

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
бакалаврская работа на тему:

«Рабочая тетрадь «Решение задач с параметром» для подготовки к ЕГЭ по
математике»

Студент

Андр 20.05.24г. Антонова Дарья Андреевна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель

Жу - 20.05.24г. Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Жу - 15.06.24г. Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 24.05.24 № 11)

Заведующий кафедрой

24.05.24 Пань Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 21.06.24 № 9)

Секретарь ГЭК

Жу - 21.06.24 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2024

Содержание

Введение.....	3
Глава 1. Теоретические основы изучения темы «Уравнения и неравенства с параметрами».....	6
1.1 Анализ УМК по теме «Решение уравнений и неравенств с параметрами» в курсе математики основного школьного образования.....	6
1.2 Анализ УМК по теме «Решение уравнений и неравенств с параметрами» в курсе математики среднего общего образования.....	16
Глава 2. Методические основы изучения темы «Уравнения и неравенства с параметрами».....	30
2.1 Теоретико-практическое обоснование создания рабочей тетради на тему «Решение задач с параметрами».....	30
2.2 Содержание раздела тетради «Графический метод».....	34
2.3 Содержание раздела тетради «Аналитические методы».....	46
Заключение.....	68
Список литературы.....	69
Приложение	

Введение

Решение уравнений и неравенств, содержащих параметр, является, пожалуй, одним из самых трудных разделов элементарной математики. Это связано с тем, что в школе стараются развить умения и навыки решения определенного набора стандартных задач, связанных часто с техникой алгебраических преобразований. Задачи с параметром относятся к другому типу. Для их решения обычно требуются гибкость мышления, логика в рассуждениях, умение хорошо и полно анализировать ситуацию. Опыт показывает, что учащиеся, владеющие методами решения задач с параметром, успешно справляются и с другими задачами. Именно поэтому задачи с параметром обладают диагностической и прогностической ценностью. В последние годы задачи с параметром регулярно встречаются в вариантах ГИА и ЕГЭ. Но до сих пор задача с параметром остается самой "неудобной" для абитуриентов. И здесь далеко не все школьники приступают к решению этих заданий, и еще меньшее число – выполняют решение верно. Отсюда следует актуальность темы работы.

Для решения заданий с параметрами используются всем известные методы: аналитический и функционально-графический (координатно-параметрический). Данным методам и будет посвящена выпускная квалификационная работа. Об умении применять эти методы говорится в Федеральном государственном образовательном стандарте среднего (полного) общего образования: «овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей».

Цель выпускной квалификационной работы: показать возможность использования аналитического и графического методов при решении задач с параметрами в итоговой аттестации учащихся.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие **задачи:**

- 1) изучить учебно-методическую, математическую и историческую литературу по теме исследования;
- 2) описать особенности решения задач с параметрами аналитическим и графическим методами в школьном курсе математики;
- 3) проанализировать и систематизировать задачи Единого государственного экзамена, в решении которых используются аналитический и графический методы;
- 4) разработать рабочую тетрадь «Решение задач с параметром» для подготовки к ЕГЭ по математике;
- 5) продемонстрировать решение задач с параметром с помощью математического пакета GeoGebra.

Объект исследования: задачи с параметрами в итоговой аттестации учащихся.

Предмет исследования: аналитический и графический методы в решении параметрических задач.

Практическая значимость: разработанная рабочая тетрадь поможет старшеклассникам самостоятельно овладеть некоторыми приемами решения уравнений и неравенств с параметром, а учителям – планомерно организовать работу по данной теме в классе на уроке или факультативных занятиях (элективных курсах).

Работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения. Во введении мотивируется обращение к теме исследования, формулируются актуальность, объект и предмет, ставится цель и задачи. В первой главе проведен анализ литературы по теме работы. Во второй главе рассмотрено применение графического метода в координатной плоскости (ХОА) и аналитических методов (метод анализа параболы, метод мажорант) при решении параметрических задач. В заключении представлены полученные

результаты и подведены итоги выпускной квалификационной работы. В приложение вынесена рабочая тетрадь.

По материалам выпускной квалификационной работы опубликована статья: "Использование графического метода в координатной плоскости (ХОА) при решении задач с параметром ЕГЭ".

Глава 1. Теоретические основы изучения темы «Уравнения и неравенства с параметрами»

1.1 Анализ УМК по алгебре по теме «Решение уравнений и неравенств с параметрами» в курсе математики основного школьного образования

В курсе алгебры основной школы уравнения и неравенства с параметрами изучаются в учебно-методических комплексах под авторством Мордковича А. Г., Макарычева М. А., Мерзляка А. Г. Рассмотрим более подробно данные УМК на базовом и углубленном уровне.

В учебниках Мордковича А. Г. [7, 8] для 8 класса в 2-х частях для изучения алгебры на углубленном уровне впервые появляется понятие уравнения и неравенства с параметром курсе в основной школе. Изучение уравнений и неравенств с параметрами начинается в главе 5 «Неравенства» и главе 6 «Алгебраические уравнения» (Рисунок 1.1)

ГЛАВА 5. НЕРАВЕНСТВА	
§ 33. Линейные неравенства	185
§ 34. Квадратные неравенства	189
§ 35. Доказательство неравенств	195
§ 36. Приближённые вычисления	200
§ 37. Стандартный вид числа	207
§ 38. Комбинаторные и вероятностные задачи к главе 5	209
ГЛАВА 6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ	
§ 39. Многочлены от одной переменной	213
§ 40. Уравнения высших степеней	221
§ 41. Рациональные уравнения	228
§ 42. Уравнения с модулем	231
§ 43. Иррациональные уравнения	236
§ 44. Задачи с параметрами	246
§ 45. Комбинаторные и вероятностные задачи к главе 6	252

Рисунок 1.1 – Глава 5 и 6 учебника алгебры А. Г.Мордковича

В главе 5 вводится понятие линейные неравенства, их основные свойства и методы их решения. Появляется определение равносильных неравенств и

равносильных преобразований неравенств. Далее рассматриваются квадратные неравенства, их свойства, графическое решение данных неравенств, алгоритм решения квадратного неравенства, понятие о методе интервалов. Также в данной главе можно встретить приближенные вычисления, стандартный вид числа и комбинаторные и вероятностные задачи.

В главе 6 рассматриваются различные алгебраические уравнения, такие как уравнения высших степеней, рациональные уравнения, уравнения с модулем, иррациональные уравнения, задачи с параметром. В начале главы рассказывается о многочленах от одной переменной, об операциях с такими многочленами, о делении многочлена на многочлен, а также разложение многочлена на множители.

При рассмотрении уравнений высших степеней изучают метод введения новой переменной, рассматривают отыскание рациональных корней уравнения с целочисленными коэффициентами, а также возвратные уравнения.

Кратко демонстрируются рациональные и иррациональные уравнения, а также уравнения с модулем. В параграфе «Задачи с параметрами» рассматривается, в первую очередь, понятие об уравнении с параметром. Мордкович А. Г. предлагает такое определение: «Если дано уравнение $f(x; a) = 0$, которое надо решить относительно переменной x и в котором буквой a обозначено произвольное действительное число, то говорят, что задано уравнение с параметром».

Рассказывается о том, что основные сложности при решении задач с параметрами заключаются в том, что при одних значениях параметров уравнение может не иметь корней, а при других — иметь корни.

В задачнике в соответствующих главах дается большое количество практических задач на решение уравнений и неравенств с параметрами.

Таким образом, можно заключить, что теоретический материал в учебнике алгебры под авторством Мордковича А. Г. довольно обширный, дается

хорошая теоретическая и практическая база для решения уравнений и неравенств с параметрами, что позволяет, более детально изучить данную тему.

В учебнике «Алгебра» Макарычева Ю. Н., Миндюк Н. Г., Нешкова К. И., Феоктистова И. Е. [10], предназначенного для углубленного изучения алгебры, понятие «уравнения с параметрами» впервые появляется в пособиях для 9-х классов в главе 2 «Уравнения и неравенства с одной переменной» (Рисунок 1.2).

Глава 2	
УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА	
С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ	52
§4. Уравнения с одной переменной	52
10. Целое уравнение и его корни	52
11. Приёмы решения целых уравнений	58
12. Теорема Виета для уравнений высших степеней	66
13. Решение дробно-рациональных уравнений	70
§5. Неравенства с одной переменной	77
14. Решение целых неравенств с одной переменной	77
15. Решение дробно-рациональных неравенств с одной переменной	85
§6. Уравнения и неравенства	
с переменной под знаком модуля	90
16. Решение уравнений с переменной под знаком модуля	90
17. Решение неравенств с переменной под знаком модуля	94
§7. Уравнения с параметрами	100
18. Целые уравнения с параметрами	100
19. Дробно-рациональные уравнения с параметрами	104
Дополнительные упражнения к главе 2	108

Рисунок 1.2 – Глава 2 из учебника Макарычева Ю.Н.

В данной главе вначале рассматриваются уравнения с одной переменной, приемы решения таких уравнения. Затем изучают теорему Виета для уравнений высших степеней и решение дробно-рациональных уравнений. После рассмотрения уравнений с одной переменной рассматривают неравенства с одной переменной. Рассказывается о неравенствах первой и второй степени, а также о возможных методах решения таких неравенств. В конце параграфа «Неравенства с одной переменной» идет изучение методов решения дробно-рациональных неравенств.

В следующем параграфе второй главы рассматривают уравнения и неравенства с переменной под знаком модуля, а также методы решения данных уравнений и неравенств.

Уже в последнем параграфе главы «Уравнения и неравенства с одной переменной» вводится понятие параметра и уравнения с параметром. Кратко рассказывается о том, как можно решить целые уравнения с параметрами и предоставляется достаточное количество практических заданий для закрепления.

В конце главы изучаются дробно-рациональные уравнения с параметрами. Снова кратко рассказывают об основных методах решения таких уравнений и предоставляют небольшое количество практических заданий.

В заключении рассмотрения данного учебника можно сделать вывод, что присутствует небольшое количество теоретического материала по теме «уравнения и неравенства с параметрами», а также небольшое количество практических заданий. На изучение уравнений с параметрами отведено всего 2 параграфа, чего недостаточно для полного изучения уравнений и неравенств с параметрами.

В учебнике «Алгебра» А.Г.Мерзляка, В.М.Полякова [13] для 8-х классов понятие параметра появляется в главе 2 «Рациональные выражения» (Рисунок 1.3).

Глава 2 Рациональные выражения

§ 5.	Рациональные дроби	34
§ 6.	Основное свойство рациональной дроби	38
§ 7.	Сложение и вычитание рациональных дробей с одинаковыми знаменателями	48
§ 8.	Сложение и вычитание рациональных дробей с разными знаменателями	53
§ 9.	Умножение и деление рациональных дробей. Возведение рациональной дроби в степень	60
§ 10.	Тождественные преобразования рациональных выражений	67
§ 11.	Равносильные уравнения. Уравнение-следствие. Рациональные уравнения	73
§ 12.	Рациональные уравнения с параметрами	83
§ 13.	Степень с целым отрицательным показателем	89
§ 14.	Свойства степени с целым показателем	97
§ 15.	Функция $y = \frac{k}{x}$ и её график	103
	Итоги главы 2	114

Рисунок 1.3 – Глава 2 из учебника «Алгебра» А.Г.Мерзляка

В начале главы 2 вводится понятие рациональной дроби, а также основные свойства рациональных дробей и действия с такими дробями. Изучаются равносильные уравнения, уравнения-следствия, рациональные уравнения.

В 12 параграфе второй главы под названием «Рациональные уравнения с параметрами» вводится понятие параметра таким образом: «Рассмотрим линейное уравнение $ax = 1$. Если $a = 0$, то данное уравнение корней не имеет. Если $a \neq 0$, то уравнение имеет единственный корень $x = \frac{1}{a}$. Решая это уравнение, мы придавали буквам a и x разный смысл, буква x играла роль неизвестного числа, а буква a – роль известного числа. В таких случаях говорят, что a является параметром, а уравнение называют уравнением с параметром».

Рассматривают 4 примера решения уравнений с параметрами, затем предлагают практические задания для закрепления пройденного материала в достаточном количестве.

В конце главы рассматривают степень с целым отрицательным показателем, свойства такой степени, а также функцию $y = \frac{k}{x}$ и её график.

Таким образом, можно сделать вывод, что теоретических данных по теме «Уравнения и неравенства с параметрами» очень мало, информации недостаточно для полного и всестороннего изучения темы.

В учебнике алгебры Мордковича А.Г. [7, 8] для 8-х классов, предназначенного для базового изучения, понятие параметра не упоминается. Рассматриваются лишь уравнения и неравенства в общем виде в главе 4 «Квадратные уравнения» и главе 5 «Неравенства», с использованием параметров, но о них нет упоминания (Рисунок 1.4).

Глава 5. НЕРАВЕНСТВА

§ 31. Свойства числовых неравенств	183
§ 32. Исследование функций на монотонность	190
§ 33. Решение линейных неравенств	196
§ 34. Решение квадратных неравенств	200
§ 35. Приближенные значения действительных чисел	207
§ 36. Стандартный вид положительного числа	211
Основные результаты	212

Глава 4. КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 24. Основные понятия	133
§ 25. Формулы корней квадратных уравнений	138
§ 26. Рациональные уравнения	147
§ 27. Рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций	153
§ 28. Еще одна формула корней квадратного уравнения	165
§ 29. Теорема Виета	168
§ 30. Иррациональные уравнения	174
Основные результаты	181

Рисунок 1.4 — Главы 4 и 5 из учебника алгебры Мордковича А. Г.

В главе 4 рассматриваются как квадратные уравнения и некоторые способы их решения, так и иррациональные уравнения. Определение квадратного уравнения следующее: «Квадратным уравнением называют уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — любые действительные числа, причем $a \neq 0$. Многочлен $ax^2 + bx + c$ называют квадратным трехчленом».

Видим, что параметры действительно присутствуют в виде коэффициентов a, b, c , но о них говорится как о любых действительных числах, но не как о параметрах.

В главе 5 даются основные свойства числовых неравенств, а также различные способы решения линейных и квадратных неравенств. При рассмотрении решения линейных неравенств рассказывают к какому виду должны сводиться неравенства для того, чтобы их можно было решить, то есть к виду $ax + b > 0$, где a, b – любые числа, за исключением $a \neq 0$.

Снова стоит заметить, что параметры a, b присутствуют в основной формулировке линейного неравенства, но о них говорится как о любых числах, а не как о параметрах.

В заключении анализа данного учебника, можно прийти к выводу, что не присутствует информации о параметрах как о таковых, они присутствуют в определениях уравнений и неравенств, но на них никоим образом не акцентируется внимание.

В учебнике «Алгебра» для 9 класса под авторством Макарычева Ю.Н., Миндюк Н.Г. и др. [9] для базового изучения, рассматриваются уравнения и неравенства, но о параметрах, как о таковых не говорится, предполагается их использование, но определения нет, на этом внимание не акцентируется.

Уравнения и неравенства рассматриваются в главе 2 «Уравнения и неравенства с одной переменной» и в главе 3 «Уравнения и неравенства с двумя переменными» (Рисунок 1.5).

<i>Для тех, кто хочет знать больше</i>	
16. Некоторые приемы решения целых уравнений	93
Дополнительные упражнения к главе II	98

Глава III. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

§ 7. УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

17. Уравнение с двумя переменными и его график	—
18. Графический способ решения систем уравнений	109
19. Решение систем уравнений второй степени	112
20. Решение задач с помощью систем уравнений второй степени	117

§ 8. НЕРАВЕНСТВА С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ И ИХ СИСТЕМЫ

21. Неравенства с двумя переменными	—
22. Системы неравенств с двумя переменными	125

Для тех, кто хочет знать больше

23. Некоторые приемы решения систем уравнений второй степени с двумя переменными	128
--	-----

Дополнительные упражнения к главе III

Глава II. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 5. УРАВНЕНИЯ С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

12. Целое уравнение и его корни	—
13. Дробные рациональные уравнения	78

§ 6. НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

14. Решение неравенств второй степени с одной переменной	—
15. Решение неравенств методом интервалов	88

Рисунок 1.5 – Глава 2 и 3 учебника алгебры Ю.Н.Макарычева

В главе 2 под названием «Уравнения и неравенства с одной переменной» рассказывается о целых уравнениях и его корнях, также, в параграфе объясняется, что «уравнение первой степени можно привести к виду $ax + b = 0$, где x – переменная, a и b – некоторые числа, то есть это и есть понятие уравнения с параметром, но напрямую об этом в учебнике не говорится. Также рассматриваются дробно-рациональные уравнения.

В данной главе также рассматриваются неравенства с одной переменной и некоторые способы решения таких неравенств, в том числе, метод интервалов. Также присутствуют неравенства в общем виде, с некоторыми параметрами, о которых не упоминается.

В главе 3 под названием «Уравнения и неравенства с двумя переменными» можно увидеть информацию о уравнении, содержащем две переменные, а также а графике такого уравнения. Рассматривается графический способ решения систем уравнений, а также решение систем уравнений второй степени.

В главе можно увидеть рассмотрение неравенств с двумя переменными, системы неравенств с двумя переменными, а также некоторые приемы решения систем уравнений второй степени с двумя переменными.

В итоге, можно сказать, что уравнения и неравенства с параметрами присутствуют в данном учебнике, но о них абсолютно нигде не говорится, не присутствует определение параметра как такового, то есть параметры, входящие в какое-либо уравнение и неравенство, называют некоторыми числами.

В учебнике Мерзляка А.Г., Полонского В.Б., Якир М.С. [9] уравнения и неравенства с параметрами изучается в учебнике алгебры для 9 класса базового уровня в главе 1 «Неравенства» и главе 2 «Квадратичная функция».

В данном учебнике, аналогично предыдущему учебнику, понятие параметра и уравнения и неравенства с параметром как таковые не рассматриваются. Рассказывается в общих чертах, какой вид может иметь неравенство и уравнение, а про параметры, входящие в уравнение или неравенство, говорят, как о некоторых числах (Рисунок 1.6).

Глава 1. Неравенства	5
§ 1. Числовые неравенства	5
§ 2. Основные свойства числовых неравенств	11
§ 3. Сложение и умножение числовых неравенств. Оценивание значения выражения	16
<i>О некоторых способах доказательства неравенств</i>	24
§ 4. Неравенства с одной переменной	27
§ 5. Решение линейных неравенств с одной переменной. Числовые промежутки	30
§ 6. Системы линейных неравенств с одной переменной	40
<i>Задание № 1 «Проверьте себя» в тестовой форме</i>	51
<i>Итоги главы 1</i>	53
Глава 2. Квадратичная функция	55
§ 7. Повторение и расширение сведений о функции	55
<i>Из истории развития понятия функции</i>	61
§ 8. Свойства функции	63
§ 9. Построение графика функции $y = kf(x)$	72
§ 10. Построение графиков функций $y = f(x) + b$ и $y = f(x + a)$	81
§ 11. Квадратичная функция, её график и свойства	94
<i>О некоторых преобразованиях графиков функций</i>	103
<i>Задание № 2 «Проверьте себя» в тестовой форме</i>	110
§ 12. Решение квадратных неравенств	113
§ 13. Системы уравнений с двумя переменными	122
<i>Задание № 3 «Проверьте себя» в тестовой форме</i>	132
<i>Итоги главы 2</i>	134

Рисунок 1.6 – Глава 1 и 2 учебника алгебры Мерзляка А.Г.

В главе 1 под названием «Неравенства» в общем виде рассказывается о неравенствах, их свойствах, а также сложении и умножении числовых неравенств. Приводится определение неравенства с одной переменной, с использованием параметров, но без упоминания о них. Рассматривается решение линейных неравенств с одной переменной и решение системы линейных неравенств с одной переменной.

В главе 2 под названием «Квадратичная функция» также можно увидеть теоретический материал, связанный с решением квадратичных неравенств и системы уравнений с двумя переменными.

Можно заключить, что в данном УМК рассматриваются уравнения и неравенства с параметрами, но на них не акцентируется внимание, не дается определение параметра.

1.2 Анализ УМК по теме «Решение уравнений и неравенств с параметрами» в курсе математики среднего общего образования

В данном параграфе рассматривается анализ учебников алгебры и начала математического анализа 10-11 класса из федерального перечня учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования на 2023-2024 год.

Для четкого сравнения учебных пособий классифицируем их на базовый уровень и углубленный уровень.

К учебной литературе по алгебре и началам анализа базового уровня относят учебники авторов:

1. Мордкович А. Г., Семенов П. В. и др.
2. Муравин Г. К., Муравина О. В.
3. Мерзляк А. Г., Номировский Д. А. и др.

В учебнике по алгебре и началам анализа Мордковича А. Г., Семенова П. В. и др. [3, 4] для 10-11 классов рассмотрение первых уравнений с параметрами начинается с тем, изучающихся в 10 классе: «Арксинус, аркосинус, арктангенс, арккотангенс». До этого учащимся не был изложен материал по решению уравнений с параметрами в 10 классе. На примере уравнений $\sin t = \frac{2}{5}$ и $\cos t = \frac{2}{5}$ учащиеся сами выводят алгоритм решения уравнений вида $\sin t = a$ и $\cos t = a$. Аналогично с функциями $\tan t$, $\cot t$. При этом понятие параметра не вводится. На отработку умения решать задачи данного типа приведено порядка 50 заданий с различными формулировками и требованиями.

В следующий раз с понятием параметра учащиеся сталкиваются в параграфе «Применение производной для исследования функции на монотонность и экстремумы». В теоретическом материале вводятся основные понятия, связанные с производной функции, точки экстремума и основные теоремы с доказательством. Приведены задачи на отработку умения применять теоремы.

Среди них есть те, условия которых формулируются так: «При каких значениях параметра a заданная функция имеет одну стационарную точку». И в следующем же параграфе встречаются задания типа: «При каких значениях параметра a уравнение $-x^4 + 2x^2 + 8 = a$ не имеет корней?» Причём номера этих заданий относятся к самым сложным в параграфе. В теоретической части рассматриваются примеры решения наиболее простых задач. Данный тип заданий играет важную алгебраическую роль при подготовке к ЕГЭ.

В конце курса 11 класса отведена целая глава на решение уравнений, неравенств, их систем. В теоретическом материале приведены сначала теоремы, объясняющие принципы работы с уравнениями, а после приведены методы решения уравнений и неравенств с примерами для каждого метода. В учебнике рассмотрены методы: метод разложения на множители, метод введения новой переменной, функционально-графический метод. Для неравенств и систем не выделено отдельных методов, приведены примеры решений некоторых видов.

Эта глава завершается параграфом: «Решение уравнений и неравенств с параметрами». В теоретической части рассмотрены примеры решения линейных уравнений и неравенств, квадратных уравнений, иррациональных уравнений с параметрами. Автор не выделял методы решения уравнений и неравенств с параметрами, вводил общую теорию по параметрам через примеры — индуктивным методом. После каждого примера, рассмотренного А. Г. Мордковичем, имеют место комментарии, где описываются возможные ошибки учащихся, приводится другой способ решения данного уравнения с параметром. По ходу решения этих примеров описывается определённая часть теоретического материала.

В практической части приложено учащимся предложено решить все виды уравнений, рассмотренных в теоретической части, добавлены показательные и логарифмические уравнения. Заданий на решение неравенств с параметрами предложено 3, а на системы — 1. Каждое задание в данном параграфе относится к повышенному уровню сложности.

В учебнике Муравина Г. К. и Муравиной О. В. [18] учащиеся впервые встречаются с параметром в курсе 11 класса. Предшествуют данному материалу темы: уравнения, неравенства, их системы. Отдельных методов решения данных заданий авторы не выделяют. Они рассматривают решение уравнений, неравенств, их систем на примерах, то есть пользуются индуктивным методом для обобщения уже известного материала учащимся.

В 16 параграфе «Задания с параметрами» рассматривается понятие параметра, приводится 9 различных примеров с решениями, в которых использованы различные методы решений. Все примеры сопровождаются рекомендациями, комментариями авторов, необходимыми при решении задач с параметрами. При решении примеров автор использовал аналитический и графический методы.

После теоретической части предложена система упражнений, которая включает в себя задания на различные виды уравнений с параметрами, системы уравнений с параметрами, неравенства с параметрами и системы неравенств с параметрами. На отработку умения решать неравенства с параметрами и их системы предложено недостаточное количество заданий. Система задач, направленная на решение уравнений с параметрами, охватывает все виды уравнений: тригонометрические, логарифмические, показательные, иррациональные, линейные, квадратные, модульные. На каждый из них предложено не менее 3 задач с различными формулировками.

В учебнике Мерзляка А. Г. [5, 6] задачи с параметрами берут начало в учебнике 10 класса в параграфе 5 «Метод интервалов». Последнее задание в разделе «высокой сложности». Перед этим учащиеся изучали тему «Равносильные преобразования в уравнениях и неравенствах». Определение параметра не дается, в формулировке задания не встречается понятие «параметр». В задании предложено 8 наиболее простых неравенств, которые направлены на умение применять метод интервалов для анализа неравенств. В

данной теме при выполнении задания уже формируются начальные умения анализа неравенств с параметрами.

Также задания с параметром встречаются в 15 параграфе «Тригонометрические функции числового аргумента». Представлены тригонометрические уравнения. Приведём пример одного из них: «При каких значениях a возможно равенство: $\sin x = 2a - a^2 - 2$?» Данный тип заданий выполняет ту же функцию, что и задания на метод интервалов. Также представлены тригонометрические уравнения с неизвестной a , в которых необходимо применять тригонометрические формулы преобразования. Они встречаются в темах «Арксинус» и «Арккосинус», «Тригонометрические уравнения, сводящиеся к алгебраическим».

Важнейшую роль играют задачи в главе «Производная», где задачи сформулированы следующим образом: «При каких значениях a заданная функция имеет только одну критическую точку?» Роль данных задач обозначена в анализе учебников других авторов. А также в главе «Первообразная» уже в учебнике 11 класса представлены задачи, рассматриваемые выше.

В данном учебнике не выделено параграфов на решение задач с параметрами. В конце учебника есть глава «Упражнения для повторения курса алгебры», в которой собран только задачный материал. Темы, в которых встречаются задачи с параметрами, без определения: «Рациональные уравнения. Системы рациональных уравнений», «Тригонометрические функции». Данный материал является обобщающим, в нем не содержится теоретических сведений, многие задачи взяты из уже решённых учащимися задач.

Далее рассмотрим УМК углублённого уровня. К учебной литературе по алгебре и началам анализа углубленного уровня относят учебники авторов:

1. Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Ткачёва М. В. и др. (базовый и углубленный уровень).

2. Мерзляк А. Г., Номировский Д. А., Поляков В. М.

3. Колягин Ю. М., Ткачева М. В., Федорова Н. Е.

4. Мордкович А. Г., Семенов П. В.

5. Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н. и другие.

Начнем анализ УМК с учебника Алимова Ш. А. [1] для 10-11 классов. Учащимся впервые предложено решить задачи с параметрами в 10 классе, не вводя определение параметра, в упражнениях ко 2 главе. Представлено одно задание с 2 неравенствами. Перед этим учащиеся изучили темы: «Равносильные уравнения», «Иррациональные уравнения и неравенства», причем параграф «Иррациональные неравенства» относится к необязательному изучению, а в задании представлено именно иррациональное неравенство с параметром. Далее еще одно задание представлено в теме: «Логарифмические уравнения». В формулировке уже встречается понятие «параметр», но определения параметра нет. Задание позволяет учащимся выработать навык анализа логарифмических уравнений, наличие корней в зависимости от ОДЗ.

Введение обратных тригонометрических функций происходит через параметрические уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$, так же с тангенсом и котангенсом. И далее в теме «Решение тригонометрических уравнений» представлено 3 способа решения тригонометрических уравнений, в теории есть по 3 примера на каждый способ с подробным описанием, комментариями автора. В упражнениях представлено 2 задачи на тригонометрические уравнения с параметром уже с дополнительными условиями. Они позволяют учащимся научиться решать уравнения с заданными условиями, ОДЗ и анализировать тригонометрические функции относительно еще одной неизвестной.

В главе «Производная и первообразная» задачи аналогичны тем, что были в предшествующих учебниках.

В учебнике нет отдельной главы на решение уравнений, неравенств и их систем с параметрами, отсутствует теоретический материал, следовательно, учащимся достаточно сложно подобрать метод решения задач. Задачный

материал в параграфе «Упражнения для повторения алгебры и начала математического анализа» не насыщен заданиями с параметрами. Большинство из них взято из прошедших параграфов с теми коэффициентами и условиями.

В учебнике Мерзляка А. Г. [5] предназначенного для углубленного изучения алгебры, впервые задачи с параметром встречаются в пособии для 10 классов в параграфе 6 «Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований». В теоретическом материале рассмотрено смещение различных графиков функций, после чего предложен задачный материал, в котором предложено решить линейное уравнение с модулем с параметром графическим методом. Данный тип задач использован на подготовительном этапе решения задач с параметрами, поэтому расположен в разделе сложных задач, где предложен уже один из методов их решения, причем в формулировке задания используется понятие «параметр», так как оно уже было определено в основной школе. Также представлены 6 неравенств с параметрами в теме «Метод интервалов», в параграфе «Корень степени n » 5 уравнений, которые не нужно решать, а лишь проанализировать из на количество корней в зависимости от параметра a . Такая формулировка задач позволяет отработать отдельные навыки, необходимые при решении задач с параметрами в ЕГЭ.

В параграфе «Иррациональные уравнения» представлены более сложные номера, перед чем в теории рассмотрены методы решения различных иррациональных уравнений. После рассмотрены иррациональные неравенства с поставленной задачей: «При каких значениях параметра a множеством решений неравенства является промежуток заданной длины?»

При рассмотрении каждой темы, затрагивающей функции, уравнения и неравенства из раздела «Тригонометрия» в сложных задачах представлены задания с параметрами различной сложности и различной постановкой учебной задачи. Они направлены на правильное применение формул тригонометрий, развитие умения построения логической цепочки, отработку умения анализировать заданные уравнения и параметры.

В главе «Производная» задачи с параметрами предложены на том же уровне, как и в предыдущих УМК.

В пособии для 11 класса учащимся предложено решить задачи с параметром в темах «Показательные уравнения», «Показательные неравенства», «Логарифмические уравнения», «Логарифмические неравенства». Здесь задачный материал также не полон, и относится к самому сложному уровню задач, на которые, как правило, учащиеся со средней успеваемостью не акцентируют внимание. В теоретической части рассмотрены основные методы, применяемые при решении данных задач. Разобраны примеры, в которых акцентируется внимание на тот или иной метод.

В конце учебника алгебры и начала анализа есть параграф, в котором подробно описаны основные методы решения уравнений и неравенств — обобщение всех методов, изложенные в предыдущих параграфах. Отдельного пункта на решение задач с параметрами Мерзляк А. Г. не выделяет. В главе «Повторение» предложено несколько задач на эту тему, но теоретическая база отсутствует.

Таким образом, в рассмотренном учебнике не раскрыта сущность задач с параметром, нет ни одного примера решений данных задач, теоретический материал отсутствует, не выделены особенности, «подводные камни» и общие принципы работы. Опираясь на учебник Мерзляка А. Г. в 10-11 классах, учащимся будет достаточно сложно сформировать навык решения задач с параметрами.

В учебнике Колягина Ю. М. задачи с параметрами появляются первый раз в начале 10 класса при изучении темы «Решение линейных уравнений и их систем» из главы «Повторение». Приведём пример формулировки одной из задач: «Решить уравнение, в котором a и b — некоторые числа, а x — неизвестная». По поставленной учебной задаче автором мы можем сделать вывод о том, что понятие параметра не вводится, но в контексте «некоторые числа» учащимся уже понятно, что это не переменная. Далее учащимся

предлагается решить в параграфе «Квадратные уравнения» задачи с заданными условиями по количеству корней.

В темах «Иррациональные уравнения», «Иррациональные неравенства», «Показательные уравнения», «Логарифмические уравнения», «Логарифмические неравенства» автор рекомендует решить только по 1 примеру на каждую тему. Тригонометрические уравнения вводятся параметрически, аналогично учебнику Мордковича А. Г. базового уровня. Также в этом разделе встречается еще пара тригонометрических уравнений с параметрами. Данные задачи направлены на применение тригонометрических формул, а также на отработку умения анализировать задачи с заданными условиями.

В пособии для 11 класса задачи с параметрами впервые встречаются в главах «Производная» и «Первообразная». Они выполняют ту же функцию, что в учебниках предыдущих авторов.

Далее задачи с параметрами встречаются в главе 8 (Рисунок 1.7).

Глава VIII. Уравнения и неравенства с двумя переменными

§ 1. Линейные уравнения и неравенства с двумя переменными	237
§ 2. Нелинейные уравнения и неравенства с двумя переменными	244
§ 3. Уравнения и неравенства с двумя переменными, содержащие параметры	259

Рисунок 1.7 — содержание главы 8 учебника Колягина Ю. М.

В теоретическом материале параграф разделен на 3 пункта:

1. Уравнения с параметром.
2. Система уравнений с параметром.
3. Неравенства и системы неравенств с параметром.

Принципов, методов, изложенных теоретически, нет. Присутствует несколько разобранных примеров, в которых используются аналитический и графический способы. Присутствуют анализ автора, в которых прослеживается

четкая логическая цепочка. Все задачи из данного параграфа относятся к «интересующимся математикой». Рассмотрены только уравнения, неравенства с параметрами от 2 переменных.

По данному учебнику можно сделать вывод, что теоретических данных по теме «Уравнения, неравенства с параметрами и их системы» недостаточно для полного изучения темы. Не предложены методы решения, не выделена определённая классификация. Упущены темы иррациональных, показательных и логарифмических уравнений и неравенств с параметрами.

В учебно-методическом комплексе 10 класса профильного уровня Мордковича А. Г. учащимся предложено решить задачи с параметрами в главе «Повторение». Они не относятся к задачам повышенной сложности. Теории в главе нет.

В параграфе «Определение числовой функции и способы ее задания» задачи направлены на область определения функции с параметром, что позволяет учащимся отработать навык нахождения ОДЗ и научиться выполнять это при присутствии параметра. Также учащимся предложено решить несколько уравнений, в правой части которых находится параметр. Причём это необходимо сделать с помощью свойств функции. Такие упражнения влияют на развитие умения решать графическим способом простейшие уравнения с параметром.

В главе «Тригонометрия» предложены задачи с параметрами, направленные на исследование функции на монотонность, на анализ ОДЗ функций $\sin x$, $\cos x$. В продолжении методов решения простейших тригонометрических уравнений есть еще 3 задачи с параметрами, но уже с заданными условиями.

В главе «Производная» учащимся нужно определить в зависимости от параметра дифференцируемость, непрерывность и монотонность функции. Также автор предлагает решить задачи с параметром графическим методом в параграфе «Построение графиков функций», рассмотреть сколько различных

корней может иметь то или иное уравнение в зависимости от параметра a , опираясь на стационарные точки и точки экстремума.

В 11 классе учащиеся встречаются в учебнике с параметрами в теме «Многочлены», где необходимо в зависимости от значений параметра a определить кратные корни.

В главе «Показательная функция» представлено несколько уравнений и неравенств параметрами как с заданными условиями, так и анализ ОДЗ.

Мордкович А. Г. выделил отдельный параграф на изучение задач с параметрами в главе «Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств» (Рисунок 1.8).

ГЛАВА 6. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств		
26.	Равносильность уравнений	166
27.	Общие методы решения уравнений	168
28.	Равносильность неравенств	174
29.	Уравнения и неравенства с модулями	180
30.	Уравнения и неравенства со знаком радикала	189
31.	Доказательство неравенств	198
32.	Уравнения и неравенства с двумя переменными	202
33.	Системы уравнений	208
34.	Задачи с параметрами	215

Рисунок 1.8 — содержание главы 6 учебника Мордковича А. Г.

В предыдущих параграфах рассмотрены общие методы решения уравнений и неравенств. Изученное в 10 и классах вынесено в отдельные пункты, в каждом из которых рассмотрены различные методы решения уравнений. Теоретический материал в параграфе «Задачи с параметрами» углублён, в сравнении с другими УМК. Рассмотрены примеры, выделена основная сложность: «При одних значениях параметров уравнение не имеет корней, при других — имеет бесконечно много корней, при третьих — оно решается по одним формулам, при четвёртых — по другим». И отмечает, что его задача — «дать понимание о том, как рассуждают при решении уравнений и неравенств с параметрами». Материал изложен доступно. Каждый пример сопровождается комментариями автора, где видна чётко построенная логическая цепочка умозаключений, основанная на уже изученном материале. Автор в примерах решил задачи как графическим, так и аналитическим методом. Мордкович А. Г. выделил некоторый алгоритм, по которому решаются квадратные и линейные

уравнений с параметром. Задачный материал насыщен. Предложены уравнения, неравенства и их системы с различными поставленными учебными задачами. Номера расположены в порядке увеличения сложности. Присутствуют все виды уравнений и неравенств. Достаточно задач, чтобы отработать навыки, выделенные автором.

Таким образом, учебник Мордковича А. Г. наполнен материалами для формирования умения решать задачи с параметром на начальном уровне. Несмотря на то, что некоторые задачи совпадают с предложенными в ЕГЭ, все равно можно сделать вывод о том, что не выделено определённых методов, способов решения задач с параметрами.

В учебнике Никольского С. М. [2] первые задания с параметрами (без рассмотрения понятия параметра) появляются в параграфе 2.11 «Системы рациональных неравенств». Он является обязательным для изучения в курсе 10 класса. Задания формулируются следующим образом: «При каких значениях а система неравенств имеет:

- а) единственное решение;
- б) не имеет решений;
- в) имеет бесконечно много решений?»

Приведём пример одного задания:

$$\begin{cases} x^2 - 4x - 12 \leq 0 \\ |x - a| \leq 3 \end{cases}.$$

Данный тип заданий формирует у учащихся умение решать системы неравенств, учитывая заданные условия и неизвестную константу.

Следующие задания с параметрами встречаются только в конце учебника 10 класса в главе «Задачи для повторения». Причем предложены не только системы неравенств, но и уравнения, системы уравнений. В основном задания направлены на умение решать квадратные уравнения, используя теорему Виетта. Данный способ играет важную роль в решении задач ЕГЭ профильного уровня. В курсе 10 класса задачи с параметрами больше не встречались.

В учебнике 11 класса выделена целая глава на решение уравнений, неравенств, систем (Рисунок 1.9).

ГЛАВА II. УРАВНЕНИЯ. НЕРАВЕНСТВА. СИСТЕМЫ	
§ 7. Равносильность уравнений и неравенств	214
7.1. Равносильные преобразования уравнений	214
7.2. Равносильные преобразования неравенств	219
§ 8. Уравнения-следствия	225
8.1. Понятие уравнения-следствия	225
8.2. Возведение уравнения в четную степень	229
8.3. Потенцирование логарифмических уравнений	231
8.4. Другие преобразования, приводящие к уравнению-следствию	233
8.5. Применение нескольких преобразований, приводящих к уравнению-следствию.	237
§ 9. Равносильность уравнений и неравенств системам	240
9.1. Основные понятия	240
9.2. Решение уравнений с помощью систем	243
9.3. Решение уравнений с помощью систем (продолжение)	247
9.4*. Уравнения вида $f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$	253
9.5. Решение неравенств с помощью систем	256
9.6. Решение неравенств с помощью систем (продолжение)	260
9.7*. Неравенства вида $f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$	263
§ 10. Равносильность уравнений на множествах	266
10.1. Основные понятия	266
10.2. Возведение уравнения в четную степень	268
10.3*. Умножение уравнения на функцию	270
10.4*. Другие преобразования уравнений	273
10.5*. Применение нескольких преобразований	277
10.6*. Уравнения с дополнительными условиями	281
<hr/>	
463	Оглавление
§ 11. Равносильность неравенств на множествах	283
11.1. Основные понятия	283
11.2. Возведение неравенства в четную степень	285
11.3*. Умножение неравенства на функцию	288
11.4*. Другие преобразования неравенств	290
11.5*. Применение нескольких преобразований	294
11.6*. Неравенства с дополнительными условиями	298
11.7*. Нестрогие неравенства	301
§ 12. Метод промежутков для уравнений и неравенств	303
12.1. Уравнения с модулями	303
12.2. Неравенства с модулями	307
12.3. Метод интервалов для непрерывных функций	311
§ 13*. Использование свойств функций при решении уравнений и неравенств.	314
13.1*. Использование областей существования функций	314
13.2*. Использование неотрицательности функций	317
13.3*. Использование ограниченности функций	319
13.4*. Использование монотонности и экстремумов функций	325
13.5*. Использование свойства синуса и косинуса	328
§ 14. Системы уравнений с несколькими неизвестными	331
14.1. Равносильность систем	331
14.2. Система-следствие	337
14.3. Метод замены неизвестных	344
14.4*. Рассуждения с числовыми значениями при решении систем уравнений	348
§ 15*. Уравнения, неравенства и системы с параметрами	355
15.1*. Уравнения с параметром	355
15.2*. Неравенства с параметром	360
15.3*. Системы уравнений с параметром	363
15.4*. Задачи с условиями	367
Исторические сведения	374

Рисунок 1.9 — Глава учебника Никольского С. М.

В каждом пункте параграфов 7, 8, 10, 11 предложены задания высокого уровня сложности: «При каких значениях параметра a уравнение (неравенство) имеет единственный (бесконечное множество) корень?» Данного типа задачи подготавливают учащихся к решению задач с параметрами, на раннем этапе

обучающиеся рассмотрят по одному заданию каждого типа, не изучая понятия параметра.

После обучающиеся встретятся только в 15 пункте, который посвящён задачам с параметрами. В начале теории не вводится понятие параметра, но говорится о том, что значит «решить уравнение с параметром» и «решить неравенство с параметром». Автор рассуждает о заданиях с параметром, выделяет определенный принцип решения для всех уравнений с параметром. Никольский С. М. в теоретическом материале не выделяет методов, предоставляет разбор 5-7 примеров с подробным пояснением к каждой главе. Теоретического материала больше не встречается.

Задачный материал насыщен всеми заданиями, необходимыми при решении задач ЕГЭ: уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств. Автор отмечает, что неравенства с параметром решаются по тому же принципу, что уравнения. На один тип заданий представлено несколько задач. Они направлены на отработку навыка решения задач с параметрами. Есть задачи для общей работы и самостоятельного решения.

Подытожим анализ УМК 10-11 классов сравнительной таблицей (таблица 1.1)

Таблица 1.1 — Сравнительный анализ УМК 10-11 классов

Автор учебника/наличие материала	Задачный материал	Теоретический материал
Мордкович А. Г.(базовый уровень)	+	+
Муравин Г. К., Муравина О. В. (базовый уровень)	+	+
Мерзляк А. Г. (базовый уровень)	+	-
Алимов Ш. А., Колягин Ю. М., Ткачёва М. В. и др. (базовый и углубленный уровень)	+	-
Мерзляк А. Г., Номировский Д. А.,	+	-

Поляков В. М. (углубленный уровень)		
Колягин Ю. М., Ткачева М. В., Федорова Н. Е. (углубленный уровень)	+	+
Мордкович А. Г., Семенов П. В. (углубленный уровень)	+	+
Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н. и другие. (базовый и углубленный уровень)	+	+

Глава 2. Методические основы изучения темы «Уравнения и неравенства с параметрами»

2.1 Теоретико-практическое обоснование создания рабочей тетради на тему «Решение задач с параметрами»

По проделанному анализу УМК по алгебре для 7-11 классов различных авторов можно заключить, что обучающимся недостаточно теоретического и задачного материала для получения знаний, выработки умений и отработки навыков по теме «Задачи с параметрами».

На ЕГЭ по профильной математике 18 задание с параметрами оценивается следующим образом:

1. Обоснованно получен верный ответ — 4 балла.
2. С помощью верного рассуждения получены верные значения параметра, отличающиеся от искомого конечным числом точек — 3 балла.
3. С помощью верного суждения получены все граничные точки искомого множества значений параметра — 2 балла.
4. Верно найдена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений параметра — 1 балл.
5. Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше — 0 баллов.

По статистике решения задач ЕГЭ профильного уровня за 2023 год задачи с параметрами относятся к самым сложным из блока «Алгебра». 70% обучающихся не приступают к решению данного номера, только 2 % получают максимальный балл, 11% получают 2 балла и 17% — 1 балл.

Одной из причин такого низкого процентного соотношения является отсутствие структурированного и систематизированного теоретического и задачного материала по заданной теме.

Задание 18 ЕГЭ по математике профильного уровня требует творческого подхода: достаточно сложно выделить определённый алгоритм по его решению. В сущности, необходимо уметь строить логические цепочки умозаключений, сделанных на основе теоретического математического материала.

Также чтобы решить задачу с параметрами, необходимо знать и разбираться во всех прошедших темах курса алгебры и начала анализа: все виды уравнений и неравенств, их систем, производная, первообразная, функции и их свойства.

В зависимости от типа уравнений или неравенств, формулировки условия, ограничений, наложенных на корни, выбирается метод решения, который определяет лишь тип рассуждений, которые нужно использовать для верного поиска решения.

Чтобы научиться решать задачи с параметрами, необходимо сначала подробно рассмотреть, систематизировать все методы, после чего решить несколько задач на каждый метод по принципу «от простого к сложному», где решение каждой следующей задачи дополняет опыт предыдущей — основной этап, знакомство с параметрами. Далее необходимо рассмотреть систему задач, разработанную без закономерностей, в которой каждый номер возможно решить изученными методами. Результатом такой работы является решение учащимся одной задачи несколькими способами.

Также важно отметить роль учителя при подготовке учащихся к решению 18 задания ЕГЭ. Педагог выступает организатором логичной и последовательной деятельности обучающихся: данная тема не требует введения новых понятий.

На пропедевтическом этапе необходимо актуализировать теоретический материал по темам, связанный с уравнениями, неравенствами, их системами.

На основном этапе учащимся необходимо научиться анализировать условия задач, ОДЗ каждой функции, видеть «подводные камни» каждой задачи. Полный анализ поможет осуществить подготовленная система вопросов.

Но в школе не всегда у учителей есть возможность уделять много времени данному заданию на уроках и дополнительных занятиях. Для этого создадим

рабочую тетрадь, в которой соблюдены все требования к раскрытию данной темы.

Рабочая тетрадь – это учебное пособие, имеющее особый дидактический аппарат, способствующий самостоятельной работе обучающегося по освоению учебной дисциплины (модуля) в аудитории и дома, может быть использована обучающимися в самостоятельном освоении теоретического материала и формировании практических умений и навыков, при подготовке к промежуточной и итоговой аттестации [23].

Учебные пособия такого типа способствуют индивидуальной отработке навыка решения задач заданного типа. Также рабочей тетрадью может воспользоваться учитель при подготовке к уроку, во время урока, пользуясь ею как наглядным пособием для учащихся.

Тему «решение задач с параметрами» педагоги чаще всего оставляют на факультативные занятия. Здесь же данная рабочая тетрадь может служить раздаточным материалом к уроку.

Можно выделить следующие преимущественные дидактические возможности рабочих тетрадей:

- оперативное предъявление учащимся заданий для выполнения упражнений, самостоятельных и контрольных работ;
- наличие необходимых технико-технологических сведений, рекомендаций и указаний для выполнения заданий, в некоторых случаях ответы на задачи [14].

Моя рабочая тетрадь разработана для учащихся 10-11 классов, сдающих ЕГЭ по профильной математике.

Данная рабочая тетрадь по задачам с параметрами содержит 2 раздела: «Аналитические методы», «Графические методы», каждый из которых разделен на параграфы. Структура рабочей тетради — каждый раздел включает в себя следующие блоки:

1. Теоретические аспекты, положенные в основу того или иного метода.

2. Признаки, содержащиеся в условии задач, по которым можно определить применение данного метода.
3. Практическое применение данного метода.
4. Система задач для самостоятельного решения.

