

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**

**«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Методические аспекты темы "Рациональные уравнения с параметром"»

Студент

Исянова 15.05.26
(подпись, дата)

Исянова Диана Рамильевна
(ФИО полностью)

Руководитель

Монахова 15.05.26
(подпись, дата)

Монахова О.А.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Журавлева - 15.06.26
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 01.06.26 № 10)

И. о. заведующего кафедры

Паньженский 01.06.26
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 25.06.26 № 4)

Секретарь ГЭК

Журавлева 25.06.26
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕМЫ «РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ».....	6
1.1 Психолого-педагогические особенности обучения школьников решению задач повышенной сложности.....	6
1.2 Понятия, виды и методы решения рациональных уравнений с параметрами.....	8
1.3 Анализ содержания и планируемых результатов изучения темы «Задачи с параметрами» в школьном курсе математики.....	16
1.4 Сравнительный анализ учебников алгебры базового и углубленного уровней 7-9 и 10-11 классов.....	20
1.5 Типичные ошибки при решении заданий с параметрами.....	31
ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕМЫ «РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ».....	36
2.1 Общая характеристика рабочих листов.....	36
2.2 Общие методические рекомендации по организации работы с листами.....	37
2.3 Методические рекомендации к рабочим листам по темам.....	40
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	44
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	45
ПРИЛОЖЕНИЕ.....	50

ВВЕДЕНИЕ

В современной системе школьного математического образования задачи с параметрами занимают особое место. Они традиционно считаются одними из самых сложных в курсе алгебры, так как требуют от обучающихся не только навыков алгебраических преобразований, но и развитого логического мышления, умения проводить аналитический разбор ситуации и учитывать все возможные частные случаи. При этом задачи с параметрами содержатся в государственной итоговой аттестации – в ОГЭ и ЕГЭ профильного уровня они предлагаются как задания повышенной сложности. В то же время в федеральных рабочих программах этой теме, по мнению опытных учителей, выделяется недостаточное количество часов. В учебниках, рекомендованных ФГОС приводятся небольшое количество однотипных заданий, не позволяющих сформировать умения решать более сложные задачи. Многими учителями эта тема рассматривается вскользь или вовсе опускается. По отчетам ФИПИ статистика выполнения задач с параметрами довольно низкая – около 5% учащихся решают задания верно. Основная проблема заключается в том, что многие ученики применяют шаблонные методы решения, не учитывая специфику изменения структуры уравнения при разных значениях параметра. Это создает методический разрыв между требованиями федерального государственного образовательного стандарта и реальным уровнем подготовки учащихся. Причиной такого отношения к параметрам является низкая мотивация обучающихся, нехватка времени, иногда в классе только один-два ученика, ориентированы на решение задач с параметрами, учителю трудно распределить внимание между ними и остальными обучаемыми. Поэтому возникает необходимость в создании учебных материалов, которые помогут отработать основные шаги при решении задач с параметрами, а также дадут возможность учителю дифференцировать работу. Отсюда следует актуальность темы представленной работы.

Цель выпускной квалификационной работы является составление рабочих листов для изучения темы «Рациональные уравнения с параметрами».

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

- 1) проведен обзор методической литературы по теме «Рациональные уравнения с параметрами»;
- 2) выполнен анализ школьных учебников по математике разных авторов 7- 11 классов с целью выявления полноты освещения данной темы;
- 3) на основе статистики ФИПИ и материалов субъектных комиссий проанализированы типичные ошибки при решении задач с параметрами;
- 4) составлены рабочие листы разных уровней сложности для изучения различных видов рациональных уравнений с параметрами;
- 5) описаны методические рекомендации к рабочим листам по каждой теме.

Предмет работы: изучение рациональных уравнений с параметром в школьном курсе математики.

Объект работы: методические рекомендации по применению рабочих листов при изучении рациональных уравнений с параметром.

Практическая значимость работы заключается в возможности использования составленных рабочих листов при подготовке обучающихся к решению задач с параметрами. Представленный материал позволит обучающимся и самостоятельно освоить ключевые способы решения уравнений с параметрами. Педагог получит готовый материал для системного выстраивания учебного процесса на уроках или факультативных занятиях.

Можно выделить следующие особенности предложенного комплекса дидактических материалов.

1. Реализовано строгое разбиение учебного материала на уровни сложности в соответствии с годом обучения. Однако структура листов позволяет использовать их гибко: если тема не была освоена своевременно, материалы могут быть успешно применены в более старших классах, включая 10-11 классы.

2. В содержании рабочих листов включены задания типа «Найди ошибку». Анализ чужих ошибок позволяет учащимся развить критическое мышление и в дальнейшем избегать неправильных решений в собственной работе.

3. Часть уравнений была придумана самостоятельно. Это позволило создать плавный переход к повышению сложности – от самых простых примеров, до комплексных задач, требующего глубокого анализа.

Основная цель составления рабочих листов заключается в том, чтобы сделать процесс решения уравнений с параметрами доступным и понятным для каждого ученика. Методика направлена на преодоление психологического барьера – вместо страха перед неизвестной переменной обучающиеся получают четкие алгоритмы и пошаговую систему закрепления навыка, что превращает решение сложных задач в осознанный процесс.

Работа состоит из введения, двух глав, списка литературы и приложения. В введение аргументируется обращение к теме работы, формулируются актуальность, практическая значимость и научная новизна, а также определяются цели и задачи. В первой главе проведен анализ литературы по теме. Во второй главе описаны методические рекомендации для работы с рабочими листами. В приложении представлены сами рабочие листы.

На основе разработанных рабочих листов создана рабочая тетрадь по теме «Рациональные уравнения с параметрами».

Предполагается, что использование составленных материалов будет способствовать повышению качества усвоения материала, минимизации типичных ошибок и формирование устойчивых навыков математического анализа при работе с параметрическими задачами.

ГЛАВА 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕМЫ «РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ»

1.1 Психолого-педагогические особенности обучения школьников решению задач повышенной сложности

Решение математических задач повышенной сложности, к которым традиционно относятся задачи с параметрами, предъявляет высокие требования к интеллектуальному развитию учащихся и уровню сформированности их когнитивных навыков. В отличие от стандартных алгоритмизированных задач, работа с параметром требует не просто воспроизведения заученных схем, а реализации полноценной исследовательской деятельности.

Успешность решения таких задач напрямую зависит от степени развития следующих мыслительных операций:

1. Анализ и синтез

Учащийся должен уметь расчленять задачу на логические подзадачи в зависимости от значений параметра и синтезировать полученные частные решения в единый ответ.

2. Абстрагирование и обобщение

Параметр по своей природе занимает промежуточное положение между константой и переменной. Это требует от школьника высокого уровня абстрактного мышления — способности воспринимать параметр как «зафиксированное», но «неизвестное» число.

3. Логическое мышление

Решение задач с параметрами — это всегда построение разветвленной логической цепи. Ошибка в одном звене (утраченное условие или неучтенная область определения) ведет к разрушению всей логической структуры.

Перейдем к рассмотрению основных сложностей, связанных с параметром. Ключевая трудность решений заданий с параметрами заключается в высоком

уровне неопределенности. В школьной математике учащиеся привыкают к однозначности, что «решить уравнение — значит найти число». В задачах с параметром ответом является функция или множество значений, что вызывает у многих когнитивный диссонанс.

Психологи отмечают, что одной из причин затруднений является «ригидность мышления» — склонность учеников следовать однажды усвоенному алгоритму. Задачи с параметрами требуют обратного качества — когнитивной гибкости, то есть способности быстро переключаться между различными методами и менять стратегию в процессе решения.

В подростковом возрасте (7-9 классы), согласно теории Ж. Пиаже, завершается формирование стадии формальных операций. Учащиеся начинают овладевать гипотетико-дедуктивным мышлением. Введение параметров в 7 классе способствует развитию теоретического мышления, однако требует от педагога опоры на визуализацию, так как абстрактное мышление еще находится в стадии становления.

В старших классах (10-11 классы) ведущей деятельностью становится учебно-профессиональная. Мышление становится более критическим и рефлексивным. Учащиеся способны к длительной концентрации внимания на сложных многошаговых задачах. Именно в этот период целесообразно вводить комплексные задачи, требующие синтеза знаний из разных разделов [41].

Методика обучения решению задач повышенной сложности должна опираться на самостоятельную деятельность учащихся. Вместо трансляции готовых алгоритмов, педагогу следует стимулировать детей к самостоятельному выводу правил, что соответствует индуктивному характеру школьного познания.

Основная задача здесь — сменить роль ученика из пассивного «исполнителя» он должен стать активным «исследователем». Это подразумевает развитие трех ключевых умений:

1. Находить критические точки параметра до начала расчетов;
2. Контролировать, чтобы решение охватывало все возможные случаи;

3. Находить наиболее рациональный путь решения.

Таким образом, психолого-педагогический аспект обучения решению задач с параметрами заключается в переходе от репродуктивного обучения к продуктивному, где основной акцент делается на развитии логической культуры и способности действовать в условиях многовариантности.

1.2 Понятия, виды и методы решения рациональных уравнений с параметрами

Одной из наиболее сложных и содержательных тем школьного курса математики являются задачи с параметрами. С точки зрения математической науки, введение параметра превращает одно уравнение в целое семейство уравнений, каждое из которых требует индивидуального исследования в зависимости от числового значения входящей в него величины.

Параметр — это независимая переменная, значение которой считается фиксированным или произвольным числом из некоторого множества (обычно множества действительных чисел $\mathbb{R}$) [40].

Чаще всего встречаются два стандартных типа задач с параметром:

- 1) для каждого значения параметра найти все корни данного уравнения;
- 2) найти все такие значения параметра, при которых решения уравнения удовлетворяют заданному условию.

Решить уравнение с параметром — это значит для каждого допустимого значения параметра найти множество всех корней данного уравнения. Решение такой задачи включает в себя:

1. Определение значений параметра, при которых уравнение имеет корни, и нахождение этих корней.
2. Определение значений параметра, при которых уравнение не имеет корней; имеет единственный корень; имеет множество корней.

3. Исследование количества корней или их свойств (если того требует условие) [40].

Результатом решения является развернутый ответ, в котором указаны все возможные значения параметра и соответствующие им множества решений переменной x .

Классификация рациональных уравнений с параметрами

1. Целые рациональные уравнения:

а) линейные уравнения вида $A(a) \cdot x = B(a)$, где $A(a)$ и $B(a)$ — функции от параметра. Основная сложность здесь заключается в исследовании случая $A(a) = 0$.

б) квадратные уравнения вида $A(a) \cdot x^2 + B(a) \cdot x + C(a) = 0$. Исследование требует анализа дискриминанта $D(a)$ и проверки условия $A(a) \neq 0$.

2. Дробно-рациональные уравнения:

Уравнения вида $\frac{P(x,a)}{Q(x,a)} = 0$. Главной особенностью является учет области допустимых значений (ОДЗ). Решение сводится к системе:

$$\begin{cases} P(x, a) = 0, \\ Q(x, a) \neq 0. \end{cases}$$

Здесь параметр влияет не только на корни числителя, но и на то, при каких значениях a эти корни могут совпасть с «запрещенными» корнями знаменателя.

Основные методы решения уравнений с параметром:

1. Аналитический метод

Это метод прямого решения, основанный на логическом переборе случаев. Его суть заключается в выделении «контрольных» или «критических» значения параметра, при переходе через которые структура уравнения меняется (например, обнуляется коэффициент при старшей степени x или дискриминант становится отрицательным). Для каждого промежутка или точки параметра проводится отдельное алгебраическое исследование. Данный метод считается

наиболее строгим, но технически сложным из-за риска пропуска отдельных случаев [40].

Рассмотрим реализацию данного метода на конкретных примерах:

Пример 1. При каких значениях a уравнение $(a + 2)x^2 + 8x + a - 4 = 0$ имеет два корня?

Решение. При $a + 2 = 0$ исходное уравнение не является квадратным. Следовательно, случай $a = -2$ рассматривается отдельно:

Если $a = -2$, то уравнение принимает вид: $8x - 6 = 0$, оно имеет один корень.

Если $a \neq -2$, то уравнение является квадратным. Оно будет иметь два корня только в том случае, когда дискриминант будет являться положительным числом:

$$D = 8^2 - 4(a + 2)(a - 4) = -4a^2 + 8a + 96;$$

$$-4a^2 + 8a + 96 > 0;$$

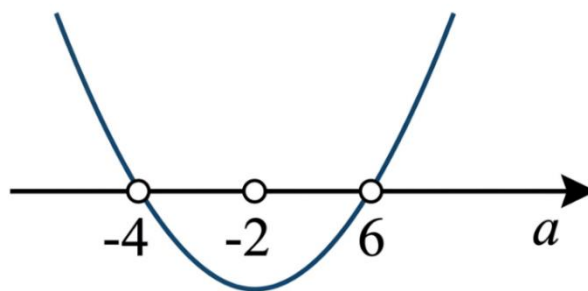
$$a^2 - 2a - 24 < 0;$$

$$f(a) = a^2 - 2a - 24;$$

$$a^2 - 2a - 24 = 0;$$

$$a_1 = 6, a_2 = -4;$$

$$\text{Ответ: } a \in (-4; -2) \cup (-2; 6).$$



Пример 2. Решите уравнение $\frac{ax + 2}{x - 6a}$ с параметром a .

Решение. 1) При $a = 0$ исходное уравнение примет вид: $\frac{2}{x} = 0$. Следовательно, $2 = 0$ – неверное равенство. Значит уравнение не имеет корней, если $a = 0$.

$$2) \text{ При } a \neq 0, \text{ получим: } \frac{x + \frac{2}{a}}{x - 6a} = 0, \quad \begin{cases} x + \frac{2}{a} = 0, \\ x - 6a \neq 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{2}{a}, \\ x \neq 6a. \end{cases}$$

Найдём значения параметра, при которых $x \neq 6a$, для этого решим уравнение: $-\frac{2}{a} = 6a$. В результате чего получим уравнение $\frac{2 + 6a^2}{a}$. Оно не имеет решений в действительных числах. Таким образом, при $a \neq 0$ уравнение имеет корень $x = -\frac{2}{a}$.

Ответ: 1) если $a = 0$, то уравнение не имеет корней; 2) если $a \neq 0$, то $x = -\frac{2}{a}$.

Пример 3. При каких a корни уравнения $ax^2 + (4 - 2a)x + 1 = 0$ по модулю меньше 1?

Решение. 1) При $a = 0$ уравнение примет вид: $4x + 1 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4} \in [-1; 1]$

2) При $a \neq 0$ рассмотрим 2 случая:

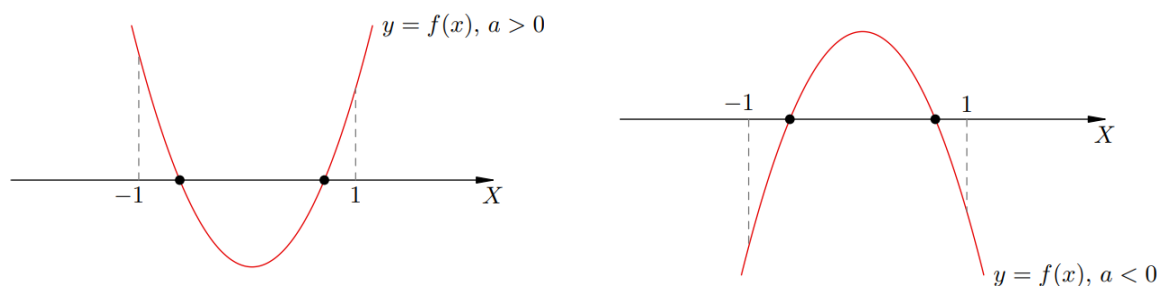


Рисунок 1 – Расположение действительных чисел относительно корней

$$\left\{ \begin{array}{l} a > 0, \\ D \geq 0, \\ f(-1) > 0, \\ f(1) > 0, \\ -1 < x_0 < 1, \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} a < 0, \\ D \geq 0, \\ f(-1) < 0, \\ f(1) < 0, \\ -1 < x_0 < 1. \end{array} \right.$$

Эта совокупность эквивалентна системе:

$$\left\{ \begin{array}{l} D \geq 0, \\ a \cdot f(-1) > 0, \\ a \cdot f(1) > 0, \\ -1 < x_0 < 1. \end{array} \right.$$

Получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^2 - 5a + 4 \geq 0, \\ a(3a - 3) > 0, \\ a(3 - a) > 0, \\ -1 < \frac{a-2}{a} < 1. \end{array} \right.$$

Решением данной системы является множество: $4 \leq a < 5$.

Ответ: $a \in \{0\} \cup [4; 5)$.

Пример 4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a \cdot (x + \frac{1}{x})^2 + 5(x + \frac{1}{x}) - 9a + 15 = 0$ имеет ровно 2 различных решения?

Введем замену: $x + \frac{1}{x} = t \mid \cdot x$

$$x^2 - tx + 1 = 0$$

$$D = t^2 - 4$$

При каждом $t \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ уравнение имеет 2 решения;

При $t = \pm 2$ уравнение имеет единственное решение;

При $t \in (-2; 2)$ уравнение не имеет решений.

Уравнение примет вид: $a \cdot t^2 + 5t - 9a + 15 = 0$

1) При $a = 0$, $t = -3$ – уравнение имеет 2 решения;

2) При $a \neq 0$ необходимо рассмотреть 4 случая:

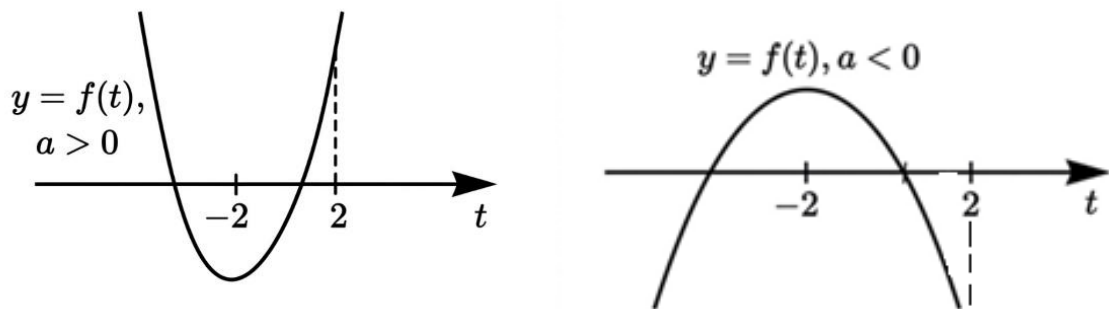


Рисунок 2 – Расположение действительных чисел относительно корней

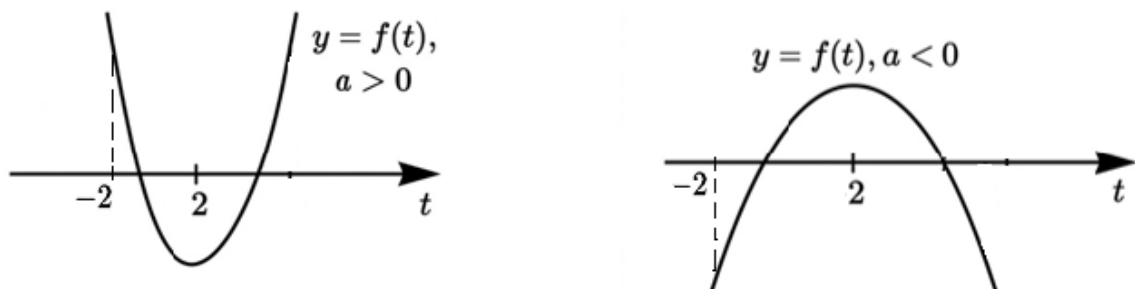


Рисунок 3 – Расположение действительных чисел относительно корней

Объединяя, получим совокупность из систем:

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} f(-2) < 0, \\ f(2) > 0, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} f(-2) > 0, \\ f(2) < 0. \end{array} \right. \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} -5a + 5 < 0, \\ -5a + 25 > 0, \end{array} \right. \\ \left[\begin{array}{l} -5a + 5 > 0, \\ -5a + 25 < 0. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Её решением является множество: $1 < a < 5$.

$$3) D = 0 \Rightarrow (6a - 5)^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{5}{6}$$

$t_B = -\frac{5}{2a} = -3$ исходное уравнение имеет 2 решения.

