

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

*Факультет*

*Кафедра*

вычислительной техники

(наименование)

Высшая и прикладная математика

(наименование)

Направление подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»  
(код и наименование)

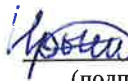
Профиль Математическое моделирование в экономике и технике  
(код и наименование)

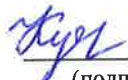
## МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

на тему

РАЗНОСТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ФАЗОВЫМИ ПЕРЕХОДАМИ

Студент 17ВГм2  17.06.19 Ирышкова Ю.В.  
(группа) (подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Руководитель к.ф.-м.н., доцент  17.06.19 Кудряшова Н.Ю.  
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролер к.т.н., доцент  17.06.19 Тарасов Д. В.  
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Рецензент д.т.н., профессор, зав. кафедрой  
(должность, место работы)  
«Физика и химия» ФГБОУ ВО ПГУАС  17.06.19 Грейсух Г. И.  
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 24.05.19 № 9)

Заведующий кафедрой д.ф.-м.н., проф.  17.06.19 Бойков И. В.  
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с отметкой отм. (протокол заседания ГЭК от 24.06.19 № 3)

Секретарь ГЭК к.пед.н., доцент  24.06.19 Зверовщикова Н. В.  
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2019

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Политехнический институт

*Факультет*

Вычислительной техники  
(наименование)

*Кафедра*

Высшая и прикладная математика  
(наименование)

«УТВЕРЖДАЮ»

Заведующий кафедрой  
И. В. Бойков

(подпись, инициалы, фамилия)

«29» ноября 2017 г.

**ЗАДАНИЕ**

**на магистерскую диссертацию**

1. Студент Ирышкова Юлия Витальевна гр. 17ВГм2  
(фамилия, имя, отчество)  
факультета вычислительной техники

2. Тема работы Разностные методы решения задачи теплопроводности с фазовыми переходами

Тема утверждена приказом по ПГУ № 1219а/о от « 29 » ноября 2017 г.

3. Руководитель работы к.ф.-м.н. Кудряшова Н.Ю.

4. Задание на работу (назначение разработки, исходные данные и т.п.)

1 Построить разностные схемы решения одномерной и многомерной двухфазной задачи Стефана

2 Получить оценку порядка аппроксимации и условия устойчивости разностных схем

3 Разработать программную реализацию всех вычислительных алгоритмов

4 С помощью разработанных программ решить модельные задачи, провести сравнение полученных результатов, сделать выводы

5. Перечень подлежащих разработке вопросов

1 Обзор литературы

2 Постановка задачи

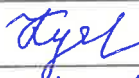
3 Разработка разностных схем

4 Построение алгоритмов решения разностных схем

5 Решение модельных примеров

6 Выводы

6. Календарный график по выполнению проекта

| Наименование этапов работы                        | Объем работы | Срок выполнения | Подпись руководителя                                                                  |
|---------------------------------------------------|--------------|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Обзор литературы                               | 10 %         | 27.04.19        |   |
| 2. Разработка численных алгоритмов задачи Стефана | 30 %         | 10.05.19        |  |
| 3. Разработка программ                            | 30 %         | 22.05.19        |  |
| 4. Решение модельных задач                        | 20 %         | 3.06.19         |  |
| 5. Оформление пояснительной записки               | 10 %         | 14.06.19        |  |

Дата выдачи задания «29» ноября 2017 г.

Руководитель магистерской работы  Н.Ю. Кудряшова  
(подпись, инициалы, фамилия)

Задание к исполнению принял студент  17.06.19 Ю.В. Ирышкова  
(подпись, дата, инициалы, фамилия)

Работу к защите допустить  
Декан факультета  19.06.2019 Л. Р. Фионова  
(подпись, инициалы, фамилия)

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                              |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| ВВЕДЕНИЕ .....                                                                               | 4  |
| 1. ЗАДАЧА СТЕФАНА. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ .....                                                      | 6  |
| 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ<br>О ПРОМЕРЗАНИИ ГРУНТА.....                          | 7  |
| 2.1. Постановка задачи о промерзании грунта.....                                             | 7  |
| 2.2. Метод ловли фронта в узел пространственной сетки.....                                   | 8  |
| 2.3. Метод преобразования координат .....                                                    | 11 |
| 2.4. Исследование аппроксимации, устойчивости и сходимости .....                             | 13 |
| 2.4.1. Исследование аппроксимации метода ловли фронта в узел<br>пространственной сетки ..... | 14 |
| 2.4.2 Исследование аппроксимации метода преобразования<br>координат .....                    | 20 |
| 3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЛАЗЕРНОЙ<br>СВАРКИ ДВУХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН ..... | 26 |
| 3.1. Постановка задачи о процессе лазерной сварки .....                                      | 27 |
| 3.2. Математическая модель процесса лазерной сварки .....                                    | 29 |
| 3.3. Модель процесса формирования парогазового канала .....                                  | 32 |
| 3.4. Краевые условия для многомерного уравнения теплопроводности                             | 34 |
| 3.5. Условия на поверхности парогазового канала .....                                        | 34 |
| 3.6. Условия на верхней и нижней поверхностях свариваемых<br>металлических пластин .....     | 37 |
| 3.7. Условия на периферии .....                                                              | 38 |
| 3.8. Численный метод.....                                                                    | 38 |
| 4. РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ.....                                                              | 40 |
| 4.1. Вычислительная схема метода ловли фронта в узел пространственной<br>сетки.....          | 41 |
| 4.2. Вычислительная схема метода преобразования координат.....                               | 43 |
| 4.3. Численное моделирование задачи о промерзании грунта .....                               | 44 |

|                                                                                                                 |    |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.4. Исследование на устойчивость метода ловли фронта в узел пространственной сетки.....                        | 50 |
| 4.5. Исследование на устойчивость метода преобразования координат...                                            | 51 |
| 4.6 Вычислительная схема для трехмерной задачи теплопроводности с фазовыми переходами .....                     | 52 |
| 4.7. Численное моделирование задачи о процессе лазерной сварки двух металлических пластин .....                 | 55 |
| 4.8. Исследование на устойчивость метода решения трехмерной задачи теплопроводности с фазовыми переходами ..... | 58 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....                                                                                                | 61 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....                                                                           | 62 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ А. Листинг программы для метода ловли фронта в узел пространственной сетки.....                      | 64 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Листинг программы для метода преобразования координат .....                                       | 67 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ В. Листинг программы для решения трехмерного уравнения теплопроводности с фазовыми переходами .....  | 70 |

## ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время подавляющее большинство проблем теплообмена связаны с изменением состояния вещества.

Следует отметить, что исследования в данном направлении применяются на практике во многих физических процессах: задачи о промерзании и оттаивании влажного грунта, об образовании льда на поверхности воды, о промерзании трубопроводов, о сварке, плавлении, затвердевании металла и др.

Решение задач Стефана имеет большое практическое значение в строительстве, в нефтегазодобыче, в металлургии и в других областях.

Процесс изменения физического состояния происходит при изменении температуры тела. К примеру, при охлаждении ниже точки плавления происходит переход из жидкой фазы в твердую.

В данной работе будет исследован особый класс математических моделей, который описывает физические процессы с фазовыми переходами. Одной из характерных особенностей которых является ранее неизвестное и изменяющееся с течением времени положение межфазной границы.

Одним из примеров физических процессов, иллюстрирующих задачу Стефана в одномерном случае, является задача о промерзании грунта. Ее можно представить как замкнутую систему, в которой с течением времени в зависимости от температуры среды происходит изменение значения коэффициента теплопроводности  $\lambda$ .

В данной работе представлено сравнение двух численных методов решения задачи о промерзании грунта, приведено исследование в области нахождения функциональной зависимости уровня смещения межфазной границы от времени.

Также графически представлен процесс изменения температуры в грунте с течением времени.

Примером физического процесса иллюстрирующего задачу Стефана в трехмерном случае является задача о моделировании процесса лазерной сварки металлических пластин.

В процессе сварки под воздействием больших температур происходит переход из твердой фазы металла в жидкую. При этом происходит формирование межфазной границы. Определение изменения ее положения с течением времени является актуальной научной проблемой.

Отдельное внимание в работе уделяется разработке и построению алгоритмов отыскания приближенных решений вышеописанных задач, а также их численной реализации в одномерном и трехмерном случаях.

К каждому физическому процессу разработан свой численный метод, описана разностная схема и метод получения ее приближенного решения.

## 1. ЗАДАЧА СТЕФАНА. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ

В настоящее время существует огромное количество различных постановок задач теплопроводности с фазовыми переходами.

Одним из классических примеров подобных задач является задача о промерзании льда. Которую в конце XIX века описал австрийский физик и математик Йозеф Стефан, также он отнес ее к новому классу задач с подвижными межфазными границами.

В литературе задачу Стефана также называют задачей с фазовыми переходами.

Задача Стефана представляет собой особый вид краевой задачи для дифференциального уравнения в частных производных, описывающая изменение фазового состояния вещества, при котором положение границы раздела фаз изменяется со временем.

Общие принципы:

1. Наличие границ раздела между фазами, которые не задаются явно и могут смещаться со временем;
2. Скорость смещения межфазных границ определяется дополнительным условием на границе раздела фаз, что приводит задачу к нелинейному виду.

В настоящее время изучено огромное количество различных видов задач Стефана, все они отличаются количеством фаз, границ и размерностью задач.

Было разработано большое количество аналитических и численных методы решения задачи Стефана в одномерном и многомерном случаях.

Однако, разработка численных методов решения задачи теплопроводности с фазовыми переходами позволяющих получить наиболее точные результаты является актуальной научной проблемой.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧИ О ПРОМЕРЗАНИИ ГРУНТА

### 2.1. Постановка задачи о промерзании грунта

При моделировании процесса промерзания грунта введем различные теплофизические характеристики. [1] Следует отметить, что они будут идентичны как для талой, так и для промерзшей зоны грунта.

- $\lambda_1, \lambda_2$  – коэффициенты теплопроводности  $(Вт / (м \cdot К))$ ,
- $\rho_1, \rho_2$  – плотности грунта  $(кг / м^3)$ ,
- $c_1, c_2$  – удельные теплоемкости  $(Дж / (кг \cdot К))$ ,
- $Q_\phi$  – теплота фазового перехода  $(Дж / кг)$ ,
- $\xi = f(t)$  – глубина промерзшего слоя.

Данная задача рассматривается в слое грунта глубиной  $L$  и влажностью  $w$ .

В начальный момент времени грунт находится в талом состоянии при наличии некоторой постоянной температуры  $T_0$ . На поверхности грунта в начальный момент времени устанавливается температура  $T_c$ . Температуру замерзания будем обозначать –  $T_\phi$ .

Математическое моделирование данного процесса происходит в предположении, что теплоперенос в грунте происходит только благодаря теплопроводности.

Как отмечалось ранее, определение положения межфазной границы  $\xi(t)$  является актуальной научной проблемой.