2.2 Содержание раздела тетради «Графический метод»

Графический метод является одним из самых сильнейших и широко применяемых методов решения уравнений и неравенств в общем случае, тем более с параметрами. Его применение подразумевает тот факт, что учащийся уже умеет строить графики основных функций, знает их свойства, смещения вдоль осей координат.

В начале мы предполагаем, что у нас уже задана функция $f(x)$, и мы знаем, как выглядит ее график. После чего мы рассматриваем заданную функцию с параметром в зависимости от того, в какой части функции он расположен.

Существует несколько видов графического метода: геометрический метод, метод «хОа», метод «хОу», метод областей, окружность, уравнение отрезка.

Вспомним все возможные случаи, применяемые при решении задач с параметрами:

1. $f(x) \pm a$: смещение основного графика функции вдоль оси Оу на a единиц вверх (вниз).
2. $f(x \pm a)$: смещение основного графика функции вдоль оси Ох на a единиц влево (вправо).
3. $-f(x)$: нули функции остаются в тех же точках, остальные точки отображаются симметрично относительно оси Ох.
4. $a \cdot f(x)$: график функции растягивается вдоль оси Оу, координаты по оси ординат увеличиваются в a раз.
5. $f(x \cdot a)$: график функции сужается в a раз, приближается к началу координат.
6. $|f(x)|$: все положительные значения функции и нули остаются в тех же точках, а отрицательные значения становятся положительными, то есть все отрицательные значения функции отображаются симметрично относительно оси Ох.

7. $f(|x|)$: функция становится чётной. График отображается симметрично относительно оси Oy .

В рабочей тетради рассмотрен один из основных графических методов: метод « xOa ».

Приступим к рассмотрению 1 параграфа данного раздела.

§1 «Метод xOa »

Данный метод обращает неизвестный параметр, который затрудняет решение уравнения или же неравенства, в вспомогательную переменную. Суть его состоит в том, что мы рассматриваем не график функции $y(x)$, а $a(x)$. И чертим его в привычной нам системе координат, приняв за ось ординат ось a . Обращаем внимание, что все точки, принадлежащие графику, являются корнями заданного уравнения.

Он применяется в том случае, когда

1) параметр a легко выражается через другую переменную, либо, когда задана окружность. После выведения параметра чертим график в системе координат xOa ;

2) система неравенств или приводимое к ней уравнение решается методом xOa . Нет y в неравенстве;

3) уравнение без y равно параметру a , часто содержит модуль.

Примеры:

1. Для начала рассмотрим простейший пример, после которого нужно уяснить суть данного метода.

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $x^2 - 6x + a = 0$ имеет ровно 1 решение.

Решение:

Перепишем данное уравнение в виде $a = -x^2 + 6x$

В правой части уравнения мы видим уравнение параболы с вершиной в точке $(3;9)$, ветви направлены вниз. Нули функции в точках $(0;0)$ и $(6;0)$. Построим параболу в системе координат xOa (Рисунок 2.1).

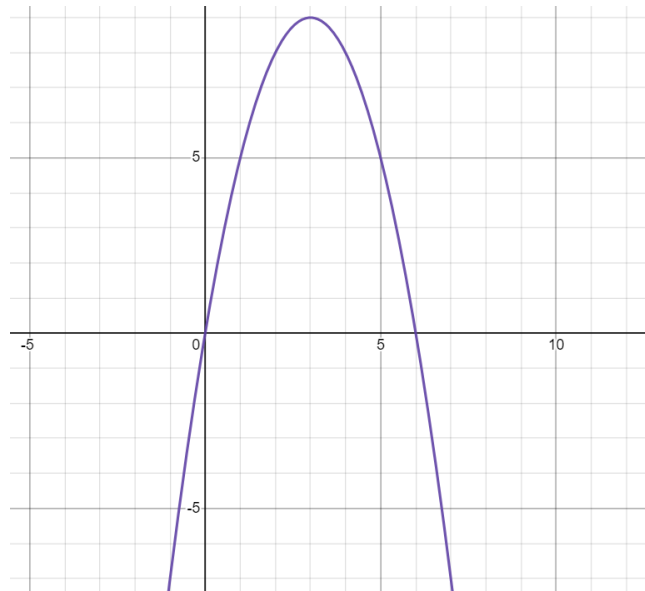


Рисунок 2.1 — Парабола в системе координат xOy

Далее нам нужно рассмотреть прямые, параллельные оси абсцисс, которые будут иметь с графиком параболы ровно 1 общую точку, так как нам необходимо найти все значения параметра a , при которых уравнение имеет ровно 1 решение (Рисунок 2.2).

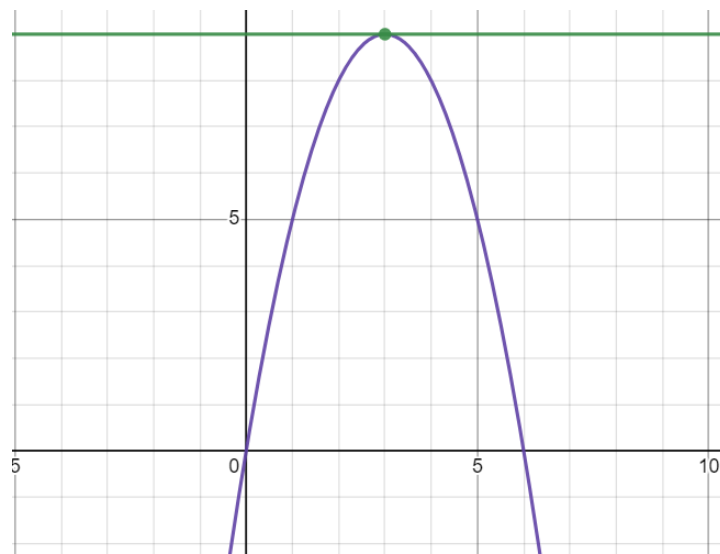


Рисунок 2.2 — Прямая, параллельная оси абсцисс.

Соответственно 1 решение будет при $a = 9$, выше прямые не будут иметь точек пересечения с графиком, ниже будет 2 точки пересечения.

Ответ: $a = 9$

2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|x^2 + a^2 - 7x - 5a| = x + a$ имеет ровно 4 корня.

Решение:

Вспомним правило раскрытия модуля: дано равенство двух функций $|f(x)| = g(x)$, оно равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) = -g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Необходимо, чтобы последнее неравенство выполнялось, иначе уравнение не будет иметь смысла, так как модуль выражения будет равен отрицательному числу. Преобразуем наше уравнение.

$$\begin{cases} x^2 + a^2 - 7x - 5a = x + a \\ x^2 + a^2 - 7x - 5a = -x - a \\ x + a \geq 0 \end{cases}$$

Применяя равносильные преобразования получим

$$\begin{cases} x^2 + a^2 - 7x - 5a - x - a = 0 \\ x^2 + a^2 - 7x - 5a + x + a = 0 \\ a \geq -x \end{cases}$$
$$\begin{cases} x^2 - 8x + a^2 - 6a = 0 \\ x^2 - 6x + a^2 - 4a = 0 \\ a \geq -x \end{cases}$$

Заметим, что первые два уравнения напоминают уравнения окружностей. Выделим полный квадрат.

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 16 - 16 + a^2 - 6a + 9 - 9 = 0 \\ x^2 - 6x + 9 - 9 + a^2 - 4a + 4 - 4 = 0 \\ a \geq -x \end{cases}$$
$$\begin{cases} (x - 4)^2 + (a - 3)^2 = 25 \\ (x - 3)^2 + (a - 2)^2 = 13 \\ a \geq -x \end{cases} \quad (1)$$

Первые два уравнения — уравнения окружностей, причем первая окружность с центром в точке $(4; 3)$ и $R = 5$, вторая окружность с центром в точке $(3; 2)$ и $R = \sqrt{13}$.

Теперь изобразим 3 графика в плоскости xOa (Рисунок 2.3).

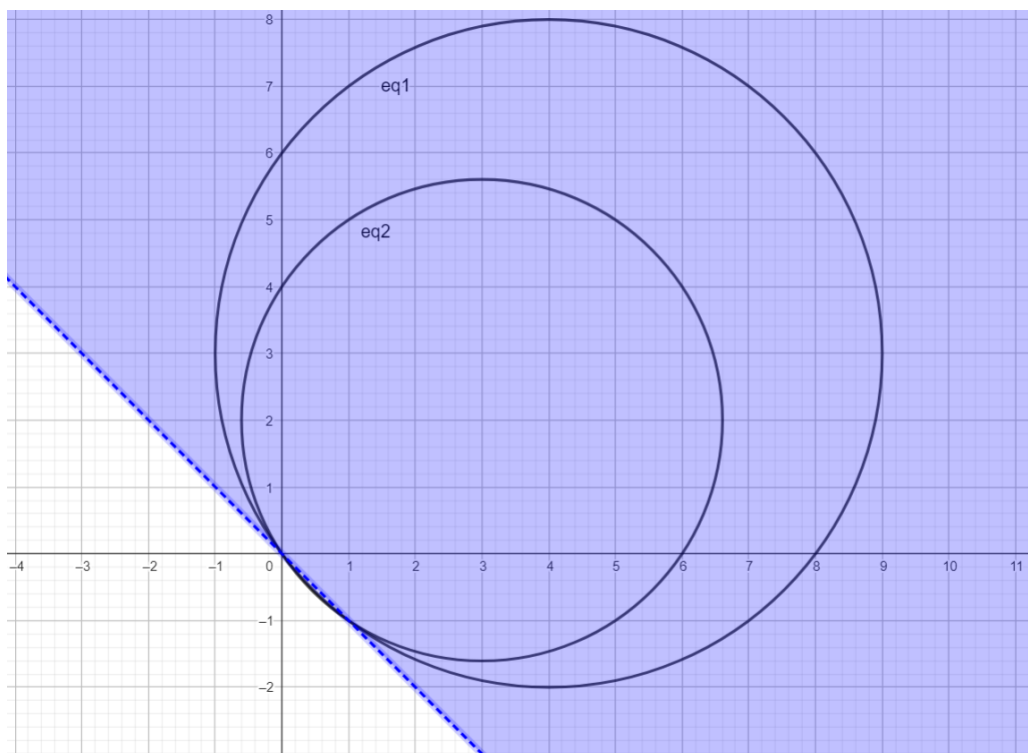


Рисунок 2.3 — Графическое изображение системы (1)

Нас интересуют все значения, что лежат справа от прямой $a = -x$ (чтобы это понять необходимо взять точку плоскости, лежащую, например, выше прямой. Например, точка $(-1; 4)$: $4 \geq 1$ — верно, значит нам необходимо взять значения, лежащие выше прямой).

Теперь нам осталось лишь определить, при каких a прямая, параллельная оси Ox , будет иметь с графиками окружностей 4 общих точки. Для этого необходимо найти точки пересечения окружностей. Также необходимо найти точки пересечения с прямой $a = -x$, для этого решим систему

$$\begin{cases} a = -x \\ x^2 - 8x + a^2 - 6a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -x \\ x^2 - 8x + x^2 + 6x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -x \\ 2x^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -x \\ x(x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -x \\ \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Получаем решения $(0; 0)$, $(1; -1)$. Получили две точки пересечения первой окружности с прямой $a = -x$. Обратим внимание на то, что точки пересечения прямой со второй окружностью будут такими же. Это связано с тем, что если мы в исходное уравнение подставим вместо $a = -x$, то получим 0 в правой части. А модуль выражения равен 0 только в том случае, когда подмодульное выражение равно 0. И обе окружности пересекаются в найденных двух точках.

Далее обратим внимание на то, что прямые, параллельные оси абсцисс, имеют с нашими графиками 4 общих точки, если они пересекают обе окружности в двух точках (Рисунок 2.4).

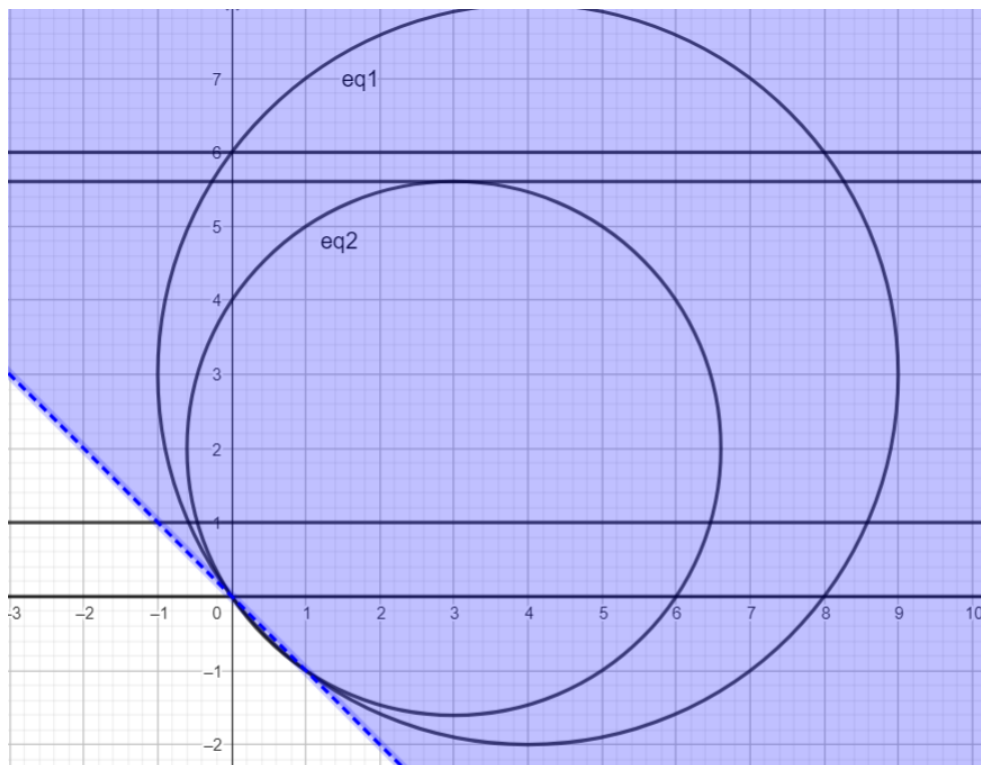


Рисунок 2.4 — график возможного расположения прямых, параллельных оси абсцисс

Прямая $a = 0$ имеет с графиком окружностей лишь 3 общие точки, так они пересекаются в точке $(0;0)$. Прямые, расположенные выше, уже имеют 4 общих точки до прямой, которая касается 1 окружности, там $a = 2 + \sqrt{13}$. Эта прямая уже имеет 3 общие точки с графиками. Выше — уже две (Рисунок 2.5).

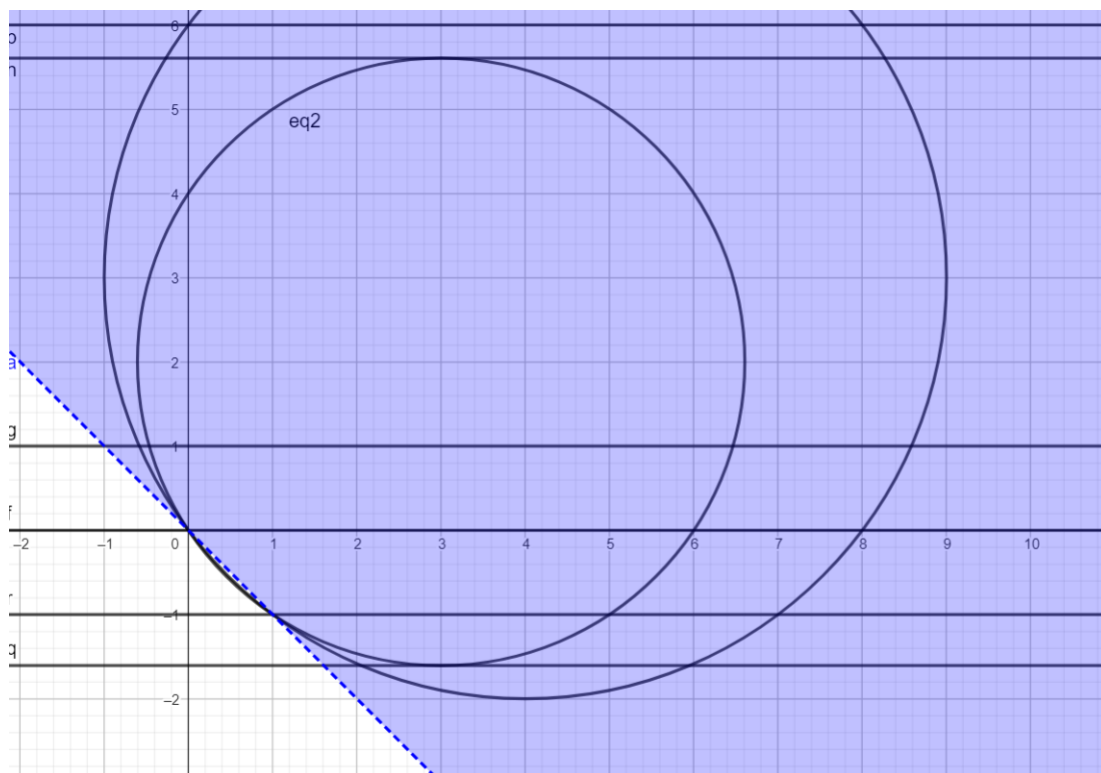


Рисунок 2.5 — график возможного расположения прямых, параллельных оси абсцисс

Так же рассмотрим прямые, расположенные ниже оси абсцисс. Прямая $a = 2 - \sqrt{13}$ имеет с графиками окружностей лишь 3 общие точки, а вот прямые, расположенные выше, имеют уже 4 общие точки до прямой $a = -1$, так как в этой точке две окружности пересекаются. В интервале $a \in (-1; 0)$ прямые имеют с графиками лишь 2 общие точки, так как части окружностей, которые находятся ниже прямой $a = -x$ не принадлежат множеству решений.

Ответ: $a \in (2 - \sqrt{13}; -1) \cup (0; 2 + \sqrt{13})$.

3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $|7x + a| = x^2 + a^2 - x + 8a$ имеет более 2 различных решений.

Решение:

В первую очередь раскрываем модуль по определению, рассматривая 2 случая.

1 случай: $7x + a \geq 0$; $a \geq -7x$

$$7x + a = x^2 + a^2 - x + 8a$$

$$x^2 - 8x + a^2 + 7a = 0$$

Полученное уравнение похоже на уравнение окружности в системе координат xOa (представим, что a - это y). Для того, чтобы построить окружность, необходимо выделить полные квадраты:

$$x^2 - 8x + 16 - 16 + a^2 + 7a + 12,25 - 12,25 = 0$$

$$(x - 4)^2 + (a + 3,5)^2 = 28,25 \quad (1)$$

Уравнение окружности с центром в точке $(4; -3,5)$ и радиусом $\sqrt{28,25}$.

2 случай: $7x + a < 0$; $a < -7x$

$$-7x - a = x^2 + a^2 - x + 8a$$

$$x^2 + 6x + a^2 + 9a = 0$$

Получаем случай, аналогичный первому, выделяем полный квадрат.

$$x^2 + 6x + 9 - 9 + a^2 + 9a + 20,25 - 20,25 = 0$$

$$(x + 3)^2 + (a + 4,5)^2 = 29,25 \quad (2)$$

Уравнение окружности с центром в точке $(-3; -4,5)$ и радиусом $\sqrt{29,25}$.

Далее обратим внимание на условия, которые мы записывали при раскрытии модуля. Нам необходимо определить, какие части окружностей нужно брать в рассмотрение. Для этого решим уравнение $a = -7x$. Так как решением двух неравенств с противоположными знаками будут полуплоскости, на которые разделит плоскость прямая $a = -7x$. Теперь нам необходимо найти точки пересечения этой прямой с окружностями.

Обрати внимание, что при подстановке $a = -7x$ в исходное уравнение, левая его часть обращается в 0, значит, что две окружности как раз и пересекаются по этой прямой, так как при подстановке по отдельности мы получаем одинаковые уравнения. Поэтому поставим в исходно уравнение:

$$0 = x^2 + 49x^2 - x - 56x$$

$$50x^2 - 57x = 0$$

$$x(50x - 57) = 0$$

$x_1 = 0$; $x_2 = \frac{57}{50}$ — координаты точек пересечения по оси абсцисс. Чтобы найти координаты точек пересечения по оси ординат, необходимо подставить эти значения в уравнение $a = -7x$. Получем $a_1 = 0$; $a_2 = -\frac{399}{50}$.

Тогда точки пересечения имеют координаты: $(0;0)$; $(\frac{57}{50}; -\frac{399}{50})$.

Приступаем к графическому изображению и начнём с прямой $a = -7x$ (Рисунок 2.6).

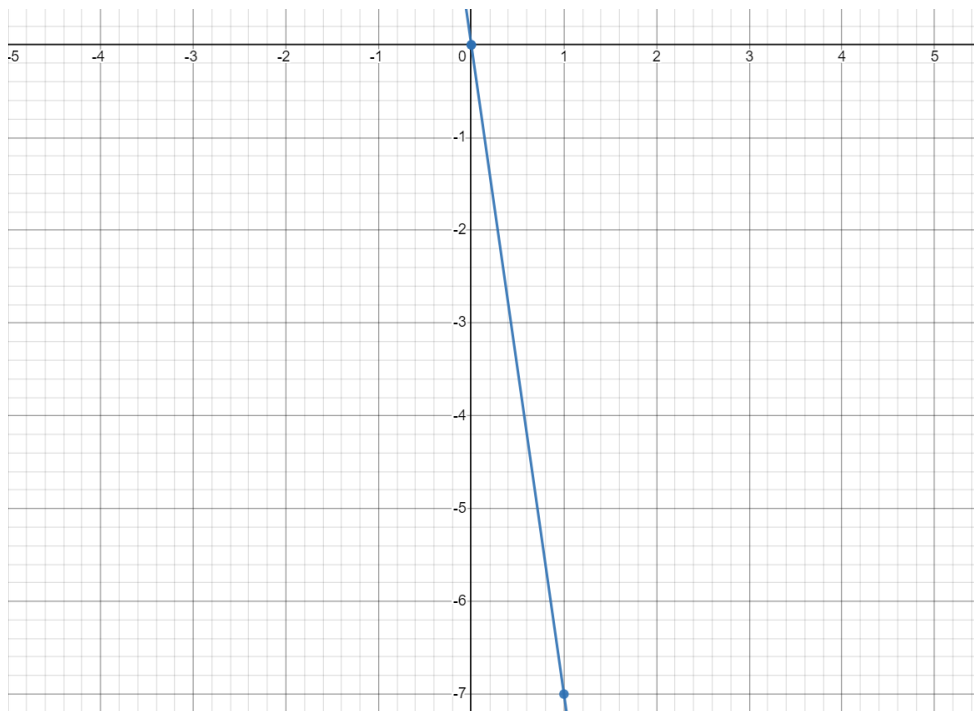


Рисунок 2.6 — График прямой $a = -7x$.

Прямая разделила всю плоскость на две полуплоскости, причем справа расположены все точки, удовлетворяющие неравенству $a \geq -7x$, так как при подстановке точки, например $(1; -1)$ получается верное неравенство, а слева расположены все точки, удовлетворяющие неравенству $a < -7x$. Следовательно, справа мы начертим окружность, которая задается уравнением (1) розовым цветом, а слева — (2) синим цветом, учитывая их центр (Рисунок 2.7).

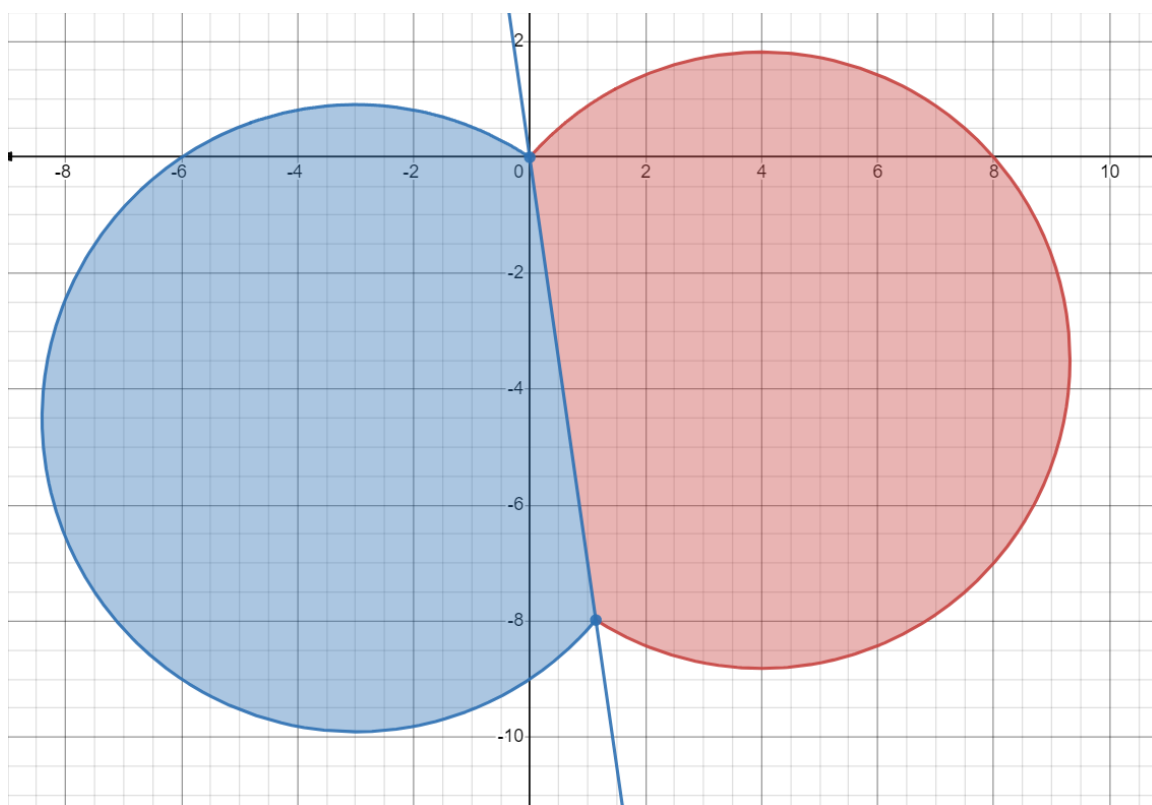


Рисунок 2.7 — Графики окружностей

Далее нам необходимо определить минимальные точки двух окружностей. Очевидно, что из координаты центра окружности нужно вычесть расстояние равное радиусу и получим точку минимальную той окружности равную $-4,5 - \sqrt{29,25}$, и минимальную точку правой окружности $-3,5 - \sqrt{28,25}$. Рассмотрим также максимальные точки двух окружностей: они будут равны соответственно $-4,5 + \sqrt{29,25}$ и $-3,5 + \sqrt{28,25}$.

Теперь рассматриваем горизонтальные прямые, которые будут пересекать наши окружности. По условию задачи нам необходимо, чтобы уравнение имело более 2 решений, следовательно более 2 точек пересечения с окружностями (Рисунок 2.8).

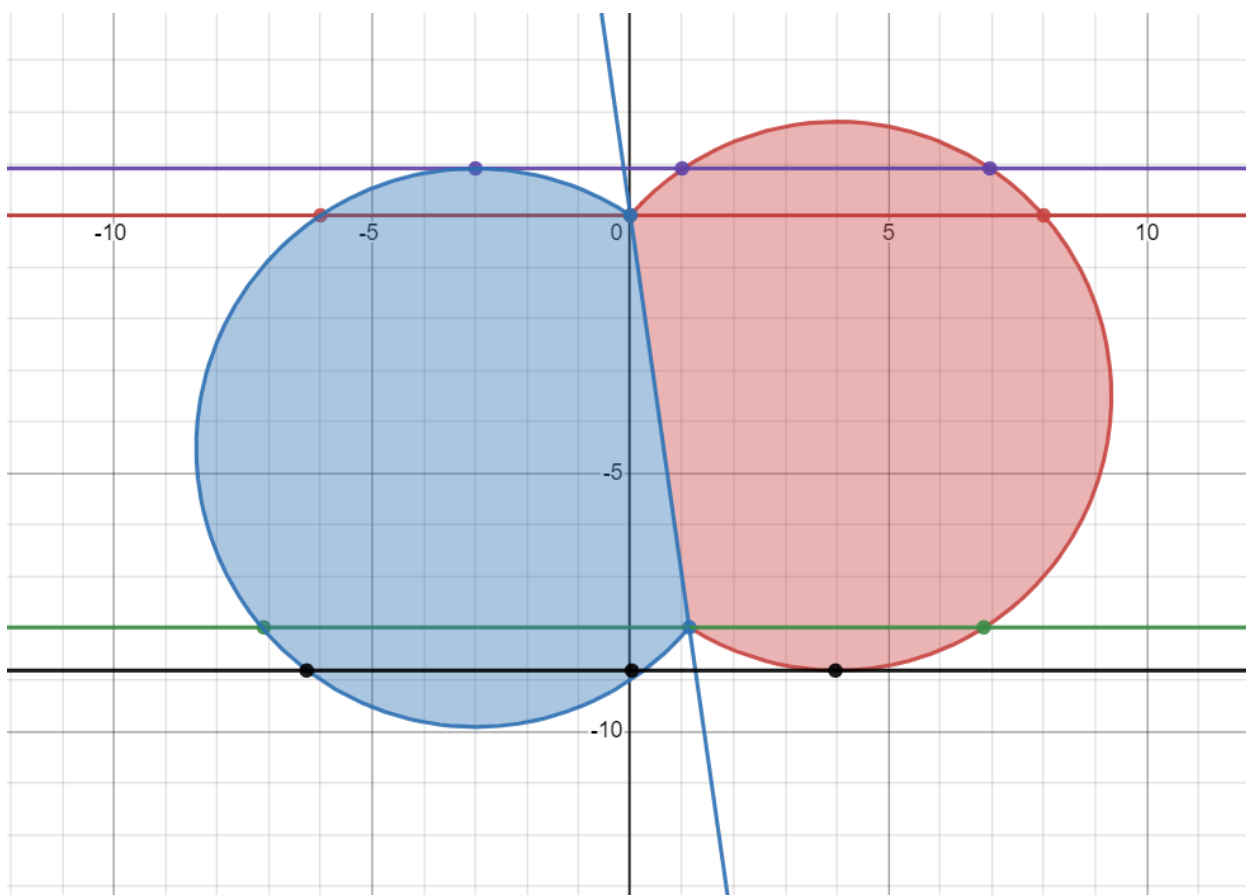


Рисунок 2.8 — Расположение горизонтальных прямых

Обратим внимание, что на графике представлены прямые, между которыми заключены ответы, так как между ними будут проходить прямые, которые будут иметь с графиком 2 окружностей более 2 общих точек. Чтобы верно выписать ответ, необходимо обратить внимание на то, что прямая не входит в наш график, а следовательно, не входит в решение уравнения.

Ответ: $a \in \left[-3,5 - \sqrt{28,25}; \frac{399}{50}\right] \cup \left[0; -4,5 + \sqrt{29,25}\right]$

Задачи для самостоятельного решения:

1. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\sqrt{x+a} = x$, не имеет действительных решений.

2. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $\frac{a+2x-4}{x^2-2x-a} = 0$ не имеет решений.

3. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $\frac{x^2-(3a-1)x+2a^2-2}{x^2-3x-4} = 0$ имеет единственное решение?

4. Найдите все значения параметра a , при которых система неравенств

$$\begin{cases} x^2 + 2x + a \leq 0 \\ x^2 - 4x - 6a \leq 0 \end{cases} \text{ имеет бесконечно много действительных решений.}$$

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых неравенство $(a - 2^x)(a + x^2 + 2) \geq 0$ не имеет решений.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$\frac{9x^2 - a^2}{3x - 9 - 2a} = 0 \text{ имеет 2 различных решения?}$$

7. Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$(a + 4x - x^2 - 1)(a + 1 - |x - 2|) = 0 \text{ имеет 4 различных решения.}$$

8. Найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$\log_{a+x} x(a - x) < \log_{a+x} x \text{ имеет хотя бы 1 решение.}$$

9. Найти все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^2 + 4x - a}{2x^2 - 3ax + a^2} = 0$$

имеет ровно два различных корня.

10. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение

$$\frac{|3x| - x - a}{x^2 - 2 + a} = 0 \text{ имеет ровно 2 различных корня.}$$

11. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 2a \leq x \\ 6x > x^2 + a^2 \\ x + a \leq 6 \end{cases} \text{ имеет хотя бы одно решение на отрезке } [4; 5]?$$

12. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2 \\ \sqrt{x - 1} > a \\ 3x \leq 2a + 11 \end{cases} \text{ имеет хотя бы одно решение на отрезке } [3; 4].$$

13. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$$5\cos 2x + \frac{2a}{\sin x} = -29 \text{ имеет решения.}$$

2.3 Содержание раздела тетради «Аналитические методы»

Разнообразие аналитических методов при решении задач с параметрами велико относительно графических методов. Существуют такие аналитические методы: монотонность, четность функций, область значений функций, условный экстремум, минимакс, необходимые условия, инвариантность, анализ параболы, теорема Виета.

Большинство аналитических методов сводится к анализу функций без построения их графиков. Решение этими методами предполагает, что учащиеся знают элементы математического анализа: нахождение точек экстремума функций, нахождение $\min$ и $\max$ функций, нахождение наибольшего и наименьшего значения функции, анализ параболы (без построения графика).

Аналитические методы требуют высокой математической грамотности учащихся. Они являются более трудными, чем графические. Поэтому при изучении методов лучше начать с аналитических.

Учащиеся, изучившие графические методы, цепляются за его наглядность, следовательно целесообразности в рассмотрении других методов они не видят. Но очень важный момент: любую задачу с параметром можно решить аналитическим методом, но не любую графическим. Чтобы показать учащимся необходимость изучения аналитических методов, нужно привести пример такой задачи.

В рабочей тетради рассмотрены два основных аналитических метода: «метод анализа параболы» и «метод мажорант».

Приступим к рассмотрению 1 параграфа данного раздела.

§1 «Метод анализа параболы»

Данный метод ориентирован на расположение корней квадратного уравнения относительно параметра. Вычисление корней в этом случае может быть громоздким, трудным и непреодолимым. Поэтому для условий,

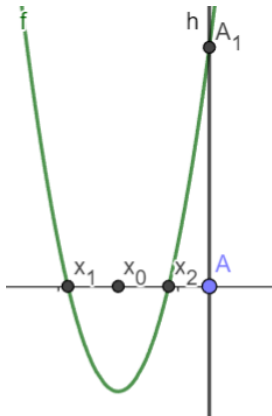
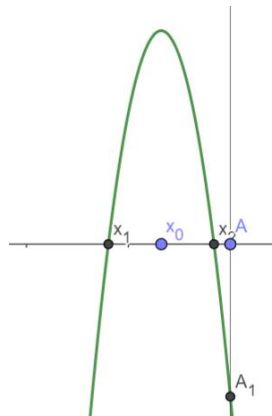
наложенных на корни квадратного трёхчлена, достаточно найти необходимые условия их выполнимости.

Напомним, что квадратный трёхчлен имеет вид: $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$).

Квадратичная функция имеет вид: $f(x) = ax^2 + bx + c$. A , B — действительные числа, заданные в условии. Введём обозначения: $f(A) = A_1$, $f(B) = B_1$. Вспомним, что абсцисса вершины параболы находится по формуле $x_0 = \frac{-b}{2a}$.

Тогда зависимость значений корней квадратного уравнения от действительных чисел имеет вид: (Таблица 2.1)

Таблица 2.1 — Зависимость значений корней квадратного уравнения от действительных чисел

Условия для корней	Достаточные условия		
	При $a > 0$	При $a < 0$	В общем случае ($a \neq 0$)
1. $x_1 < A, x_2 < A$	$D \geq 0$, $\frac{-b}{2a} < A$, $f(A) > 0$ 	$D \geq 0$, $\frac{-b}{2a} < A$, $f(A) < 0$ 	$\begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{-b}{2a} < A \\ a \cdot f(A) > 0 \end{cases}$
2. $x_1 < A < x_2$	$f(A) < 0$	$f(A) > 0$	$a \cdot f(A) < 0$

3. $x_1 > A, x_2 > A$	$D \geq 0, \frac{-b}{2a} > A, f(A) > 0$ 	$D \geq 0, \frac{-b}{2a} > A, f(A) < 0$ 	$\begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{-b}{2a} > A \\ a \cdot f(A) > 0 \end{cases}$
4. $A < x_1 < B, A < x_2 < B$	$D \geq 0, A < \frac{-b}{2a} < B, f(A) > 0, f(B) > 0$ 	$D \geq 0, A < \frac{-b}{2a} < B, f(A) < 0, f(B) < 0$ 	$\begin{cases} D \geq 0 \\ \frac{-b}{2a} < A \\ a \cdot f(A) > 0 \\ a \cdot f(B) > 0 \end{cases}$
5. $x_1 < A, A < x_2 < B$	$f(A) < 0, f(B) > 0$	$f(A) > 0, f(B) < 0$	$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0 \\ a \cdot f(B) > 0 \end{cases}$

6. $A < x_1 < B$ $x_2 > B$	$f(A) > 0, f(B) < 0$ 	$f(A) < 0, f(B) > 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0 \\ a \cdot f(B) < 0 \end{cases}$
7. $x_1 < A, x_2 > B$	$f(A) < 0, f(B) < 0$ 	$f(A) > 0, f(B) > 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0 \\ a \cdot f(B) > 0 \end{cases}$

Далее, опираясь на 7 различных случаев, представленных в таблице, можно решать задачи с параметрами. Обращаем внимание на параметры, по которым мы анализируем параболу в данном методе: абсцисса вершины параболы, значения функций в точках, которыми ограничены корни квадратного трёхчлена по заданию, значение дискриминанта.

Данный метод применяется в случаях:

- 1) в задаче четко виден квадратный трехчлен;
- 2) по условию задачи корни ограничены какими-либо числами или же принадлежат заданным интервалам или отрезкам;
- 3) в условии содержится вопрос о количестве корней на интервале или отрезке.

Рассмотрим примеры применения данного метода:

1. Первый пример предложен для уяснения сути данного метода:

При каких a один корень уравнения $2x^2 + ax + 4 - a = 0$ больше 3, а другой меньше 3?

Решение:

Опираясь на таблицу 2.1, можно заметить, что условие удовлетворяет случаю (Рисунок 2.10).

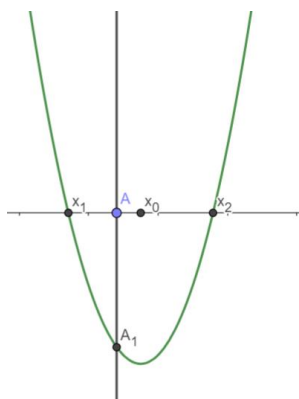


Рисунок 2.10 — Расположение действительного числа относительно корней
к задаче 1

При чем $A=3$, коэффициент перед x^2 фиксированный и равен 2. Случай 2 из таблицы, где $a>0$.

Обозначим левую часть уравнения задачи за $f(x)$.

Достаточное условие выполнения $x_1 < 3 < x_2$: $f(3) < 0$, что видно по графику на рисунке 2.10. Приступим к решению данного неравенства:

$$f(3) = 2 \cdot 3^2 + a \cdot 3 + 4 - a = 18 + 3a + 4 - a = 2a + 22$$

Ссылаясь на достаточное условие:

$$2a + 22 > 0$$

$$2a > -22, a > -11$$

Мы нашли значение параметра, при котором будет выполнено $x_1 < 3 < x_2$.

Ответ: $a \in (-11; +\infty)$.

2. При каких a уравнение $(a - 1)x^2 - (a + 1)x + a = 0$ имеет единственное решение, удовлетворяющее условию $0 < x < 3$?

Решение:

Обратим внимание, что в данной задаче необходимо рассмотреть 3 случая, так как коэффициент перед старшим членом не постоянный, а зависимый:

1) коэффициент перед старшим членом положителен, то есть

$$a - 1 > 0, a > 1.$$

Если выполняется данное неравенство, то уравнение будет принадлежать к 2 типам (Рисунок 2.11. 2.12).

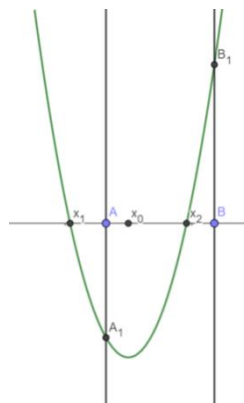


Рисунок 2.11 — Расположение действительных чисел относительно корней к задаче 2 (1.1 случай).

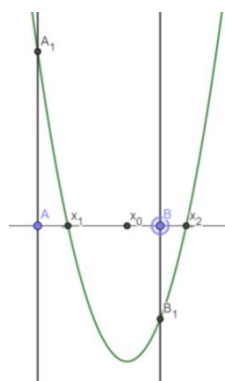


Рисунок 2.12 — Расположение действительных чисел относительно корней к задаче 2 (1.2 случай).

При чем $A=0$, $B=3$. Нам подходят оба случая, причем связанные союзом «или».

Обозначим левую часть уравнения задачи за $f(x)$.

Достаточные условия выполнения $0 < x_1 < 3$:

а) $f(0) < 0$; $f(3) > 0$, что видно по графику на рис.2;

б) $f(0) > 0$; $f(3) < 0$, что видно по графику на рис.3.

Так как они связаны союзом «или», мы можем рассмотреть совокупность

$$\left[\begin{array}{l} a > 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} f(0) < 0 \\ f(3) > 0 \end{array} \right. \\ a > 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} f(0) > 0 \\ f(3) < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

При подстановке получим:

$$\left[\begin{array}{l} a > 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} (a-1) \cdot 0 - (a+1) \cdot 0 + a < 0 \\ (a-1) \cdot 3^2 - (a+1) \cdot 3 + a > 0 \end{array} \right. \\ a > 1 \\ \left\{ \begin{array}{l} (a-1) \cdot 0 - (a+1) \cdot 0 + a > 0 \\ (a-1) \cdot 3^2 - (a+1) \cdot 3 + a < 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Далее равносильными преобразованиями получаем:

$$\left[\begin{array}{l} a > 1 \\ a < 0 \\ 9a - 9 - 3a - 3 + a > 0 \\ a > 1 \\ a > 0 \\ 9a - 9 - 3a - 3 + a < 0 \end{array} \right.$$

Обратим внимание, что в 1 системе совокупности получаем противоречие $a > 1$ и $a < 0$, следовательно, можем исключить данную систему из совокупности.

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 1 \\ a > 0 \\ 7a - 12 < 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} a > 1 \\ a > 0 \\ 7a < 12 \end{cases}$$

Далее равносильными преобразованиями приходим к системе:

$$\begin{cases} a > 1 \\ a > 0 \\ a < \frac{12}{7} \end{cases} \quad (1) \text{ — конечная система 1) случая.}$$

Решением системы является пересечение полученных интервалов (Рисунок 2.13).

$$\begin{cases} a > 1 \quad (b) \\ a > 0 \quad (a) \\ a < \frac{12}{7} \quad (c) \end{cases}$$

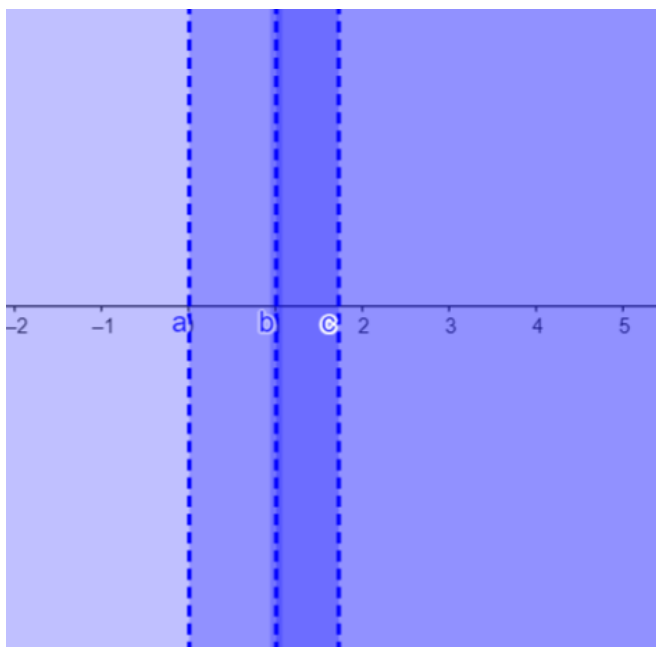


Рисунок 2.13 — Решение системы (1)

Таким образом в случае 1) получаем решение $a \in (1; \frac{12}{7})$.

2) коэффициент перед старшим членом отрицателен, то есть $a - 1 < 0$
 $a < 1$.

Если выполняется данное неравенство, то уравнение будет принадлежать к 2 типам (Рисунок 2.14, 2.15).

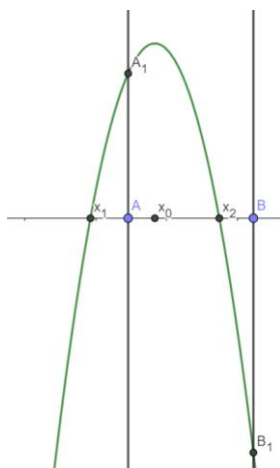


Рисунок 2.14 — Расположение действительных чисел относительно корней к задаче 2 (2.1 случай).

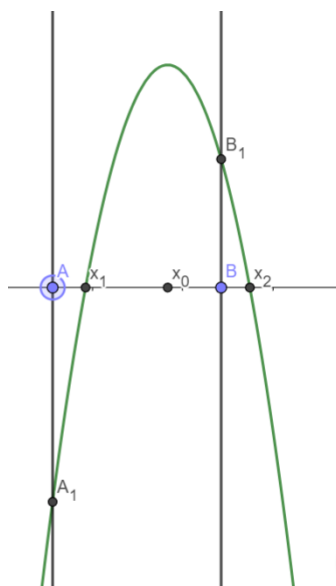


Рисунок 2.15 — Расположение действительных чисел относительно корней к задаче 2 (2.2 случай).

При чем $A=0$, $B=3$. Нам подходят оба случая, причем связанные союзом «или».

Достаточные условия выполнения $0 < x_1 < 3$:

- а) $f(0) > 0$; $f(3) < 0$, что видно по графику на рис.5;
- б) $f(0) < 0$; $f(3) > 0$, что видно по графику на рис.6.

Так как они связаны союзом «или», мы можем рассмотреть совокупность

$$\left[\begin{cases} a < 1 \\ f(0) > 0 \\ f(3) < 0 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} a < 1 \\ f(0) < 0 \\ f(3) > 0 \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} a < 1 \\ (a-1) \cdot 0 - (a+1) \cdot 0 + a > 0 \\ (a-1) \cdot 3^2 - (a+1) \cdot 3 + a < 0 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} a > 1 \\ (a-1) \cdot 0 - (a+1) \cdot 0 + a < 0 \\ (a-1) \cdot 3^2 - (a+1) \cdot 3 + a > 0 \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} a < 1 \\ a > 0 \\ 9a - 9 - 3a - 3 + a < 0 \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} a < 1 \\ a < 0 \\ 9a - 9 - 3a - 3 + a > 0 \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{cases} a < 1 \\ a > 0 \\ a < \frac{12}{7} \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} a < 1 \\ a < 0 \\ a > \frac{12}{7} \end{cases} \right.$$

Обратим внимание, что во 2 системе совокупности получаем противоречие $a < 1$ и $a > \frac{12}{7}$, следовательно, можем исключить данную систему из совокупности.

$$\begin{cases} a < 1 \\ a > 0 \\ a < \frac{12}{7} \end{cases} \text{ (2) — конечная система 2) случая.}$$

Решением системы является пересечение полученных интервалов (Рисунок 2.16).

$$\begin{cases} a < 1 \text{ (b)} \\ a > 0 \text{ (a)} \\ a < \frac{12}{7} \text{ (c)} \end{cases}$$

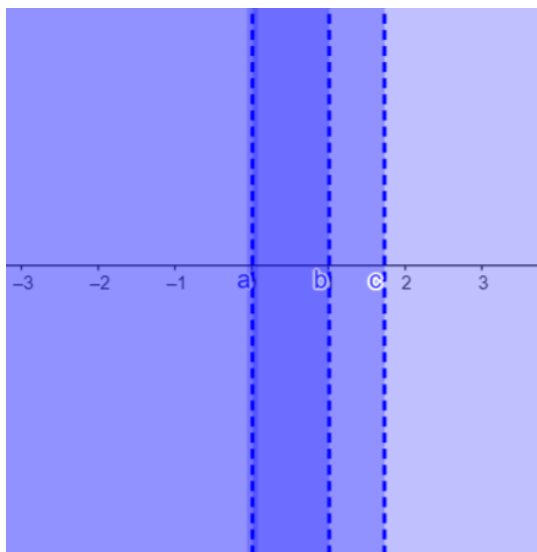


Рисунок 2.15 — Решение системы (2)

Таким образом в случае 2) получаем решение $a \in (0; 1)$.

3) коэффициент перед старшим членом равен 0, то есть $a - 1 = 0$, $a = 1$.

В данном случае получаем линейное уравнение: $-(1 + 1)x + 1 = 0$.

$$-2x + 1 = 0$$

$$-2x = -1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

При решении линейного уравнения мы получили единственный корень $\frac{1}{2}$, а он в свою очередь принадлежит интервалу $(0; 3)$, значит **$a = 1$** мы также берём в ответ.

И ещё очень важно проанализировать, когда у квадратного уравнения будет единственный корень на интервале: когда дискриминант равен нулю, и у квадратного корня будет единственное решение. Здесь появится еще один случай. (Рисунок 2.16).

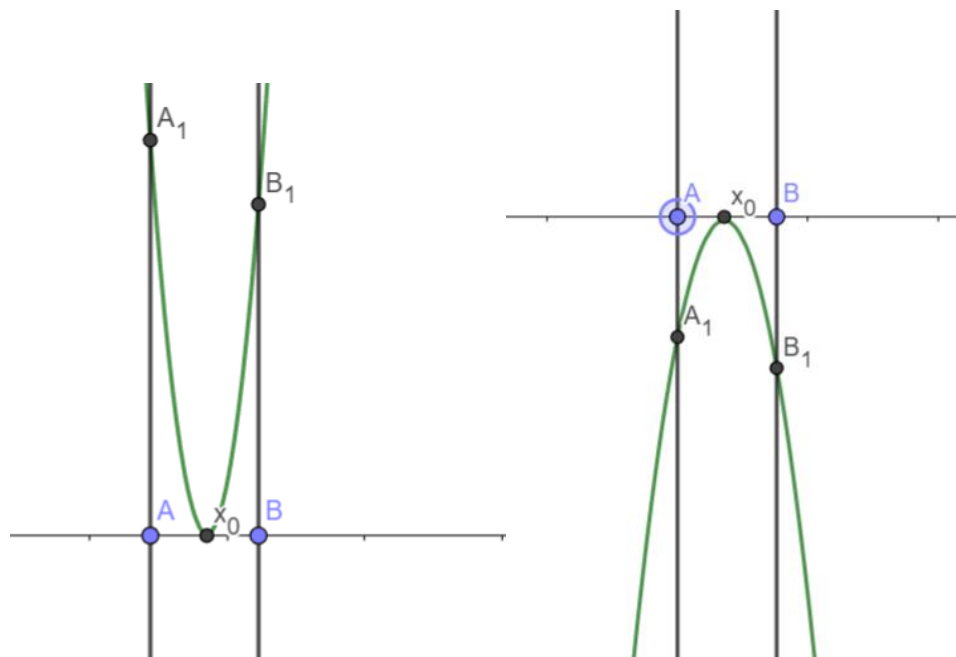


Рисунок 2.16 — Случай, когда $D=0$

Рассмотрим, когда $D=0$ исходного уравнения:

$$\begin{aligned} D = b^2 - 4ac &= (-(a+1))^2 - 4(a-1)a = a^2 + 2a + 1 - 4a^2 + 4a \\ &= -3a^2 + 6a + 1 \end{aligned}$$

$$D = 0$$

$$-3a^2 + 6a + 1 = 0$$

Решим данное уравнение относительно параметра a .

$$D = b^2 - 4ac = 36 + 12 = 48 = (4\sqrt{3})^2$$

$$a_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 - 4\sqrt{3}}{-6} = \frac{-6}{-6} + \frac{-4\sqrt{3}}{-6} = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$a_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-6 + 4\sqrt{3}}{-6} = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

При полученных значениях параметра дискриминант исходного уравнения равен 0. Осталось убедиться, что при найденных значениях параметра, единственный корень будет принадлежать интервалу $(0;3)$. Для этого подставим найденные значения a в исходное уравнение.

$$\left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)x^2 - \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right)x + 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2\right)x + 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3} = 0$$

Мы находили а так, чтобы $D=0$, следовательно, можем найти сразу корень уравнения:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2}{2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{2\sqrt{3} + 6}{3} \cdot \frac{3}{4\sqrt{3}} = \frac{2(\sqrt{3} + 3)}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 3}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{3}}$$

Теперь необходимо определить, принадлежит ли этот корень интервалу $(0;3)$.

$$0 < \frac{1}{2} + \frac{3}{2\sqrt{3}} < 3$$

Домножим неравенство на $2\sqrt{3}$.

$$0 < \sqrt{3} + 3 < 6\sqrt{3}$$

Отсюда мы видим, что корень принадлежит нашему интервалу, следовательно $a = 1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ мы берем в ответ.

Теперь рассмотрим найденный a_2 .

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1\right)x^2 - \left(1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1\right)x + 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} &= 0 \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3}x^2 - \left(-\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2\right)x + 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3} &= 0 \end{aligned}$$

Мы находили а так, чтобы $D=0$, следовательно, можем найти сразу корень уравнения:

$$\begin{aligned} x = \frac{-b}{2a} &= \frac{-\frac{2\sqrt{3}}{3} + 2}{-2 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}} = \frac{-2\sqrt{3} + 6}{3} \cdot \frac{3}{-4\sqrt{3}} = \frac{2(-\sqrt{3} + 3)}{-4\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3} + 3}{-2\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Теперь необходимо определить, принадлежит ли этот корень интервалу $(0;3)$.

$$0 < \frac{1}{2} - \frac{3}{2\sqrt{3}} < 3$$

Домножим неравенство на $2\sqrt{3}$.

$$0 < \sqrt{3} - 3 < 6\sqrt{3}$$

Отсюда мы видим, что корень не принадлежит нашему интервалу, следовательно $a = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ мы не берем в ответ.

При объединении всех a , которые мы нашли в каждом пункте получим:

$$\text{Ответ: } a \in (0; \frac{12}{7}) \cup \left\{1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}.$$

3. При каких a один корень уравнения $(a^2 - 2)x^2 + (a^2 + a - 1)x - a^3 + a = 0$ больше a , а другой меньше a ?

Решение:

Условия из задания удовлетворяют 2 случаю из таблицы, когда число a расположено между корнями уравнения. Причем коэффициент перед x^2 не константа, поэтому нам придётся рассмотреть два случая, когда $a^2 - 2 < 0$ и $a^2 - 2 > 0$. Или же можно воспользоваться общим случаем из таблицы: $a \cdot f(a) < 0$ (a здесь рассматривается как коэффициент перед x^2). Учитывая условие задания $A = a$.

$$(a^2 - 2)((a^2 - 2)a^2 + (a^2 + a - 1)a - a^3 + a) < 0$$

Применяя равносильные преобразования, получим

$$(a^2 - 2)(a^4 - 2a^2 + a^3 + a^2 - a - a^3 + a) < 0$$

$$(a^2 - 2)(a^4 - a^2) < 0$$

$$(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})a^2(a^2 - 1) < 0$$

$$(a - \sqrt{2})(a + \sqrt{2})a^2(a - 1)(a + 1) < 0$$

Далее решим неравенство методом интервалов, для этого найдем корни уравнений:

$$a - \sqrt{2} = 0$$

$$a + \sqrt{2} = 0$$

$$a^2 = 0$$

$$a - 1 = 0$$

$$a + 1 = 0$$

Получив корни каждого уравнения, нанесём их на числовую прямую и расставим знаки, обратив внимание на то, что 0 — корень кратности 2 (Рисунок 2.17).

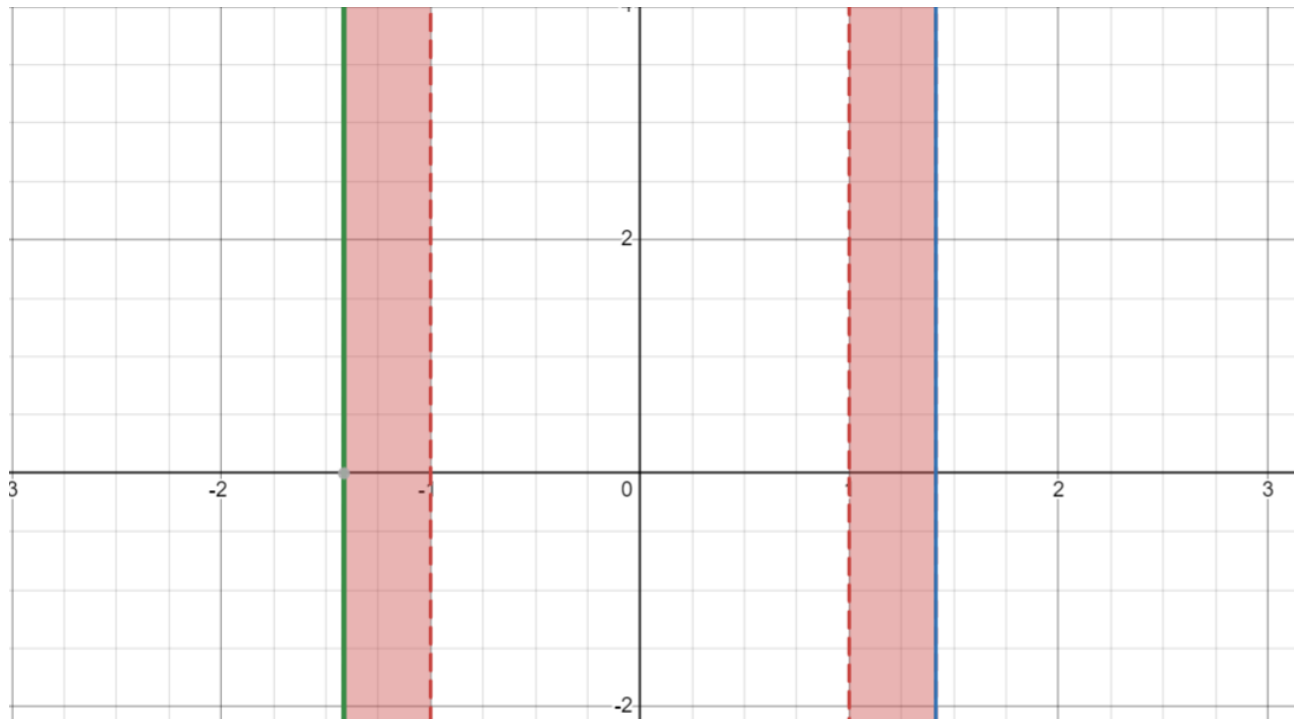


Рисунок 2.17 — Решение неравенства методом интервалов.

По заданию нам необходимы значения, при которых неравенство будет меньше нуля, поэтому в ответ берём значения a , при которых выражение отрицательно. $a=0$ в ответ не берем, так как значение левой части будет равно 0, а у нас неравенство строгое.

Ответ: $a \in (-\sqrt{2}; -1) \cup (1; \sqrt{2})$.

Задачи для самостоятельного решения:

1. При каких a оба корня уравнения $x^2 - 6ax + 2 - 2a + 9a^2 = 0$ больше 3?
2. При каких a оба корня уравнения $x^2 + 4ax + 1 - 2a + 4a^2 = 0$ меньше -1?

3. При каких a оба корня уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$ различны и принадлежат интервалу $(0;3)$?
4. При каких значениях параметра a один корень уравнения $x^2 + ax + 4 = 0$ меньше 2, а другой больше 2?
5. При каких значениях параметра a один корень уравнения $ax^2 + 2x + 2a + 1 = 0$ меньше 1, а другой больше 1?
6. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 + 2(a - 2)x - 4a + 5 = 0$ различны и оба больше -1?
7. Найдите все значения параметра a , при которых все корни уравнения $(2 - a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ больше 0,5.
8. При каких a корни уравнения $ax^2 + (4 - 2a)x + 1 = 0$ по модулю меньше 1?
9. При каких значениях параметра a существует единственный корень уравнения $x^2 - ax + 2 = 0$, удовлетворяющий условию $1 < x < 3$?
10. При каких a оба корня уравнения $ax^2 - 2(2a - 1)x + 2 - 3a = 0$ больше 1?
11. При каких значениях a ровно один из 2 корней уравнения $x^2 - 4x + a = 0$ принадлежит интервалу $(1;4)$?
12. При каких a неравенство $x^2 - ax + a > 0$ выполнено для всех $|x| < 1$?
13. При каких a неравенство $ax^2 - 4x + 3a + 1 > 0$ выполнено для всех положительных x ?

§2 «Метод мажорант»

Данный метод необходим для решения уравнений, в которых левая и правая часть являются функциями, зависящими от одинаковой (одинаковых) переменных, то есть уравнения вида: $f(x) = g(x)$. Причем уравнение такого вида не решается стандартными способами, изученными ранее. Но можно найти такое действительное число A , чтобы выполнялись неравенства: $f(x) \geq A, g(x) \leq A$. Тогда уравнение будет выполняться только при условии: $\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$. Далее уравнения этой системы решаются уже известными нам способами. Получается, что значение A является минимум функции $f(x)$ и максимум функции $g(x)$. Иногда его называют методом минимаксов. Причем данным методом можно решить не только 18 задание ЕГЭ, но и 13, 15.

Метод мажорант - метод выявления ограниченности функции. Мы находим ограничение функций при решении данным методом, поэтому название метода таково.

Вспомним самые часто встречающиеся ограничения функций:

а) $|f(x)| \geq 0$;

б) $\sqrt{f(x)} \geq 0$;

в) $(f(x))^2 \geq 0$, так же верно для любой четной степени;

г) $a^x > 0$;

д) $\frac{1}{x} > 0, x > 0$; $\frac{1}{x} < 0, x < 0$;

е) $-1 \leq \sin x \leq 1, -1 \leq \cos x \leq 1$;

ж) $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Докажем данное ограничение, для этого рассмотрим функцию $y = x + \frac{1}{x}$.

Найдем ее производную:

$$y' = \left(x + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}.$$

Нули производной: $x = 1, x = -1$.

Также $x \neq 0$.

$$y(-1) = -2$$

$$y(1) = 2$$

Следовательно, 2 - минимальное значение при $x > 0$.

Данный метод чаще всего применяется в случаях:

1) левая часть уравнения - многочлен n степени, правая часть - логарифмические, показательные, тригонометрические функции. Как правило, такое уравнение решается либо графически, либо с помощью мажорант (оценки);

2) левая или правая часть имеют один из рассмотренных видов, или же их сумму;

3) тригонометрическое уравнение, не решаемое стандартными способами.

Примеры:

1. При каждом a решите уравнение

$$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_9 4)^{\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}.$$

Решение:

При решении задач с параметрами минимаксным методом необходимо сначала преобразовать уравнения (неравенства) насколько это возможно, применяя преобразования, известные из курса алгебры.

Приведём логарифмы к одинаковому основанию:

$$(\log_2 3)^{\sqrt{x+a+2}} = (\log_2 3)^{-\sqrt{x^2+a^2-6a-5}}$$

Далее обращаем внимание на то, что основания показательных выражений левой и правой части уравнения одинаковы, значит степени равны.

$$\sqrt{x+a+2} = -\sqrt{x^2+a^2-6a-5}$$

Так как арифметический корень из выражения - число неотрицательное, следовательно, минимальное значение левой части уравнения равно 0, т.е. $\sqrt{x+a+2} \geq 0$.

В правой части уравнения перед арифметическим корнем стоит минус, следовательно, максимальное значение правой части уравнения равно 0, т.е. $-\sqrt{x^2+a^2-6a-5} \leq 0$.

Следуя нашим рассуждениям в вводной части метода минимакса, можно сделать вывод, что наше уравнение равносильно системе.

$$\begin{cases} \sqrt{x+a+2} = 0 \\ -\sqrt{x^2+a^2-6a-5} = 0 \end{cases}$$

Равносильными преобразованиями (возведение в квадрат каждого уравнения) получим следующую систему.

$$\begin{cases} x+a+2=0 \\ x^2+a^2-6a-5=0 \end{cases}$$

Далее решаем систему уравнений относительно 2 неизвестных: x и a . Из первого уравнения системы выразим x .

$$\begin{cases} x = -a-2 \\ (-a-2)^2 + a^2 - 6a - 5 = 0 \end{cases}$$

Решаем второе уравнение относительно параметра a .

$$a^2 + 4a + 4 + a^2 - 6a - 5 = 0$$

$$2a^2 - 2a - 1 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 4 + 8 = 12 = (2\sqrt{3})^2$$

$$a_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{4} = \frac{2(1 - \sqrt{3})}{4} = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$$

$$a_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{2 + 2\sqrt{3}}{4} = \frac{2(1 + \sqrt{3})}{4} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}$$

Подставим полученные ответы для нахождения x .

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1-\sqrt{3}}{2} - 2 \\ x_2 = -\frac{1+\sqrt{3}}{2} - 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-5+\sqrt{3}}{2} \\ x_2 = \frac{-5-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Получаем ответ.

Ответ: при $a = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{-5+\sqrt{3}}{2}$; при $a = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$, $x = \frac{-5-\sqrt{3}}{2}$, при остальных a решений нет.

2. Найдите (в градусах) сумму всех значений параметра α , где $0^\circ < \alpha < 1000^\circ$, для каждого из которых существует хотя бы одно число $x \in [1; 2]$, удовлетворяющее условию

$$1 + \left(\cos\left(\frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ\right)\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|}$$

Решение:

Рассмотрим по отдельности каждую часть уравнения:

Обратим внимание, что $0 \leq \left(\cos\left(\frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ\right)\right)^2 \leq 1$, так как $-1 \leq \cos \beta \leq 1$, но учитывая чётную степень косинуса, левая граница меняется на 0.

Добавляя единицу к этому выражению, получим $1 \leq 1 + \left(\cos\left(\frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ\right)\right)^2 \leq 2$. Теперь оценим правую часть уравнения: так как $0 < \frac{1}{3} < 1$, а в степени записан модуль (степень всегда положительна), можем сделать вывод о том, что максимальное значение правой части равно 1, т.е. $\left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|} \leq 1$ (при возведении в положительную степень число будет становиться меньше, значит достигнет максимума в 0 степени). Так как минимальное значение левой части совпадает с максимальным значением правой части, можно применить метод минимаксов. В соответствии с данным методом наше уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} 1 + \left(\cos\left(\frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ\right)\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{1}{3}\right)^{|\cos \pi x - \sin \pi x|} = 1 \end{cases}$$

Применяя равносильные преобразования, получим систему:

$$\begin{cases} \left(\cos\left(\frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ\right)\right)^2 = 0 \\ |\cos \pi x - \sin \pi x| = 0 \\ \cos\left(\frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ\right) = 0 \\ \cos \pi x - \sin \pi x = 0 \\ \frac{\alpha x}{2} + 67,5^\circ = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \cos \pi x = \sin \pi x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\alpha x}{2} = -67,5^\circ + \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \\ \pi x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-135^\circ + \pi + 2\pi k}{\alpha}, k \in Z \\ x = \frac{1}{4} + k, k \in Z \end{cases}$$

Рассмотрим второе уравнение, оно не зависит от параметра α , следовательно система будет иметь решение, если при подстановке корня в первое уравнение получится верное равенство. Учитывая, что $k \in Z$, $x \in [1; 2]$, из второго уравнения можем получить подходящий корень при $k = 1$, $x = \frac{5}{4}$.

$$\frac{5}{4} = \frac{-135^\circ + 2\pi k + \pi}{\alpha}, k \in Z$$

$$\alpha = \frac{-540^\circ + 8\pi k + 4\pi}{5}, k \in Z$$

$$\alpha = -108^\circ + 1,6\pi k + 0,8\pi, k \in Z$$

Вспомним по ограничения, наложенные в условии на α : $0^\circ < \alpha < 1000^\circ$. Так как k может принимать только целые значения, можем рассмотреть случаи (примем $\pi = 180^\circ$).

$$k = 0: \alpha = -108^\circ + 0,8 * 180^\circ = 36^\circ$$

$$k = 1: \alpha = -108^\circ + 1,6 * 180^\circ + 0,8 * 180^\circ = 324^\circ$$

$$k = 2: \alpha = -108^\circ + 1,6 * 180^\circ * 2 + 0,8 * 180^\circ = 612^\circ$$

$$k = 3: \alpha = -108^\circ + 1,6 * 180^\circ * 3 + 0,8 * 180^\circ = 900^\circ$$

Следующий корень уже будет более заданного значения. При отрицательных k параметр будет отрицательный, поэтому мы их не рассматриваем. В ответ необходимо записать сумму корней.

Ответ: 1872° .

Задачи для самостоятельного решения:

1. При каждом α найти все корни уравнения

$$\cos 2x + 2(\sin(x + \alpha))^2 + 2 = \sin \alpha,$$

принадлежащие отрезку $[\pi; 2\pi]$.

2. Найти все $\alpha \in (2; 5)$, при которых уравнение

$$\log_2(3 - |\sin \alpha x|) = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{6}\right)$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[2; 3]$.

3. Найти все $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, при которых уравнение

$$\sqrt{2 \cos(x + \alpha) - 1} = \sin 6x - 1$$

имеет хотя бы один корень.

Заключение

Выпускная квалификационная работа посвящена методам решения задач с параметрами в итоговой аттестации учащихся. В ходе исследования были решены все поставленные задачи и получены следующие результаты:

- 1) изучены учебно-методическая, математическая и историческая литература по теме исследования;
- 2) рассмотрены особенности решения задач с параметрами различными методами;
- 3) проанализированы и систематизированы задачи ЕГЭ;
- 4) разработана рабочая тетрадь "Решение задач с параметром" для подготовки к ЕГЭ по математике;
- 5) продемонстрировано решение задач с параметром с помощью математического пакета GeoGebra.

На основе приведенных результатов сформулированы выводы:

- 1) знакомство с параметрическими задачами методически правильно начинать с 7-го классов параллельно с соответствующими разделами школьной программы;
- 2) на начальном этапе изучения графического метода необходимо применять образовательные математические программы (например, GeoGebra);
- 3) разработанная рабочая тетрадь поможет старшеклассникам самостоятельно овладеть некоторыми приемами решения уравнений и неравенств с параметром, а учителям - планомерно организовать работу по данной теме в классе на уроке или факультативных занятиях.

Список литературы

1. Алгебра и начала анализа : учеб. для 10—11 кл. общеобразоват. учреждений / Ш. А. Алимов [и др.]. 15-е изд. М. : Просвещение, 2007. 384 с.
2. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учеб. для общеобразовательных учреждений: базовый и профил. уровни / Никольский [и др.]. 8-е изд. М. : Просвещение, 2009. 430 с.
3. Алгебра и начала математического анализа. 10 — 11 классы. В 2 ч. Ч.2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович [и др.]; под ред. А. Г. Мордковича. М. : Мнемозина, 2013. 271 с.
4. Алгебра и начала математического анализа. 10 — 11 классы. В 2 ч. Ч.1. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) / А.Г. Мордкович. 14-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2013. 400 с.
5. Алгебра и начала математического анализа : 10 класс : базовый уровень : учебное пособие для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк [и др.]. М. : Вентана-Граф, 2017. 384 с.
6. Алгебра и начала математического анализа : 11 класс : Базовый уровень : учебное пособие для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк [и др.]. М. : Вентана-Граф, 2017. 320 с.
7. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 1 : учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович [и др.]. 12-е изд., доп. М. : Мнемозина, 2010. 215 с.
8. Алгебра. 8 класс. В 2 ч. Ч. 2 : задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович [и др.]. 12-е изд., испр. и доп. М. : Мнемозина, 2010. 271 с.
9. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев [и др.]; под ред. С.А. Теляковского. 18-е изд. М. : Просвещение, 2011. 271 с.

10. Алгебра. 9 класс : учеб. пособие для общеобразоват. организаций: углубл. уровень / Ю.Н. Макарычев [и др.]. М. : Просвещение, 2018. 400 с.
11. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 1: учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович [и др.]. 12-е изд., стер. М. : Мнемозина, 2010. 224 с.
12. Алгебра. 9 класс. В 2 ч. Ч. 2 : задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А.Г. Мордкович [и др.]. 12-е изд., испр. М. : Мнемозина, 2010. 223 с.
13. Алгебра: дидактические материалы: 8 класс : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк [и др.]. М. : Вентана-Граф, 2018. 255 с.
14. Голобокова Г.И. Рабочая тетрадь как многофункциональное дидактическое средство в системе самостоятельной работы студентов : дисс. ... канд. пед. наук : 13.00.01. Чита, 2012. 284 с.
15. Далингер В.А. Задачи с параметрами. В 2 частях. Ч.1 : учебное пособие для вузов. М. : Издательство Юрайт, 2-21. 466 с.
16. Козко А. И., Чирский В. Г. Задачи с параметром и другие сложные задачи. 2007. 296 с.
17. Мерзляк А. Г. Алгебра : учеб. для 9 кл. общеобразоват. учеб. заведений / А. Г. Мерзляк [и др.]. Х. : Гимназия, 2017. 272 с.
18. Муравин Г.К. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учебник / Г.К. Муравин, О.В. Муравина. М. : Дрофа, 2019. 318 с.
19. Подготовка будущего учителя к проектированию современного урока : монография / Е. В. Белоглазова, Н. В. Винокурова, С. Н. Горшенина [и др.] ; под редакцией Н. В. Кузнецовой, Е. В. Белоглазовой. Саранск : МГПИ им. М. Е. Евсевьева, 2016. 252 с.
20. Прокофьев А.А. Задачи с параметрами . М. : МИЭТ, 2004. 258 с.
21. Спецификация экзаменационной работы по математике ЕГЭ 2023 г. подготовлена Федеральным государственным научным учреждением ФИПИ

[Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: <http://www.fipi.ru/ege-igve11/demoversii-specifikacii-kodifikator> (дата обращения: 20.02.2024).

22. Фалилеева М.В. Первые шаги в решении уравнений и неравенств с параметром : учебное пособие. Казань. Казан. ун-т. 2014. 111 с.
23. Ханипова Е. Х. Рабочая тетрадь как дидактическое средство обучения // Инновации в науке. 2015. №10 (47). С. 76—79.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«21» сентября 2023 г.
Паньженский В.И.

Задание

по ВКР студента Антоновой Дарьи Андреевны
(ФИО полностью)

Тема работы: «Рабочая тетрадь «Решение задач с параметром» для подготовки
к ЕГЭ по математике»

Утверждена приказом по Университету от «26.09» 2023 г. № 0941 а/о

Срок сдачи студентом законченной работы «20» мая 2024 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Изучение литературы по теме исследования	Сентябрь- октябрь 2023	выполнено
2.	Изучение основных понятий	Ноябрь- декабрь 2023	выполнено
3.	Анализ задач ЕГЭ	Январь- февраль 2024	выполнено
4.	Анализ методов решения уравнений с параметром	Март-апрель 2024	выполнено
5.	Оформление рабочей тетради	Апрель 2024	выполнено
6.	Оформление работы	Июнь 2024	выполнено

Дата выдачи задания «18» сентября 2023 г.

Руководитель М - Муромцева Е. В.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

Андреева - Антонова Д. А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студента (ки) 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения

Антоновой Пары
Андреевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Антонова Парыя Андреевна,
Ф.И.О. студента

студент (ка) 4 курса очной формы обучения направления подготовки
44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика»
прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ»
бакалаврской работы на тему « Рабочая тетрадь "Решение
задач с параметрами" для подготовки к ЕГЭ
по математике »,
выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а
также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ,
кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен (на) с действующим Стандартом университета
«Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным
программам высшего образования – программам бакалавриата, программам
специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение
плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из
университета.

Ант
подпись
06.05.2024г.
дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 06.05.2024г.
дд.мм.гггг

Руководитель ВКР

С.И.
подпись

Е.Г. Муравьева
И.О.Ф.

ПРОТОКОЛ

проверки на оригинальность в системе "Антиплагиат.ВУЗ" выпускной квалификационной работы на тему «Рабочая тетрадь «Решение задач с параметром» для подготовки к ЕГЭ по математике»

студентки 4 курса Антоновой Дарьи Андреевны

направления подготовки 44.03.01 "Педагогическое образование"

профиль подготовки "Математика"

Руководитель ВКР Журавлева Е.Г.



Отчет предоставлен сервисом
«Антиплагиат» - <http://crsgu.antiplagiat.ru>



Отчет о проверке

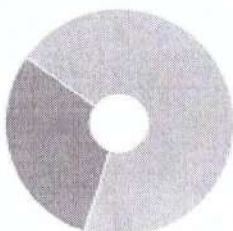
Автор: Антонова Дарья Андреевна

Название документа: Рабочая тетрадь "Решение задач с параметром" для подготовки к ЕГЭ по математике

Проверяющий: Журавлева Екатерина Геннадьевна

Организация: Пензенский государственный университет

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
33.09%

Оригинальности:
69.91%

Цитирования:
0%

Самоцитирования:
0%

«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- **Самоцитирование** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирования» — это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- **Цитирование** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы: библиография; фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант: нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- **Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- **Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому проводится проверка.
- **Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отмеченные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальности» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Руководитель ВКР

07.05.24 *(подпись)*

Е.Г. Журавлева

дата, подпись

ОТЗЫВ

РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ на тему: «Рабочая тетрадь «Решение задач с параметром» для подготовки к ЕГЭ по математике»

**студентки Антоновой Дарьи Андреевны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»
профиль «Математика», гр. 20ФПМ1**

Выпускная квалификационная работа Антоновой Дарьи Андреевны посвящена разработке рабочей тетради «Решение задач с параметром» для подготовки к ЕГЭ по математике. Необходимость разработки такой рабочей тетради связана с тем, что на уроках в школьном курсе математики невозможно уделить достаточно времени задачам данного типа. Для выполнения этих заданий недостаточно прочного усвоения теоретического содержания школьного курса математики, необходимо также иметь развитое логическое мышление, умение ориентироваться в нестандартных ситуациях, определенные навыки исследовательской работы, достаточно высокий уровень общей математической культуры. Опыт показывает, что учащиеся, владеющие методами решения задач с параметром, успешно справляются и с другими задачами. Именно поэтому задачи с параметром обладают диагностической и прогностической ценностью. В последние годы задачи с параметром регулярно встречаются в вариантах ОГЭ и ЕГЭ. Но до сих пор задача с параметром остается самой "неудобной" для абитуриентов. И здесь далеко не все школьники приступают к решению этих заданий, и еще меньшее число – выполняют решение верно.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы, приложения.

В ходе выполнения работы были решены следующие задачи: проведен анализ психолого-педагогической, методической литературы по теме исследования; выделены особенности решения задач с параметрами графическим методом, проанализированы задачи ЕГЭ, в решении которых используется графический метод, разработана рабочая тетрадь.

Работа является самостоятельным исследованием. Разработанная рабочая тетрадь поможет старшеклассникам самостоятельно овладеть некоторыми приемами решения уравнений и неравенств с параметром, а учителям – планомерно организовать работу по данной теме в классе на уроке или факультативных занятиях (элективных курсах).

Выпускная квалификационная работа Антоновой Д.А. удовлетворяет требованиям, предъявляемым к выпускным работам и заслуживает оценки «отлично».

Руководитель, к.п.н., доцент кафедры
«Математическое образование»



Е.Г. Журавлева