Ответ: $a \in \{0, \frac{5}{6}\} \cup (1; 5)$.

2. Графический метод

Основан на геометрической интерпретации уравнения. Существует два основных подхода:

1. В плоскости xOy строятся графики левой и правой частей уравнения $f(x, a) = g(x, a)$. Параметр a обычно отвечает за движение одного из графиков. Решением является поиск точек пересечения графиков при различных положениях [40]. Подробнее рассмотрим на следующем примере:

Пример 5. Решить уравнение $|2x + 8| + |2x - 6| = a$.

Решение. Построим графики функции $y = |2x + 8| + |2x - 6|$ и $y = a$.

$$y = |2x + 8| + |2x - 6| = \begin{cases} -4x - 2, & \text{при } x \leq -4, \\ 14, & \text{при } -4 < x < 3, \\ 4x + 2, & \text{при } x \geq 3. \end{cases}$$

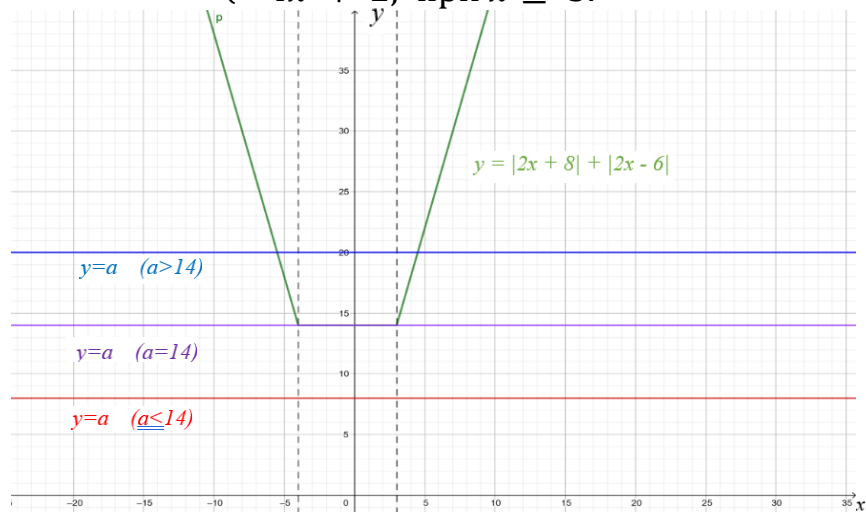


Рисунок 4 – Графики функций $y = |2x + 8| + |2x - 6|$ и $y = a$

1. Если $a < 14$, то ломаная и прямая $y = a$ не пересекаются. Следовательно, уравнение корней не имеет.

2. Если $a = 14$, то ломаная и прямая $y = a$ совпадают при $-4 < x < 3$. Следовательно, уравнение имеет бесконечно много корней.

3. Если $a > 14$, то ломаная и прямая $y = a$ пересекаются в двух точках. Следовательно, уравнение имеет два корня: $-4x - 2 = a$ и $4x + 2 = a$. Значит $x_1 = \frac{2+a}{-4}$ и $x_2 = \frac{-2+a}{4}$.

Ответ: при $a < 14$ корней нет;

при $a = 14$, $-4 < x < 3$;

при $a > 14$, $x_1 = \frac{2+a}{-4}$ и $x_2 = \frac{-2+a}{4}$.

2. В плоскости $(x; a)$ параметр a принимается за вторую равноправную переменную (ось ординат). Уравнение задает некоторую линию или область на этой плоскости. Чтобы найти корни для конкретного a_0 , достаточно провести горизонтальную прямую $a = a_0$ и найти абсциссы x точек её пересечения с графиком уравнения. Этот метод часто оказывается гораздо проще аналитического для дробно-рациональных уравнений. Рассмотрим на конкретном примере:

Пример 6. При каких значениях параметра a уравнение $\frac{x^2 + a^2 - 4a}{x - a} = 0$ имеет ровно 2 различных решения?

Решение. Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} x^2 + a^2 - 4a = 0 \\ x - a \neq 0 \end{cases},$$

Выделим полный квадрат в первом уравнении:

$$x^2 + a^2 - 4a + 4 - 4 = 0;$$

$$x^2 + (a - 2)^2 = 4.$$

Получили уравнение окружности с центром в точке $O(0; 2)$ и радиусом равным 2.

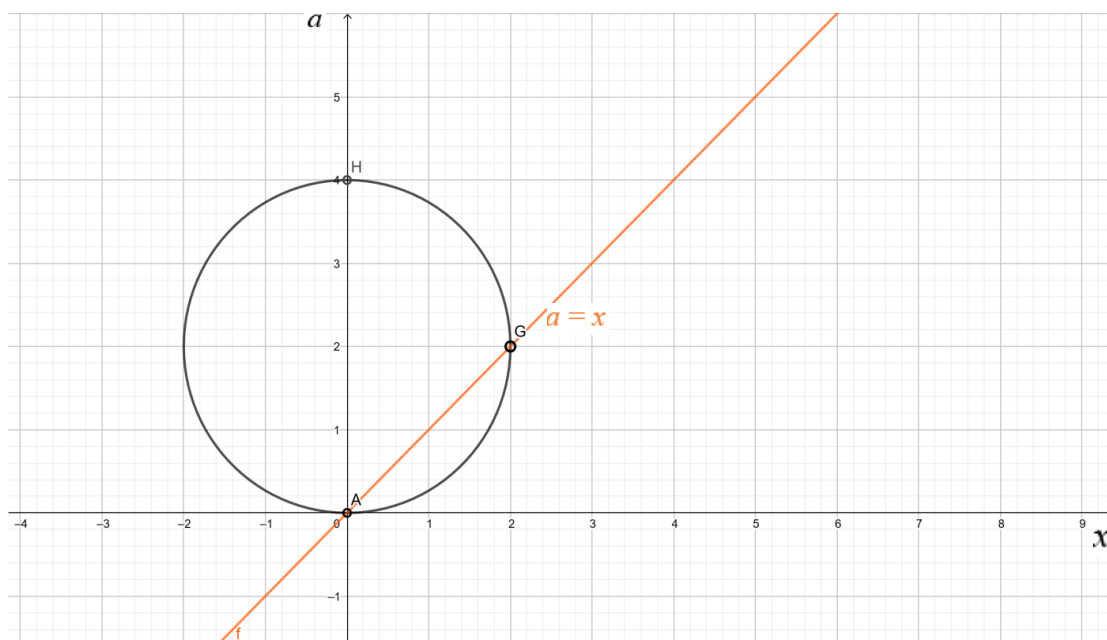


Рисунок 5 – Графики функций $x^2 + (a - 2)^2 = 4$ и $a = x$

Для того, чтобы точка лежала на окружности, ее ордината a должна находиться в пределах: $0 \leq a \leq 4$. Кроме этого, точка не должна лежать на прямой $a = x$, которая пересекает окружность в точках $A(0;0)$ и $G(2;2)$. Точка $H(0;4)$ также не подходит, так как при $a = 4$ получим единственную точку, лежащую на окружности, и, следовательно, единственное решение уравнения.

Таким образом, $a \in (0; 2) \cup (2; 4)$.

Ответ: $a \in (0; 2) \cup (2; 4)$.

3. Решение относительно параметра

Метод решения относительно параметра еще называют инверсией ролей. Он является одним из самых изящных приемов в задачах с параметрами. Его суть заключается в том, что мы начинаем рассматривать параметр a как неизвестное (переменную), а переменную x — как параметр.

Этот метод особенно эффективен, когда уравнение является линейным или квадратичным относительно a , в то время как относительно x оно может быть гораздо более высокой степени или содержать сложные функции.

Рассмотрим данный метод на конкретном примере:

Пример 7. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение имеет решения: $x^4 - (2a + 1)x^2 + a^2 + a = 0$.

Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно a . Перепишем его, сгруппировав слагаемые по степеням a :

$$x^4 - 2ax^2 - x^2 + a^2 + a = 0;$$

$$a^2 + (1 - 2x^2)a + (x^4 - x^2) = 0;$$

$$D = (1 - 2x^2)^2 - 4(x^4 - x^2) = 1 - 4x^2 + 4x^4 - 4x^4 + 4x^2 = 1$$

$$a_1 = \frac{-(1 - 2x^2) + 1}{2} = x^2; a_2 = \frac{-(1 - 2x^2) - 1}{2} = x^2 - 1.$$

Получили, что исходное уравнение равносильно совокупности двух простейших уравнений:

$$\begin{cases} a = x^2, \\ a = x^2 - 1. \end{cases}$$

$$x^2 = a, \quad (1)$$

$$x^2 = a + 1. \quad (2)$$

Из уравнения (1) следует, что $a \geq 0$; из (2) $\Rightarrow a + 1 \geq 0 \Rightarrow a \geq -1$.

Объединяя эти условия получим общий диапазон: $a \in [-1; +\infty)$.

Ответ: $a \in [-1; +\infty)$.

1.3 Анализ содержания и планируемых результатов изучения темы «Задачи с параметрами» в школьном курсе математики

Задачи с параметрами занимают особое место в структуре итоговых экзаменов, таких как ОГЭ и ЕГЭ по математике. Они требуют глубокого понимания теории и развитого логического мышления. Рассмотрим на каком уровне и в каком объеме рассматривается данная тема в школьном курсе математики.

Одним из компонентов образовательного процесса является содержательный компонент – это содержание обучения, которое определяется федеральными государственными образовательными стандартами (ФГОС), федеральными рабочими программами (ФРП), учебниками и учебными пособиями. Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС)

служит основой для разработки федеральных рабочих программ (ФРП) и школьных учебников. Все учебные материалы и образовательные программы создаются в строгом соответствии с ФГОС, поскольку этот документ устанавливает обязательные требования к содержанию образования, условиям его реализации и ожидаемым результатам обучающихся. Учебники и рабочие программы не могут противоречить положениям ФГОС, так как соблюдение стандарта обеспечивает единые критерии качества образовательного процесса.

В федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования одним из предметных результатов в курсе «Алгебры» на базовом уровне является *«умение оперировать понятиями: числовое равенство, уравнение с одной переменной, числовое неравенство, неравенство с переменной; умение решать линейные и квадратные уравнения, дробно-рациональные уравнения с одной переменной, системы двух линейных уравнений, линейные неравенства и их системы, квадратные и дробно-рациональные неравенства с одной переменной, в том числе при решении задач из других предметов и практических задач; умение использовать координатную прямую и координатную плоскость для изображения решений уравнений, неравенств и систем»* [1].

В федеральном государственном образовательном стандарте основного общего образования одним из предметных результатов в курсе «Алгебры» на углубленном уровне является *«умение свободно оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, числовое равенство, уравнение с одной переменной, линейное уравнение, квадратное уравнение, неравенство; умение решать линейные и квадратные уравнения, дробно-рациональные уравнения с одной переменной, системы уравнений, линейные, квадратные и дробно-рациональные неравенства с одной переменной и их системы; умение составлять и решать уравнения, неравенства и их системы (в том числе с ограничениями, например, в целых числах) при решении математических задач, задач из других учебных предметов и реальной жизни; умение решать*

уравнения, неравенства и системы графическим методом; знакомство с уравнениями и неравенствами с параметром» [1].

В федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования одним из предметных результатов в курсе «Алгебры» на базовом уровне является *«умение оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы» [2].*

В федеральном государственном образовательном стандарте среднего общего образования одним из предметных результатов в курсе «Алгебры» на углубленном уровне является *«умение оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; **решать уравнения, неравенства и системы с параметром**; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни» [2].*

Соответственно, в федеральную рабочую программу базового уровня как для 7-9 классов [4], так и для 10-11 классов [6] рассмотрение заданий с параметром не включается.

В федеральной рабочей программе учебного курса «Алгебра» углубленного уровня для обучающихся 7-9 классов [5] изучение уравнений с параметром начинается в 8 классе. На рассмотрение этой темы отводится лишь 3 урока: «Квадратное уравнение с параметром», «Решение квадратных уравнений с параметрами» и «Решение квадратных уравнений с параметрами». В 9 классе обучение параметрам продолжается и занимает 3 урока на тему «Система нелинейных уравнений с параметром». Тем самым, после окончания

9-ти классов обучающиеся должны получить следующие предметные результаты:

- решать линейные уравнения с параметрами, несложные системы линейных уравнений с параметрами;
- решать несложные квадратные уравнения с параметром;
- решать несложные системы линейных уравнений с параметром.

Федеральная рабочая программа по учебному курсу «Алгебра» углубленного уровня для 10-11 классов [7] предполагает дальнейшее развитие компетенций учащихся в области решения уравнений и неравенств с параметрами. По сравнению с программой 7-9 классов, в старших классах уделяется значительно больше внимания именно сложным аспектам данной темы.

В тематическом плане 10-го класса данная тема не предусмотрена на рассмотрение. Зато в 11 классе на ее изучение отводится отдельный раздел под названием «Задачи с параметром», который включает в себя 22 урока и 1 контрольную работу. Разбираются разнообразные типы уравнений, неравенств и систем с параметрами, включая:

- рациональные,
- иррациональные,
- показательные,
- логарифмические,
- тригонометрические;

а также графический способ решения уравнений и неравенств, содержащих параметр.

По завершении изучения данной темы в 11 классе учащиеся достигнут следующих предметных результатов:

- *решать рациональные, иррациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения и неравенства, содержащие модули и параметры;*

- применять графические методы для решения уравнений и неравенств, а также задач с параметрами.

Таким образом, сопоставляя ФГОС основного общего и среднего общего образования (базовый и углубленный уровни) и ФРП базового и углубленного уровня, мы видим, что задачи с параметрами включены в программу лишь на углубленном уровне изучения, тогда как на ОГЭ, ЕГЭ их решение обязательно для всех выпускников независимо от выбранного профиля обучения.

1.4 Сравнительный анализ учебников алгебры базового и углубленного уровней 7-9 и 10-11 классов

Проведём сравнительный анализ заданий, включающих параметр, представленных в учебниках алгебры 7-9 классов базовых и углубленных уровней таких авторов, как Ю.Н. Макарычев и другие, А.Г. Мордкович и другие, А.Г. Мерзляк и другие.

Таблица 1 – Сравнительный анализ учебников алгебры 7-9 классов Ю.Н. Макарычева, А.Г. Мордковича, А.Г. Мерзляка

Автор учебника	Анализ учебника
7 класс	
Ю.Н.Макарычев	<p>В базовом уровне [9] при изучении линейных уравнений представлены задания, где коэффициент при переменной x выступает в роли параметра. Необходимо провести исследование количества решений. (№ 233, 234, 239)</p> <p>В разделе «Линейная функция» главы «Функции» вводится идея прямой пропорциональности. Хотя термин «параметр» прямо не используется, фактически изучается зависимость расположения графика функции от коэффициента, играющего роль параметра.</p>

Продолжение таблицы 1

	<p>Задачи с параметром представлены в дополнительных заданиях к главе «Системы линейных уравнений», где необходимо найти значения параметра, зная точку, принадлежащую графику (№ 1156, 1168, 1169).</p> <p><i>В углубленном уровне</i> [9] рассматриваются задания того же типа, что и в базовом, но в большем объеме (№ 554), также добавляются дополнительные условия (№ 524 - 526, 548, 633).</p> <p>Помимо этого, в теме «Взаимное расположение графиков функций» есть задачи-доказательства, где ключевая идея — сравнение параметра (№ 1085 - 1087).</p>
А.Г.Мордкович	<p><i>В базовом уровне</i> [25] впервые задания с параметром встречается в 1 домашней контрольной работе, где необходимо найти значения параметра, зная корень (решение) уравнения (№ 8). Аналогично и в теме «Линейные уравнения с двумя переменными» (№ 7.26 - 7.28).</p> <p>Далее при изучении параграфа «Линейная функция и ее график» ученикам предоставлены несколько заданий параметром (№ 8.63, 8.64).</p> <p>Небольшое количество заданий на параметр есть и в параграфе «Системы линейных уравнений с двумя переменными» (№ 13.14, 13.16)</p> <p><i>В углубленном уровне</i> [26], [27] в рассмотренных выше разделах представлено больше типовых задания по данной тематике. Кроме того, автор предлагает задания, включающие решение простых линейных уравнений с параметрами, в которых необходимо определить значение параметра, при котором уравнение имеет корни, либо не</p>

Продолжение таблицы 1

	имеет решений, либо имеет бесконечно много решений (№ 4.20, 4.21).
А.Г. Мерзляк	<p><i>В базовом уровне</i> [15] в теме «Линейные уравнения с одной переменной» автор предлагает достаточное количество заданий с параметром, в которых необходимо: исследовать уравнение на количество корней в зависимости от значений параметра (№ 61, 63, 66); найти корень в зависимости от параметра (№ 57, 58, 60); найти значение параметра, при котором корень уравнения равен заданному числу (№ 53, 54); найти значение параметра, при котором корень уравнения удовлетворяет определённому условию (№ 70 - 73). Аналогичные задания рассматриваются и в теме «Линейное уравнение с двумя переменными».</p> <p>В параграфе «График линейной функции» нужно найти либо коэффициент k, либо b, при заданных условиях (№ 874 - 879).</p> <p>Большое количество заданий есть в разделе «Система линейных уравнений», в которых в основном необходимо исследовать на количество решений в зависимости от параметра (№ 1018 - 1024).</p> <p><i>В углубленном уровне</i> [16] автор также включает аналогичные задачи, однако используемые уравнения значительно сложнее по структуре и содержанию.</p>
8 класс	
Ю.Н.Макарычев	<p><i>Базовый уровень</i> [11]. Первые упоминания о параметре появляются в теме «Квадратные уравнения», в которых необходимо: определить количество корней в зависимости от параметра (№ 553); применение теоремы</p>

Продолжение таблицы 1

	<p>Виета, где надо найти параметр, зная дополнительные условия о корнях уравнения (№ 583 – 590).</p> <p>В теме «Исследование систем двух линейных уравнений с двумя переменными» параметр используется косвенно. Например, в № 690, 692 нужно ответить на вопросы, не используя график.</p> <p>В §10 «Уравнения с двумя переменными и их системы» автор выделил отдельный пункт, посвящённый уравнениям с параметрами. Дается определение параметра: «В уравнение $ax = 5$, мы придавали буквам a и x различный смысл, считая, что буквой x обозначено неизвестное число, а буквой a — некоторое фиксированное число. В таких случаях говорят, что a является параметром». В данном пункте рассматривается, как наличие параметров влияет на количество и характер решений уравнений, приводятся методы анализа таких уравнений и примеры их решения (№733-742).</p> <p>В углубленном уровне [12] рассматриваются больше типовых задач, к ним добавляются задачи на доказательство (№ 679, 681, 740, 741). Особое внимание можно уделить № 682: «Найдите условие, при котором уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни, являющиеся: а) противоположными числами; б) обратными числами.» Отдельного пункта «Уравнения с параметрами» не выделяется».</p>
А.Г.Мордкович	<p>В базовом уровне [28] в разделе «Квадратные уравнения» в № 24.32 необходимо менять вид уравнения в зависимости от параметра (из квадратного в линейное и т.д.).</p>

Продолжение таблицы 1

	<p>В № 24.33, 24.34 нужно найти значение параметра, зная корень уравнения. № 25.20, 25.21, 25.39 – номера на исследование корней в зависимости от параметра.</p> <p><i>В углубленном уровне</i> [29], [30] в 6 главе «Алгебраические уравнения» автор рассматривает отдельный параграф 44 «Задачи с параметрами», в нем предложены разнообразные типы заданий (№ 44.1 - 44.56). Мордкович дает следующее определение параметру: «Если дано уравнение $f(x, a) = 0$, которое надо решить относительно переменной x и в котором буквой a обозначено произвольное действительное число, то говорят, что задано уравнение с параметром». Разобраны примеры с подробным решением.</p> <p>Помимо этого, в этой главе, автор предлагает уравнения высших степеней с параметрами, где необходимо найти значение как одного параметра (№ 40.26, 40.27), так и двух (№ 40.28); уравнения с модулем с параметром (№ 42.9); иррациональные уравнения с параметром (№ 43.25, 43.26).</p>
А.Г.Мерзляк	<p><i>В базовом уровне</i> [17] в теме «Квадратные уравнения» автор предлагает достаточное количество заданий с параметром, в которых необходимо: определить вид уравнения в зависимости от параметра (№ 642, 645, 649), исследовать уравнение на количество корней в зависимости от значений параметра (№ 688 - 692); найти значение параметра, при котором корень уравнения равен заданному числу (№ 635, 636); найти неизвестный коэффициент и второй корень при известном одном корне уравнения (№ 715 - 718); найти значение параметра, при котором корни уравнения удовлетворяют определенным условиям (№ 719 - 722). № 737 - 744 также связаны с</p>

Продолжение таблицы 1

	<p>параметром.</p> <p><i>В углубленном уровне</i> [18] автор также включает аналогичные задачи, однако используемые уравнения значительно сложнее по структуре и содержанию.</p>
9 класс	
Ю.Н.Макарычев	<p><i>В учебнике базового уровня</i> [13] в главе «Квадратичная функция» параметры используются для изучения того, как свойства функции меняются в зависимости от ее коэффициентов. Учащимся предлагаются задачи, например, на нахождение нулей функции, которая содержит параметр. Более комплексные задания с параметрами, предназначенные для исследования, собраны в разделе «Дополнительные упражнения» и включают:</p> <ul style="list-style-type: none"> • анализ области значений функции (№ 193); • взаимное расположение графика функции и прямой (№ 200); • изучение параметров вершины параболы и нулей функции (№ 203); • принадлежности точек функции, которая может включать два параметра (№ 201). <p>В дополнительных упражнениях к §6 «Неравенства с одной переменной» рассматривается пара заданий на решение квадратных уравнений с параметром и биквадратных уравнений с параметром (№ 342 - 345).</p> <p>При изучении систем уравнений учащимся предлагаются задачи повышенной сложности с параметром, требующие определения количества решений системы (№ 414 - 416).</p>

Продолжение таблицы 1

	<p>В учебнике <i>углубленного уровня</i> [14] в разделе «Уравнения и неравенства с одной переменной» выделяется параграф «Уравнения с параметрами», где отдельно рассматривают целые уравнения с параметрами и дробно-рациональные уравнения с параметрами. Автор дает то же определение параметра, что и в учебнике базового уровня 8 класса и рассматривает больше примеров различных видов уравнений с параметрами. Всего представлено 49 заданий на данную тематику. В дополнительных упражнениях у Макарычева впервые появляются уравнения с модулем с параметрами, задания, где необходимо найти два параметра.</p>
А.Г. Мордкович	<p>В учебнике <i>базового уровня</i> [31] рассматривается отдельный параграф «Уравнения и неравенства с параметром». В теоретической части автор предлагает к рассмотрению три примера, два из которых являются неравенствами с параметром. Определения параметра Мордкович не дает. Предложенные уравнения с параметрами однотипные, в них необходимо исследовать квадратное уравнение на наличие корней в зависимости от параметра (№ 15.3 - 15.7).</p> <p>В разделе «Система уравнений» также присутствуют системы с параметрами. В них нужно найти значение параметра, при которых система не имеет решений; имеет единственное решение; имеет два решения (№ 4.8, 4.9).</p> <p>Несмотря на то, что §7 главы 1 учебника <i>углубленного уровня</i> [32], [33] называется «Неравенства с параметрами»,</p>

Продолжение таблицы 1

	завершающие его четыре примера (№ 7.51 - 7.54) представляют собой задачи с параметрами для уравнений повышенной сложности, тем самым смещая фокус с неравенств.
А.Г.Мерзляк	<p>В учебнике базового уровня [19] в §11 «Квадратичная функция, её график и свойства» автор предлагает задачи на определение коэффициентов функции по заданным точкам (№ 364, 366). Много упражнений являются задачами с параметрами, применяемых к исследованию свойств квадратичной функции (№ 367 - 376).</p> <p>В учебнике повышенного уровня сложности [20] встречаются те же виды задач, что и в базовых. Но они становятся намного сложнее, потому что сами уравнения выглядят гораздо запутаннее и имеют больше частей, например, в № 6.18 - 6.23, 7.47, 7.48, 7.60, рассматриваются уравнения с модулем.</p>

Анализируя учебники разных авторов, приходим к следующему выводу. Задания с параметрами преимущественно представлены в учебниках профильного уровня. Учебник А. Г. Мерзляка отличается большим количеством разнообразных задач, позволяющих глубоко изучить данную тему, как на базовом, так и на углубленном уровне.

Что касается учебников остальных авторов, то там задачи с параметрами представлены в минимальном количестве, в основном включены в дополнительные разделы, предназначенные для углубленной подготовки или решения усложнённых упражнений.

Отдельно проанализируем школьные учебники 10 - 11 классов следующих авторов: А. Г. Мордковича и др., А. Г. Мерзляка и др, С. М. Никольского и др.

Таблица 2 – Сравнительный анализ учебников алгебры 10-11 классов
А.Г. Мордковича, А.Г. Мерзляка, С.М. Никольского

Автор учебника	Анализ учебника
10 класс	
А.Г.Мордкович	Учебник «Алгебра и начала математического анализа» [34], [35] совмещает базовый и углубленный уровень. Уравнения с параметрами встречаются крайне редко. При повторении курса алгебры основной школы приведено 4 упражнения, связанные с нахождением параметра при заданных условиях (№ 89 - 91). Также в §22 «Простейшие тригонометрические уравнения и неравенства» предлагается несколько заданий на нахождение параметра в тригонометрических уравнениях (№ 22.64 - 22.66).
А.Г. Мерзляк	<p>В учебнике <i>базового уровня</i> [21] уравнения с параметрами встречаются при изучении уравнений $\sin x = b$, $\cos x = b$. Задача состоит в нахождении параметра, при котором уравнение будет иметь решение (№ 26.11, 27.13). При изучении функций встречаются упражнения, где параметр показывает, как он влияет на их свойства, такие как область определения или наименьшее/наибольшее значение (№ 1.45, 1.46, 1.22, 1.23).</p> <p>В учебнике <i>углубленного изучения</i> [22] предлагается нахождение параметра не только в тригонометрических (№ 28.11 - 28.18), но еще и в иррациональных уравнениях (№ 14.18 - 14.21).</p>
С.М.Никольский	Учебник «Алгебра и начала математического анализа» [38]. Базовый и углублённый уровни» содержит очень мало заданий с параметром. Одним из них является № 11.7, который

Продолжение таблицы 2

	<p>является упражнением повышенного уровня сложности: «При каких значениях a имеет хотя бы одно решение уравнение: а) $\sin x = a$; б) $\cos x = a$; в) $\operatorname{tg} x = a$; г) $\operatorname{ctg} x = a$?»</p> <p>Раздел повторения в учебнике Никольского 10 класса содержит задачи с параметрами, применимые к квадратным уравнениям (№ 39 - 41, 44 - 47, 49 - 50) и системам уравнений (№ 63 - 68).</p>
11 класс	
А.Г.Мордкович	<p>В учебнике «Алгебра и начала математического анализа [36], [37]. Базовый и углублённый уровни» в 6 главе «Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств» выделяется отдельный параграф «Задачи с параметрами». Мордкович уже рассматривал данную тему в 8 классе для углубленного изучения, определение параметра даёт то же самое. Автор предлагает для решения 47 упражнений. Задания идут сложнее, рассматриваются различные виды уравнений с параметрами: квадратные, логарифмические, тригонометрические, иррациональные, биквадратные, дробно-рациональные, уравнения с модулем, системы уравнений, содержащие модуль.</p>
А.Г. Мерзляк	<p>В учебнике <i>базового уровня</i> задания с параметрами встречаются только лишь в разделе «Упражнения для повторения курса алгебры» [23]. Основное внимание уделяется решению квадратных уравнений (№ 172 - 180) и систем уравнений с параметрами (№ 186, 194, 195), которые были изучены ещё в восьмом классе.</p> <p>В учебнике <i>углубленного изучения</i> [24] представлено больше заданий с параметрами. Много заданий рассматриваются</p>

Продолжение таблицы 2

	<p>в темах «Показательные уравнения», «Логарифмические уравнения», в которых необходимо исследовать количество решений в зависимости от значения параметра (№ 6.42) и, наоборот, найти значение параметра, если уравнение имеет (не имеет) корни (№ 6.44, 2.24 - 2.26).</p>
С.М.Никольский	<p>В учебнике «Алгебра и начала математического анализа. Базовый и углублённый уровни» [39] во 2 главе «Уравнения. Неравенства. Системы» § 15 «Уравнения, неравенства и системы с параметрами» предназначены только для углубленного уровня. Никольский дает следующее определение параметра «Так, например, задача решить (относительно x) квадратное уравнение общего вида $ax^2 + bx + c = 0$ является примером задачи с тремя параметрами a, b и c. В этом случае говорят, что надо решить уравнение с параметрами a, b и c». В теоретической части он рассматривает 5 примеров с подробным решением.</p> <p>В основном задания имеют следующую формулировку: «Для каждого значения параметра a решите уравнение (систему уравнений, неравенство)». Отдельное внимание можно уделить пункту 15.4 «Задачи с условиями», посвященный поиску всех значений параметра, при которых выполняется заданное условие (№ 15.30 - 15.45). Рассматриваются разные виды уравнений: дробно-рациональные, с модулем, иррациональные, показательные, логарифмические, тригонометрические.</p>

Таким образом, наиболее полное и детализированное рассмотрение вопросов, связанных с параметрами, характерно для учебника А. Г. Мордковича, где предусмотрена отдельная глава и большое количество разнотипных задач. Учебник А. Г. Мерзляка тоже предоставляет интересные задачи, но они

распределены менее равномерно по курсу. Учебник С. М. Никольского, несмотря на меньший объем заданий, демонстрирует глубокое погружение в технику решения задач с параметрами, делая особый акцент на выявление всех возможных значений параметра.

1.5 Типичные ошибки при решении заданий с параметрами

Задания с параметрами являются одними из самых сложных на государственной итоговой аттестации (ОГЭ и ЕГЭ) и традиционно относятся к заданиям высокого уровня сложности из части 2 экзамена. Их успешное решение требует не только уверенного владения школьным курсом математики, но и развитой логики, аккуратности и умения проводить полное исследование. Анализ результатов экзаменов, выполненный на основе изучения экспертных отчетов ФИПИ, научно-методических статей ведущих педагогов-практиков, позволяет выделить ряд типичных ошибок, которые совершают учащиеся.

В ОГЭ по математике задания с параметрами представлены во второй части экзамена. Это задание высокого уровня сложности с развернутым ответом, максимальный балл за которое составляет 2 балла.

Задания с параметрами в ОГЭ обычно требуют построения графика функции или исследования взаимного расположения графиков (например, прямой и параболы, прямой и гиперболы) для определения условий, при которых графики имеют заданное количество общих точек.

Рассмотрим пример задания ОГЭ:

1) Постройте график функции $y = x|x| - 3x$ и определите, при каких значениях параметра a прямая $y = ax$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

2) Найдите все значения a , при которых прямая $y = ax - 2$ пересекает параболу $y = x^2$ в одной точке.

Проанализировав различные статистико-аналитические отчеты результатов ОГЭ по математике, можно сказать, что точная средняя статистика

выполнения варьируется по годам и регионам, но в целом процент выполнения этого задания учащимися низок (в среднем 4-5 %). Это свидетельствует о том, что для большинства выпускников 9-х классов такие задачи представляют значительную сложность.

Самая распространенная ошибка – неверное построение графика функции, особенно при наличии модулей или кусочно-заданных функций.

Учащиеся часто не рассматривают все возможные случаи изменения параметра или игнорируют область определения функции.

Ученики часто совершают неточности в расчетах при нахождении координат ключевых точек (например, вершины параболы или точек пересечения).

Также ученики часто невнимательно читают условия, например, неверное определение требуемого количества точек пересечения.

Низкий процент выполнения заданий с параметрами в ОГЭ связан с недостаточным вниманием к соответствующему материалу в основной школе. Для успешного решения этих задач требуется систематическое формирование умений работы с функциями и их графиками, начиная с 8-9 классов. Многие учителя из-за нехватки времени фокусируются лишь на традиционных видах заданий, что не позволяет создать необходимую базу для решения нешаблонных задач.

Задание 18 в профильном ЕГЭ по математике – это уравнение с параметром, которое относится к заданиям высокого уровня сложности с развернутым ответом. Максимальный первичный балл за его верное выполнение составляет 4 балла.

Пример задания 18.

1) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение $\sqrt{3x + a - x^2} = 4a^2x - x^3$ имеет единственный корень.

2) Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $a - \frac{2x}{y} = y - x + 5$ имеет единственное решение.

В статье И. В. Яценко «Аналитический отчет о результатах ЕГЭ 2025 года по математике», сказано, что статистика выполнения этого задания довольно низкая – лишь 5 % участников экзамена смогли верно его выполнить.

Эти данные подчеркивают наличие серьезной методической проблемы в системе подготовки. Для успешного решения таких задач требуется последовательная и систематическая работа, начинающаяся уже в основной школе.

Недостаточная проработка этих тем на ранних этапах обучения не позволяет создать необходимую прочную базу для дальнейшего успешного изучения соответствующего материала в старшей школе, что и приводит к низким результатам на экзамене. Одной из главных причин этого является перегруженность школьной программы и ограниченное количество учебных часов. Помимо этого, некоторые педагоги ориентированы на «натаскивание» по конкретным типам задач из актуальных демоверсий, вместо формирования фундаментального мышления.

Для более удобного понимания заданий с параметрами в рамках ОГЭ и ЕГЭ представлю сравнительную таблицу.

Таблица 3 – Сравнительная характеристика заданий с параметрами в ОГЭ и ЕГЭ

Критерий сравнения	ОГЭ	ЕГЭ, профильный уровень
Уровень сложности	Высокий	Очень высокий
Максимальный балл	2 первичных балла	4 первичных балла
Основной метод решения	Графический. Требуется умения строить и читать графики функций (линейных, квадратичных,	Аналитический и графический. Требуется глубокого владения обоими методами, часто в комбинации.

Продолжение таблицы 3

	с модулем, кусочно-заданных).	
Типология задач	<p>Определить количество общих точек графиков.</p> <p>Функции относительно простые.</p>	<p>Исследование сложных уравнений, систем, неравенств, задач с модулями, тригонометрических и логарифмических функций.</p>
Требования к оформлению	<p>Требуется развернутое решение с построением графика и описанием логики.</p>	<p>Требуется полное, строгое математическое исследование с разбором всех случаев, областью определения и доказательством.</p>

Таким образом после анализа выполнения заданий с параметрами можно выделить следующие типичные ошибки, которые можно разделить на несколько основных категорий:

1. Алгебраические и вычислительные ошибки – это наиболее распространенный тип ошибок, связанный с невнимательностью.

Например, неправильное раскрытие скобок, ошибки в знаках при переносе слагаемых, неверное применение формул сокращенного умножения.

Даже незначительная вычислительная ошибка на начальном этапе исследования приводит к неверному ответу и потере баллов за все задание.

2. Ошибки в применении методов решения. Задания с параметрами часто можно решать различными способами. Учащиеся могут допускать ошибки при выборе или применении конкретного метода.

Например, при использовании графического метода – неверное построение графика функции, неверное определение количества точек пересечения; при аналитическом методе – потеря корней при делении на выражение, содержащее параметр (без учета случая, когда это выражение равно нулю).

3. Логические ошибки и ошибки исследования. Задания с параметрами требуют полного исследования всех возможных случаев изменения параметра.

Примеры: неполный разбор случаев (например, не рассмотрен случай, когда дискриминант равен нулю или отрицателен), неверный переход от условий задачи к системе уравнений или неравенств, игнорирование области определения функции или уравнения.

Эти ошибки свидетельствуют о непонимании сути задания с параметром, которое требует ответа для любого возможного значения параметра.

4. Ошибки в записи ответа. Даже при правильном решении учащиеся могут неверно записать ответ в требуемом формате. Например, ответ не включает отдельные изолированные значения параметра, которые были найдены в процессе решения.

Также стоит выделить, что помимо содержательных ошибок, существуют и психолого-педагогические факторы, влияющие на результаты сдачи экзамена. У учеников экзаменационная обстановка способствует невнимательности и поспешности при выполнении сложных вычислений и рассуждений.

Таким образом, анализ типичных ошибок показывает, что успешное решение заданий с параметрами требует комплексной подготовки, включающей уверенное владение базовой математикой, знание различных методов решения и способность проводить полное, логически выверенное исследование.

ГЛАВА 2 МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕМЫ «РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ»

2.1 Общая характеристика рабочих листов

Общая характеристика разработанных рабочих листов определяется их направленностью на систематизацию знаний и формирование навыков решения уравнений с параметрами. Они составлены по темам: «Линейные уравнения с параметрами», «Квадратные уравнение с параметрами», «Дробно-рациональные уравнения с параметрами» и «Расположение корней квадратного трехчлена» и имеют разные уровни сложности. Для маркировки уровня сложности используются цвета: базовый уровень – зеленый цвет; повышенный уровень – синий цвет; высокий уровень – красный цвет. Рабочие листы размещены в приложении 1 – 8.

Наполнение рабочих листов включает в себя несколько функциональных зон. В начале каждого листа представлена небольшая теоретическая справка, содержащая необходимые определения, алгоритмы решения и их ключевые моменты. Это позволяет актуализировать опорные знания перед выполнением практических заданий. После теории представлено несколько упражнений на определение ключевых значений параметра, позволяющих понять структуру уравнения и увидеть, как параметр влияет на число решений. Далее следует блок упражнений на закрепление, ориентированный на отработку отдельных шагов решения, например, нахождение области допустимых значений или исследование знака дискриминанта в зависимости от параметра.

В каждом рабочем листе предлагаются задания, в решении которых нужно найти ошибку. Учащимся предлагаются «задания-ловушки», в которых намерено допущены типичные ошибки, например, потеря решения при делении на выражение, содержащее параметр, или игнорирование условия превращения уравнения в линейное при нулевом коэффициенте перед старшим членом.

Специально были включены верное решение некоторых уравнений с параметрами. Анализ таких ситуаций развивает критическое мышление и математическую зоркость. Заключительный этап работы с каждым листом включают себя зону рефлексии и самопроверки.

Основная часть рабочих листов сформирована по принципу «от простого к сложному». На начальном этапе предлагаются задачи репродуктивного уровня, где требуется применить стандартный алгоритм при заданных условиях. Постепенно сложность задач возрастает, вводятся дополнительные условия. Такая структура способствует созданию ситуации успеха и обеспечивает плавный переход к решению сложных комбинированных задач.

Таким образом, представленный комплекс рабочих листов формирует у школьников целостное представление о параметре не как о «страшном» символе, а как о переменном коэффициенте, определяющем характер всей математической модели. Это закладывает прочный фундамент для изучения более сложных тем в старшей школе, таких как тригонометрические или логарифмические уравнения с параметрами.

2.2 Общие методические рекомендации по организации работы с листами

Рабочие листы могут использоваться как на уроках математики, так и на факультативных занятиях, а также в процессе самостоятельного изучения материала. На уроке они выступают как средство организации учебной деятельности и позволяют эффективно сочетать объяснение учителя с самостоятельной работой учащихся. При этом рабочий лист помогает структурировать материал, сделать его более наглядным и обеспечить поэтапное усложнение заданий.

На факультативных занятиях рабочие листы удобны для углубленного изучения темы, решения заданий повышенной сложности. Здесь они могут использоваться для подготовки к олимпиадам и экзаменам. В условиях

факультатива рабочий лист способствует более свободному темпу работы и позволяет каждому ученику двигаться в соответствии со своим уровнем подготовки.

Кроме того, данные листы могут применяться для дифференцированной работы, поскольку содержание заданий можно распределять по уровням сложности. Это даёт возможность учитывать индивидуальные особенности учащихся: наиболее подготовленным предлагать задания поискового характера, а ученикам, испытывающим затруднения – упражнения базового уровня, направленные на закрепление основных понятий и алгоритма решения. Такая организация способствует повышению познавательной активности и созданию ситуации успеха для каждого ученика.

Рабочие листы удобны и для самостоятельного изучения темы, так как содержат краткую теоретическую справку, образец решения и задания, выстроенные в логической последовательности. Это позволяет учащемуся работать с материалом без постоянной помощи учителя, самостоятельно осваивать новый способ решения и проверять уровень понимания темы. Листы содержат ответы ко всем заданиям, помогающие самостоятельно контролировать правильность решения.

Таким образом, рабочие листы являются универсальным дидактическим средством, которое может быть эффективно использовано в различных формах учебной деятельности.

В процессе работы с такими листами важно соблюдать последовательность действий, чтобы они действительно выполняли обучающую функцию, а не превращались в обычный набор упражнений. Сначала учитель определяет, на каком этапе урока будет использован лист и какую именно дидактическую задачу он решает. Если цель – первичное усвоение нового материала, то задания должны быть направлены на наблюдение, сравнение и самостоятельное формулирование вывода. Если же лист используется для закрепления, то в нём должны преобладать упражнения на применение уже изученного материала.

Затем учитель объясняет учащимся порядок работы. Обычно он кратко комментирует структуру листа, обращает внимание на наиболее важные задания и напоминает теоретические сведения и при необходимости показывает пример решения и оформления уравнения. После этого школьники приступают к выполнению заданий самостоятельно, с выходом одного ученика к доске. Можно организовать работу в парах, что будет способствовать развитию навыков сотрудничества, обсуждения решения и аргументации своей точки зрения.

Во время работы учитель не должен сразу давать готовый ответ. Его задача – направлять мышление учащихся с помощью наводящих вопросов, указывать на ошибки в логике рассуждений. Если учащийся затрудняется, полезно предложить ему вернуться к предыдущему заданию или образцу решения или попросить помощи у класса. Такой подход способствует развитию самостоятельности и более глубокому пониманию темы.

После выполнения заданий обязательно проводится проверка. Она может быть организована в форме фронтального обсуждения, взаимопроверки в парах или краткого устного опроса. На этом этапе важно не только назвать правильный ответ, но и разобрать способ решения, чтобы учащиеся видели, какие действия были ключевыми. При необходимости учитель обращает внимание на типичные ошибки.

Завершающим этапом работы становится рефлексия. Ученики могут отметить, какие задания оказались для них наиболее понятными, а какие вызвали трудности, и оценить, насколько они усвоили материал. Это помогает учителю понять, что требует дополнительного объяснения, а учащимся – осознать собственный уровень подготовки. В конце каждого рабочего листа учитель также может оставить свой комментарий по работе ученика и поставить соответствующую отметку.

Таким образом, методика работы с рабочими листами строится на сочетании поэтапного выполнения заданий, активной самостоятельной деятельности учащихся, постепенного усложнения материала и обязательного

обсуждения результатов. Благодаря этому рабочие листы становятся эффективным средством формирования математических знаний, умений и навыков.

2.3 Методические рекомендации к рабочим листам по темам

«Линейные уравнения с параметрами»

Рабочие листы по теме «Линейные уравнения с параметрами» разделены на три уровня сложности. Впервые знакомство с параметрами для учащихся обычно происходит в 7 классе, поэтому для этого этапа рекомендуется использовать базовый уровень. Рабочие листы повышенного уровня ориентированы на учеников 8 класса, а высокого уровня – 9 класса. Если же, ученики впервые сталкиваются с параметрами позже, после 7 класса, то целесообразно начать изучение с базового уровня.

Наполнение листов примерно одинаковое, но отличается сложностью самих заданий. Каждый рабочий лист содержит небольшую теоретическую справку, определение понятия «параметр», задания на нахождения ключевых значений параметра, упражнения на определение количества решений и набор уравнений, возрастающих по сложности.

К каждому листу прилагаются:

- рефлексивный бланк, в котором ученики могут записать впечатления от урока и получить задания для самостоятельного решения;
- бланки с заданиями «Найди ошибку!». После решения всех уравнений рекомендуется дать учащимся готовые решения с типичными ошибками, например деление на выражение, содержащее параметр, без предварительного исследования на равенство нулю. Это развивает математическую зоркость и предупреждает собственные промахи;
- ответы к заданиям для учителя.

«Квадратные уравнения с параметрами»

Рабочие листы по теме «Квадратные уравнения с параметрами» разбиты на два уровня сложности: базовый и повышенный. Базовый комплект рассчитан на первоначальное знакомство с этим типом уравнения и выстроен как последовательный цикл упражнений с постепенно растущей сложностью.

Листы содержат теоретические справки об алгоритме решения квадратных уравнений и теореме Виета. Важно акцентировать внимание на том, что уравнение является квадратным только при условии, что коэффициент при старшей степени не равен нулю. Этот нюанс часто становится ключевым при решении задач с параметром.

В базовом уровне обучающимся сначала предлагаются простые задания: определение вида уравнения, поиск количества корней в зависимости от значения параметра. Большая часть задач направлена на отработку типа «решить уравнение для всех значений параметра», лишь немногие – на применение теоремы Виета.

Повышенный уровень содержит несколько упражнений на повторение материала предыдущего уровня, после чего идут уравнения с дополнительными условиями, требующие анализа и внимательности.

Раздел типичных ошибок направлен на развития самоконтроля. Здесь разбираются ситуации, когда учащиеся забывают рассмотреть случай превращения квадратного уравнения в линейное или неверно интерпретируют условия задачи. Анализ чужих ошибок позволяет минимизировать риск их повторения в собственном решении.

«Дробно-рациональные уравнения с параметрами»

Рабочие листы по теме «Дробно-рациональные уравнения с параметрами» разделены на два уровня сложности: базовый и повышенный. Базовый уровень целесообразно давать при первом знакомстве данным типом уравнений. Основной целью работы с представленным материалом является интеграция техники решения линейных и квадратных уравнений с параметром с

необходимостью постоянного учета области допустимых значений, которая в параметрических задачах приобретает динамический характер.

Базовый уровень направлен на узнавание структуры дробно-рациональных уравнений с параметром и отработку базового алгоритма. Обучающиеся должны четко разделять процесс на три этапа: приравнивание числителя к нулю, ограничений для знаменателя и их последующая проверка полученных решений. Особое внимание следует уделить заданиям на определение смысла выражения. Это критически важный этап, подготавливающий к пониманию того, что корень числителя может быть посторонним для уравнения из-за его совпадения с корнями знаменателя.

Повышенный уровень предполагает переход от узнавания структуры к самостоятельному анализу. На этом этапе учащиеся работают с уравнениями, в которых знаменатель содержит не только линейные, но и квадратные выражения. Основной акцент делается на исследование зависимости количества корней от параметра: требуется не просто решить уравнение, а установить, при каких значениях параметра уравнение имеет ровно одно решение либо не имеет решений.

«Расположение корней квадратного трехчлена»

Рабочие листы по данной теме рассчитаны на учеников 9 класса. Тема «Расположение корней квадратного трехчлена относительно заданных точек» является фундаментом для решения задач с параметрами. Несмотря на то, что в 9 классе основное внимание уделяется теореме Виета и дискриминанту, обращаться к данной теме важно, так как она подготавливает к решению задач повышенной сложности, а также к работе со сложными комбинированными уравнениями (логарифмическими, тригонометрическими, показательными), где вводится замена переменной и требуется анализ корней на ограниченном промежутке.

Рабочие листы включают краткое повторение ключевых фактов, теоретическую справку, пример подробного решения и набор упражнений на

распознавания случаев и закрепление.

Для наиболее подготовленных учеников включены задания (№11-13), где необходимо ввести замену переменной.

К листу также прилагаются рефлексивный бланк и ответы к заданиям.

Для интеграции в учебный план целесообразно планировать рабочие листы по темам «Линейные уравнения с параметрами» и «Квадратные уравнения с параметрами» на 2-3 урока, а «Дробно-рациональные уравнения с параметрами» и «Расположение корней квадратного трехчлена» на 3-4 урока в зависимости от способностей обучаемых, с последующим домашним заданием из рефлексивного бланка. Набор заданий избыточен, чтобы учитель мог варьировать нагрузку в зависимости от уровня подготовки класса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной выпускной квалификационной работе были рассмотрены теоретические и методические основы обучения учащихся решению рациональных уравнений с параметром. Анализ научно-педагогической литературы показал, что данная тема является одной из наиболее сложных в курсе математики. Она требует от учащихся не только владения алгоритмами, но и высокого уровня логического мышления. В ходе работы был проведен анализ содержания темы, выявлены ключевые трудности, с которыми сталкиваются школьники при работе с рациональными уравнениями с параметрами.

Основным результатом практического этапа работы стала разработка системы разноуровневых рабочих листов, которые позволяют реализовать дифференцированный подход в обучении. Созданные дидактические материалы структурированы таким образом, чтобы обеспечить постепенный переход от базовых навыков преобразования выражений к анализу условий существования решений. Методические рекомендации по использованию данных листов способствуют индивидуализации образовательного процесса и более качественной подготовке к итоговой аттестации. Таким образом, поставленная цель достигнута, а задачи исследования выполнены в полном объеме.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

Нормативно-правовые акты:

1. Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования : приказ Минпросвещения России № 254, утв. приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 31 мая 2021 г., зарегистрировано в Минюсте России № 63795. М., 2021. URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/Приказ-№-287-от-31.05.2021-ФГОС_ООО.pdf. Заглавие с экрана (дата обращения: 18.05.2026)
2. Федеральный государственный образовательный стандарт среднего общего образования : приказ Минпросвещения России № 413, утв. приказом Министерства просвещения Российской Федерации от 17 мая 2012 г., зарегистрировано в Минюсте России № 24480. М., 2012. URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/Приказ-№-413-от-17.05.2012-ФГОС_СОО.pdf. Заглавие с экрана (дата обращения: 18.05.2026)
3. Федеральный перечень учебников. URL: <https://fpu.edu.ru/>. Заглавие с экрана. (дата обращения: 18.05.2026)
4. Федеральная рабочая программа по учебному предмету «Математика». 5-9 классы (базовый уровень). М., 2023. URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/13_ФРП_Математика_5-9-классы_база.pdf. Заглавие с экрана (дата обращения: 18.12.2025)
5. Федеральная рабочая программа по учебному предмету «Математика». 7-9 классы (углублённый уровень). М., 2025. URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2025/07/2025_ooo_frp_matematika-5-9_ugl.pdf. Заглавие с экрана (дата обращения: 18.05.2026)
6. Федеральная рабочая программа по учебному предмету «Математика». 10-11 классы (базовый уровень). М., 2023. URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/19_ФРП-Математика-10-11-классы_база.pdf. Заглавие с экрана (дата обращения: 18.05.2026)

7. Федеральная рабочая программа по учебному предмету «Математика». 10-11 классы (углублённый уровень). М., 2023. URL: https://edsoo.ru/wp-content/uploads/2023/08/20_ФРП_Математика-10-11-классы_угл.pdf. Заглавие с экрана (дата обращения: 18.05.2026)

Учебная литература и периодические издания:

8. Галеев Э. М. Подготовка к вступительным экзаменам по математике в МГУ и ЕГЭ (типы задач и методы их решений). Часть 5 : учеб.-метод. пособие. 14-е изд., перераб. и доп. М. : Изд-во Попечительский совет механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова, 2018. 72 с.

9. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 7 класс: базовый уровень : учебник / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. М. : Просвещение, 2024. 255 с.

10. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 7 класс: углублённый уровень : учебник / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; М. : Просвещение, 2018. 305 с.

11. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 8 класс: базовый уровень : учебник / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. М. : Просвещение, 2024. 319 с.

12. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 8 класс: углублённый уровень : учебник / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; М. : Просвещение, 2018. 353 с.

13. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 9 класс: базовый уровень : учебник / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. М. : Просвещение, 2023. 257 с.

14. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 9 класс: углублённый уровень : учебник / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; М. : Просвещение, 2018. 401 с.

15. Мерзляк А. Г. Алгебра. 7 класс (базовый уровень) : учебник для общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 275 с.

16. Мерзляк А. Г. Алгебра. 7 класс (углублённый уровень) : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк [и др.] ; М. : Вентана-Граф, 2019. 285 с.

17. Мерзляк А. Г. Алгебра. 8 класс (базовый уровень) : учебник для общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 259 с.

18. Мерзляк А. Г. Алгебра. 8 класс (углублённый уровень) : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк [и др.] ; М. : Вентана-Граф, 2019. 384 с.

19. Мерзляк А. Г. Алгебра. 9 класс: базовый уровень : учебник для общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 321 с.

20. Мерзляк А. Г. Алгебра. 9 класс: углублённый уровень : учебник для учащихся общеобразовательных организаций / А. Г. Мерзляк [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 392 с.

21. Мерзляк А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: базовый уровень : учебное пособие / А. Г. Мерзляк [и др.] ; М. : Вентана-Граф, 2018. 366 с.

22. Мерзляк А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс: углублённый уровень : учебное пособие / А. Г. Мерзляк [и др.] ; М. : Вентана-Граф, 2018. 478 с.

23. Мерзляк А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: базовый уровень : учебное пособие / А. Г. Мерзляк [и др.] ; М. : Вентана-Граф, 2019. 281 с.

24. Мерзляк А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: углублённый уровень : учебное пособие / А. Г. Мерзляк [и др.] ; М. : Вентана-Граф, 2019. 415 с.

25. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 класс : учебник для общеобразовательных организаций (базовый уровень) / А. Г. Мордкович [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 369 с.

26. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 класс : учебник для общеобразовательных организаций (углублённый уровень). В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович [и др.] ; М. : Мнемозина, 2019. 232 с.

27. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 класс : задачник для общеобразовательных организаций (углублённый уровень). В 2 ч. Ч. 2 / А. Г. Мордкович [и др.] ; М. : Мнемозина, 2019. 231 с.

28. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс : учебник для общеобразовательных организаций (базовый уровень) / А. Г. Мордкович [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 385 с.

29. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс : учебник для общеобразовательных организаций (углублённый уровень). В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович [и др.] ; М. : Мнемозина, 2019. 288 с.

30. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс : задачник для общеобразовательных организаций (углублённый уровень). В 2 ч. Ч. 2 / А. Г. Мордкович [и др.] ; М. : Мнемозина, 2019. 351 с.

31. Мордкович А. Г. Алгебра. 9 класс : учебник для общеобразовательных организаций / А. Г. Мордкович [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 369 с.

32. Мордкович А. Г. Алгебра. 9 класс : учебник для общеобразовательных организаций (углублённый уровень). В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович [и др.] ; М. : Мнемозина, 2019. 288 с.

33. Мордкович А. Г. Алгебра. 9 класс : задачник для общеобразовательных организаций (углублённый уровень). В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович [и др.] ; М. : Мнемозина, 2019. 287 с.

34. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни). В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович [и др.] ; М. : Мнемозина, 2019. 457 с.

35. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : задачник для общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни). В 2 ч. Ч. 2 / А. Г. Мордкович [и др.] ; М. : Мнемозина, 2020. 457 с.
36. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : учебник для общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни). В 2 ч. Ч. 1 / А. Г. Мордкович [и др.] ; М. : Мнемозина, 2014. 313 с.
37. Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : задачник для общеобразовательных организаций (базовый и углублённый уровни). В 2 ч. Ч. 2 / А. Г. Мордкович [и др.] ; М. : Мнемозина, 2014. 264 с.
38. Никольский С. М. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс : базовый и углублённый уровни : учебник / С. М. Никольский [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 431 с.
39. Никольский С. М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс : базовый и углублённый уровни : учебник / С. М. Никольский [и др.] ; М. : Просвещение, 2022. 464 с.
40. Радченко С. А. Параметрические задачи. Раздел «Уравнения с параметрами» : метод. материалы. Славянск-на-Кубани : Филиал Кубанского гос. ун-та в г. Славянске-на-Кубани, 2018. 28 с.
41. Унт И. Э. Индивидуализация и дифференциация обучения : учеб. пособие. М. : Педагогика, 1990. 192 с.
42. Шахмейстер А. Х. Задачи с параметрами на экзаменах : учеб.-метод. пособие. 3-е изд., испр. М. : Изд-во МЦНМО : СПб «Петроглиф» : «Виктория плюс», 2009. 248 с.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Теоретическая справка

$$q(a) \cdot x + p(a) = 0 \quad (1)$$

(1) - общий вид линейного уравнения с параметром a , где $q(a)$, $p(a)$ — коэффициенты, зависящие от a .

Некоторые случаи решения:

- 1) Если $q(a) \neq 0$, то (1) имеет единственное решение $x = -p(a)/q(a)$;
- 2) Если $q(a) = 0$ и $p(a) = 0$, то (1) имеет бесконечно много решений, x — любое
- 3) Если $q(a) = 0$ и $p(a) \neq 0$, то (1) не имеет решений

Ключевое значение параметра — это числовое значение, при котором происходит качественное изменение свойств уравнения

3. Для каждого уравнения найдите ключевое значение параметра a :

1) $ax = 5$

2) $(a-3)x = 10$

3) $(2a+4)x = a$

4) $(5-a)x = a+2$



1. Что такое параметр в уравнении? Выбери один правильный ответ.

- 1) Переменная, которую нужно найти;
- 2) Фиксированное число, которое меняет множество решений уравнений;
- 3) Значение переменной, которое превращает уравнение в верное равенство.

2. Выберите все уравнения, в которых коэффициент перед x содержит параметр. Подчеркните верные варианты

- 1) $(k+1)x = 5$
- 2) $x + k = 3$
- 3) $kx + 2 = 0$
- 4) $(x) / k = 4$

ПРИМЕР

При каждом значении a решите уравнение:

$$(a+3)(a-7)x = a+3$$

- 1) При $a = -3$ уравнение примет вид $0 \cdot x = 0 \Rightarrow$ уравнение имеет бесконечно много решений;
- 2) При $a = 7$ уравнение примет вид $0 \cdot x = 10 \Rightarrow$ уравнение не имеет решений;
- 3) При $a \neq -3$ и $a \neq 7$ $x = \frac{1}{a-7}$

Ответ: Если $a = -3$, то уравнение имеет бесконечно много решений;
Если $a = 7$, то решений нет;
Если $a \neq -3$, $a \neq 7$, то $x = \frac{1}{a-7}$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

4. Определите, сколько решений имеет уравнение $k(k+1)x = 2k$ при:

$k = 0$

$k = -1$

$k \neq 0$
 $k \neq -1$

5. Для каждого значения параметра решите уравнение:

1) $(a-2)x = 3$;

2) $(k+4)x = 2k+1$;

3) $2ax - 3a = 4x + 1$;

4) $\left(\frac{3}{4}a - 1\right)x = 3a - 4$.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

6. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

1) $ax = a^2$;

3) $a^2x - 5a = 9x - 15$;

2) $a^2x - a = 4x - 2$;

4) $(a^2 + 1) \cdot x = a^3 + 1$.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Задания для самостоятельного решения

1. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

a) $ax = 1$;

b) $3x = 1 - ax$;

c) $(2a - 4) \cdot x = 3a + 1$;

d) $(k + 1)x = 2k$.

2. При всех значениях a и b решить уравнение
 $ax = b$.

Оцени свою работу:



Комментарий учителя:

ОТВЕТЫ

1. 2
2. 1, 3
3. 1) 0; 2) 3; 3) -2; 4) 5
4. при $k = 0$ уравнение имеет бесконечно много решений;
при $k = -1$ уравнение не имеет решений;
при $k \neq 0$ и $k \neq -1$ уравнение имеет единственное решение.
5. 1) $\begin{cases} a \neq 2, \\ x = \frac{3}{a-2}; \end{cases} \begin{cases} a = 2, \\ x \in \emptyset. \end{cases}$
- 2) при $k = -4$ - решений нет;
при $k \neq -4$, $x = \frac{2k+1}{k+4}$.
- 3) при $a = 2$ - нет решений;
при $a \neq 2$, $x = \frac{3a+1}{2a-4}$.
- 4) при $a = \frac{4}{3}$ - бесконечно много решений;
при $a \neq \frac{4}{3}$, $x = \frac{3a-4}{\frac{4}{3}a-1}$.
6. 1) при $a = 0$ - бесконечно много решений;
при $a \neq 0$, $x = a$.
- 2) при $a = -2$ - нет решений;
при $a = 2$ - бесконечно много решений;
при $a \neq 2$ и $a \neq -2$, $x = \frac{1}{a+2}$.
- 3) при $a = -3$ - нет решений;
при $a = 3$ - бесконечно много решений;
при $a \neq 3$ и $a \neq -3$, $x = \frac{5}{a+3}$.
- 4) при $a = 1$ - нет решений;
при $a = -1$ - бесконечно много решений;
при $a \neq 1$ и $a \neq -1$, $x = \frac{a^2-a+1}{a-1}$.

ОТВЕТЫ ЗАДАНИЙ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. а) при $a = 0$ решений нет;
при $a \neq 0$, $x = \frac{1}{a}$.
- б) при $a = -3$ решений нет;
при $a \neq -3$, $x = \frac{1}{a+3}$.
- с) при $a = 2$ уравнение решений не имеет;
при $a \neq 2$, $x = \frac{3a+1}{2a-4}$.
- д) при $k = -1$ уравнение решений не имеет;
при $k \neq -1$, $x = \frac{2k}{k+1}$.
2. при $a = 0$, $b = 0$ уравнение имеет множество решений;
при $a = 0$, $b \neq 0$ решений нет;
при $a \neq 0$, b - любое, уравнение имеет одно решение $x = \frac{b}{a}$.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

НАЙДИ ОШИБКУ!

Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.



№ 1) Для всех значений параметра k решите уравнение: $(k+2)(x-1) = (k+2)$

$$(k+2)(x-1) = (k+2) \mid : (k+2)$$

$$x-1 = 1$$

$$x = 2 \text{ для всех } k$$

Ответ: $x = 2$ для всех k

№ 2) Для всех значений параметра a решите уравнение: $(a^2-4)x = 2a-4$

$$(a^2-4)x = 2a-4$$

1. Если $a^2-4 = 0 \Rightarrow a = 2$, то уравнение примет вид:

$$0 \cdot x = 0 - x - \text{любое};$$

2. Если $a^2-4 \neq 0$, то $x = \frac{2a-4}{a^2-4} = \frac{2}{a-2}$.

Ответ: при $a = 2$, x – любое;

$$\text{при } a \neq 2, x = \frac{2}{a-2}.$$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

НАЙДИ ОШИБКУ!

Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.



№ 3) Для всех значений параметра k решите уравнение: $\frac{kx}{k} = 2$

$$\frac{kx}{k} = 2$$

$$x = 2 \text{ для всех } k$$

Ответ: $x = 2$ для всех k

№ 4) Для всех значений параметра k решите уравнение: $(k+1)x - (2k-3) = 0$

$$(k+1)x - (2k-3) = 0$$

$$(k+1)x = -2k+3$$

1. Если $k+1 = 0 \Rightarrow k = -1$, то $0 \cdot x = 5 \Rightarrow$ нет решений;

2. Если $k+1 \neq 0$, то $x = \frac{-2k+3}{k+1}$.

Ответ: при $k = -1$ нет решений;

$$\text{при } k \neq -1, x = \frac{-2k+3}{k+1}.$$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ
С ПАРАМЕТРАМИ

НАЙДИ ОШИБКУ!

Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.



№ 5) Для всех значений параметра a решите уравнение: $a(2 - a)x = -4a + 8$.

$$a(2 - a)x = -4a + 8$$

1. При $a = 0$, то $0 \cdot x = 8 \Rightarrow$ нет решений

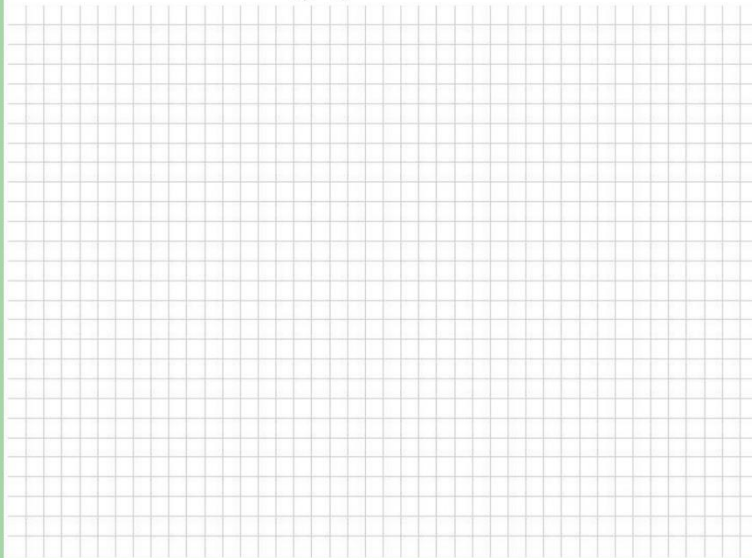
2. При $a = 2$, то $0 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$

3. При $a \neq 0, a \neq 2, x = \frac{-4a + 8}{a(2 - a)}$

Ответ: при $a = 0$ нет решений

при $a = 2, x = 0$

при $a \neq 0, a \neq 2, x = \frac{-4a + 8}{a(2 - a)}$.



ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Теоретическая справка

$$q(a) \cdot x + p(a) = 0 \quad (1)$$

(1) - общий вид линейного уравнения с параметром a ,
где $q(a)$, $p(a)$ — коэффициенты, зависящие от a .

Некоторые случаи решения:

- 1) Если $q(a) \neq 0$, то (1) имеет единственное решение $x = -p(a)/q(a)$;
- 2) Если $q(a) = 0$ и $p(a) = 0$, то (1) имеет бесконечно много решений, x — любое
- 3) Если $q(a) = 0$ и $p(a) \neq 0$, то (1) не имеет решений



Ключевое значение параметра — это числовое значение, при котором происходит качественное изменение свойств уравнения

1. Что такое параметр в уравнении? Вставьте пропуски

Параметр — это

_____ ,
которое меняет множество
решений уравнения.

2. Для каждого уравнения найдите ключевое значение параметра:

a) $a(a-2)x = 5$;

b) $ax - 2x = 5$;

c) $3x + ax = a - 1$;

d) $a^2x - x = a$

e) $2x - 7 = ax + 3$;

f) $m(x-1) = 2x + 5$.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

3. Найти значение параметра k , при котором уравнение:
 $(7+k)(3k-9)x = k-3$

имеет бесконечно
много решений

не имеет решений

имеет единственное
решение

4. Для каждого значения параметра a решите уравнение:

a) $(2a-4) \cdot x = 3a+1$;

b) $a^2(x-2) = x+a-3$;

c) $(a^2-4)x = a^2-5a+6$.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

5. Решите задачу

На перемене Вася и Коля обращаются к отличнице Оле. Коля говорит: «Оля, нам надо было при всех a решить три уравнения с параметрами. Первые два уравнения решил Вася и получил такие ответы. В первом:

при $a \leq -2$ уравнение имеет одно решение $x = 5 - a$;
при $-2 < a \leq 4$ решений нет;
при $a \geq 8$ уравнение имеет два решения $x_1 = 5 - a$ и $x_2 = 5 + a$.

Во втором уравнении он получил ответ:

при $a \in (-\infty; -7)$ решений нет;
при $a \in [-7; 8]$ уравнение имеет одно решение $x = \frac{2a+6+\sqrt{a+7}}{2}$;
при $a \in [1; +\infty)$ уравнение имеет одно решение $x = \frac{2a+6-\sqrt{a+7}}{2}$.

Третью задачу решал я и получил такой ответ:

при $a < 4$ решений нет;
при $a = 4$ уравнение имеет одно решение $x = 1$;
при $4 \leq a \leq 8$ уравнение имеет одно решение $x = \frac{2a-6+\sqrt{a-4}}{2}$;
при $a \geq 8$ решения $x_1 = \frac{4a-2-\sqrt{2a-16}}{5}$ и $x_2 = \frac{4a-2+\sqrt{2a-16}}{5}$.

Посмотри, пожалуйста, наши решения и ответы».

Оля посмотрела на ответы мальчиков и сразу сказала, что первые два уравнения решены неверны и нет смысла их проверять. А в третьей задаче такой ответ может быть. Поэтому необходимо посмотреть весь ход решения, чтобы убедиться, что все решено верно.

Как рассуждала Оля, дав такие оценки всем трем ответам Васи и Коли?

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

6. При каких a уравнение имеет бесконечно много решений?
 $(a^6+12a-40)x = a^2+a-2$

7. Найти все a , при которых множества решений уравнений совпадают
 $(a^2+a-6)x = 2a^2-3a-2$ и $(3a^2-a-10)x = 3a^2-4a-4$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

8. При каких a уравнение не имеет решений?
 $(a^2 - 16) = a + 4$

9. Решите систему с параметром k

$$\begin{cases} x + ky = 2 \\ kx + y = 3 \end{cases}$$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Задания для самостоятельного решения

- Для каждого значения параметра a найдите число корней уравнения
 - $9(3x-1)a^2 - (21x-19)a + 2(x-1) = 0$
 - $2(4x-1)a^2 - (14x-11)a + 5(x-1) = 0$.
- При каких a уравнение не имеет решений?
 $(3a^2 - a - 2)x = 6a + 4$
- При каких a уравнение имеет бесконечно много решений?
 $(a^4 + 10a - 51)x = a^2 + 2a - 3$
- Найти все значения a , при котором уравнение имеет решения при любом b :
 $(3b+1)x = a^2 + 5a - 6b + 4$
- Решите систему с параметром k

$$\begin{cases} (k-1) \cdot x + 2y = k \\ 2(k-1) \cdot x + 4y = 2k \end{cases}$$

Оцени свою работу:



Комментарий учителя:

Ответы

- 1.** фиксированное число
- 2.** а) 0; 2 с) -3; 3 е) 2
 б) 2 д) 1; -1 ф) 2

3. при $k = 3$ уравнение имеет бесконечно много решений;
при $k = -7$ уравнение не имеет решений;
при $k \neq 3$ и $k \neq -7$ уравнение имеет единственное решение

4. а) при $a = 2$ уравнение не имеет решений:

при $a \neq 2$, $x = \frac{3a+1}{2a-4}$.

б) при $a = -1$ – нет решений;

при $a = 1$ – бесконечно много решений;

при $a \neq 1$ и $a \neq -1$, $x = \frac{a+1,5}{a+1}$.

с) при $a = -2$ – нет решений;

при $a = 2$ – бесконечно много решений;

при $a \neq 2$ и $a \neq -2$, $x = \frac{a-3}{a+2}$.

5. Ответ к первой задаче у Васи неполный потому, что не сказано, какие решения имеет уравнение при $a \in (4; 8)$. В ответе второй задачи имеется противоречие. Множество значений параметра a в пунктах 2) и 3) имеют непустое пересечение – это промежуток $[1; 8]$. Согласно пункту 2) на этом множестве $x = \frac{2a+6+\sqrt{a+7}}{2}$, а согласно пункту 3) $x = \frac{2a+6+\sqrt{a+7}}{2}$. Эти формулы при одних и тех же a из промежутка $[1; 8]$ дают разные значения для x . В ответе 3 задачи никакого противоречия нет, поскольку формула $x = \frac{2a-6+\sqrt{a-4}}{2}$ при $a=4$ дает также значение $x=1$, которое указано в пункте 2). А при $a=8$ обе формулы в пункте 4) и формула в пункте 3) ответа дают одно и то же решение $x=6$. Поэтому в самом ответе противоречий нет.

6. $a = -2$

7. $a = -1$, $a = 2$, $a = \frac{1}{3}$

8. $a = 4$

9. при $k = 1$ и $k = -1$ решений нет

$$\text{при } k \neq 1 \text{ и } k \neq -1 \quad \begin{cases} x = \frac{2-3k}{1-k^2} \\ y = \frac{3-2k}{1-k^2} \end{cases}$$

Ответы заданий для самостоятельного решения

1. а) при $a = \frac{1}{9}$ – бесконечное множество решений;

при $a = \frac{2}{3}$ – решений нет;

при $a \neq \frac{2}{3}$ и $a \neq \frac{1}{9}$, $x = \frac{a-2}{3a-2}$.

б) при $a = \frac{1}{2}$ – бесконечное множество решений;

при $a = \frac{5}{4}$ – решений нет;

при $a \neq \frac{1}{2}$ и $a \neq \frac{5}{4}$, $x = \frac{a-5}{4a-5}$.

2. $a = 1$;

3. $a = -3$;

4. $a = -3, a = -2$;

5. при $k = 1$ система не имеет решений;

при $k \neq 1$ система имеет бесконечное множество решений.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

НАЙДИ ОШИБКУ!

Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.



№ 1) Для всех значений параметра a решите уравнение: $(a+5)(a-1)x = a(a-1)$

$$(a+5)(a-1)x = a(a-1) \mid : (a-1)$$

$$(a+5)x = a$$

$$x = \frac{a}{(a+5)} \text{ для всех } a.$$

Ответ: $x = \frac{a}{(a+5)}$ для всех a .

№ 2) Для всех значений параметра a решите уравнение: $ax = 5x - 1$

$$ax = 5x - 1$$

1) при $a = 0$: $a \cdot 0 = 5x - 1 \Rightarrow$ нет решений;

2) при $a \neq 0$:

$$(a-5)x = -1 \Rightarrow x = \frac{-1}{(a-5)}.$$

Ответ: при $a = 0$ нет решений;

$$\text{при } a \neq 0, x = \frac{-1}{(a-5)}.$$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

НАЙДИ ОШИБКУ!

Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.



№ 3) Для всех значений параметра a решите уравнение: $a^2(x-1) = 4x + 3a + 2$

$$a^2(x-1) = 4x + 3a + 2$$

$$a^2x - a^2 = 4x + 3a + 2$$

$$a^2x - 4x = 3a + 2 - a^2$$

$$(a^2 - 4)x = 3a + 2 - a^2$$

$$1) \text{ при } (a^2 - 4) = 0 \Rightarrow a = 2$$

$$0 \cdot x = 4 \Rightarrow \text{нет решений};$$

$$2) \text{ при } a \neq 2, x = \frac{3a + 2 - a^2}{(a^2 - 4)}$$

Разложим $3a + 2 - a^2$ на множители:

$$3a + 2 - a^2 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16$$

$$a_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2 + \sqrt{16}}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$a_2 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{6} = -1$$

$$3a + 2 - a^2 = (a - \frac{1}{3})(a + 1)$$

$$x = \frac{(a - \frac{1}{3})(a + 1)}{(a - 2)(a + 2)}$$

Ответ: при $a = 2$ нет решений;

$$\text{при } a \neq 2, x = \frac{(a - \frac{1}{3})(a + 1)}{(a - 2)(a + 2)}.$$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

С ПАРАМЕТРАМИ

НАЙДИ ОШИБКУ!

Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.



№ 4) Для всех значений параметра a решите уравнение: $\frac{ax-1}{a+2} = 3$

$$\frac{ax-1}{a+2} = 3$$

$$ax-1 = 3(a+2)$$

$$ax = 3a + 6 + 1$$

$$ax = 3a + 7$$

1) при $a = 0$: $0 \cdot x = 7 \Rightarrow$ нет решений;

2) при $a \neq 0$, $x = \frac{3a+7}{a}$.

Ответ: при $a = 0$ нет решений;

$$\text{при } a \neq 0, x = \frac{3a+7}{a}.$$

№ 5) Для всех значений параметров a и b решить уравнение: $(a-2)x = 4a + 3b$

$$(a-2)x = 4a + 3b$$

1) при $a = 2$: $0 \cdot x = 8 + 3b$

1.1) если $8 + 3b \neq 0 \Rightarrow b \neq -\frac{8}{3} \Rightarrow$ уравнение не имеет решений ни при каком x ;

1.2) если $8 + 3b = 0 \Rightarrow b = -\frac{8}{3} \Rightarrow 0 \cdot x = 0 \Rightarrow$ уравнение имеет множество решений;

2) при $a \neq 2$, $x = \frac{4a+3b}{a-2}$.

Ответ: при $a = 2$, $b \neq -\frac{8}{3}$ — уравнение не имеет решений;

при $a = 2$, $b = -\frac{8}{3}$ — уравнение имеет множество решений;

при $a \neq 2$, b — любое, $x = \frac{4a+3b}{a-2}$.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Теоретическая справка

$$q(a) \cdot x + p(a) = 0 \quad (1)$$

(1) - общий вид линейного уравнения с параметром a ,
где $q(a)$, $p(a)$ — коэффициенты, зависящие от a .

Некоторые случаи решения:

- 1) Если $q(a) \neq 0$, то (1) имеет единственное решение $x = -p(a)/q(a)$;
- 2) Если $q(a) = 0$ и $p(a) = 0$, то (1) имеет бесконечно много решений, x — любое
- 3) Если $q(a) = 0$ и $p(a) \neq 0$, то (1) не имеет решений



Ключевое значение параметра
— это числовое значение, при котором происходит качественное изменение свойств уравнения

1. Что такое параметр в уравнении? Вставьте пропуски

П а р а м е т р — это
фиксированное число, которое

2. Укажите ключевые значения параметра и охарактеризуйте множество решений линейного уравнения:

$(6a-12)(9+a)x = 6-3a$	

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

3. Составьте свое линейное уравнение с параметром k , чтобы:

- a) ключевым значением параметра являлось число 7;
- b) ключевыми значениями параметра являлись: $k=0$ и $k=-3$;
- c) при $k=2$ уравнение не имело решений;
- d) при $k=-1$ уравнение имело бесконечное множество решений.

4. При каких a уравнение имеет бесконечное число решений?

$$(a^4 + 10a - 51)x = a^2 + 2a - 3$$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

5. При каких значениях параметра a корни уравнения больше 2?

$$10x - 15a = 13 - 5ax + 2a$$

6. Решите уравнение с параметром a :

$$\left(\frac{25}{a} - a\right)x = a - \frac{5}{a} - 4.$$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

7. Для всех значений a и b решить уравнение

$$(a-2)x = 4a + 3b$$

8. Решите уравнение с параметром a :

$$|x+1| = a-3$$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

9. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение имеет два различных корня, равноудаленных от точки $x = -7$

$$|10x + 7a - 5| = |3x + 2a - 1|$$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Задания для самостоятельного решения

1. При каких a все решения уравнения удовлетворяют решению $x > 2$?
 $(a^2 + 2a)x = 4a^2 + 5a$
2. При каких a и b уравнение $(2a - b + 1)x + 2a + b - 3 = 0$ имеет не менее двух различных корней?
3. Для каждого значения параметра a решите уравнение
 $|x - a| + |x| = a$.
4. Для каждого значения параметра a укажите количество решений $(x; y)$ системы уравнений

$$\begin{cases} 3y - (a - 2)x = 5, \\ 3ay + (3a - 6)x = 10. \end{cases}$$

1. Выбери смайлик, который соответствует твоему состоянию



2. Что нового ты узнал/а на уроке?

Комментарий учителя:



ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Ответы

1. которое меняет множество решений уравнения;
2. при $a = 2$ – бесконечное множество решений;
при $a = -9$ – решений нет;
при $a \neq 2$ и $a \neq -9$ уравнение имеет единственное решение.
3. Например,
а) $(k-7)x=k-9$;
б) $k(k+3)x=k-1$;
в) $(k-2)x=k$;
г) $k(k+1)x=(k+1)(k+3)$;
4. $a=-3$;
5. $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$;
6. при $a = 0$ и $a = -5$ – решений нет;
при $a = 5$ – бесконечное множество решений;
при $a \neq -5$, $a \neq 0$ и $a \neq 5$, $x = \frac{a+1}{a+5}$.
7. при $a = 2$ и $b = -\frac{8}{3}$ – бесконечное множество решений;
при $a = 2$ и $b \neq -\frac{8}{3}$ – решений нет;
при $a \neq 2$, $x = \frac{4a+3b}{a-2}$.
8. при $a < 3$ решений нет;
при $a=3$, $x=-1$;
при $a > 3$, $x=2-a$ или $x=a-4$;
9. $a = 10\frac{11}{16}$.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Ответы заданий для самостоятельного решения

1. $(-\infty; -2) \cup (-\frac{1}{2}; 0) \cup (0; +\infty)$;
2. $a = \frac{1}{2}$, $b = 2$;
3. при $a < 0$ решений нет;
при $a=0$, $x=0$;
при $a > 0$, $0 \leq x \leq a$.
4. при $a = -3$ – решений нет;
при $a = 2$ – бесконечное множество решений;
при $a \neq -3$, $a \neq 2$ – единственное решение.

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

С ПАРАМЕТРАМИ

НАЙДИ ОШИБКУ!

Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.



№ 1) Для всех значений параметра a решите уравнение: $\frac{x}{a} + 3 = 5 - x$

$$\frac{x}{a} + 3 = 5 - x$$

$$\frac{x}{a} + x = 2$$

$$(\frac{1}{a} + 1)x = 2$$

1) если $\frac{1}{a} + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$, то $0 \cdot x = 2 \Rightarrow$ нет решений;

2) если $\frac{1}{a} + 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq -1$, то $x = \frac{2}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{2a}{a+1}$.

Ответ: при $a = -1$, нет решений;

$$\text{при } a \neq -1, x = \frac{2a}{a+1}.$$

№ 2) Для всех значений параметра a решите уравнение: $a(\frac{3}{4}a - 1)x + a(3a - 4) = 0$

$$a(\frac{3}{4}a - 1)x = -a(3a - 4) \mid : a$$

$$(\frac{3}{4}a - 1)x = 4 - 3a$$

1) если $\frac{3}{4}a - 1 = 0$, $\frac{3}{4}a = 1$, $a = \frac{4}{3}$, то $0 \cdot x = 0 \Rightarrow$ уравнение имеет множество решений;

2) если $\frac{3}{4}a - 1 \neq 0$, $a \neq \frac{4}{3}$,

$$\text{то } x = \frac{4 - 3a}{\frac{3}{4}a - 1} = \frac{(4 - 3a) \cdot 4}{3a - 4} = -4.$$

Ответ: при $a = \frac{4}{3}$, $x \in \mathbb{R}$;

$$\text{при } a \neq \frac{4}{3}, x = -4.$$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

С ПАРАМЕТРАМИ

НАЙДИ ОШИБКУ!

Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.



№ 3) Для всех значений параметра a решите уравнение: $a(\frac{1}{a} + 1)x = a^2 + a$

$$a(\frac{1}{a} + 1)x = a(a + 1) \mid : a$$

$$(\frac{1}{a} + 1)x = a + 1$$

1) если $a = 0$, то уравнение не имеет решений;

2) если $\frac{1}{a} + 1 = 0 \Rightarrow a = -1$, то $0 \cdot x = 0 \Rightarrow$ уравнение имеет множество решений;

3) если $\frac{1}{a} + 1 \neq 0 \Rightarrow a \neq -1$, то $x = \frac{a+1}{\frac{1}{a} + 1} = \frac{a(a+1)}{a+1} = a$.

Ответ: при $a = 0$ нет решений;

$$\text{при } a = -1 \text{ и } a \neq 0, x \in \mathbb{R};$$

$$\text{при } a \neq -1 \text{ и } a \neq 0, x = a.$$

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

С ПАРАМЕТРАМИ

НАЙДИ ОШИБКУ!

Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.



№ 4) Для всех значений параметра a решите уравнение: $a^3(x - a) = 9(ax - 9)$

$$a^2x - a^4 = 9ax - 81$$

$$(a^3 - 9a)x = a^4 - 81$$

$$a(a^2 - 9)x = a^4 - 81$$

$$a(a^2 - 9)x = (a^2 - 9)(a^2 + 9) \mid : (a^2 - 9)$$

$$ax = a^2 + 9$$

1) если $a = 0$, то $0 \cdot x = 9 \Rightarrow$ нет решений;

2) если $a \neq 0$, то $x = \frac{a^2 + 9}{a}$.

Ответ: при $a = 0$ нет решений;

$$\text{при } a \neq 0, x = \frac{a^2 + 9}{a}.$$

№ 5) Для всех значений параметра k решите уравнение: $|(k - 2)x + 2| = k$

$$(k - 2)x + 2 = k$$

$$(k - 2)x + 2 = k$$

$$(k - 2)x = k - 2$$

1) если $k - 2 = 0 \Rightarrow k = 2$, то $0 \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0$;

2) если $k - 2 \neq 0 \Rightarrow k \neq 2$, то $x = \frac{k - 2}{k - 2} = 1$

Ответ: при $k = 2, x = 0$;

$$\text{при } k \neq 2, x = 1.$$

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

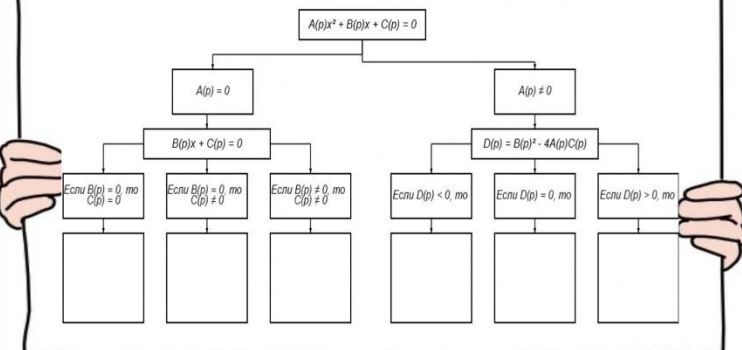
Общий вид квадратного уравнения с параметром a :

$$A(p)x^2 + B(p)x + C(p) = 0$$

где $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ — коэффициенты, зависящие от параметра p .

Алгоритм решения квадратного уравнения с параметром.

Вставьте пропуски:



1. Определите тип уравнения при:

$$7c(c+3)x^2 + (c-2)x - 8 = 0$$

1) $c = -3$;

А) линейное уравнение;

2) $c = 2$;

Б) неполное квадратное уравнение;

3) $c = 4$.

В) квадратное уравнение.

2. Заполните таблицу:

	$(k-1)x^2 + 2x + (k-1) = 0$	$(k+3)x^2 + (k+3)x + 1 = 0$	$(k-2)x^2 + (2-k)x = 0$
При каком k уравнение становится линейным?	$k =$	$k =$	$k =$
Выпишите полученное уравнение и решите его:			
Ответ:			

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

ПРИМЕР

Минуточку
Внимания!

При всех значениях параметра a решите уравнение $ax^2 - (1-2a)x + a - 2 = 0$

1) Если $a = 0$, то $-(1-2 \cdot 0) \cdot x + 0 - 2 = 0$

$$-x - 2 = 0$$

$$x = 2 - 1 \text{ решение}$$

2) Если $a \neq 0$, то $D = (1-2a)^2 - 4a \cdot (a-2) = 1 - 4a + 4a^2 - 4a^2 + 8a = 4a + 1$

2.1) $D < 0$: $4a + 1 < 0$

$$a < -\frac{1}{4} \text{ — нет решений;}$$

2.2) $D = 0$: $4a + 1 = 0$

$$a = -\frac{1}{4}$$

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{1-2(-\frac{1}{4})}{2(-\frac{1}{4})} = \frac{1+\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3 \text{ — одно решение;}$$

2.3) $D > 0$: $4a + 1 > 0 \Rightarrow a > -\frac{1}{4}$

$$x_{1,2} = \frac{(1-2a) \pm \sqrt{4a+1}}{2a}$$

Ответ: 1) при $a = 0$, $x = 2$

$$a = -\frac{1}{4}, x = -3;$$

2) при $a < -\frac{1}{4}$ — нет решений;

3) при $a > -\frac{1}{4}$, $x_{1,2} = \frac{(1-2a) \pm \sqrt{4a+1}}{2a}$

3. При каком значении параметра b уравнение имеет единственный корень?

$$2x^2 - bx + 18 = 0$$

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

4. При каком значении параметра b уравнение имеет единственный корень?

$$(b+6)x^2 - (b-2)x + 1 = 0$$

5. При каких значениях параметра a уравнение имеет больше одного корня?

$$a(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a - 9 = 0$$

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

6. Решите уравнение с параметром

$$x^2 - 2x + a = 0$$

7. Решите уравнение с параметром a

$$ax^2 + 2x + 1 = 0$$

**КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ
С ПАРАМЕТРАМИ**

8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнения имеют хотя бы один общий корень:

$$x^2 + 4x - 3a + 7 = 0 \text{ и } x^2 + 7x - 5a + 15 = 0$$

**КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ
С ПАРАМЕТРАМИ**

**Применение теоремы Виета при исследовании
знаков корней квадратного трехчлена**

$ax^2 + bx + c = 0$ – общий вид квадратного уравнения

Т. Виета	$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \\ x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases}$		
Уравнение имеет корни одного знака, если:	$D \geq 0$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$	Оба корня положительны:	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$
		Оба корня отрицательны:	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$
Уравнение имеет корни разных знаков, если:	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$		

9. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет корни разных знаков, причем положительный корень по модулю больше

$$x^2 - ax + a - 3 = 0$$

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

10. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет корни разных знаков, причем положительный корень по модулю меньше отрицательного
- $$x^2 + (3+a)x + a - 5 = 0$$

11. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет четыре различных действительных корня
- $$x^4 - 2x^2 - a + 3 = 0$$

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Задания для самостоятельного решения

- Для каждого значения параметра a определите, сколько различных действительных корней имеет уравнение $(a-1)x^2 - 2(a+1)x + a - 2 = 0$
- При каком значении параметра a уравнение имеет единственный корень?
 $ax^2 - 2x + a = 0$
- Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значения параметра k
 $3x(x-1)^2 = kx$
- При каком значении параметра a уравнение имеет не более 1 решения?
 $(a-1)x^2 - 2ax + a = 0$
- Решите уравнение с параметром $(a+4)x^2 - 6x + a - 4 = 0$

Оцени свою работу:



Комментарий учителя:

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Ответы

1. А – 1; Б – 2; В – 3.

2.

	$(k-1)x^2+2x+(k-1)=0$	$(k+3)x^2+(k+3)x+1=0$	$(k-2)x^2+(2-k)x=0$
При каком k уравнение становится линейным?	$k=1$	$k=-3$	$k=2$
Выпишите полученное уравнение и решите его:	$2x=0$	$1=0$	$0=0$
Ответ:	$x=0$	Нет решений	x – любое

3. $b=12$ или $b=-12$.

4. $b=-2$, или $b=10$, или $b=-6$.

5. $a=-3$, или $-\frac{1}{3}<a<0$, или $a>0$.

6. при $a>1$ – нет решений;

при $a=1$, $x=1$;

при $a<1$, $x=1\pm\sqrt{1-a}$.

7. при $a=0$, $x=-0,5$

$a=1$, $x=-1$;

при $a>1$ – нет решений;

при $a<0$ и $0<a<1$, $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1-a}}{a}$.

8. $a=7,75$ и $a=1$.

9. $0<a<3$.

10. $-3<a<5$.

11. $2<a<3$.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Ответы заданий для самостоятельного решения

1. при $a=1$ и $a=0,2$ один корень;

при $a<0,2$ корней нет;

при $0,2<a<1$ и $a>1$ два корня.

2. при $a=0$, $x=0$; $a=-1$, $x=-1$; $a=1$, $x=1$.

3. при: $k>0$ и $k\neq 3$ – два корня;

$k=0$ – один корень;

$k<0$ – нет корней.

4. $(-\infty; 0) \cup \{1\}$.

5. 1) при $a=-4$, $x=\frac{8}{6}$

$a=25$, $x=0,12$;

2) при $a>25$ – нет решений;

3) при $a<-4$ и $-4<a<25$, $x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{100-4a}}{2a}$.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ НАЙДИ ОШИБКУ!



Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.

№ 1) Для всех значений параметра a решите уравнение: $(a-1)x^2 - (a-1)x = 0$

$$(a-1)x^2 - (a-1)x = 0 \mid : (a-1)$$

$$x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1 \text{ для всех } a.$$

Ответ: $x_1 = 0, x_2 = 1$ для всех a .

№ 2) При каком значении параметра a уравнение $2ax^2 - (6a+4)x + 2a = 0$ имеет единственное решение?

$$D = (6a+4)^2 - 4 \cdot 2a \cdot 2a = 36a^2 + 48a + 16 - 16a^2 = 20a^2 + 48a + 16;$$

$$D = 0 \Rightarrow 20a^2 + 48a + 16 = 0 \mid : 4$$

$$5a^2 + 12a + 2 = 0$$

$$D = 144 - 80 = 64$$

$$a_1 = \frac{-12+8}{10} = -0,4$$

$$a_2 = \frac{-12-8}{10} = -2.$$

Ответ: $a_1 = -0,4, a_2 = -2$.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ НАЙДИ ОШИБКУ!



Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.

№ 3) При каких значениях параметра b уравнение $(b-1)x^2 - 2bx + b+1 = 0$ имеет два решения?

$$D = 4b^2 - 4(b-1)(b+1) = 4b^2 - 4(b^2 - 1) = 4 > 0 \Rightarrow \text{уравнение имеет 2 решения при всех } b.$$

Ответ: $b \in \mathbb{R}$.

№ 4) При каких значениях параметра a уравнение $x^2 - (a-1)x + a-2 = 0$ имеет единственное решение?

$$D = (a-1)^2 - 4(a-2) = a^2 - 2a + 1 - 4a + 8 = a^2 - 6a + 9 = (a-3)^2$$

$$D = 0 \Rightarrow (a-3)^2 = 0 \Rightarrow a = 3.$$

Ответ: $a = 3$.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ
С ПАРАМЕТРАМИ

НАЙДИ ОШИБКУ!

Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.



№ 5) Решите уравнение с параметром c : $cx^2 + 8 = 2x^2 + 4x$

$$(2-c)x^2 + 4x - 8 = 0$$

$$D = 16 + 32(2-c) = 16 + 64 + 32c = 80 + 32c$$

1) $D < 0 \Rightarrow 80 + 32c < 0 \Rightarrow c < -2,5$ – нет решений;

2) $D = 0 \Rightarrow 80 + 32c = 0 \Rightarrow c = -2,5$ – единственное решение;

$$x = \frac{-4}{2 \cdot (2+2,5)} = -\frac{4}{9}$$

3) $D > 0 \Rightarrow 80 + 32c > 0 \Rightarrow c > -2,5$ – два решения

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{80 + 32c}}{2(2-c)}$$

Ответ: при $c < -2,5$, $x \in \emptyset$;

$$\text{при } c = -2,5, x = -\frac{4}{9};$$

$$\text{при } c > -2,5, x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{80 + 32c}}{2(2-c)}.$$

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Общий вид квадратного уравнения с параметром a :

$$A(p)x^2 + B(p)x + C(p) = 0$$

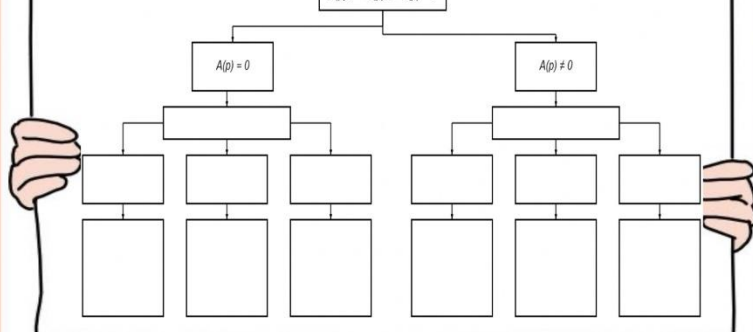
где $A(p)$, $B(p)$, $C(p)$ — коэффициенты, зависящие от параметра p .



Алгоритм решения квадратного уравнения с параметром.

Вставьте пропуски:

$$A(p)x^2 + B(p)x + C(p) = 0$$



1. При каких значениях параметра p уравнение: а) имеет два различных корня; б) имеет ровно один корень; в) не имеет корней? $(p-2)x^2 + 2(p-2)x + p+3 = 0$

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

2. Решите уравнение с параметром $x^2 - 3a + 4 = 0$

3. Решите уравнение с параметром $2x^2 - 3ax - 2a^2 + 2 = 0$

Применение теоремы Виета при исследовании знаков корней квадратного трехчлена

$ax^2 + bx + c = 0$ – общий вид квадратного уравнения

Т. Виета	$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$		
Уравнение имеет корни одного знака, если:	$D \geq 0$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0$	Оба корня положительны:	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$
		Обо корня отрицательны:	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} < 0$
Уравнение имеет корни разных знаков, если:	$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$		

4. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых сумма квадратов корней уравнения равна 1 $x^2 + ax + 4 = 0$

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $3x^2 - 2(a+3)x - a^2 - 28 = 0$ имеет корни разных знаков.

5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $3x^2 - 2(a+3)x - a^2 - 28 = 0$ имеет корни разных знаков.

6. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение $x^4 - 2x^2 - a + 3 = 0$ имеет четыре различных действительных корня.

**КВАДРАТНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ**

7. Найдите все значения параметра a , при которых больший корень уравнения в 10 раз больше, чем его меньший корень.

$$x^2 - (8a - 7)x + 16a^2 - 28a = 0$$

**КВАДРАТНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ**

8. При каких значениях параметра $a \neq 4$ абсциссы всех общих точек графиков функций не больше a^2

$$f(x) = x^2 + 8x + 4a^2 \text{ и } g(x) = x^2 + 2ax + 64$$

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

9. Найдите все значения параметра a , при которых корни уравнения симметричны относительно точки $x = -3$

$$(x - 2a)^2 + (x - 4a)^2 = 242$$

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

учитель
📺 ⌚

Как прошел урок??

Что тебе запомнилось
больше всего?

Где были затруднения?

Комментарий учителя:



Задания для самостоятельного решения

1. Для всех значений параметра a решите уравнение: $x^2 + 6x + a = 0$
2. Для всех значений параметра a решите уравнение: $x^2 - 2ax + 5a - 6 = 0$
3. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых сумма квадратов корней трехчлена $x^2 - 4ax + 5a - 1 = 0$ равна 2.
4. Найдите все значения параметра a , при которых сумма кубов различных действительных корней уравнения $x^2 - 3x + 4a = 0$ меньше 18.
5. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет ровно три различных действительных корня: $x^2 - (a - 2) \cdot |x| + a^2 - 9 = 0$

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Ответы

1. а) $p \in (-\infty; 2)$;
 б) нет таких значений p ;
 в) $p \in [2; +\infty)$;
2. при $a = \frac{4}{3}$, $x = 2$;
 при $a = -\frac{4}{3}$, $x = -2$;
 при $-\frac{4}{3} < a < \frac{4}{3}$ решений нет;
 при $a < -\frac{4}{3}$ и $a > \frac{4}{3}$, $x_{1,2} = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 16}}{2}$.
3. при $a = \frac{4}{5}$, $x = \frac{3}{5}$;
 при $a = -\frac{4}{5}$, $x = -\frac{3}{5}$;
 при $-\frac{4}{5} < a < \frac{4}{5}$ решений нет;
 при $a < -\frac{4}{5}$ и $a > \frac{4}{5}$, $x_{1,2} = \frac{3a \pm \sqrt{25a^2 - 16}}{4}$.
4. таких значений параметра a нет;
5. $a < -2$ или $a > 0$;
6. $2 < a < 3$;
7. $a = \frac{7}{36}$ и $a = 1\frac{17}{18}$;
8. $a \in (-\infty; -2] \cup (4; +\infty)$;
9. $a = -1$.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Ответы заданий для самостоятельного решения

1. при $a = 9$, $x = -3$;
 при $a > 9$ решений нет;
 при $a < 9$, $x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 4a}}{2}$.
2. при $a = 2$, $x = 2$;
 при $a = 3$, $x = 3$;
 при $2 < a < 3$ решений нет;
 при $a < 2$ и $a > 3$, $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2 - 5a + 6}$.
3. $a = 0$;
4. $\frac{1}{4} < a < \frac{9}{16}$;
5. $a = 3$.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

НАЙДИ ОШИБКУ!

Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.



№ 1) Для каждого значения параметра a решите уравнение $ax^2 - (2a+1)x + 2 = 0$
 $D = (2a+1)^2 - 8a = 4a^2 + 4a + 1 - 8a = 4a^2 - 4a + 1 = (2a-1)^2$

1) $D < 0 \Rightarrow (2a-1)^2 < 0$ – нет таких a ;

2) $D = 0 \Rightarrow (2a-1)^2 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$;

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{1+1}{1} = 2;$$

3) $D > 0 \Rightarrow (2a-1)^2 > 0 \Rightarrow a \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$;

$$x_1 = \frac{2a+1+2a-1}{2a} = 2$$

$$x_2 = \frac{2a+1-2a-1}{2a} = \frac{1}{a}.$$

Ответ: при $a = \frac{1}{2}$, $x = 2$;

при $a \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{a}$.

№ 2) Найдите все значения параметра a , при которых уравнение $ax^2 - 4 = 0$ не имеет решений.

а) при $a = 0 \Rightarrow -4 = 0$ – неверно, корней нет;

б) при $a \neq 0 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{a} \Rightarrow$ уравнение имеет два корня.

Ответ: $a = 0$.

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

НАЙДИ ОШИБКУ!

Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.



№ 3) При каких значениях параметра a уравнение $a(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a - 9 = 0$ имеет более одного корня?

а) если $a = -3$, то уравнение примет вид $-3 \cdot (-3) - 9 = 0$

$0 = 0$ – верное равенство $\Rightarrow$ уравнение имеет множество решений;

б) если $a \neq -3$, то $a(a+3)x^2 + (2a+6)x - 3a - 9 = 0 \mid : (a+3)$

$$ax^2 + 2x - 3 = 0$$

в) если $a = 0$, то уравнение примет вид $6x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ – единственный корень;

г) если $a \neq 0$, то $ax^2 + 2x - 3 = 0$

$D = 4 + 12a$; $D > 0 \Rightarrow 4 + 12a > 0 \Rightarrow a > -\frac{1}{3}$ – два корня.

Ответ: при $a = -3$ или $a > -\frac{1}{3}$

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ
С ПАРАМЕТРАМИ

НАЙДИ ОШИБКУ!

Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.



№ 4) Найдите все значения параметра a , при которых только один корень квадратного трехчлена $x^2 - 2x(a + 1) + 6a - 3 = 0$ больше 2.

$$x^2 - 2x(a + 1) + 6a - 3 = 0$$

$$D = 4(a + 1)^2 - 4(6a - 3) = 4a^2 + 4a + 4 - 24a + 12 = 4a^2 - 20a + 16 = (2a - 4)^2$$

$$x_1 = \frac{2(a+1)+2a-4}{2} = 2a - 1$$

$$x_2 = \frac{2(a+1)-2a+4}{2} = 3$$

$$x_2 > 2 \Rightarrow x_1 \leq 2 \Rightarrow 2a - 1 \leq 2 \Rightarrow a \leq 1,5.$$

Ответ: $a \leq 1,5$.

№ 5) Найдите целое значение параметра a , при котором один из корней уравнения $x^2 - (a + 2)x + 5a - 15 = 0$ в три раза больше другого.

$$x^2 - (a + 2)x + 5a - 15 = 0$$

$$D = (a + 2)^2 - 4(5a - 15) = a^2 + 4a + 4 - 20a + 60 = a^2 - 16a + 64 = (a - 8)^2$$

$$D > 0 \Rightarrow (a - 8)^2 > 0 \Leftrightarrow a \neq 8$$

$$x_1 = \frac{a+2-(a-8)}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{a+2+(a-8)}{2} = a - 3$$

$$\text{Пусть } x_1 = 3x_2, \text{ тогда } 5 = 3(a - 3) \Rightarrow 3a = 14 \Rightarrow a = \frac{14}{3}.$$

Ответ: $a = \frac{14}{3}$.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ



1. Решите уравнение с параметром:

$$\frac{3x-2}{a^2-2a} + \frac{x-1}{a-2} + \frac{2}{a} = 0$$



Общий вид дробно-рационального уравнения с параметром a :

$$\frac{P(x,a)}{Q(x,a)} = 0$$

где $P(x,a)$, $Q(x,a)$ — многочлены с параметром a .



Алгоритм решения дробно-рационального уравнения с параметром.

- 1) Приравнять числитель к нулю: $P(x,a) = 0$. Найти корни.
- 2) Проверить условие на знаменатель: $Q(x,a) \neq 0$.
- 3) Исключить те значения параметра, при которых корни числителя совпадают с корнями знаменателя.



ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

2. Подчеркните дробно-рациональные уравнения относительно x .
Укажите вид оставшихся уравнений

a) $\frac{x-2}{x+a} = 5$; b) $\frac{a}{2} + \frac{x}{3} = 0$; c) $x^2 - ax + 4 = 0$; d) $\frac{1}{x} = \frac{a}{x-2}$.

3. Определите, при каких x выражение не имеет смысла

a) $\frac{5}{x-a}$ b) $\frac{x+2}{x-(a+1)}$ c) $\frac{3}{ax}$

ПРИМЕР



При всех значениях параметра a решите уравнение: $\frac{x-3a}{x^2-9} + \frac{2a+3}{x+3} = \frac{a-5}{x-3}$

$$\frac{x-3a}{x^2-9} + \frac{2a+3}{x+3} = \frac{a-5}{x-3}$$

$$\frac{x-3a-(x-3)(2a+3)-(x+3)(a-5)}{x^2-9} = 0$$

$$\frac{x-3a-2ax-3x+6a+9-xa-3a+5x+15}{x^2-9} = 0$$

$$\frac{3x-3ax+24}{x^2-9} = 0 \quad \text{ОДЗ: } x^2-9 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 3$$

$$3x-3ax+24=0$$

$$3(1-a)x = -24$$

1) если $1-a=0 \Rightarrow a=1$, то $0 \cdot x = -24 \Rightarrow$ нет решений;

2) если $a \neq 1$, то $x = \frac{-24}{3(1-a)} = \frac{-8}{1-a}$

$$3) \frac{-8}{1-a} = 3 \quad \frac{-8}{1-a} = -3$$

$$3a-3=8 \quad -3a+3=8$$

$$3a=11 \quad -3a=5$$

$$a = \frac{11}{3} \quad a = -\frac{5}{3}$$

Ответ: при $a=1$, $a = \frac{11}{3}$, $a = -\frac{5}{3}$ уравнение не имеет решений;

при $a \neq 1$, $a \neq \frac{11}{3}$, $a \neq -\frac{5}{3}$, $x = \frac{-8}{1-a}$

**ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ**

4. Докажите, что при любом значении параметра n , отличном от нуля, уравнение имеет единственный корень, равный $-n$.

$$\frac{x^2+2nx}{x^3-n^3} + \frac{x}{x^2+2nx+n^2} = \frac{1}{x-n}$$

5. Для всех значений параметра a решите уравнение:

$$\frac{x-a}{x-1} = 0$$

**ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ**

6. Для всех значений параметра a решите уравнение:

$$\frac{a-1}{x} = \frac{a}{x+1}$$

7. Для всех значений параметра a решите уравнение:

$$\frac{a}{a-2x} = 2$$

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

8. При каком значении a уравнение имеет один корень: $\frac{x^2 - 3x + 2}{x - a} = 0$

9. Найдите значение параметра a для которых уравнение имеет единственное решение:

$$\frac{(a+2)x^2 - (a+7)x + 5}{x-1} = 0$$

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Заполните пропуски:

Чтобы решить уравнение $\frac{x-a}{x-3} = 0$, нужно чтобы x был равен _____, но при этом x не должен быть равен _____. Значит, если параметр a примет значение _____, то уравнение не будет иметь корней.

учитель

Как прошел урок??

Что тебе запомнилось больше всего?

Где были затруднения?

Комментарий учителя:



Задания для самостоятельного решения

Для всех значений параметра a решите уравнение:

1. $\frac{x-a}{a+1} = 0$

2. $\frac{(a-2)(x-a)}{x-1} = 0$

3. $\frac{x-4}{x^2+a^2} = 0$

4. $\frac{a-1}{x} = \frac{a}{x+1}$

5. $\frac{x+2}{a+1} = \frac{2x-a-1}{x-2}$

6. $\frac{2x-a-1}{x-1} = 1$

ДРОБНО — РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ

Ответы

1. при $a = 0, a = 2, a = -3$ решений нет;
при $a \neq 0, a \neq 2, a \neq -3, x = \frac{6-a}{3+a}$
2. дробно-рациональные уравнения относительно x : a, d, b – линейное уравнение с параметром, c – квадратные уравнения с параметрами
3. а) $x = 5$; б) $x = a + 1$; в) $a = 0$;
4. $x = -n$;
5. при $a = 1$ решений нет;
при $a \neq 1, x = a$.
6. при $a = 1, a = 0$ решений нет;
при $a \neq 1, a \neq 0, x = a + 3$
7. при $a = 0$ решений нет;
при $a \neq 0, x = \frac{a}{4}$
8. $a = 1$ или $a = 2$;
9. $a = -7, a = -2, a = 3$.

ДРОБНО — РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ

Ответы заданий для самостоятельного решения

1. при $a = -1$ решений нет;
при $a \neq -1, x = a$
2. при $a = 1$ решений нет;
при $a = 2, x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$;
при $a \neq 1, a \neq 2, x = a$
3. при $a = 4, a = -4$ решений нет;
при $a \neq 4, a \neq -4, x = 4$
4. при $a = 1, a = 0$ решений нет;
при $a \neq 1, a \neq 0, x = a + 3$
5. при $a = -1$ решений нет;
при $a = 3$ единственный корень $x = 6$;
при $a \neq -1, a \neq 3$ два корня $x = a - 1$ и $x = a + 3$
6. при $a = -1$ решений нет;
при $a \neq -1, x = -a$.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ
НАЙДИ ОШИБКУ!



Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.

№ 1) Решите уравнение $\frac{1}{x-2a} = \frac{4}{ax-1}$ при всех значениях параметра a .

$$ax - 1 = 4(x - 2a)$$

$$(a - 4)x = 1 - 8a$$

а) если $a - 4 = 0$, то $0 \cdot x = -31 \Rightarrow$ нет решений

б) если $a \neq 4$, то $x = \frac{1-8a}{a-4}$.

Ответ: при $a = 4$ решений нет;

при $a \neq 4$, $x = \frac{1-8a}{a-4}$.

№ 2) Решите уравнение $\frac{x+3}{x-\frac{1}{a}} = 0$ при всех значениях параметра a .

$$\begin{cases} x + 3 = 0 & (1) \\ x - \frac{1}{a} \neq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2)$$

$$\text{Из (2)} \Rightarrow x \neq \frac{1}{a}$$

$$\text{Из (1)} \Rightarrow x = -3$$

$$\frac{1}{a} = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$$

Ответ: при $a = -\frac{1}{3}$ решений нет;

при $a \neq -\frac{1}{3}$, $x = -3$.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ
НАЙДИ ОШИБКУ!



Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.

№ 3) Для всех значений параметра a решите уравнение $\frac{(a^2-4)x-a-2}{(a+1)x-4} = 0$.

$$\begin{cases} (a^2 - 4)x - a - 2 = 0 & (1) \\ (a + 1)x - 4 \neq 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Из (2)} \Rightarrow x \neq \frac{4}{a+1};$$

$$\text{Из (1)} \Rightarrow (a^2 - 4)x = a + 2 \mid : (a + 2)$$

$$(a - 2)x = 1$$

а) если $a - 2 = 0 \Rightarrow 0 \cdot x = 1 \Rightarrow$ нет решений

б) если $a \neq 2$, то $x = \frac{1}{a-2}$

$$\frac{1}{a-2} = \frac{4}{a+1}$$

$$4(a-2) = a+1$$

$$3a = 9 \Rightarrow a = 3$$

Ответ: при $a = 2$ решений нет;

при $a \neq 2$, $a = 3$, $x = \frac{1}{a-2}$.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ
НАЙДИ ОШИБКУ!



Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.

№ 4) Для всех значений параметра a решите уравнение $\frac{a-1}{x+6} = \frac{2x+7}{x^2+3x-18}$.

$$\frac{a-1}{x+6} - \frac{2x+7}{(x+6)(x-3)} = 0$$

$$\frac{(a-1)(x-3) - 2x-7}{(x+6)(x-3)} = 0$$

$$\frac{a-x-3a+3-2x-7}{(x+6)(x-3)} = 0$$

$$\frac{(a-3)x-3a-4}{(x+6)(x-3)} = 0$$

$$\begin{cases} (a-3)x-3a-4=0 & (1) \\ (x+6)(x-3) \neq 0 & (2) \end{cases}$$

Из (2) $\Rightarrow x \neq -6$ и $x \neq 3$

Из (1) $\Rightarrow (a-3)x = 3a+4$

а) если $a=3$, то $0 \cdot x = 13 \Rightarrow$ нет решений

б) если $a \neq 3$, то $x = \frac{3a+4}{a-3}$

$$\frac{3a+4}{a-3} = -6$$

$$\frac{3a+4}{a-3} = 3$$

$$3a+4 = -6a+18$$

$$3a+4 = 3a-9$$

$$9a = 14 \Rightarrow a = \frac{14}{9}$$

$$0 \cdot a = -13 \Rightarrow \text{нет таких } a.$$

Ответ: при $a=3$ решений нет;

при $a \neq 3$ и $a = \frac{14}{9}$, $x = \frac{3a+4}{a-3}$.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ
НАЙДИ ОШИБКУ!



Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.

№ 5) Найдите значение параметра a для которых уравнение $\frac{x^2-3a}{x^2-25} = \frac{ax+5}{x^2-25}$ имеет единственное решение.

$$\frac{x^2-3a-ax-5}{x^2-25} = 0$$

$$\begin{cases} x^2-3a-ax-5=0 & (1) \\ x^2-25 \neq 0 & (2) \end{cases}$$

Из (2) $\Rightarrow x \neq -5$ и $x \neq 5$

(1): $x^2-ax-5-3a=0$

$$D = a^2 - 4(-5-3a) = a^2 + 12a + 20$$

$$D = 0; a^2 + 12a + 20 = 0 \Rightarrow a_1 = -10; a_2 = -2$$

а) $a_1 = -10$, то $x^2 + 10x + 25 = 0 \Rightarrow x = -5$ не удовлетворяет ОДЗ

б) $a_2 = -2$, то $x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

Ответ: при $a = -2$ уравнение имеет один корень.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Общий вид дробно-рационального уравнения с параметром a :

$$\frac{P(x,a)}{Q(x,a)} = 0$$

где $P(x,a)$, $Q(x,a)$ — многочлены с параметром a .



Запишите алгоритм решения дробно-рационального уравнения с параметром.

1)

2)

3)

1. Определите, при каких x выражение не имеет смысла

1) $\frac{x+1}{x^2-a^2} + \frac{3}{x-a} = 0$;

3) $\frac{4}{|x|-a} = \frac{x}{x-4}$;

2) $\frac{x^2-a^2}{x-a} - \frac{2}{x+a} = 0$;

4) $\frac{a}{x-a} + \frac{3}{x-\frac{a}{5}} = \frac{1}{5x^2-6ax+a^2}$.

2. Решите уравнение

а) относительно x ;

б) относительно y .

$$\frac{y}{y^2-xy} - \frac{1}{x-y} = 1$$

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

3. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\frac{x+a}{ax} + \frac{2a-1}{x^2-ax} = \frac{2a-1}{ax-a^2}$

**ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ**

4. Для каждого значения параметра a решите уравнение $\frac{2x^2 - (3a+2)x + a^2 + a}{x-3} = 0$

**ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ**

5. Найдите все значения параметра a , при которых уравнения $\frac{2x}{x+5a} = 5a$ и $\frac{10a}{x+5a} = x$ имеют хотя бы один общий корень:

6. Найдите все значения параметра b , при которых отношение дискриминанта уравнения $bx^2 + 3x + 5 = 0$ к квадрату разности его корней равно $5b+6$.

**ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ**

7. Сколько корней имеет уравнение в зависимости от значений параметра a ?

$$\frac{x^2}{x^2-2x+3} = a$$

**ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ**

8. Найдите все значения параметра a , при которых уравнение имеет хотя бы одно решение

$$\frac{x^2+4x+9}{x^2+5x+9} = a$$

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

9. При каком наибольшем значении p уравнение не имеет решений?

$$\frac{4x-1}{x^2-7x+6} = \frac{p}{x-6}$$



ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Заполните таблицу.

В графу «+» записывается все, что понравилось на уроке, информация и формы работы, которые вызвали положительные эмоции.

В графу «—» записывается все, что не понравилось на уроке, показалось скучным, осталось непонятым или информация, по вашему мнению, оказалась не нужной.

В графу «И» — интересно, запишите все любопытные факты, которые узнали на уроке и что бы еще хотелось узнать по данной теме, вопросы у учителю.

«+»	«—»	«И»

Комментарий учителя:



Задания для самостоятельного решения

1. Для всех значений параметра a решите уравнение: $\frac{x}{a^2-1} = \frac{a}{ax-1}$.

2. Найдите все значения параметра a , при которых уравнения имеют хотя бы один общий корень: $\frac{3x}{x+2a} = 2a$ и $\frac{6a}{x+2a} = x$

3. При каких значениях параметра $a \neq 0$ абсциссы всех общих точек графиков функций $f(x) = \frac{7}{x^2+8x}$ и $g(x) = \frac{7a}{x}$ положительны?

4. При каком значении параметра p уравнение $\frac{5x-3}{x^2-11x+24} = \frac{p}{x-8}$ не имеет решений?

5. При каком значении параметра a уравнение $\frac{(a-2)x^2+4x+1}{x+1} = 0$ имеет один корень?

**ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ**

Ответы

1. 1) $x = a$ и $x = -a$;
 2) $x = a$ и $x = -a$;
 3) $x = a, x = -a$ и $x = 4$;
 4) $x = a$ и $x = \frac{a}{5}$.
2. а) при $y = 0$ уравнение теряет смысл;
 при $y \neq 0, x = y - 2$
 б) при $x = 0$ уравнение теряет смысл;
 при $x \neq 0, y = x + 2$
3. при $a = 0$ и $a = 1$ решений нет;
 при $a \neq 0$ и $a \neq 1, x = a - 1$
4. при $a = 2, x = 1$;
 при $a = -2, x = -1$;
 при $a = 6, x = 7$;
 при $a \neq 2, a \neq -2, a \neq 6, x_1 = a + 1, x_2 = \frac{a}{2}$
5. $a = 0,2$
6. $b = -1$
7. при $a = 0, a = 1, a = 1,5$ уравнение имеет единственный корень;
 при $a \in (0; 1) \cup (1; 1,5)$ уравнение имеет два корня;
 при $a \in (-\infty; 0) \cup (1,5; +\infty)$ уравнение не имеет корней
8. $a \in [\frac{10}{11}; 2]$
9. $p = 4,6$.

**ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ**

Ответы заданий для самостоятельного решения

1. при $a = \pm 1$ решений нет;
 при $a = 0, x = 0$;
 при $a = \frac{1}{\sqrt{2}}, x = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
 при $a = -\frac{1}{\sqrt{2}}, x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$;
 при $a \neq \pm 1, a \neq 0, a \neq \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, x_1 = a, x_2 = \frac{1}{a} - a$
2. $a = 0,75$;
3. $a \in (0; \frac{1}{8})$;
4. $p = 5$ и $p = 7,4$;
5. $a = 2, a = 5, a = 6$.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ
НАЙДИ ОШИБКУ!



Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.

№ 1) При каких значениях a уравнение $\frac{ax-1}{x-2} = 0$ не имеет решений?

$$\begin{cases} ax - 1 = 0 \\ x - 2 \neq 0 \end{cases}$$

Из (2) $\Rightarrow x \neq 2$

(1): $ax - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{a}$

$\frac{1}{a} = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Ответ: $a = \frac{1}{2}$.

№ 2) При каком значении a уравнение $\frac{(a-2)x^2+4x+1}{x+1} = 0$ имеет один корень?

$$\begin{cases} (a-2)x^2 + 4x + 1 = 0 & (1) \\ x + 1 \neq 0 & (2) \end{cases}$$

Из (2) $\Rightarrow x \neq -1$

(1): $(a-2)x^2 + 4x + 1 = 0$

а) $D = 16 - 4(a-2) = 24 - 4a$

$D = 0; 24 - 4a = 0 \Rightarrow a = 6$

если $a = 6$, то (1) примет вид: $4x^2 + 4x + 1 = 0$

$$(2x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

б) $D > 0$

Подставим $x = -1$ в уравнение (1): $(a-2)(-1)^2 + 4(-1) + 1 = 0 \Rightarrow a = 5$

Уравнение (1) при $a = 5$ примет вид:

$$3x^2 + 4x + 1 = 0$$

$x = \frac{-4 \pm 2}{6} \Rightarrow x_1 = -1$ (не удовлетворяет ОДЗ);

$x_2 = -\frac{1}{3}$ – единственное решение.

Ответ: $a = 6$ и $a = 5$

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ
НАЙДИ ОШИБКУ!



Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.

№ 3) При всех значениях параметра a решите уравнение $a = \frac{1}{a} + \frac{a-1}{a(x-1)}$

$$\frac{a^2x - a^2 - x + 1 - a + 1}{a(x-1)} = 0$$

$$a^2x - a^2 - x + 1 - a + 1 = 0 \quad (1)$$

$$a(x-1) \neq 0 \quad (2)$$

Из (2) $\Rightarrow a \neq 0$ и $x \neq 1$

Из (2) $\Rightarrow (a^2 - 1)x = a^2 + a - 2$

$$(a^2 - 1)x = (a - 1)(a + 2)$$

а) если $a = -1$, то $x \cdot 0 = -2$ – решений нет;

б) если $a = 1$, то $x \cdot 0 = 0$ – уравнение имеет множество решений;

в) если $a \neq 1$ и $a \neq -1$, то $x = \frac{a+2}{a+1}$.

Ответ: при $a = -1$ решений нет;

при $a = 1$ множество решений;

при $a \neq 1$ и $a \neq -1$, $x = \frac{a+2}{a+1}$.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ
НАЙДИ ОШИБКУ!

Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.



№ 4) При каких значениях a уравнение $\frac{ax^2 + (a-4)x + 0,5}{x+2} = 0$ имеет единственное решение?

$$\begin{cases} ax^2 + (a-4)x + 0,5 = 0 & (1) \\ x + 2 \neq 0 & (2) \end{cases}$$

Из (2) $\Rightarrow x \neq -2$

(1): $ax^2 + (a-4)x + 0,5 = 0$

а) при $a=0$ уравнение (1) примет вид: $4x + 0,5 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{8}$

б) при $a \neq 0$: $ax^2 + (a-4)x + 0,5 = 0$

$$D = (a-4)^2 - 2a = a^2 - 8a + 16 - 2a = a^2 - 10a + 16$$

$$D = 0; a^2 - 10a + 16 = 0 \Rightarrow a_1 = 2; a_2 = 8$$

Если $a_1 = 2$, то (1) примет вид: $2x^2 + 2x + 0,5 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 0$

$$(2x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2};$$

Если $a_2 = 8$, то (1) примет вид: $8x^2 + 4x + 0,5 = 0 \Leftrightarrow 16x^2 + 8x + 1 = 0$

$$(4x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $a = 0, a = 2, a = 8$.

ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ С
ПАРАМЕТРАМИ
НАЙДИ ОШИБКУ!

Проверь решения и исправь ошибку, если она есть.



№ 5) Решите уравнение $\frac{x}{ax+a} - \frac{2}{x+2} = \frac{3-a^2}{a(x^2+3x+2)}$ при всех значениях параметра a .

$$\frac{x}{a(x+1)} - \frac{2}{x+2} - \frac{3-a^2}{a(x+1)(x+2)} = 0$$

$$\frac{x(x+2) - 2a(x+1) - 3 + a^2}{a(x+1)(x+2)} = 0$$

$$\frac{x^2 + 2(1-a)x + (a^2 - 2a - 3)}{a(x+1)(x+2)} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + 2(1-a)x + (a^2 - 2a - 3) = 0 \\ a(x+1)(x+2) \neq 0 \end{cases}$$

Из (2) $\Rightarrow x \neq -1$ и $x \neq -2$

(1): $x^2 + 2(1-a)x + (a^2 - 2a - 3) = 0$

$$D = 4(1-a)^2 - 4(a^2 - 2a - 3) = 16$$

$$x_1 = \frac{-2(1-a) + 4}{2} = a + 1;$$

$$x_2 = \frac{-2(1-a) - 4}{2} = a - 3;$$

а) $a + 1 = -1 \Rightarrow a = -2$

$$x = a - 3; x = -2 - 3 = -5$$

б) $a - 3 = -2 \Rightarrow a = 1$

$$x = a + 1; x = 1 + 1 = 2.$$

Ответ: при $a = -2, x = -5$;

при $a = 1, x = 2$;

при $a \neq -2$ и $a \neq 1, x_1 = a + 1, x_2 = a - 3$.

РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

$ax^2 + bx + c = 0$ (1)-общий вид квадратного уравнения

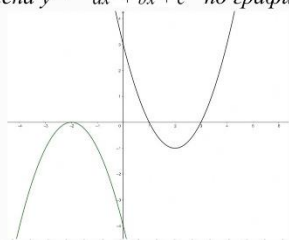


Заполните пропуски

Графиком квадратичной функции $f(x) = \dots$ является $\dots$. Если коэффициент a -положительный, то ветви направлены $\dots$, если коэффициент a -отрицательный, то ветви направлены $\dots$.
Если $D > 0$, то уравнение (1) имеет $\dots$;
 $D = 0$, то уравнение (1) имеет $\dots$;
 $D < 0$, то уравнение (1) $\dots$;

Задание:

Определить знаки коэффициентов a , b , c и дискриминанта D квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ по графикам, изображенным на рисунке.



РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

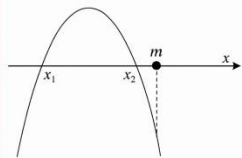
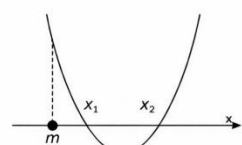
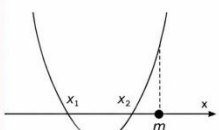
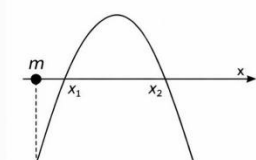


Встречаются задачи, в которых необходимо знать расположение корней квадратного трехчлена по отношению к некоторому числу или числам. Условия расположения корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c = 0$ относительно некоторых чисел A и B приводятся в следующих таблицах.

Условия на корни	$a > 0$	$a < 0$
$x_1 < A, x_2 < A$ 	$-\frac{b}{2a} < A, f(A) > 0$ 	$-\frac{b}{2a} < A, f(A) < 0$
$x_1 < A < x_2$ 	$f(A) < 0$ 	$f(A) > 0$
$x_1 > A, x_2 > A$ 	$-\frac{b}{2a} > A, f(A) > 0$ 	$-\frac{b}{2a} > A, f(A) < 0$
$A < x_1 < B, A < x_2 < B$ 	$A < -\frac{b}{2a} < B, f(A) > 0, f(B) > 0$ 	$A < -\frac{b}{2a} < B, f(A) < 0, f(B) < 0$
$x_1 < A, A < x_2 < B$ 	$f(A) < 0, f(B) > 0$ 	$f(A) > 0, f(B) < 0$
$B < x_2, A < x_1 < B$ 	$f(A) > 0, f(B) < 0$ 	$f(A) < 0, f(B) > 0$
$x_1 < A, x_2 > B$ 	$f(A) < 0, f(B) < 0$ 	$f(A) > 0, f(B) > 0$

РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

Запишите условия, которые выполняются на этих рисунках:



ПРИМЕР

При каких значениях k оба корня меньше 1?

$$(1+k)x^2 - 3kx + 4k = 0$$

1) Согласно таблице (1 случай):

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac > 0, \\ x_B = \frac{-b}{2a} > A, \\ f(A) > 0. \end{cases}$$

$$D = (-3k)^2 - 4(k+1) \cdot 4k = -7k^2 - 16k;$$

$$x_B = \frac{-3k}{1+k} = \frac{3k}{1+k};$$

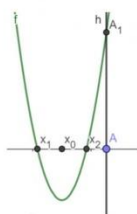
$$f(A) = f(1) = 1 + k - 3k + 4k = 1 + 2k.$$

2) т.к. в условии не сказано, что корни различные, то система будет иметь вид:

$$\begin{cases} -7k^2 - 16k \geq 0; \\ \frac{3k}{1+k} < 1; \\ 1 + 2k > 0. \end{cases}$$

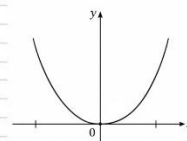
Решая систему, находим $k \in (-\frac{1}{2}; 0]$.

Ответ: $k \in (-\frac{1}{2}; 0]$

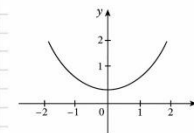


РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

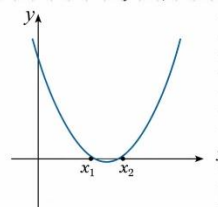
1. Для каких k график
 $f(x) = x^2 + 2(k-1)x + k^2$
имеет следующий вид:



2. Для каких k график
 $f(x) = x^2 + kx + 4$
имеет следующий вид:

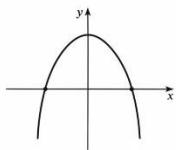


3. Для каких k график
 $f(x) = x^2 - 2(k+1)x + k$
имеет следующий вид:

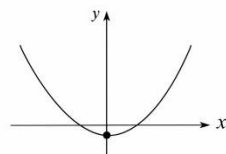


РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

4. Для каких k график
 $f(x) = -x^2 + kx + 3$
имеет следующий вид:



5. Для каких k график
 $f(x) = x^2 + kx + k$
имеет следующий вид:



РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

6. При значениях параметра a корни уравнения $x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 = 0$
удовлетворяют неравенству $x > 5$

**РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ
КВАДРАТНОГО
ТРЕХЧЛЕНА**

7. Найдите все значения a , при каждом из которых корни уравнения больше числа 3

$$x^2 - 6ax + 9a^2 - 2a + 2 = 0$$

**РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ
КВАДРАТНОГО
ТРЕХЧЛЕНА**

8. Найдите все значения a , при каждом из которых корни уравнения лежат по разные стороны от числа 3: $x^2 - (2a + 1)x + 4 - a = 0$

**РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ
КВАДРАТНОГО
ТРЕХЧЛЕНА**

9. Найдите все значения a , при каждом из которых ровно один корень уравнения принадлежит отрезку $[-1; 1]$: $5x^2 - 10ax + 4a^2 - 1 = 0$

**РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ
КВАДРАТНОГО
ТРЕХЧЛЕНА**

10. Найдите все значения a , при каждом из которых корни уравнения лежат в интервале $(2; 5)$: $(a + 1)x^2 - 3ax + 4a = 0$

**РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ
КВАДРАТНОГО
ТРЕХЧЛЕНА**

11. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение не имеет решений: $x^2 + \frac{1}{x^2} + p(x + \frac{1}{x}) = 2$

**РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ
КВАДРАТНОГО
ТРЕХЧЛЕНА**

12. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых уравнение имеет ровно 2 различных решения: $a(x + \frac{1}{x})^2 + 5(x + \frac{1}{x}) - 9a + 15 = 0$

РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите все значения a , при каждом из которых оба корня уравнения принадлежат отрезку $(0; 2]$: $2x^2 - (6-a)x + 3a - a^2 = 0$

2. При каких a корни уравнения $x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 = 0$ меньше 3

3. При каких a корни уравнения $x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 = 0$ удовлетворяют неравенству $|x| < 6$

4. При каких a корни уравнения $(a+1)x^2 - (2a+1)x + a - 2 = 0$ будут положительными?

1. Что нового ты узнал/а на уроке?

2. Что было непонятно?

3. Выбери смайлик, который соответствует твоему состоянию



Комментарий учителя:

РАСПОЛОЖЕНИЕ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

Ответы

Задание:

I $-a > 0, b < 0, c > 0, D > 0$;

II $-a < 0, b < 0, c < 0, D = 0$;

1. $k = \frac{1}{2}$;

2. $-4 < k < 4$;

3. $k > 0$;

4. $k \in \mathbb{R}$;

5. $k < 0$;

6. $a \in [6; 10)$;

7. $a > \frac{11}{9}$;

8. $a > \frac{10}{7}$;

9. $a \in [-2; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 2]$;

10. $a \in [-\frac{16}{7}; 2)$;

11. нет таких значений p ;

12. $a \in \{0; \frac{5}{6}\} \cup (1; 5)$.

Ответы заданий для самостоятельного решения

1. $a \in [1; 3)$;

2. $a \in (\frac{2}{3}; 1]$;

3. $a \in (-\frac{43}{21}; 1]$;

4. $a \in (-\frac{9}{8}; -1] \cup (2; \infty]$.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: очная

Утверждаю: зав. кафедрой
«12» 09 2025 г.
Паньженский В.И.

Задание

по ВКР студента Исяновой Дианы Рамильевны
(ФИО полностью)

Тема работы «Методические аспекты темы "Рациональные уравнения с параметром"»

Утверждена приказом по университету от «25.09» 2025 г. № 1103/0

Срок сдачи студентом законченной работы «15» 05 2026 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Анализ литературы по теме работы	Сентябрь – октябрь 2025	выполнено
2.	Изучение основных понятий	Ноябрь 2025	выполнено
3.	Анализ методов решения рациональных уравнений с параметром	Декабрь 2025	выполнено
4.	Анализ учебной литературы	Январь 2026	выполнено
5.	Составление рабочих листов	Февраль – март 2026	выполнено
6.	Оформление библиографического списка	Апрель 2026	выполнено
7.	Оформление работы, подготовка презентации и выступления	Май – июнь 2026	выполнено

Дата выдачи задания « 11 » 09 2025 г.

Руководитель Мф Монахова О.А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению Ис Исянова Д.Р.
(подпись) (Ф.И.О.)

И. о. ректора Пензенского
государственного университета
С.М. Васину
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Исяновой Дианы Рамильевны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Исянова Диана Рамильевна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «*Методические аспекты темы "Рациональные уравнения с параметром"*», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


ПОДПИСЬ
14.05.26
ДД.ММ.ГГГГ

ВКР представлена на проверку 14.05.26
ДД.ММ.ГГГГ

Руководитель ВКР 
подпись

О. А. Монахова
И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ»

выпускной квалификационной работы на тему:

«Методические аспекты темы "Рациональные уравнения с параметром"»

студентки 4 курса Исяновой Дианы Рамильевны

направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,

профиль подготовки «Математика»

Руководитель ВКР Монахова Оксана Александровна

Отчет о проверке

Автор: Исянова Диана Рамильевна
Название документа: ВКР_Исянова

Проверяющий: Монахова Оксана Александровна
Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
28,77%



Цитирование:
5,55%



Оригинальность:
65,68%



Самоцитирование:
0%



ИИ-контент:
14,46%



ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 6000001

Тип документа: Выпускная квалификационная работа

Дата проверки: 15.05.2026 01:13:18

Дата корректировки: Нет

Количество страниц: 100

Символов в тексте: 58845

Слов в тексте: 7664

Число предложений: 561

15.05.26

ДД.ММ.ГГГГ.

подпись

Монахова О.А.

Ф.И.О руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методические аспекты темы
"Рациональные уравнения с параметром"»
студентки Исяновой Дианы Рамильевны
факультета физико-математических и естественных наук направления
подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 22ФПМ1

Работа посвящена актуальной проблеме – обучению решению рациональных уравнений с параметрами в школе. Выбор темы обусловлен низкими результатами выполнения заданий с параметрами в ОГЭ и ЕГЭ, недостатком часов и дефицитом разноуровневых заданий в учебниках.

Проведён обзор методической литературы и анализ школьных учебников 7–11 классов, выявлена фрагментарность освещения темы. На основе статистики ФИПИ систематизированы типичные ошибки учащихся (шаблонное применение алгоритмов, потеря ОДЗ, некорректный разбор частных случаев).

Основной практический результат – комплект рабочих листов разного уровня сложности для изучения рациональных уравнений с параметрами. Методически ценным является включение заданий типа «Найди ошибку» и самостоятельное составление уравнений для плавного перехода от простых примеров к комплексным задачам. На основе материалов создана рабочая тетрадь.

Методические рекомендации позволяют педагогу гибко использовать листы на уроках и факультативных занятиях, в том числе в 10–11 классах при повторении.

Работа выполнена на высоком методическом уровне, имеет чёткую практическую направленность, соответствует требованиям к ВКР, заслуживает оценки «отлично».

Руководитель ВКР:
Монахова Оксана Александровна,
кафедра «Математическое образование»
Педагогического института
им. В.Г. Белинского, ПГУ, доцент,
доцент, кандидат физико-математических наук