Рассмотрим одномерную двухфазовую задачу Стефана с граничным условием второго рода на нижней границе [2].

$$\begin{cases} \frac{\partial T_1}{\partial t} = a_1 \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2}, 0 < x < \xi(t), t > 0; \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2}, \xi(t) < x < L, t > 0; \end{cases} \quad (2.1.1)$$

$$\begin{aligned}
& t = 0 : T(x) = T_0, 0 \leq x \leq L; \\
& x = 0 : T(t) = T_c, t > 0; x = L : \frac{\partial T}{\partial x} = 0, t > 0; \\
& x = \xi(t) : \begin{cases} T_1 = T_2 = T_\phi; \\ \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x} - \lambda_2 \frac{\partial T_2}{\partial x} = Q_\phi \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} \omega \frac{d\xi}{dt}; \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

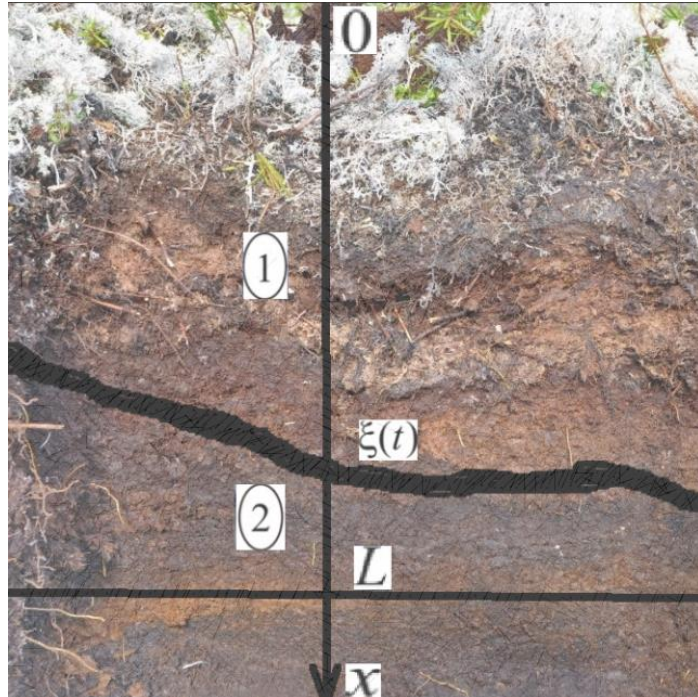


Рисунок 1 – Схема процесса теплообмена в грунте

Следует отметить, что на рисунке 1 промерзшая часть грунта ( $0 \leq x \leq \xi(t)$ ) обозначается, как фаза 1, а талая часть грунта ( $\xi(t) \leq x \leq L$ ), как фаза 2.

Далее опишем численные методы решения задачи теплопроводности с фазовыми переходами первого порядка (2.1.1) - (2.1.2).

## 2.2. Метод ловли фронта в узел пространственной сетки

Применим метод ловли фронта в узел пространственной сетки к нахождению приближенного решения задачи (2.1.1) - (2.1.2).

Введем равномерную сетку по пространственной переменной

$$x_i = (i-1)h, h = \frac{L}{N-1}, i = \overline{1, N}, x_1 = 0, x_N = L. \quad (2.2.1)$$

А к переменной по времени применим неравномерную сетку

$$t_{n+1} = t_n + \tau_{n+1}, n = \overline{0, M-1}, t_0 = 0, t_M = t_{\text{конечное}}, \tau_{n+1} > 0. \quad (2.2.2)$$

Шаг  $\tau_{n+1}$  выберем таким образом, чтобы за это время граница фазового перехода сдвинулась ровно на один шаг по пространственной сетке.

Или можно ввести следующее соотношение

$$\frac{d\xi}{dt} \approx \frac{h}{\tau_{n+1}}. \quad (2.2.3)$$

Разобьем исходную задачу на две подзадачи (в талой и промерзшей зонах грунта). Для решения каждой схемы будем применять метод разностной прогонки.

Задача теплопроводности (2.1.1) - (2.1.2) в промерзшей части грунта будет аппроксимироваться разностной схемой вида

$$\begin{aligned} \frac{T_{1,j}^{n+1} - T_{1,j}^n}{\tau_{n+1}} &= \frac{T_{1,j+1}^{n+1} - 2T_{1,j}^{n+1} + T_{1,j-1}^{n+1}}{h^2}, i = \overline{2, i^* - 1}; \\ T_1|_{i=1} &= T_c; \\ T_1|_{i=i^*} &= T_3; \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

где  $i = i^*$  – граница фазового перехода.

Для получения приближенного решения исходной задачи в талой части грунта, воспользуемся следующей разностной схемой

$$\begin{aligned} \frac{T_{2,j}^{n+1} - T_{2,j}^n}{\tau_{n+1}} &= \frac{T_{2,j+1}^{n+1} - 2T_{2,j}^{n+1} + T_{2,j-1}^{n+1}}{h^2}, i = \overline{i^* + 1, N-1}; \\ T_2|_{i=i^*} &= T_3; \\ \left. \frac{\partial T_2}{\partial x} \right|_{i=N} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Далее будем аппроксимировать условия на границе фазового перехода с погрешностью  $O(h^2)$ . [1]

Разложим искомую функцию в ряд Тейлора в окрестности точки  $x = \xi$

$$\begin{aligned}
T_{i^*+1}^{n+1} &= T_{i^*}^{n+1} + h \frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi}^{n+1} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} \Big|_{x=\xi}^{n+1}; \\
T_{i^*-1}^{n+1} &= T_{i^*}^{n+1} - h \frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi}^{n+1} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} \Big|_{x=\xi}^{n+1}.
\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Из системы уравнений (2.1.1) находим:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial T_1}{\partial x} \Big|_{x=\xi}^{n+1} &= \frac{1}{h} (T_{i^*}^{n+1} - T_{i^*-1}^{n+1}) + \frac{h}{2a_1 \tau_{n+1}} (T_{i^*}^{n+1} - T_{i^*}^n); \\
\frac{\partial T_2}{\partial x} \Big|_{x=\xi}^{n+1} &= \frac{1}{h} (T_{i^*+1}^{n+1} - T_{i^*}^{n+1}) - \frac{h}{2a_2 \tau_{n+1}} (T_{i^*}^{n+1} - T_{i^*}^n).
\end{aligned} \tag{2.2.7}$$

Подставим (2.2.7) в граничное условие, получим

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 \left( \frac{1}{h} (T_{i^*}^{n+1} - T_{i^*-1}^{n+1}) + \frac{h}{2a_1 \tau_{n+1}} (T_{i^*}^{n+1} - T_{i^*}^n) \right) - \\
&- \lambda_2 \left( \frac{1}{h} (T_{i^*+1}^{n+1} - T_{i^*}^{n+1}) - \frac{h}{2a_2 \tau_{n+1}} (T_{i^*}^{n+1} - T_{i^*}^n) \right) = \\
&= Q_\phi \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} \omega \frac{h}{\tau_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Т.к.  $T_{1i^*} = T_{2i^*} = T_3$ , то для шага по времени  $\tau_{n+1}$  получим следующее выражение

$$\tau_{n+1} = \frac{a_1 a_2 h^2 Q_\phi (\rho_1 + \rho_2) \omega - h^2 (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1) (T_3 - T_{i^*}^n)}{2a_1 a_2 \left[ \lambda_1 (T_3 - T_{i^*-1}^{n+1}) - \lambda_2 (T_{i^*+1}^{n+1} - T_3) \right]}. \tag{2.2.8}$$

Аналогичным способом получим выражение для функции на границе области с погрешностью аппроксимации  $O(h^2)$ .

Также, как и в предыдущем случае, воспользуемся разложением искомой функцией в ряд Тейлора.

$$T_{N-1}^{n+1} = T_N^{n+1} - h \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L}^{n+1} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{x=L}^{n+1} = T_N^{n+1} - h \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L}^{n+1} + \frac{h^2}{2a} \frac{\partial T}{\partial t} \Big|_{x=L}^{n+1}; \tag{2.2.9}$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=L}^{n+1} = \frac{T_{N-1}^{n+1} - T_N^{n+1}}{h} + \frac{h}{2a} \frac{T_N^{n+1} - T_N^n}{\tau}.$$

Таким образом, выражение для нахождения значения искомой функции на границе будет иметь вид:

$$T_N^{n+1} = \frac{2a\tau T_{N-1}^{n+1} + h^2 T_N^n}{2a\tau + h^2}. \quad (2.2.10)$$

Разностная схема для решения методом ловли фронта в узел пространственной сетки задачи (2.1.1) - (2.1.2) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{T_{1i}^{n+1} - T_{1i}^n}{\tau_{n+1}} &= a_1 \frac{T_{1i+1}^{n+1} - 2T_{1i}^{n+1} + T_{1i-1}^{n+1}}{h^2}, i = 2, \dots, i^* - 1; \\ \frac{T_{2i}^{n+1} - T_{2i}^n}{\tau_{n+1}} &= a_1 \frac{T_{2i+1}^{n+1} - 2T_{2i}^{n+1} + T_{2i-1}^{n+1}}{h^2}, i = i^* - 1, \dots, N - 1; \\ T_1 \Big|_{i=1} &= T_c; \\ T_1 \Big|_{i=i^*} &= T_{fr}; \\ T_2 \Big|_{i=i^*} &= T_{fr}; \\ \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{i=N} &= 0; \\ \lambda_1 \frac{T_{1,i^*} - T_{1,i^*-1}}{h} - \lambda_2 \frac{T_{2,i^*+1} - T_{2,i^*}}{h} &= Q_\phi \rho w \frac{h}{\tau_{n+1}}. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

### 2.3. Метод преобразования координат

Для решения одномерной задачи (2.1.1) - (2.1.2) методом преобразования координат будем использовать замены переменной  $x$  для промерзшей и талой зон грунта. [3]

Замену будем производить таким образом, чтобы новая введенная переменная  $\xi$  находилась в фиксированной области.

Введем следующие замены:

- В промерзшей области:

$$\xi = \frac{x}{s(t)}; 0 \leq x \leq s(t); x = 0 \rightarrow \xi = 0; x = s(t) \rightarrow \xi = 1. \quad (2.3.1)$$

- В талой области:

$$\xi = \frac{x-L}{s(t)-L}; s(t) \leq x \leq L; x=L \rightarrow \xi=0; x=s(t) \rightarrow \xi=1. \quad (2.3.2)$$

В фазе 1 в соответствии с введённой заменой ( $T_1(x,t)=T_1(\xi(s(t)),t)$ ) частные производные в задаче (2.1.1) - (2.1.2) будут иметь вид:

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{\xi}{s(t)} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} \frac{\partial s}{\partial t}; \frac{\partial T_1}{\partial x} = \frac{1}{s(t)} \frac{\partial T_1}{\partial \xi}; \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} = \frac{1}{s^2(t)} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2}. \quad (2.3.3)$$

А в фазе 2 искомая функция примет следующий вид  $T_2(x,t)=T_2(\xi(s(t)),t)$ .

Частные производные в талой зоне грунта при условии замены (2.3.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_2}{\partial x} &= \frac{1}{s(t)-L} \frac{\partial T_2}{\partial \xi}; \quad \frac{\partial T_2}{\partial t} = -\frac{\xi}{s(t)-L} \frac{\partial T_2}{\partial \xi} \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial T_2}{\partial t}; \\ \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} &= \frac{1}{(s(t)-L)^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \xi^2}. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Также рассмотрим изменения начальных и граничных условий с учетом вышеописанных замен:

$$\begin{aligned} t=0, 0 \leq x \leq L &\rightarrow t=0, 0 \leq \xi \leq 1; \\ T_1(\xi, 0) &= T_2(\xi, 0) = T_0; \\ x=0 &\rightarrow \xi=0; T_1(0, t) = T_c; \\ x=L &\rightarrow \xi=0; \frac{\partial T_2(0, t)}{\partial x} = \frac{1}{s(t)-L} \frac{\partial T_2(0, t)}{\partial \xi} = 0; \\ x=s(t) &\rightarrow \xi=1; \begin{cases} T_1(1, t) = T_2(1, t) = T_f; \\ \lambda_1 \frac{1}{s(t)} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} - \lambda_2 \frac{1}{s(t)-L} \frac{\partial T_2}{\partial \xi} = Q_\phi \rho_w \frac{ds}{dt}; \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Далее представлена исходная задача теплопроводности (2.1.1) - (2.1.2) при подстановке в нее (2.3.3) - (2.3.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial t} &= a_1 \frac{1}{s^2(t)} \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} + \frac{\xi}{s(t)} \frac{\partial T_1}{\partial \xi} \frac{ds}{dt}, 0 < \xi < 1, t > 0; \\ \frac{\partial T_2}{\partial t} &= a_2 \frac{1}{(s(t)-L)^2} \frac{\partial^2 T_2}{\partial \xi^2} + \frac{\xi}{s(t)-L} \frac{\partial T_2}{\partial \xi} \frac{ds}{dt}, 0 < \xi < 1, t > 0; \\ t=0: T_1(\xi) &= T_2(\xi) = T_0, 0 \leq \xi \leq 1; \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

$$\xi = 0: T_1(0, t) = T_c, t > 0; \frac{1}{s(t) - L} \frac{\partial T_2(0, t)}{\partial \xi} = 0;$$

$$\xi = 1: T_1(1, t) = T_2(1, t) = T_{fr};$$

$$\lambda_1 \frac{1}{s(t)} \frac{\partial T_1(1, t)}{\partial \xi} - \lambda_2 \frac{1}{s(t) - L} \frac{\partial T_2(1, t)}{\partial \xi} = Q_\phi \rho w \frac{ds}{dt},$$

где  $a_i = \frac{k_i}{c_i}, i = 1, 2$ .

Введем равномерные сетки по пространству и времени:

$$\xi_j = jh, j = \overline{0, N}; \xi_0 = 0, \dots, \xi_N = 1; h = \frac{1}{N}; \quad (2.3.7)$$

$$t_n = \tau n, n = 0, \dots, M; t_0 = 0, \dots, t_M = t_{end}; \tau = \frac{t_{end}}{M}.$$

Получим разностную схему для решения уравнения теплопроводности с фазовыми переходами методом преобразования координат:

$$\begin{aligned} a_1 \frac{T_{1,j+1}^{n+1} - 2T_{1,j}^{n+1} + T_{1,j-1}^{n+1}}{h^2} + s^{n+1} \xi_j \frac{s^{n+1} - s^n}{\tau} \frac{T_{1,j+1}^{n+1} - T_{1,j-1}^{n+1}}{2h} - (s^{n+1})^2 \frac{T_{1,j}^{n+1} - T_{1,j}^n}{\tau} &= 0; \\ a_2 \frac{T_{2,j+1}^{n+1} - 2T_{2,j}^{n+1} + T_{2,j-1}^{n+1}}{h^2} + (s^{n+1} - L) \xi_j \frac{s^{n+1} - s^n}{\tau} \frac{T_{2,j+1}^{n+1} - T_{2,j-1}^{n+1}}{2h} - (s^{n+1} - L)^2 \frac{T_{2,j}^{n+1} - T_{2,j}^n}{\tau} &= 0; \\ T_{1,j}^0 = T_0; T_{2,j}^0 = T_0; j = \overline{0, N}; \\ T_{1,0}^n = T_c; n = \overline{0, M}; \\ T_{1,N}^n = T_{fr}; n = \overline{0, M}; \\ \frac{T_{2,1}^n - T_{2,0}^n}{h} = 0; n = \overline{0, M}; \\ T_{2,N}^n = T_{fr}; n = \overline{0, M}; \\ \lambda_1 \frac{1}{s^n} \frac{T_{1,N}^n - T_{1,N-1}^n}{h} - \lambda_2 \frac{1}{s^n - L} \frac{T_{2,1}^n - T_{2,0}^n}{h} = Q_f \rho w \frac{s^{n+1} - s^n}{\tau}; n = \overline{0, M}. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

## 2.4. Исследование аппроксимации, устойчивости и сходимости

Проведем исследование аппроксимации методов ловли фронта в узел пространственной сетки и метода преобразования координат для решения одномерной задачи теплопроводности с фазовыми переходами.

### 2.4.1. Исследование аппроксимации метода ловли фронта в узел пространственной сетки

Для начала рассмотрим промерзшую часть грунта задачи (2.1.1) - (2.1.2). Оценим погрешность аппроксимации первого уравнения разностной схемы (2.2.4)

$$\frac{T_{1,i}^{n+1} - T_{1,i}^n}{\tau_{n+1}} = a_1 \frac{T_{1,i+1}^{n+1} - 2T_{1,i}^{n+1} + T_{1,i-1}^{n+1}}{h^2}, i = 2, \dots, i^* - 1; \quad (2.4.1.1)$$

Введем функцию решения разностной задачи (2.2.4)

$$z_1 = v_1 - T_1 v_1, \quad (2.4.1.2)$$

где  $T_1$  – функция решения в фазе 1.

Тогда

$$\frac{z_{1,i}^{n+1} - z_{1,i}^n}{\tau_{n+1}} = a_1 \frac{z_{1,i+1}^{n+1} - 2z_{1,i}^{n+1} + z_{1,i-1}^{n+1}}{h^2} + \psi_1^1, \quad (2.4.1.3)$$

где  $\psi_1^1 = a_1 \frac{T_{1,i+1}^{n+1} - 2T_{1,i}^{n+1} + T_{1,i-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{T_{1,i}^{n+1} - T_{1,i}^n}{\tau_{n+1}}$  – функция погрешности.

При условии, что  $T_1(x, t) \in C_2^4(G)$ , а  $G = \{(x, t) | 0 < x < s(t), t > 0\}$ . Применим к функции решения в промерзшей зоне грунта  $T_1$  формулу Тейлора в окрестности узла  $(x_t, t_{n+1})$ . [4]

$$\begin{aligned} T_{1,j+1}^{n+1} &= T_1 + hT_1' + \frac{h^2}{2}T_1'' + \frac{h^3}{6}T_1''' + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 T_1(x, t_{n+1})}{\partial x^4}, x \in (x_i, x_{i+1}); \\ T_{1,j-1}^{n+1} &= T_1 - hT_1' + \frac{h^2}{2}T_1'' - \frac{h^3}{6}T_1''' + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 T_1(x, t_{n+1})}{\partial x^4}, x \in (x_{i-1}, x_i); \\ T_{1,j}^{n+1} &= T_1 - \tau_{n+1}\dot{T}_1 + \frac{\tau_{n+1}^2}{2}\frac{\partial^2 T_1(x_i, \tilde{t})}{\partial t^2}, \tilde{t} \in (t_n, t_{n+1}). \end{aligned} \quad (2.4.1.4)$$

Погрешности  $\psi_2^1$  и  $\psi_3^1$  для граничных условий равны нулю.

Тогда функция погрешности  $\psi^1$  в промерзшей части грунта имеет вид

$$\bar{\psi}^{-1} = \begin{pmatrix} \psi_1^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4.1.5)$$

Получим

$$\begin{aligned} \psi_1^1 = & a_1 \frac{T_1 + hT_1' + \frac{h^2}{2}T_1'' + \frac{h^3}{6}T_1''' + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 T_1(x, t_{n+1})}{\partial x^4}}{h^2} + \\ & + \frac{-2T_1 + T_1 - hT_1' + \frac{h^2}{2}T_1'' - \frac{h^3}{6}T_1''' + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 T_1(x, t_{n+1})}{\partial x^4}}{h^2} - \\ & - \frac{T_1 - T_1 + \tau_{n+1} \dot{T}_1 - \frac{\tau_{n+1}^2}{2} \frac{\partial^2 T_1(x_i, \tilde{t})}{\partial t^2}}{\tau_{n+1}} = a_1 \left( T_1'' + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 T_1(\bar{x}, t_{n+1})}{\partial x^4} \right) - \dot{T}_1 + \frac{\tau_{n+1}}{2} \frac{\partial^2 T_1(x_i, \tilde{t})}{\partial t^2} = \\ & = a_1 T_1'' - \dot{T}_1 + \frac{a_1 h^2}{12} \frac{\partial^4 T_1(\bar{x}, t_{n+1})}{\partial x^4} + \frac{\tau_{n+1}}{2} \frac{\partial^2 T_1(x_i, \tilde{t})}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.4.1.6)$$

Затем перейдем к оценке нормы  $\bar{\psi}^{-1}$  в норме пространства сеточных функция  $C(\omega_{h,\tau})$ :

$$\begin{aligned} \left\| \bar{\psi}^{-1} \right\|_{C(\omega_{h,\tau})} &= \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| \psi_1^1(x_i, t_n) \right|; \\ \left\| \bar{\psi}^{-1} \right\|_{C(\omega_{h,\tau})} &= \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| \frac{a_1 h^2}{12} \frac{\partial^4 T_1(x_i, t_n)}{\partial x^4} + \frac{\tau_n}{2} \frac{\partial^2 T_1(x_i, t_n)}{\partial t^2} \right| \leq \\ &\leq \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| \frac{a_1 h^2}{12} \frac{\partial^4 T_1(x_i, t_n)}{\partial x^4} \right| + \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| \frac{\tau_n}{2} \frac{\partial^2 T_1(x_i, t_n)}{\partial t^2} \right| = (2.4.1.7) \\ &\leq \frac{a_1 h^2}{12} \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| \frac{\partial^4 T_1(x_i, t_n)}{\partial x^4} \right| + \frac{\tau_n}{2} \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| \frac{\partial^2 T_1(x_i, t_n)}{\partial t^2} \right| \leq \\ &\leq h^2 M_1 + \tau_n M_2 \leq M_3 (h^2 + \tau_n); \end{aligned}$$

где

$$M_1 = \frac{a_1}{12} \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| \frac{\partial^4 T_1(x_i, t_n)}{\partial x^4} \right|, \quad M_2 = \frac{1}{2} \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| \frac{\partial^2 T_1(x_i, t_n)}{\partial t^2} \right|,$$

$$M_3 = \max \{M_1, M_2\}.$$

Разностная схема в промерзшей части грунта имеет первый порядок аппроксимации относительно шага переменной по времени  $\tau_n$  и второй порядок относительно шага  $h$  по пространственной координате. [4]

Далее рассмотрим талую часть грунта исходной задачи (2.1.1) - (2.1.2). Оценим погрешность аппроксимации первого уравнения разностной схемы (2.2.5)

$$\frac{T_{2,j}^{n+1} - T_{2,j}^n}{\tau_{n+1}} = a_1 \frac{T_{2,j+1}^{n+1} - 2T_{2,j}^{n+1} + T_{2,j-1}^{n+1}}{h^2}, \quad i = i^* + 1, \dots, N-1. \quad (2.4.1.8)$$

Введем функцию решения разностной задачи (2.2.5)

$$z_2 = v_2 - T_2 v_2, \quad (2.4.1.9)$$

где  $T_2$  – функция решения в фазе 2.

Тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{z_{2,j}^{n+1} - z_{2,j}^n}{\tau_{n+1}} = a_1 \frac{z_{2,j+1}^{n+1} - 2z_{2,j}^{n+1} + z_{2,j-1}^{n+1}}{h^2} + \psi_1^2; \\ z_{2,j^*}^{n+1} = T_{fr} + \psi_2^2; \\ \frac{z_{2,N}^{n+1} - z_{2,N-1}^{n+1}}{h} = \psi_3^2. \end{array} \right. \quad (2.4.1.10)$$

Здесь  $\psi_1^2 = a_2 \frac{T_{2,i+1}^{n+1} - 2T_{2,i}^{n+1} + T_{2,i-1}^{n+1}}{h^2} - \frac{T_{2,i}^{n+1} - T_{2,i}^n}{\tau_{n+1}}$  – функция погрешности

для второго уравнения (2.2.11), а  $\psi_2^2$  и  $\psi_3^2$  – погрешности граничных условий.

При условии, что  $T_2(x, t) \in C_2^4(G)$ , а  $G = \{(x, t) | 0 < x < s(t), t > 0\}$ . Применим к функции решения в талой зоне грунта  $T_2$  формулу Тейлора в окрестности узла  $(x_t, t_{n+1})$ .

$$\begin{aligned}
T_{2,j+1}^{n+1} &= T_2 + hT_2' + \frac{h^2}{2}T_2'' + \frac{h^3}{6}T_2''' + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 T_2(x, t_{n+1})}{\partial x^4}, x \in (x_i, x_{i+1}); \\
T_{2,j-1}^{n+1} &= T_2 - hT_2' + \frac{h^2}{2}T_2'' - \frac{h^3}{6}T_2''' + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 T_2(x, t_{n+1})}{\partial x^4}, x \in (x_{i-1}, x_i); \quad (2.4.1.11) \\
T_{2,j}^{n+1} &= T_2 - \tau_{n+1} \dot{T}_2 + \frac{\tau_{n+1}^2}{2}\frac{\partial^2 T_2(x_i, \tilde{t})}{\partial t^2}, \tilde{t} \in (t_n, t_{n+1}).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\psi_1^2 &= a_2 \frac{T_2 + hT_2' + \frac{h^2}{2}T_2'' + \frac{h^3}{6}T_2''' + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 T_2(x, t_{n+1})}{\partial x^4} - 2T_2 +}{h^2} + \\
&\quad + \frac{T_2 - hT_2' + \frac{h^2}{2}T_2'' - \frac{h^3}{6}T_2''' + \frac{h^4}{24}\frac{\partial^4 T_2(x, t_{n+1})}{\partial x^4}}{h^2} - \\
&\quad - \frac{T_2 - T_2 + \tau_{n+1} \dot{T}_2 - \frac{\tau_{n+1}^2}{2}\frac{\partial^2 T_2(x_i, \tilde{t})}{\partial t^2}}{\tau_{n+1}} = a_2 \left( T_2'' + \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 T_2(\bar{x}, t_{n+1})}{\partial x^4} \right) - \dot{T}_2 + \frac{\tau_{n+1}}{2}\frac{\partial^2 T_2(x_i, \tilde{t})}{\partial t^2} = \\
&\quad = a_2 T_2'' - \dot{T}_2 + \frac{a_2 h^2}{12}\frac{\partial^4 T_2(\bar{x}, t_{n+1})}{\partial x^4} + \frac{\tau_{n+1}}{2}\frac{\partial^2 T_2(x_i, \tilde{t})}{\partial t^2}. \quad (2.4.1.12)
\end{aligned}$$

Затем перейдем к оценке нормы  $\psi_1^2$  в норме пространства сеточных функция  $C(\omega_{h,\tau})$ :

$$\begin{aligned}
\|\psi_1^2\|_{C(\omega_{h,\tau})} &= \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| \frac{a_2 h^2}{12} \frac{\partial^4 T_2(x_i, t_n)}{\partial x^4} + \frac{\tau_n}{2} \frac{\partial^2 T_2(x_i, t_n)}{\partial t^2} \right| \leq \\
&\leq \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| \frac{a_2 h^2}{12} \frac{\partial^4 T_2(x_i, t_n)}{\partial x^4} \right| + \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| \frac{\tau_n}{2} \frac{\partial^2 T_2(x_i, t_n)}{\partial t^2} \right| = \\
&\leq \frac{a_2 h^2}{12} \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| \frac{\partial^4 T_2(x_i, t_n)}{\partial x^4} \right| + \frac{\tau_n}{2} \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| \frac{\partial^2 T_2(x_i, t_n)}{\partial t^2} \right| \leq (2.4.1.13) \\
&\leq h^2 M_1 + \tau_n M_2 \leq M_3 (h^2 + \tau_n);
\end{aligned}$$

$$M_1 = \frac{a_1}{12} \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| \frac{\partial^4 T_1(x_i, t_n)}{\partial x^4} \right|, M_2 = \frac{1}{2} \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| \frac{\partial^2 T_1(x_i, t_n)}{\partial t^2} \right|,$$

где  $M_3 = \max\{M_1, M_2\}$ .

Таким образом, разностная схема (2.4.1.10) для схемы (2.2.5) в талой части грунта имеет первый порядок аппроксимации относительно шага  $\tau_n$  переменной по времени и второй порядок относительно шага  $h$  по пространственной координате.

Учитывая влияние граничных условий на погрешность аппроксимации, получим, что для левого граничного условия  $\psi_2^2 = 0$ .

При условии, что  $T_2(x, t) \in C^2(G)$ , а  $G = \{(x, t) | s(t) < x < L, t > 0\}$ .

Также, как и в предыдущих случаях, применим к  $T_2$  формулу Тейлора в окрестности узла  $(x_t, t_{n+1})$ .

$$T_{2,N-1}^{n+1} = T_{2,N}^{n+1} - h \left( T_{2,N}^{n+1} \right)' + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 T_2(x, t_{n+1})}{\partial x^2}, x \in (x_{N-1}, x_N). \quad (2.4.1.14)$$

Тогда

$$\psi_3^2 = -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 T_2(x, t_{n+1})}{\partial x^2}. \quad (2.4.1.15)$$

Оценим норму  $\psi_3^2$  в норме пространства сеточных функций  $C(\omega_{h,\tau})$ :

$$\begin{aligned} \|\psi_3^2\|_{C(\omega_{h,\tau})} &= \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| -\frac{h}{2} \frac{\partial^2 T_2(x_i, t_n)}{\partial x^2} \right| = \\ &= \frac{h}{2} \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| \frac{\partial^2 T_2(x_i, t_n)}{\partial x^2} \right| \leq h M_1, \end{aligned} \quad (2.4.1.16)$$

где  $M_1 = \frac{1}{2} \max_{t_n \in \omega_\tau} \max_{x_i \in \omega_h} \left| \frac{\partial^2 T_2(x_i, t_n)}{\partial x^2} \right|.$

Таким образом, разностная схема (2.4.1.10) в талой части грунта будет иметь первый порядок аппроксимации шага  $\tau_n$  переменной по времени и шага  $h$  переменной в пространстве.

Далее рассмотрим погрешность условия Стефана на границе фазового перехода:

$$\lambda_1 \frac{T_{1,i^*} - T_{1,i^*-1}}{h} - \lambda_2 \frac{T_{2,i^*+1} - T_{2,i^*}}{h} = Q_\phi \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} \omega \frac{h}{\tau_{n+1}}. \quad (2.4.1.17)$$

В данном случае функция погрешности будет иметь вид:

$$\psi^{ep} = \lambda_1 \frac{T_{1,i^*} - T_{1,i^*-1}}{h} - \lambda_2 \frac{T_{2,i^*+1} - T_{2,i^*}}{h} - Q_\phi \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} \omega \frac{h}{\tau_{n+1}}. \quad (2.4.1.18)$$

При условии, что  $T_1(x, t) \in C^2(G_1)$ ,  $T_2(x, t) \in C^2(G_2)$ , а  $G_1 = \{(x, t) | 0 < x < s(t), t > 0\}$ ,  $G_2 = \{(x, t) | s(t) < x < L, t > 0\}$ , разложим функции  $T_1(x, t)$ ,  $T_2(x, t)$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $x=s$ .

$$\begin{aligned} T_{1,i^*-1}^n &= T_{1,i^*}^n - h \frac{\partial T_{1,i^*}^n}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 T_1(x, t_n)}{\partial x^2}, \quad x \in (x_{i^*-1}^*, x_{i^*}^*). \\ T_{2,i^*+1}^n &= T_{2,i^*}^n - h \frac{\partial T_{2,i^*}^n}{\partial x} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 T_2(x, t_n)}{\partial x^2}, \quad x \in (x_{i^*}^*, x_{i^*+1}^*). \end{aligned} \quad (2.4.1.19)$$

Тогда

$$\psi_{ep} = -\lambda_1 \frac{h}{2} \frac{\partial^2 T_1(x, t_n)}{\partial x^2} - \lambda_2 \frac{h}{2} \frac{\partial^2 T_2(x, t_n)}{\partial x^2}. \quad (2.4.1.20)$$

Оценим норму  $\psi_{ep}$  в норме пространства сеточных функций  $C(\omega_{h,\tau})$ :

$$\|\psi^{ep}\|_{C(\omega_{h,\tau})} = \max_{t_n \in \omega_\tau} \left| -\lambda_1 \frac{h}{2} \frac{\partial^2 T_1(x, t_n)}{\partial x^2} - \lambda_2 \frac{h}{2} \frac{\partial^2 T_2(x, t_n)}{\partial x^2} \right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \max_{t_n \in \omega_\tau} \left| \lambda_1 \frac{h}{2} \frac{\partial^2 T_1(x, t_n)}{\partial x^2} \right| + \max_{t_n \in \omega_\tau} \left| \lambda_2 \frac{h}{2} \frac{\partial^2 T_2(x, t_n)}{\partial x^2} \right| = \\
&= \lambda_1 \frac{h}{2} \max_{t_n \in \omega_\tau} \left| \frac{\partial^2 T_1(x, t_n)}{\partial x^2} \right| + \lambda_2 \frac{h}{2} \max_{t_n \in \omega_\tau} \left| \frac{\partial^2 T_2(x, t_n)}{\partial x^2} \right| \leq \quad (2.4.1.21) \\
&\leq hM_1 + hM_2 \leq hM_3 = O(h); \\
M_1 &= \frac{\lambda_1}{2} \max_{t_n \in \omega_\tau} \left| \frac{\partial^2 T_1(x, t_n)}{\partial x^2} \right|, \quad M_2 = \lambda_2 \frac{h}{2} \max_{t_n \in \omega_\tau} \left| \frac{\partial^2 T_2(x, t_n)}{\partial x^2} \right|, \\
M_3 &= \max \{M_1, M_2\}.
\end{aligned}$$

Иными словами, граничное условие Стефана на границе фазового перехода для задачи теплопроводности (2.1.1) - (2.1.2) будет иметь первый порядок аппроксимации относительно шага по пространственной координате  $h$ .

Тогда в целом разностная схема (2.2.11) для метода ловли фронта в узел пространственной сетки для одномерной задачи теплопроводности с фазовыми переходами будет иметь первый порядок погрешности и для шага  $\tau_n$  переменной по времени, и для шага  $h$  переменной по пространственной переменной.

Отметим, что разностная схема (2.2.11) является абсолютно устойчивой по начальным данным. Исследование на устойчивость приведено в практической части данной дипломной работы.

#### **2.4.2. Исследование аппроксимации метода преобразования координат**

Для начала рассмотрим задачу для промерзшей части грунта. Исследуем разностную схему (2.3.8) и оценим погрешность ее аппроксимации.[4]

Функция погрешности будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\psi_1^1 &= a_1 \frac{T_{1,j+1}^{n+1} - 2T_{1,j}^{n+1} + T_{1,j-1}^{n+1}}{h^2} + s^{n+1} \xi_j \frac{s^{n+1} - s^n}{\tau} \frac{T_{1,j+1}^{n+1} - T_{1,j-1}^{n+1}}{2h} \\
&\quad - \left(s^{n+1}\right) \frac{T_{1,j}^{n+1} - T_{1,j}^n}{\tau}.
\end{aligned} \quad (2.4.2.1)$$

А сама разностная схема:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 \frac{T_{1,j+1}^{n+1} - 2T_{1,j}^{n+1} + T_{1,j-1}^{n+1}}{h^2} + s^{n+1} \xi_j \frac{s^{n+1} - s^n}{\tau} \frac{T_{1,j+1}^{n+1} - T_{1,j-1}^{n+1}}{2h} - (s^{n+1}) \frac{T_{1,j}^{n+1} - T_{1,j}^n}{\tau} = 0; \\ T_{1,j}^0 = T_0, j = \overline{0, N}; \\ T_{1,0}^n = T_c, n = \overline{0, M}; \\ T_{1,N}^n = T_s, n = \overline{0, M}. \end{array} \right.$$

При условии, что  $T_1(\xi, t) \in C_2^4(G)$ ,  $s(t) \in C^2(G)$ , а  $G = \{(x, t) | 0 < \xi < 1, 0 < t < t_{end}\}$ .

Применим к функции решения в промерзшей зоне грунта  $T_1$  и функции межфазной границы  $s(t)$  формулу Тейлора в окрестности узла  $(\xi_j, t_{n+1})$ .

$$\begin{aligned} T_{1,j+1}^{n+1} &= T_{1,j}^{n+1} + h(T_{1,j}^{n+1})' + \frac{h^2}{2}(T_{1,j}^{n+1})'' + \frac{h^3}{6}(T_{1,j}^{n+1})''' + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 T_1(\xi, t_{n+1})}{\partial \xi^4}, \xi \in (\xi_j, \xi_{j+1}); \\ T_{1,j-1}^{n+1} &= T_{1,j}^{n+1} - h(T_{1,j}^{n+1})' + \frac{h^2}{2}(T_{1,j}^{n+1})'' - \frac{h^3}{6}(T_{1,j}^{n+1})''' + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 T_1(\xi, t_{n+1})}{\partial \xi^4}, \xi \in (\xi_j, \xi_{j+1}); \\ T_{1,j}^{n+1} &= T_{1,j}^{n+1} - \tau \dot{T}_1 + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 T_1(\xi_j, \tilde{t})}{\partial t^2}, \tilde{t} \in (t_n, t_{n+1}); \end{aligned} \quad (2.4.2.2)$$

$$s^n = s^{n+1} - \tau \dot{s} + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2 s(\tilde{t})}{dt^2}, \tilde{t} \in (t_n, t_{n+1}).$$

Функция погрешности  $\psi_2^1$  и  $\psi_3^1$  для граничных условий будут равны нулю.

Тогда функция погрешности  $\bar{\psi}^{-1}$  промерзшей части грунта будет иметь вид

$$\bar{\psi}^{-1} = \begin{pmatrix} \psi_1^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4.2.3)$$

Тогда

$$\psi_1^1 = a_1 \frac{T_{1,j}^{n+1} + h(T_{1,j}^{n+1})' + \frac{h^2}{2}(T_{1,j}^{n+1})'' + \frac{h^3}{6}(T_{1,j}^{n+1})'''}{h^2} -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 T_1(\xi, t_{n+1})}{\partial \xi^4} - 2T_{1,j}^{n+1} + T_{1,j}^{n+1} - h(T_{1,j}^{n+1})'}{h^2} + \frac{\frac{h^2}{2}(T_{1,j}^{n+1})'' - \frac{h^3}{6}(T_{1,j}^{n+1})''' + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 T_1(\xi, t_{n+1})}{\partial \xi^4}}{h^2} + \\
& + s^{n+1} \xi_j \frac{s^{n+1} - s^{n+1} + \tau s^{\bullet n+1} - \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2 s(\tilde{t})}{dt^2}}{\tau} * \left( \frac{T_{1,j}^{n+1} + h(T_{1,j}^{n+1})' + \frac{h^2}{2}(T_{1,j}^{n+1})'' + \frac{h^3}{6}(T_{1,j}^{n+1})'''}{2h} + \right. \\
& \left. + \frac{-T_{1,j}^{n+1} + h(T_{1,j}^{n+1})' - \frac{h^2}{2}(T_{1,j}^{n+1})'' + \frac{h^3}{6}(T_{1,j}^{n+1})'''}{2h} \right) - \\
& - (s^{n+1})^2 \frac{T_{1,j}^{n+1} - T_{1,j}^{n+1} + \tau T_{1,j}^{\bullet n+1} - \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 T_1(\xi_j, \tilde{t})}{\partial t^2}}{\tau} = O(h + \tau).
\end{aligned} \tag{2.4.2.4}$$

Таким образом, разностная схема для промерзшей части грунта имеет первый порядок аппроксимации относительно шага переменной по времени  $\tau_n$  и первый порядок аппроксимации относительно шага  $h$  по пространственной переменной.

Затем рассмотрим данные, относящиеся к талой части грунта разностной схемы (1.3.8) и оценим погрешность ее аппроксимации.

$$\left\{ \begin{aligned} & a_2 \frac{T_{2,j+1}^{n+1} - 2T_{2,j}^{n+1} + T_{2,j-1}^{n+1}}{h^2} + (s^{n+1} - L) \xi_j \frac{s^{n+1} - s^n}{\tau} \frac{T_{2,j+1}^{n+1} - T_{2,j-1}^{n+1}}{2h} - (s^{n+1} - L) \frac{T_{2,j}^{n+1} - T_{2,j}^n}{\tau} = 0; \\ & T_{2,j}^0 = T_0, j = \overline{0, N}; \\ & \frac{T_{2,1}^n - T_{2,0}^n}{h} = 0, n = \overline{0, M}; \\ & T_{2,N}^n = T_{fr}, n = \overline{0, M}; \end{aligned} \right. \tag{2.4.2.5}$$

Функция погрешности (2.4.2.5) будет иметь вид

$$\begin{aligned}
\psi_1^2 = a_2 \frac{T_{2,j+1}^{n+1} - 2T_{2,j}^{n+1} + T_{2,j-1}^{n+1}}{h^2} + (s^{n+1} - L) \xi_j \frac{s^{n+1} - s^n}{\tau} \frac{T_{2,j+1}^{n+1} - T_{2,j-1}^{n+1}}{2h} \\
- (s^{n+1} - L) \frac{T_{2,j}^{n+1} - T_{2,j}^n}{\tau}.
\end{aligned} \tag{2.4.2.6}$$

При условии, что  $T_2(\xi, t) \in C_2^4(G)$ ,  $s(t) \in C^2(G)$ , а  $G = \{(x, t) | 0 < \xi < 1, 0 < t < t_{end}\}$ . Применим к функции решения в талой зоне грунта  $T_2$  и функции межфазной границы  $s(t)$  формулу Тейлора в окрестности узла  $(\xi_j, t_{n+1})$ .

$$\begin{aligned}
T_{2,j+1}^{n+1} &= T_{2,j}^{n+1} + h(T_{2,j}^{n+1})' + \frac{h^2}{2}(T_{2,j}^{n+1})'' + \frac{h^3}{6}(T_{2,j}^{n+1})''' + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 T_2(\xi, t_{n+1})}{\partial \xi^4}, \xi \in (\xi_j, \xi_{j+1}); \\
T_{2,j-1}^{n+1} &= T_{2,j}^{n+1} - h(T_{2,j}^{n+1})' + \frac{h^2}{2}(T_{2,j}^{n+1})'' - \frac{h^3}{6}(T_{2,j}^{n+1})''' + \frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 T_2(\xi, t_{n+1})}{\partial \xi^4}, \xi \in (\xi_j, \xi_{j+1}); \\
T_{2,j}^{n+1} &= T_{2,j}^{n+1} - \tau \dot{T}_{2,j} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 T_2(\xi_j, \tilde{t})}{\partial t^2}, \tilde{t} \in (t_n, t_{n+1}); \\
s^n &= s^{n+1} - \tau \dot{s}^{n+1} + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2 s(\tilde{t})}{dt^2}, \tilde{t} \in (t_n, t_{n+1}).
\end{aligned} \tag{2.4.2.6}$$

Таким образом, разностная схема для талой части грунта имеет первый порядок аппроксимации относительно шага переменной по времени  $\tau_n$  и первый порядок аппроксимации относительно шага  $h$  по пространственной переменной.

Теперь учтем влияние на погрешность граничных условий. Для правого граничного условия  $\psi_3^2 = 0$  получим первый порядок относительно шага  $h$  по пространственной переменной

Тогда

$$\begin{aligned}
\psi_1^2 &= a_1 \frac{T_{2,j}^{n+1} + h(T_{2,j}^{n+1})' + \frac{h^2}{2}(T_{2,j}^{n+1})'' + \frac{h^3}{6}(T_{2,j}^{n+1})'''}{h^2} + \\
&+ \frac{\frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 T_2(\xi, t_{n+1})}{\partial \xi^4} - 2T_{2,j}^{n+1} + T_{2,j}^{n+1} - h(T_{2,j}^{n+1})' - \frac{h^2}{2}(T_{2,j}^{n+1})'' - \frac{h^3}{6}(T_{2,j}^{n+1})'''}{h^2} + \frac{\frac{h^4}{24} \frac{\partial^4 T_2(\xi, t_{n+1})}{\partial \xi^4}}{h^2} + \\
&+ s^{n+1} \xi_j \frac{s^{n+1} - s^{n+1} + \tau \dot{s}^{n+1} - \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2 s(\tilde{t})}{dt^2}}{\tau} * \frac{T_{2,j}^{n+1} + h(T_{2,j}^{n+1})' + \frac{h^2}{2}(T_{2,j}^{n+1})'' + \frac{h^3}{6}(T_{2,j}^{n+1})'''}{2h} +
\end{aligned}$$

$$+\frac{-T_{2,j}^{n+1}+h\left(T_{2,j}^{n+1}\right)'-\frac{h^2}{2}\left(T_{2,j}^{n+1}\right)''+\frac{h^3}{6}\left(T_{2,j}^{n+1}\right)'''}{2h} \quad (2.4.2.7)$$

$$-\left(s^{n+1}-L\right)^2 \frac{T_{2,j}^{n+1}-T_{2,j}^{n+1}+\tau \overset{\bullet}{T}_{2,j}^{n+1}-\frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 T_2\left(\xi_j, \tilde{t}\right)}{\partial t^2}}{\tau}=O(h+\tau) .$$

При условии, что  $T_2(\xi, t) \in C^2(G)$ , а  $G=\{(x, t) | 0<\xi<1, 0<t<t_{end}\}$  воспользуемся формулой Тейлора в окрестности точки  $(\xi_0, t_{n+1})$ .

$$T_{2,1}^{n+1}=T_{2,0}^{n+1}+h\left(T_{2,0}^{n+1}\right)'+\frac{h}{2} \frac{\partial^2 T_2\left(\xi, t_{n+1}\right)}{\partial \xi^2} . \quad (2.4.2.8)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi_2^2 &= \frac{T_{2,0}^{n+1}+h\left(T_{2,0}^{n+1}\right)'+\frac{h}{2} \frac{\partial^2 T_2\left(\xi, t_{n+1}\right)}{\partial \xi^2}-T_{2,0}^{n+1}}{h}= \\ &= \left(T_{2,0}^{n+1}\right)'+\frac{h}{2} \frac{\partial^2 T_2\left(\xi, t_{n+1}\right)}{\partial \xi^2}=\frac{h}{2} \frac{\partial^2 T_2\left(\xi, t_{n+1}\right)}{\partial \xi^2}=O(h) . \end{aligned} \quad (2.4.2.9)$$

Функция погрешности  $\bar{\psi}^{-2}$  будет иметь вид

$$\bar{\psi}^{-2}=\left(\begin{array}{c} \psi_1^2 \\ \psi_2^2 \\ 0 \end{array}\right) ; \quad (2.4.2.10)$$

Тогда разностная схема (2.4.2.5) для талой части грунта будет иметь первый порядок аппроксимации относительно шага переменной по времени  $\tau_n$  и первый порядок аппроксимации относительно шага  $h$  по пространственной переменной.

Рассмотрим погрешность условия Стефана на границе фазового перехода:

$$\begin{aligned} \lambda_1 \frac{1}{s^n} \frac{T_{1,N}^n-T_{1,N-1}^n}{h}-\lambda_2 \frac{1}{s^n-L} \frac{T_{2,1}^n-T_{2,0}^n}{h}= \\ =Q_{\phi} \frac{\left(\rho_1+\rho_2\right)}{2} \omega \frac{s^{n+1}-s^n}{\tau} . \end{aligned} \quad (2.4.2.11)$$

Функция погрешности примет вид:

$$\begin{aligned} \psi^{ep} = & \lambda_1 \frac{1}{s^n} \frac{T_{1,N}^n - T_{1,N-1}^n}{h} - \lambda_2 \frac{1}{s^n - L} \frac{T_{2,1}^n - T_{2,0}^n}{h} - \\ & - Q_\phi \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} \omega \frac{s^{n+1} - s^n}{\tau}. \end{aligned} \quad (2.4.2.12)$$

При условии, что  $T_1(\xi, t) \in C^2(G)$ ,  $T_2(\xi, t) \in C^2(G)$ ,  $s(t) \in C^2(G)$ , а  $G = \{(x, t) | 0 < \xi < 1, 0 < t < t_{end}\}$  воспользуемся формулой Тейлора в окрестности точки  $(\xi_N, t_n)$ .

$$\begin{aligned} T_{1,N-1}^{n+1} &= T_{1,N}^{n+1} - h \frac{\partial T_{1,N}^n}{\partial \xi} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 T_1(\xi, t_n)}{\partial \xi^2}; \\ T_{2,N-1}^{n+1} &= T_{2,N}^{n+1} - h \frac{\partial T_{2,N}^n}{\partial \xi} + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 T_2(\xi, t_n)}{\partial \xi^2}; \\ s^{n+1} &= s^n + \tau \frac{ds^n}{dt} + \frac{\tau^2}{2} \frac{d^2 s(\bar{t})}{dt^2}. \end{aligned} \quad (2.4.2.13)$$

Таким образом, граничное условие Стефана на границе фазового перехода будет иметь первый порядок аппроксимации относительно шага переменной по времени  $\tau_n$  и первый порядок аппроксимации относительно шага  $h$  по пространственной переменной.

Тогда

$$\begin{aligned} \psi^{ep} = & \lambda_1 \frac{1}{s^n} \frac{T_{1,N}^n - T_{1,N-1}^n}{h} - \lambda_2 \frac{1}{s^n - L} \frac{T_{2,1}^n - T_{2,0}^n}{h} - \\ & - Q_\phi \frac{(\rho_1 + \rho_2)}{2} \omega \frac{s^{n+1} - s^n}{\tau} = \lambda_1 \frac{1}{s^n} \frac{\partial T_{1,N}^n}{\partial \xi} - \\ & - \lambda_2 \frac{1}{s^n - L} \frac{\partial T_{2,N}^n}{\partial \xi} - Q_\phi \rho \omega \frac{ds^n}{dt} + \lambda_1 \frac{1}{s^n} \frac{h}{2} \frac{\partial^2 T_1(\xi, t_n)}{\partial \xi^2} + \\ & + \lambda_2 \frac{1}{s^n - L} \frac{h}{2} \frac{\partial^2 T_2(\xi, t_n)}{\partial \xi^2} - Q_\phi \rho \omega \frac{\tau}{2} \frac{s(\bar{t})}{dt^2} = O(h + \tau). \end{aligned} \quad (2.4.2.14)$$

Следует отметить, что разностная схема (2.3.8) является абсолютно устойчивой по начальным данным и имеет первый порядок аппроксимации относительно шага переменной по времени  $\tau_n$  и первый порядок аппроксимации относительно шага  $h$  по пространственной переменной.

Также подчеркнем, что разностная схема (2.3.8) является абсолютно устойчивой по начальным данным. Исследование на устойчивость приведено в практической части данной дипломной работы.

### **3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ЛАЗЕРНОЙ СВАРКИ ДВУХ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПЛАСТИН**

В настоящее время происходит огромный скачок в развитии различных технологий лазерной тепловой обработки материалов. В данной работе рассматривается только один из таких процессов, а именно – сварка.

Естественно, что недостатки в существующих методах стимулируют использование новых материалов и технологий сварки, а также применение их в новых областях. Эти нововведения требуют, как теоретического, так и практического исследования в данной сфере.

Следует отметить, что сам физический процесс лазерной сварки затрудняет проведение экспериментальных исследований, так как он является достаточно трудоемким.

Это связано с тем, что процесс сварки происходит при влиянии очень высоких температур в очень малых, в сравнении с размерами металлических пластин, зонах воздействия лазерного луча.

Именно поэтому разработка новых численных методов математического моделирования процесса лазерной сварки, используемых для различных металлических изделий и различных способов сварки, является актуальной научной проблемой.

В данной дипломной работе будет построена физико-математическая модель процесса лазерной сварки, также выведен алгоритм для нахождения глубины сформированного парового канала.

Также разработанный метод позволяет определить протяженность сварочной ванны и ширину сформировавшегося сварного шва.

При реализации данной физико-математической модели для трехмерного уравнения теплопроводности с фазовыми переходами была разработана трехмерная разностная схема.

Представлен численный метод, позволяющий разложить ее в цепочку трех одномерных разностных схем, каждую из которых будем решать методом разностной прогонки на равномерных сетках по всем переменным.

### **3.1. Постановка задачи о процессе лазерной сварки**

В данной работе происходит процесс моделирования лазерной сварки двух металлических пластин в форме прямоугольных параллелепипедов одинаковой толщины, которые стыкуются боковыми сторонами. [5]

Следует отметить, что поверхности рассматриваемых пластин для защиты от возможных при сварки окислительных процессов обдуваются инертным газом аргоном.

Горизонтальная ось луча лазера лежит в плоскости, находящейся в месте объединения пластин и направлена перпендикулярно к их поверхности.

Введем в нашей модели декартову систему координат, в которой луч лазера является статичным, а металлические пластины находятся в движении вдоль оси  $x$  со скоростью  $v$ .

Скорость движения является постоянной.

Ось  $z$  направлена вдоль луча лазера по направлению вниз. А ось  $y$  перпендикулярно месту объединения пластин.

Точка отсчета системы координат находится на верхних границах металлических пластин в области попадания луча лазера в место их объединения.

Заметим, что в данной математической модели введены некоторые упрощения:

1. Примем, что все колебания изменений значений теплофизических параметров области лазерной сварки равны своим средним стационарным значениям;
2. Процесс плавления листов металла описывается в приближении Стефана;
3. Радиус выходного отверстия, образованного лазером, будем считать фиксированным и равным  $2r_f$ , где  $r_f$  – радиус луча лазера.

Графическая интерпретация физического процесса описанного ранее представлена на рисунке 2.

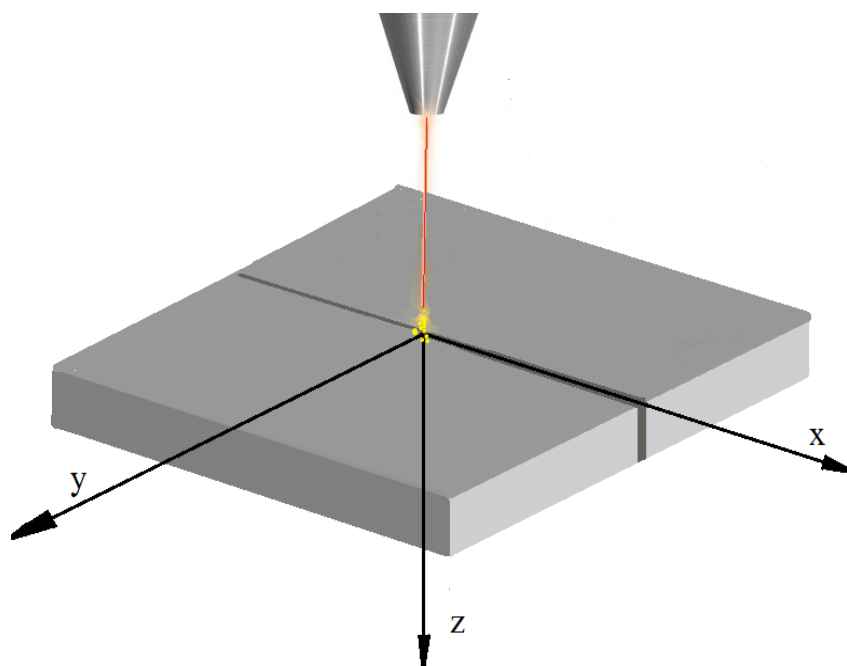


Рисунок 2 – Процесс лазерной сварки металлических пластин

### 3.2. Математическая модель процесса лазерной сварки

Процесс лазерной сварки в твердой и жидкой фазе можно описать следующим трехмерным уравнением [6]

$$c_{ei} v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_i \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right); \quad (3.2.1)$$

$$\begin{aligned} c_1 \rho_1, T < T_e, \\ c_{ei} = c_2 \rho_2 \left( 1 + \frac{\chi}{c_2} \frac{\partial f_l}{\partial T} \right), T_e \leq T \leq T_{l0}, \\ c_3 \rho_3, T_{l0} < T, \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

где

$c_i$  – удельная теплоемкость,  $\lambda_i$  – теплопроводность,  $\rho_i$  – плотность.

При этом, если

- $i=1$  – параметры твердого фазы;
- $i=2$  – параметры межфазной зоны;
- $i=3$  – параметры жидкой фазы.

В терминах введенных замен (3.2.2.):  $T_e, T_{l0}$  – температура начала и окончания процесса затвердевания сплавленных листов металла,  $f_l$  – доля

жидкого состояния в межфазной зоне,  $\chi$  – скрытая теплота плавления, выделяемая в процессе сварки.

В данном модельном примере рассмотрен процесс лазерной сварки металлических пластин, состоящих на 90% из алюминия и на 10% из кремния. Следует отметить, что рассмотренный далее численный метод решения данной задачи является универсальным и дает результаты и при другом соотношении различных составляющих в листах металла, изменяться будут лишь введенные ранее коэффициенты.

Следует отметить, что уравнение состояния описываемых в модели металлических пластин будет аппроксимироваться при помощи следующего соотношения

$$T_l = T_A - \beta C, \quad (3.2.3)$$

где  $T_l$  – температура плавления фазы 1, а  $T_A$  – температура плавления кремния,  $\beta$  – угол наклона границы перехода из твердой фазы в жидкую,  $C$  – концентрация кремния в общем сплаве.

Концентрацию кремния в конечном соотношении металлов в сплаве найдем из

$$C = C_0 f_l^{k-1}, \quad (3.2.4)$$

где  $C_0$  – изначальная концентрация кремния в сплаве.

При условии, что температура сплава равна температуре плавления твердой фазы, т.е.  $T = T_l(C)$ , подставим (3.2.4) в (3.2.3)

$$T = T_A - \beta C_0 f_l^{k-1}. \quad (3.2.5)$$

Далее продифференцируем (3.2.5) по переменной  $T$ , тогда

$$\frac{\partial f_l}{\partial T} = \frac{1}{\beta C_0 (1-k) f_l^{k-2}}. \quad (3.2.6)$$

Уровень интенсивности излучения лазера в процессе сварки будет описываться нормальным распределением Гаусса, представленным далее

$$I(x, y, z) = I_0 \exp\left(-2 \frac{(x^2 + y^2)}{r_z^2}\right).$$

Здесь  $I_0 = \frac{2W}{\pi r_z^2}$ ,  $W$  – мощность лазера.

В данном соотношении

$$r_z = \sqrt{r_F^2 + \left( \frac{z - Z_F}{\pi r_F} \lambda_0 \right)^2} \quad (3.2.7)$$

является радиусом луча лазера на глубине равной  $z$  образовавшегося в процессе парогазового канала.

При этом  $r_F$  – радиус луча лазера в фокальной плоскости,  $Z_F$  – положение фокуса относительно поверхности металлических пластин.

А выражение для нахождения плотности мощности излучения лазера, которая поглощается элементами поверхности парогазового канала  $z = Z_c(x, y)$  имеет вид

$$q(x, y, Z(x, y)) = \frac{2WA}{\pi r_z^2} \exp\left(-2 \frac{r^2}{r_z^2}\right), \quad (3.2.8)$$

где  $W$  – мощность лазера,  $A$  – коэффициент уровня поглощения излучения лазера поверхностью парогазового канала. [7]

Для упрощения в данной модельной задаче возьмем неиспользованную при сварке мощность луча лазера, обозначенную, как  $W_i = (1 - A)W_{i-1}, i = 1, 2, \dots$

Луч лазера равномерно рассеивается по поверхности  $S_c$ , состоящей из боковой поверхности канала  $S_b$  и его выходного отверстия при  $z=0$ .

Мощность отраженного излучения, которое поглощают стенки образовавшегося парогазового канала будет равна  $W_a = A_e W$ , где

$$A_e = A \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(1-A)S_b}{S_c} \right)^n = \frac{A(1-A)S_b}{S_c - (1-A)S_b}. \quad (3.2.9)$$

Для определения плотности мощности отраженного лазера, поглощаемого элементом поверхности парогазового канала, получим

$$q_r = \frac{W_a}{S_b} = \frac{A(1-A)S_b}{S_c - (1-A)S_b}. \quad (3.2.10)$$

На межфазной границе запишем условие Стефана

$$\left( \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial n} \right)_2 - \left( \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial n} \right)_1 = \rho_1 k n v, \quad (3.2.11)$$

где  $n$  – единичная нормаль к границе области,  $k$  – теплота плавления.

Здесь  $\left( \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial n} \right)_2, \left( \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial n} \right)_1$  – потоки тепла, выделяемые твердой и жидкой фазой.

Они определяются по следующей формуле

$$T = T_e.$$

### 3.3. Модель процесса формирования парогазового канала

На верхней и нижней границах поверхности металлических пластин вне парогазового канала будут вводиться краевые условия, которые учитывают потери тепла, которые происходят за счет передачи радиации и процесса теплопереноса, происходящего во время перехода из твердой фазы в жидкую с окружающей средой. [8]

При описании описываемой математической модели парогазового канала введем следующие упрощения:

1. Будем считать, что поверхность парогазового канала сужается монотонно. При этом сам процесс происходит при условии пропорционального увеличения глубины поверхности вращения относительно оси, параллельной оси  $z$  и лежащей в плоскости симметрии при  $y=0$ .

2. Луч лазера и парогазовый канал будут расположены параллельно относительно друг друга. Т.е. ось вращения поверхности канала находится на расстоянии равном радиусу от оси луча лазера, а при  $z=0$  (на поверхности свариваемых металлических пластин) радиус парогазового канала удваивает радиус луча лазера.

Следует отметить, что это допущение подтверждается на практике, но только в тех случаях, когда глубина парогазового канала достаточно велика в сравнении с габаритом луча самого лазера.

3. Дно парового канала имеет форму сферической поверхности, радиус которой

$$R_c = \frac{2\sigma}{\rho_{\max} - \rho_3 g h_c}, \quad (3.3.1)$$

где  $\sigma$  – коэффициент протяженности жидкой фазы на поверхности,  $\rho_{\max}$  – показатель уровня избыточного давления паров, исходящих от плавящегося в процессе сварки металла на дне парогазового канала,  $g$  – ускорение свободного падения,  $h_c$  – глубина парогазового канала.

Определяемая температура на поверхности парогазового канала не может превышать локальную температуру кипения сплава металла. При этом, очевидно, что наибольший поток тепла определится в зоне действия прямого лазерного излучения на поверхность пластин.

Можно утверждать, что на всей поверхности свариваемых пластин линия, лежащая в плоскости  $y=0$ , на передней стенке парогазового канала, будет иметь самую высокую температуру.

При построении такой линии следует принять температуру на участке, наиболее близком к оси луча лазера равной температуре кипения сплава.

Также образующая поверхности парогазового канала  $AC$ , лежащая в плоскости  $y=0$ , ищется в виде линии, состоящей из двух частей  $AB$  и  $BC$ . (Рисунок 3).

Дуга  $AB$  представляет собой кубический полином, по касательной соприкасающейся в точке  $B$  с дугой  $BC$ , являющейся частью окружности, радиус которой задается формулой (3.3.1).

При этом дуга  $AB$  описывается следующей системой

$$\begin{cases} x(z) = \frac{(r_F - ch)(z - h)^3}{h^3} + c(z - h); \\ 0 \leq c \leq \frac{r_F}{h}, h > 0. \end{cases} \quad (3.3.2)$$

Линии принадлежащие (3.3.2) проходят через  $A$  и обладают свойством симметрии относительно оси луча лазера.

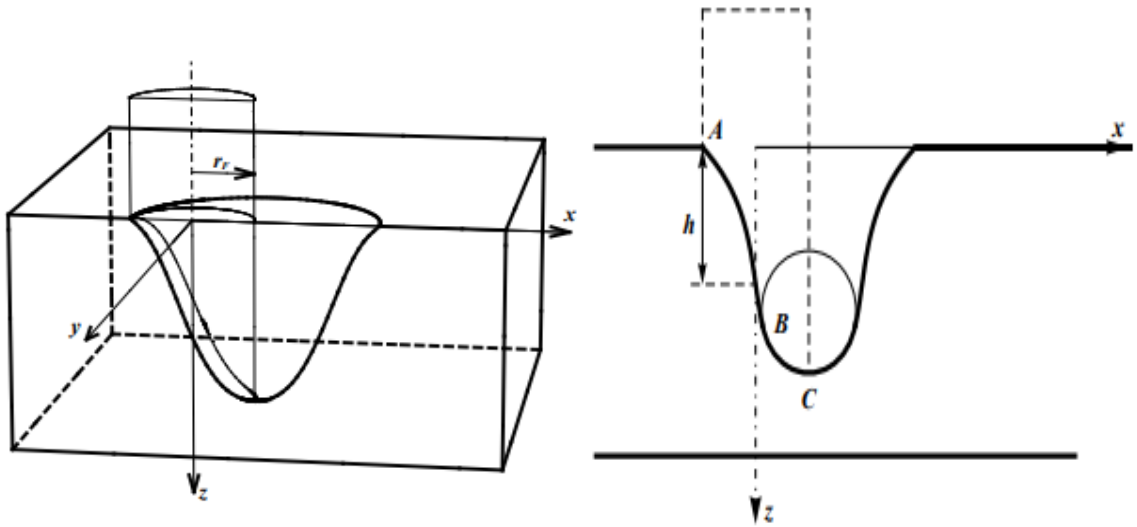


Рисунок 3 – Схема расположения парового канала и луча лазера

### 3.4. Краевые условия для многомерного уравнения теплопроводности

Сформулируем краевую задачу для уравнения теплопроводности (3.2.1), решая которую будем находить распределение температуры в пластинах металла, подвергающихся лазерной сварки. [9]

Данная модельная задача рассматривается в следующей криволинейной области

$$\Omega = \left\{ (x, y, z) : -\infty < \frac{x}{h} < \infty, -\infty < \frac{y}{h} < \infty, 0 < \frac{z}{h} < 1 \right\} \setminus \Omega_{ch},$$

где  $h$  – толщина металлических пластин,  $\Omega_{ch}$  – внутренняя область парогазового канала.

### 3.5. Условия на поверхности парогазового канала

На поверхности парогазового канала, описываемого уравнением  $(x - r_f)^2 + y^2 \leq (2r_f)^2$  справедливо следующее уравнение теплового баланса

$$-\lambda_2 \frac{\partial T}{\partial n} = q_l n + q_r + q_v + q_c + q_b. \quad (3.5.1)$$

Здесь

- $n = (n_x, n_y, n_z)$  – единичная нормаль к поверхности парогазового канала,
- $q_l = q_l e_z$  – поглощенный поток лазерного излучения,
- $e_z$  – орт оси  $z$ ,
- $q_r$  – поток тепла, возникающий в результате отражений от стенок парогазового канала,
- $q_v$  – потери тепла за счет испарения металла во время процесса сварки,
- $q_c$  – моделирует поток тепла от передней стенки парогазового канала на его заднюю стенку.

Здесь

$$q_c(x, y) = -c_2 \rho_1 V_w (T(x, y, Z_c(x, y)) - T(2r_F - x, y, Z_c(x, y))), \quad (3.5.2)$$

где  $(x, y, Z_c(x, y); 2r_F - x, y, Z_c(x, y))$  – симметричные относительно  $x = r_F$  точки поверхности парогазового канала.

В уравнении теплового баланса (3.5.1) также учитывается потеря тепла из-за происходящего во время сварки процесса испарения плавящегося металла. Для оценки величины таких потерь введем формулу

$$q_v = -Lm, \quad (3.5.3)$$

где  $L$  – удельная теплота испарения металла.

В (3.5.1) последнее слагаемое  $q_b$  – уровень погрешности, возникающей из-за введенных ранее упрощений нашей математической модели. Уровень погрешности будет определяться следующим образом

$$q_b(x, y) = -n_x c_2 T(x, y, Z_c(x, y)) v \rho_1. \quad (3.5.4)$$

Также для учета теплопереноса с передней стенки парогазового канала на заднюю введем специальную переменную

$$q_c(x, y) = -c_2 \rho_1 v (T(x, y, Z_c(x, y)) - T(2r_f - x, y, Z_c(x, y))), \quad (3.5.5)$$

где  $T(x, y, Z_c(x, y))$  и  $T(2r_f - x, y, Z_c(x, y))$  – симметричные относительно плоскости  $x = r_f$  точки поверхности парогазового канала.

Плотность потока лазерного излучения задается следующим соотношением

$$q_l(x, y, Z(x, y)) = \frac{2WA}{\pi r_z^2} \exp \frac{-2(x^2 + y^2)}{r_z^2},$$

$$r_z = \left( r_f^2 + \left( \frac{z - Z_f}{\pi r_f} \lambda_0 \right)^2 \right)^{1/2}, \quad (3.5.6)$$

где  $W$  – мощность исследуемого лазера,  $Z_f$  – координата по оси  $z$  фокуса луча лазера,  $A$  – коэффициент уровня поглощения поверхностью парогазового канала излучения лазера.

Примем, что остаток мощности луча лазера после первого и последующих отражений от стенок парогазового канала определится из соотношения

$$W_i = (1 - A)W_{i-1}, i = \overline{1, N}. \quad (3.5.7)$$

Этот остаток от мощности будет равномерно рассеиваться по поверхности  $S_c$ , состоящей из боковой поверхности парогазового канала  $S_b$  и его выходного отверстия при  $z=0$ .

Тогда мощность многократно отраженного излучения луча лазера, поглощаемого стенками парогазового канала можно найти, используя коэффициент поглощения, определяемого с помощью

$$A_c = A \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{(1-A)S_b}{S_c} \right)^n = \frac{A(1-A)S_b}{S_c - (1-A)S_b} \quad (3.5.8)$$

по формуле

$$W_a = A_c W. \quad (3.5.9)$$

Для определения уровня плотности мощности отраженного излучения лазера, поглощаемого элементом поверхности парогазового канала, получим выражение

$$q_r = \frac{W_a}{S_b} = \frac{W}{S_b} \frac{A(1-A)S_b}{S_c - (1-A)S_b}. \quad (3.5.10)$$

### 3.6. Условия на верхней и нижней поверхностях свариваемых металлических пластин

Сформулируем граничное условие на поверхности  $z=0$  в твердой, жидкой и промежуточной фазах, которое будет иметь вид:

$$\lambda_i \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = (\alpha_{k1} + \alpha_r) (T|_{z=0} - T_g) - q_1, \quad (3.6.1)$$

$$(x - r_f)^2 + y^2 > 4r_f^2.$$

Здесь  $\alpha_{k1}$  – коэффициент теплоотдачи, который образуется с помощью обработки зоны сварки инертным газом аргоном,  $T_g$  – температура газа,  $\alpha_r$  – радиационный коэффициент теплоотдачи при сварке.

Коэффициент теплоотдачи  $\alpha_r$  определяется из соотношения

$$\alpha_r = \varepsilon_i \sigma_0 (T^2|_{z=0} + T_g^2) (T|_{z=0} + T_g), i = 1, 2, \quad (3.6.2)$$

где  $\sigma_0$  – константа Стефана-Больцмана.

Также имеется условие аналогичное (3.6.1) только для нижней поверхности пластины, т.е. для  $z=h$

$$-\lambda_i \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=h} = (\alpha_{k2} + \alpha_r) (T|_{z=h} - T_g), \quad (3.6.3)$$

где  $\alpha_{k2}$  – коэффициент теплоотдачи от нижней поверхности пластин к поверхности, на которой происходит процесс лазерной сварки. А  $T_g$  – температура среды, которая контактирует с нижней поверхностью свариваемых пластин.

Коэффициент теплоотдачи для данной формулы будет равен

$$\alpha_{k2} = \frac{\lambda_g}{\delta_g}, \quad (3.6.4)$$

где  $\lambda_g$  – теплопроводность инертного газа аргона,  $\delta_g$  – толщина газовой прорехи между нижней поверхностью свариваемых металлических пластин и поверхностью, на которой происходит процесс лазерной сварки.

Если сварочная ванна достигает нижней поверхности пластин и проходит сквозь них насквозь, то в силу ее неравномерности и уровня давления газовая прореха остается. [10]

В случае, когда и нижняя поверхность пластины обдувается инертным газом, вместо  $\alpha_{k2}$  выбирается коэффициент теплопередачи  $\alpha_{k1}$ .

Коэффициент теплоотдачи в таком случае определится следующей формулой

$$\alpha_{k1} = 0,664 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}^{1/2} \lambda_g / l,$$

где  $\text{Re} = U_g l / \nu_g$ ,  $\text{Pr} = \nu_g / a_g$ ,  $U_g$  – скорость подачи инертного газа для обдува,  $l$  – длина области охлаждения,  $\nu_g$  – вязкость,  $a_g$  – температуропроводность и  $\lambda_g$  – теплопроводность инертного газа.

### 3.7. Условия на периферии

На достаточно большом расстоянии от луча лазера температура по всей толщине пластин принимается равной температуре окружающей среды:

$$T|_{x \rightarrow \pm\infty} = T_g, T|_{y \rightarrow \pm\infty} = T_g. \quad (3.7.1)$$

### 3.8. Численный метод

При численном моделировании трехмерной задачи теплопроводности с фазовыми переходами были введены некоторые упрощения:

1.  $c_i \rho_i = c_2 \rho_2$ ;
2.  $\delta = \frac{1}{2}$ .

Для решения вышеописанной задачи применим следующую разностную схему:

$$\begin{aligned} \frac{T_{ijk}^{n+1} - T_{ijk}^n}{\tau} = & \delta \left( L_x \left( T_{ijk}^{n+1} \right) + L_y \left( T_{ijk}^{n+1} \right) + L_z \left( T_{ijk}^{n+1} \right) \right) + \\ & + (1 - \delta) \left( L_x \left( T_{ijk}^n \right) + L_y \left( T_{ijk}^n \right) + L_z \left( T_{ijk}^n \right) \right), \end{aligned} \quad (3.8.1)$$

где введены замены

$$\begin{aligned} L_x = & \frac{1}{h_x} \left( \lambda_{ijk}^n \frac{T_{(i+1)jk} - T_{ijk}}{h_x} - \lambda_{jk}^n \frac{T_{ijk} - T_{(i-1)jk}}{h_x} \right) - b \frac{T_{(i+1)jk} - T_{(i-1)jk}}{2h_x}; \\ L_y = & \frac{1}{h_y} \left( \lambda_{jk}^n \frac{T_{i(j+1)k} - T_{ijk}}{h_y} - \lambda_{jk}^n \frac{T_{ijk} - T_{i(j-1)k}}{h_y} \right); \\ L_z = & \frac{1}{h_z} \left( \lambda_{jk}^n \frac{T_{ij(k+1)} - T_{ijk}}{h_z} - \lambda_{ijk}^n \frac{T_{ijk} - T_{ij(k-1)}}{h_z} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $b = c_2 \rho_2 \nu$ .

Трехмерную разностную схему (3.8.1) заменим последовательностью трех одномерных разностных схем.

$$\begin{aligned} \frac{T_{ijk}^{n+1/3} - T_{ijk}^n}{\tau} - \delta L_x \left( T_{ijk}^{n+1/3} \right) - (1 - \delta) L_x \left( T_{ijk}^n \right) = & \delta \left( L_y \left( T_{ijk}^{n+1/3} \right) + L_z \left( T_{ijk}^{n+1/3} \right) \right) + \\ & + (1 - \delta) \left( L_y \left( T_{ijk}^n \right) + L_z \left( T_{ijk}^n \right) \right); \end{aligned} \quad (3.8.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{ijk}^{n+2/3} - T_{ijk}^{n+1/3}}{\tau} - \delta L_y \left( T_{ijk}^{n+2/3} \right) - (1 - \delta) L_y \left( T_{ijk}^{n+1/3} \right) = & \delta \left( L_x \left( T_{ijk}^{n+2/3} \right) + L_z \left( T_{ijk}^{n+2/3} \right) \right) + \\ & + (1 - \delta) \left( L_x \left( T_{ijk}^{n+1/3} \right) + L_z \left( T_{ijk}^{n+1/3} \right) \right); \end{aligned} \quad (3.8.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{ijk}^{n+1} - T_{ijk}^{n+2/3}}{\tau} - \delta L_z \left( T_{ijk}^{n+1} \right) - (1 - \delta) L_z \left( T_{ijk}^{n+2/3} \right) = & \delta \left( L_x \left( T_{ijk}^{n+1} \right) + L_y \left( T_{ijk}^{n+1} \right) \right) + \\ & + (1 - \delta) \left( L_x \left( T_{ijk}^{n+2/3} \right) + L_y \left( T_{ijk}^{n+2/3} \right) \right). \end{aligned} \quad (3.8.4)$$

К каждой из разностных схем (3.8.2), (3.8.3) и (3.8.4) будем применять метод разностной прогонки.

Разностная схема (3.8.1) имеет второй порядок аппроксимации переменной по времени и по пространственной переменной для узлов сетки внутри расчетной области.

По результатам расчетов можно сделать прогноз о величине каждой фазы (твердой, жидкой и промежуточной). Также можно определить габариты сварной ванны, который изменяется с течением времени.

#### **4. РЕШЕНИЕ МОДЕЛЬНