC, F \in PA$.

MFKE – искомое сечение.

4. через прямую параллельно другой прямой:

Рисунок 39 - Чертёж к задаче 3.7

4.1. В правильной треугольной пирамиде ABCD с вершиной A все рёбра равны. Точка E – середина ребра AB, а точка F – ребра CD. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую EF и параллельно ребру AD.

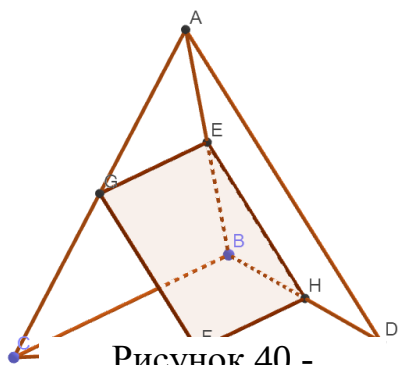


Рисунок 40 -
Чертёж к задаче 4.1

Решение: 1) $FG \parallel AD, G \in AC$;

2) $EH \parallel AD, H \in BD$.

FHEG – искомое сечение.

4.2. Дан прямоугольный параллелепипед ABCDEFGH.

Постройте сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через диагональ BH параллельно прямой AC.

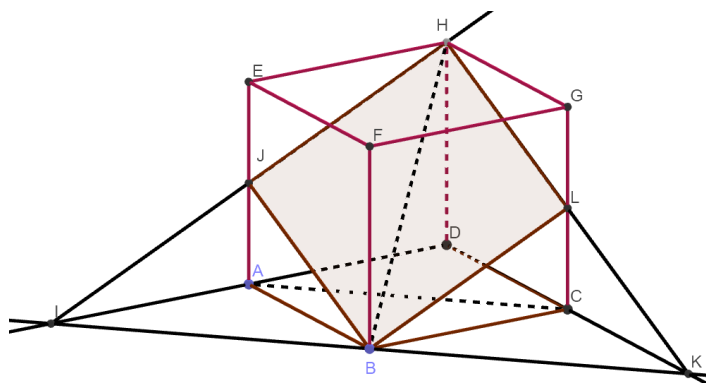


Рисунок 41 - Чертёж к задаче 4.2

Решение:

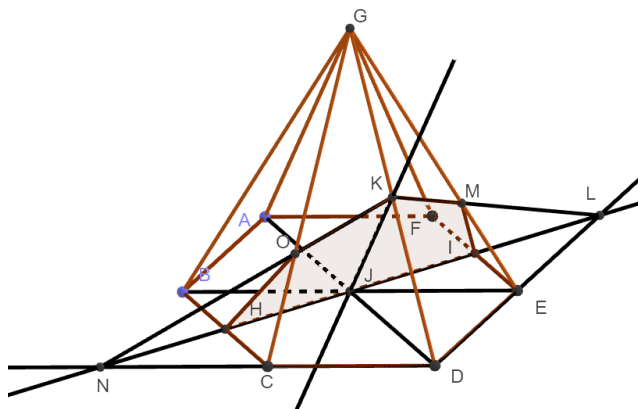
1) $IK \parallel AC, B \in IK, AD \cap IK = I, CD \cap IK = K$;

2) $IH \cap AE = J$;

3) $KH \cap CG = L$.

BJHL – искомое сечение.

4.3. В правильной шестиугольной пирамиде GABCDEF с вершиной G точки H и I являются серединами рёбер BC и EF соответственно. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую HI параллельно боковому ребру GA.



пирамиды плоскостью, проходящей через прямую HI параллельно боковому ребру GA.

Решение: 1) $HI \cap AD = J$;

2) $JK \parallel SA, K \in GD$;

$$3) HI \cap ED = L;$$

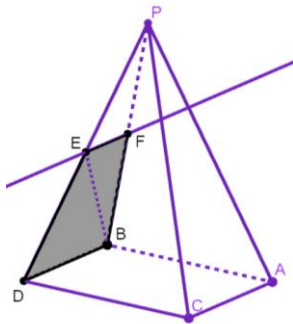
$$4) LK \cap GE = M;$$

Рисунок 42 - Чертёж к задаче 4.3

$$5) HI \cap CD = N;$$

$$6) NK \cap GC = O.$$

НОКМИ – искомое сечение.



4.4. Основанием четырёхугольной пирамиды $PABCD$ является параллелограмм $ABCD$. Точка E – середина ребра PD . Постройте сечение пирамиды плоскостью, содержащей прямую BE и проходящей параллельно прямой AC .

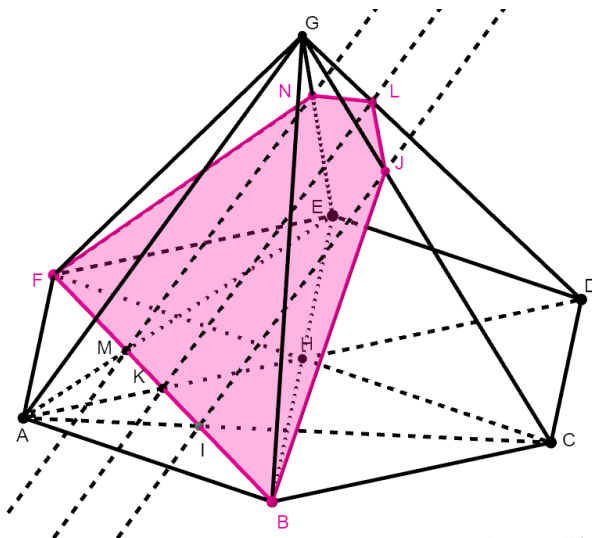
Решение: 1) $BD \parallel AC$;

Рисунок 43 -
Чертёж к задаче 4.4

$$2) EF \parallel AC, F \in PB.$$

DEFB – искомое сечение.

4.5. Дана правильная шестиугольная пирамида $GABCDEF$ с вершиной G . Постройте сечение пирамиды плоскостью, содержащей прямую BF и проходящей параллельно боковому ребру GA .



$$\text{Решение: } 1) AD \cap CF = H;$$

$$2) AC \cap BF = I;$$

$$3) IJ \parallel GA, J \in GC;$$

$$4) AD \cap BF = K;$$

$$5) KL \parallel GA, L \in GD;$$

6) $EA \cap BF = M$;

Рисунок 44 - Чертёж к задаче 4.5

7) $MN \parallel GA, N \in GE$.

FNLJB – искомое сечение.

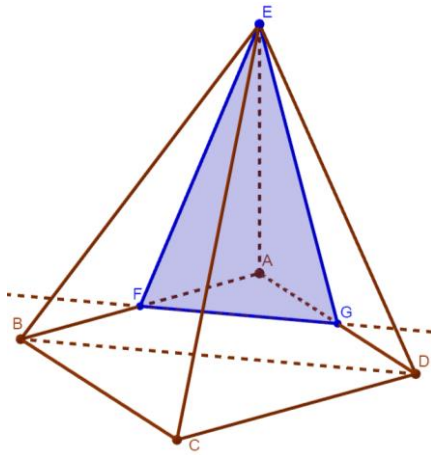


Рисунок 45 -
Чертёж к задаче 4.6

4.6. Основанием четырёхугольной пирамиды EABCD является квадрат ABCD. Ребро EA перпендикулярно плоскости основания. Точка F – середина ребра AB. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую EF параллельно прямой BD.

Решение: 1) $FG \parallel BD, G \in AD$.

EFG – искомое сечение.

5. через точку параллельно плоскости:

5.1. Постройте сечение правильной треугольной пирамиды DABC с вершиной D, проходящее через середину ребра DA параллельно плоскости основания.

Решение: 1) $DE = EA$;

2) $EG \parallel AC, G \in DC$;

3) $EF \parallel AB, F \in DB$. EFG – искомое сечение.

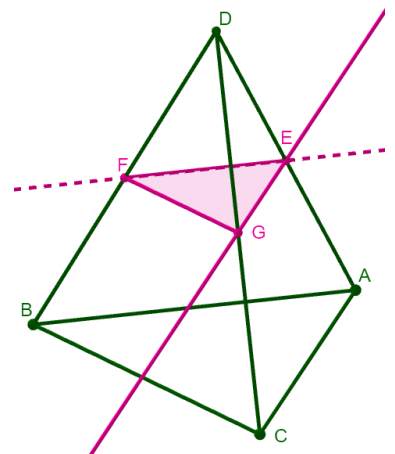
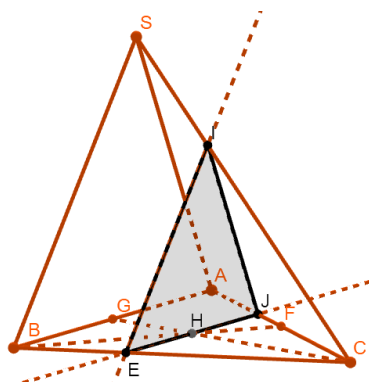


Рисунок 46 -
Чертёж к задаче 5.1

5.2. Дана треугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S . Точка H – точка пересечения медиан основания. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно грани ASB .



Решение:

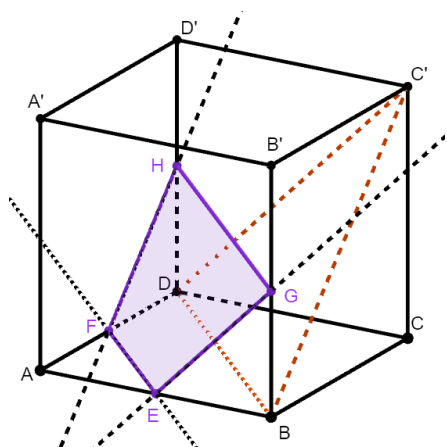
1) $EJ \parallel AB, H \in EJ$;

2) $EI \parallel SB, I \in SC$.

EIJ – искомое сечение.

Рисунок 47 -
Чертёж к задаче 5.2

5.3. Постройте сечение куба $ABCD A'B'C'D'$ плоскостью, проходящей через середину E ребра AB параллельно плоскости $BC'D$.



Решение: 1) $FE \parallel BD, F \in AD$;

2) $EG \parallel DC', G \in BB'$;

3) $FH \parallel BC', H \in DD'$.

$FHGE$ – искомое сечение.

Рисунок 48 -
Чертёж к задаче 5.3

5.4. Основанием четырёхугольной пирамиды $SABCD$ является квадрат $ABCD$. Грани SAB , SAD – прямоугольные треугольники с прямым углом A . Точка E – точка пересечения диагоналей основания. Через точку E параллельно грани SBC проведена плоскость. Постройте сечение пирамиды этой плоскостью.

Решение: 1) $FG \parallel BC, E \in FG$;

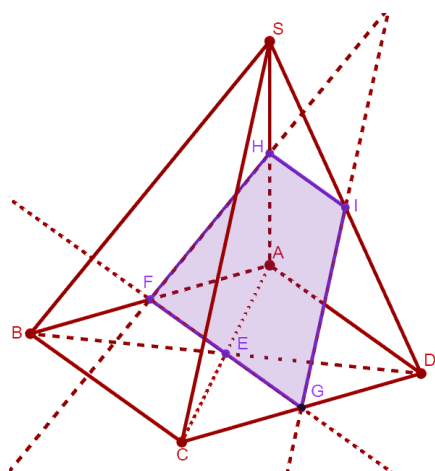


Рисунок 49 -
Чертёж к задаче 5.4

2) $GI \parallel SC, I \in SD$;

3) $FH \parallel SB, H \in SA$.

FHIG – искомое сечение.

5.5. Основанием четырёхугольной пирамиды SABCD является параллелограмм ABCD. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через середину ребра AB параллельно плоскости EAD.

Решение: 1) $AF = FB$;

2) $FG \parallel AD, G \in BD$;

3) $FH \parallel EA, H \in EB$.

GHF – искомое сечение.

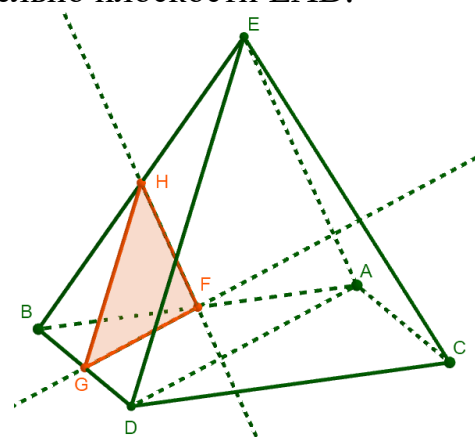


Рисунок 50 - Чертёж к задаче 5.5

6. через точку на ребре и перпендикулярно прямой:

6.1. В кубе $ABCD A' B' C' D'$ постройте сечение, проходящее через середину M ребра AD и перпендикулярно прямой BN, где N – середина CC' .

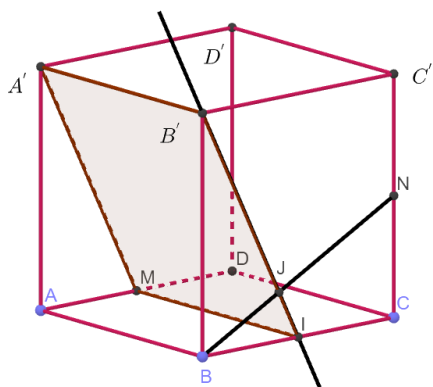


Рисунок 51 -
Чертёж к задаче 6.1

Решение: 1) $B'I \parallel A'M, I \in BC$;

2) $BN \cap B'I = J$;

3) $MI \perp BN, B'I \perp BN \Rightarrow BN \perp A'MI$.

$A'MIB'$ - искомое сечение.

6.2. В правильной 3-угольной пирамиде DABC через точку E – середину бокового ребра DA проведена плоскость, перпендикулярная данному ребру. Постройте сечение пирамиды этой плоскостью.

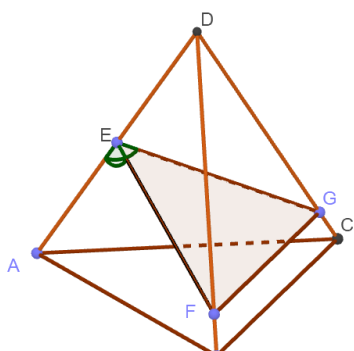


Рисунок 52 -
Чертёж к задаче 6.2

Решение:

1) $FE \perp AD, F \in DB$; 2) $GE \perp AD, G \in DC$. EFG – искомое сечение.

6.3. Постройте сечение правильной 4-угольной пирамиды EMNKL с вершиной E, проходящее через точку L перпендикулярно ребру EL.

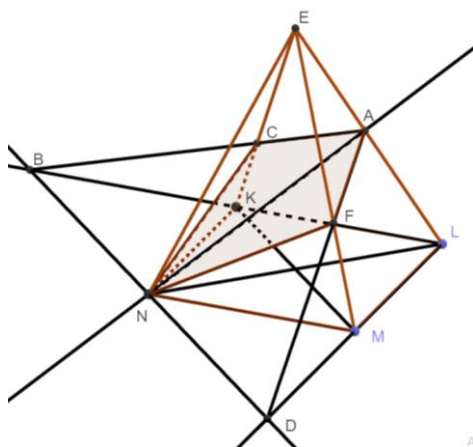


Рисунок 53 -
Чертёж к задаче 6.3

Решение: 1) $NA \perp EL, A \in EL$;

2) $BD \parallel KM, LK \cap BD = B, LM \cap BD = D$;

3) $BA \cap EK = C$;

4) $DA \cap EM = F$.

NCAF – искомое сечение.

6.4. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда ABCDEFGH, проходящее через вершину D и перпендикулярное прямой BH.

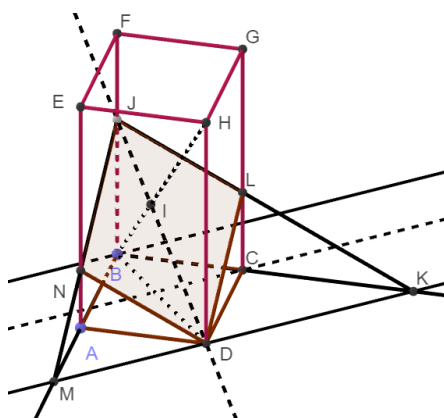


Рисунок 54 - Чертёж к
задаче 6.4

Решение:

1) $DI \perp BH, DI \cap BF = J$;

2) $l_1 \perp BD, C \in l_1$;

3) $l_2 \parallel l_1, B \in l_2$;

4) $BH \perp l_2$;

5) $l_3 \parallel l_2, D \in l_3$;

6) $l_3 \cap AB = M$;

7) $MJ \cap AE = N$;

8) $l_3 \cap CB = K$;

9) $KJ \cap CG = L$. $DNJL$ – искомое сечение.

7. через две точки и перпендикулярно прямой:

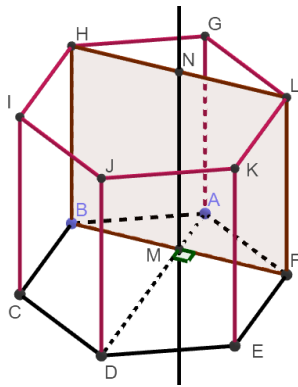


Рисунок 55 -
Чертёж к задаче 7.1

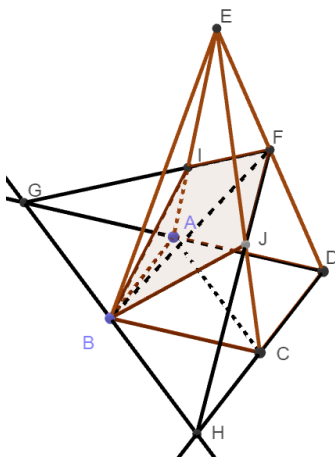
7.1. Постройте сечение правильной 6-угольной призмы $ABCDEF GHIJKL$, содержащее точки B и H и перпендикулярное диагонали основания AD .

Решение: 1) $BF \perp AD$;

2) $BF \cap AD = M$;

3) $MN \perp HL, N \in HL$.

$BHLF$ – искомое сечение.



7.2. Дана правильная 4-угольная пирамида $EABCD$ с вершиной в точке E . Постройте сечение этой пирамиды, содержащее вершину B и середину F ребра ED и проходящее перпендикулярно ребру ED .

Решение: пусть α – секущая плоскость.

Рисунок 56 -
Чертёж к задаче 7.2

$$1) B \in \alpha, F \in \alpha \Rightarrow BF \in \alpha \Rightarrow BF \perp \alpha;$$

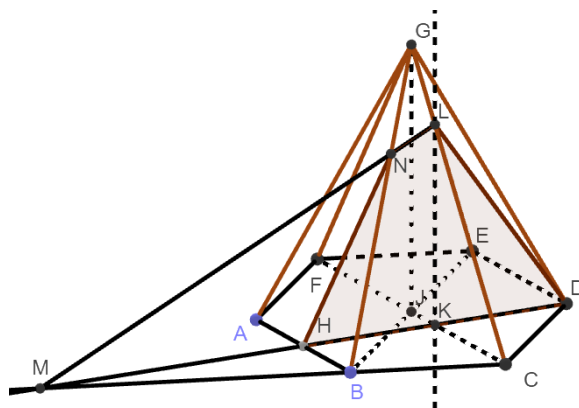
$$2) GH \parallel AC, AD \cap GH = G, CD \cap GH = H;$$

$$3) GF \cap EA = I;$$

$$4) HF \cap EC = J. BIFJ - \text{искомое сечение}.$$

8. через две точки перпендикулярно плоскости:

8.1. Дана правильная 6-угольная пирамида $GABCDEF$ с вершиной в точке G . Точка H является серединой стороны основания AB . Через точки H и D проведена плоскость, перпендикулярная плоскости основания пирамиды. Постройте сечение пирамиды этой плоскостью.



$$\text{Решение: } 1) BE \cap FC = J;$$

$$2) FC \cap HD = K;$$

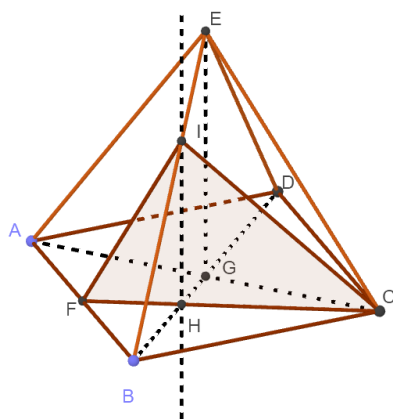
$$3) KL \parallel GJ, L \in GC;$$

$$4) HD \cap CB = M;$$

$$5) ML \cap GB = N.$$

Рисунок 57 - Чертёж к задаче 8.1

$HNLD$ – искомое сечение.



8.2. В правильной 4-угольной пирамиде $EABCD$ проведена плоскость, проходящая через середину F ребра AB и вершину C перпендикулярно плоскости ABC . Постройте сечение пирамиды этой плоскостью.

Решение: 1) $EG \perp ABC$;

Рисунок 58 -
Чертёж к задаче 8.2

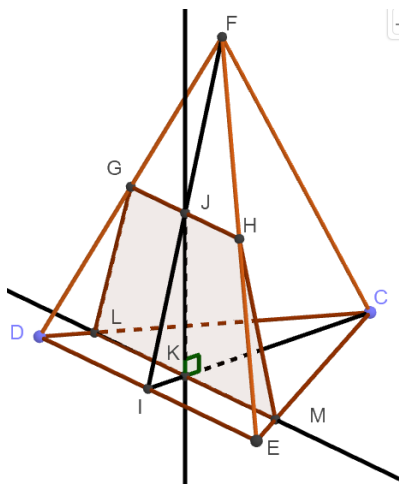
$$2) FC \cap BD = H;$$

$$3) HI \parallel EG, I \in EB.$$

FIC – искомое сечение.

9. через прямую и перпендикулярно некоторой плоскости:

9.1. Дана правильная треугольная пирамида FCDE с вершиной E. Точки G и H делят боковые рёбра FD и FE соответственно пополам. Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через прямую GH перпендикулярно плоскости основания.



Решение:

$$1) DI = IE;$$

$$2) FI \cap GH = J;$$

$$3) JK \perp CI, K \in CI;$$

$$4) LM \parallel GH, K \in LM, L \in CD, M \in CE.$$

Рисунок 59 -
Чертёж к задаче 9.1

LGHM – искомое сечение.

Заключение

Задачи на построение сечений многогранников уникальны тем, что способствуют глубокой систематизации теоретической базы стереометрии и развитию пространственного мышления. На усвоение этой темы требуется немало времени. Но её изучение важно ещё и потому, что такие задачи встречаются в заданиях Единого Государственного Экзамена профильного уровня.

В ходе настоящего исследования были решены следующие задачи:

1) изучена соответствующая литература по проблеме исследования: введены понятия секущей плоскости и сечения многогранника, рассмотрены основные методы построения сечений, а также проанализированы школьные учебники на предмет содержания теоретического и практического материала по этой теме;

2) на основе открытого банка заданий ЕГЭ составлена типология основных задач на построение сечений многогранников, встречающихся в ЕГЭ, и система упражнений, которую можно использовать в рамках элективного курса;

3) разработан календарно-тематический план элективного курса «Построение сечений многогранников» для обучающихся 11 класса, рассчитанный на 14 учебных часов. Программа курса нацелена на обобщение и систематизацию теоретических знаний стереометрии обучающимися, овладение методом следов построения сечений многогранников, а также рассмотрение различных типов задач, в соответствии с составленной нами типологией;

4) разработаны технологические карты занятий по темам «Метод следов» и «Построение секущей плоскости многогранника, параллельной прямой (-ым) или плоскости». В основе методического подхода ко всем занятиям элективного

курса лежит обучение через наводящие вопросы учащимся, которые помогают легко систематизировать ранее изученный материал и применять его к новым задачам.

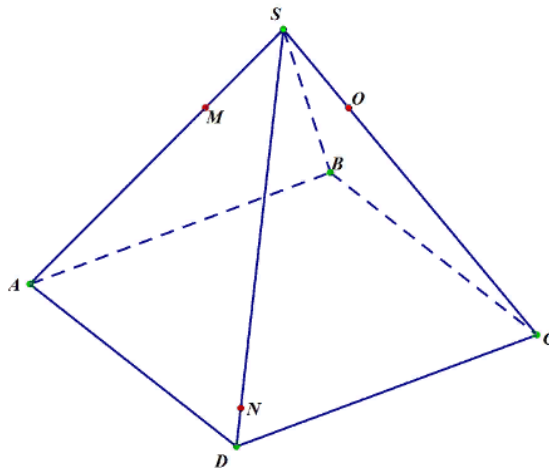
Список использованной литературы

1. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10 – 11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни. М. : Просвещение, 2018. 255 с.
2. Боженкова Л. И. Обучение учащихся построению сечений многогранников : учебно-методическое пособие. Калуга : КПКУ, 2005. 72 с.
3. Боженкова Л. И., Глазков Ю. А. Тесты по геометрии: 10 класс : к учебнику Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия 10-11 классы». М. : Издательство «Экзамен», 2012. 78 с.
4. Геометрия: 10 –11 классы : учебник для общеобразовательных учреждений: базовый и профил. уровни / Л. С. Атанасян [и др.] ; 27-е изд. М. : Просвещение, 2021. 255 с.
5. Горшкова Л. С, Сергеечев М. В. Методы изображений : учебное пособие для студентов и преподавателей педагогических вузов. Пенза : Пензенский гос. пед. ун-т им. В. Г. Белинского, 2006. 109 с.
6. Литвиненко В. Н. Задачи на развитие пространственных представлений : кн. для учителя. М. : Просвещение, 1991. 127 с.
7. Лысенко Ф. Ф., Кулабухова С. Ю. Математика. ЕГЭ. Профильный уровень. Сечения многогранников : учебно-методическое пособие. М. : Легион, 2018. 96 с.
8. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия : учебник для 10 класса общеобразовательных организаций. Базовый и углублённый уровни / В. В. Козлов [и др.] ; под ред. В. В. Козлова и А. А. Никитина. М. : ООО «Русское слово», 2018. 464 с.

9. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия : учебник для 11 класса общеобразовательных организаций. Базовый и углублённый уровни / В. В. Козлов [и др.] ; под ред. В. В. Козлова, А. А. Никитина. М. : ООО «Русское слово», 2014. 400 с.
10. Методика обучения геометрии: учеб. пособие для студентов высш. пед. учеб. заведений / В. А. Гусев [и др.] ; под ред. В. А. Гусева. М. : Издательский центр «Академия», 2004. 368 с.
11. Погорелов А. В. Геометрия. 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и профил. уровни. М. : Просвещение, 2021. 175 с.
12. Резникова Н. М., Фридман Е. М. Математика. ЕГЭ. Сечения многогранников. Профильный уровень : учебно-методическое пособие. М. : Легион, 2016. 64 с.
13. Смирнова И. М., Смирнов В. А. Геометрия. Сечения многогранников : учебно-методическое пособие. М. : Издательство «Экзамен», 2011. 255 с.
14. Титова Д. Г., Боженкова Л. И. Обучение построению сечений многогранников учащихся классов естественно-математического профиля // Концепция развития математического образования: проблемы и пути реализации: материалы XXXIV Международного научного семинара преподавателей математики и информатики университетов и педагогических вузов. Калуга : Издательство: ООО «ТРП», 2015. Вып. 11. С. 33-37.
15. Шарыгин И. Ф. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. Базовый уровень. 10–11 классы: учебник. М. : Дрофа, 2017. 236 с.
16. Шарыгин И. Ф., Шарыгин Д. И. Геометрия. 10 кл. : методическое пособие к учебнику И. Ф. Шарыгина «Геометрия. 10–11». М. : Дрофа, 2017. 142 с.

Приложение 1

№1. Построить сечение четырехугольной правильной пирамиды $SABCD$ плоскостью, проходящей через точки M , O , N .



№2. Дана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$. Точка N – середина ребра $A'C'$. Постройте сечение призмы плоскостью BAN .

Приложение 2

№1. Дана 3-угольная пирамида $SMNK$, основанием которой является прямоугольный треугольник MNK с прямым углом K . На рёбрах MK и NK выбраны соответственно точки B и C так, что $MB:BK=NC:CK=2:1$. Точка M – середина ребра SM . Постройте сечение пирамиды плоскостью ABC .

№2. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A'B'C'D'$ точка K делит ребро AA' в отношении $1:6$, считая от вершины A , а точка S является серединой ребра $B'C'$. Постройте сечение данного многогранника плоскостью KSD' .

Приложение 3

№1. Дана треугольная пирамида $ABCD$ с вершиной в точке A . Точка G – точка пересечения медиан треугольника ABC . Постройте сечение пирамиды плоскостью, проходящей через точку G и параллельно прямым AB и CD .

№2. Серединой ребра CD куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ является точка E . Постройте сечение куба, проходящее через эту точку параллельно прямым AE и $D_1 E$.

Приложение 4

№1. Основанием четырёхугольной пирамиды $UXYZT$ является параллелограмм $XYZT$. Точка A делит ребро XU пополам. Постройте сечение пирамиды плоскостью, содержащей точку A и проходящей параллельно прямым XZ и UY .

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой

«05» 10 2021 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Кадашовой Виктории Александровны

(ФИО полностью)

Тема работы Методические особенности изучения стереометрических задач на построение сечений многогранников в контексте подготовки к ЕГЭ

Утверждена приказом по Университету от «27.12» 2021 г. № 1057/0

Срок сдачи студентом законченной работы «4» июня 2022 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1	Изучение теоретических основ построения сечений многогранников	Ноябрь-декабрь, 2021	Выполнено
2	Изучение и анализ школьных учебников	Январь, 2022	Выполнено
3	Систематизация задач на построение сечений многогранников, встречающихся в заданиях открытого банка ЕГЭ	Февраль, 2022	Выполнено
4	Разработка календарно-тематического планирования элективного курса	Март, 2022	Выполнено
5	Разработка технологических карт некоторых занятий	Апрель-май, 2022	Выполнено
6	Оформление текста работы и подготовка выступления	Июнь, 2022	Выполнено

Дата выдачи задания « 5 » 10 2021 г.

Руководитель Сорокина М.В. (подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению Колдашова В.А. (подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студента (ки) 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения

Холдашовой Виктории
Александровны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Холдашова Виктория Александровна,
Ф.И.О. студента

студент (ка) 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Методические особенности изучения стереометрических задач на построение сечений многогранников в контексте подготовки к ЕГЭ», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен (на) с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

подпись

14/06.2022

ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 14.06.2022
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР

подпись

М.В. Сорокина
И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Методические особенности изучения стереометрических задач на построение сечений многогранников в контексте подготовки к ЕГЭ»

студентки 4 курса Колдашовой Виктории Александровны
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование
профиля «Математика»

Руководитель ВКР Сорокина Марина Валерьевна



Отчет о проверке на заимствования №1



Автор: Колдашова Виктория Александровна
Проверяющий: Сорокина Марина Валерьевна (sorokina_mv@list.ru / ID: 168)
Организация: Пензенский государственный университет
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - <http://pnzgu.antiplagiat.ru>

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 58
Начало загрузки: 14.06.2022 14:09:02
Длительность загрузки: 00:00:10
Имя исходного файла: ВКР.docx
Название документа: ВКР
Размер текста: 1 кБ
Тип документа: Выпускная квалификационная работа
Символов в тексте: 65592
Слов в тексте: 8747
Число предложений: 550

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Последний готовый отчет (ред.)
Начало проверки: 14.06.2022 14:09:13
Длительность проверки: 00:00:40
Комментарий: не указано
Поиск с учетом редактирования: да
Модули поиска: ИПС Адилет, Библиография, Сводная коллекция ЭБС, Интернет Плюс, Сводная коллекция РГБ, Цитирование, Переводные заимствования (RuEn), Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu), Переводные заимствования по Интернету (EnRu), Переводные заимствования издательства Wiley (RuEn), eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ, Медицина, Диссертации НББ, Перефразирование по eLIBRARY.RU, Перефразирование по Интернету, Патенты СССР, РФ, СНГ, Модуль поиска "ПГУ", СМИ России и СНГ, Шаблонные фразы, Кольцо вузов, Издательство Wiley, Переводные заимствования



ЗАИМСТВОВАНИЯ

38,81%

САМОЦИТИРОВАНИЯ

0%

ЦИТИРОВАНИЯ

0,53%

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ

60,66%

14.06.22
дд.мм.гггг.

подпись

М.В. Сорокина
И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методические особенности изучения стереометрических задач
на построение сечений многогранников в контексте подготовки к ЕГЭ»
студентки Колдашовой Виктории Александровны
факультета физико-математических и естественных наук направления
подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, профиль подготовки
«Математика», гр. 18ФПМ1

Развитие пространственных представлений на уроках стереометрии является одной из основных задач обучения. Стереометрическая задача на едином государственном экзамене очень часто связана с построением сечения многогранника. Однако в рамках школьного курса построению сечений отведено не так много времени, поэтому очень часто подобные задачи вызывают трудности у учащихся. Выпускная квалификационная работа Колдашовой В.А. посвящена изучению методических особенностей работы с задачами на построение сечений многогранников в контексте подготовки обучающихся к ЕГЭ.

Работа состоит из двух глав. В первой главе изложены вопросы, касающиеся теоретических основ построения сечений многогранников. В частности, рассмотрено понятие параллельного проектирования и его свойства, изложены основные методы построения сечений – метод следов и метод внутреннего проектирования.

Вторая глава работы посвящена методическим разработкам по данной теме. Проведен анализ действующих школьных учебников по геометрии относительно изучаемого вопроса, произведена классификация задач на построение сечений открытого банка заданий ЕГЭ. Представлена рабочая программа элективного курса «Построение сечений многогранников», рассчитанного на учащихся 11 класса. Разработаны подробные конспекты нескольких занятий данного курса. Представлена подборка задач, отражающая разные методы решения, используемые в заданиях подобного рода.

Работа Колдашовой В.А. является самостоятельным исследованием. Текст работы, список литературы, доклад и презентация оформлены в соответствии с требованиями, предъявляемыми к выпускным квалификационным работам. Представленные результаты могут быть использованы в работе учителя математики при организации подготовки школьников к ЕГЭ.

Выпускная квалификационная работа заслуживает оценки «отлично».

Научный руководитель,
доцент кафедры «МО»,
к.ф.м.н., доцент



М.В. Сорокина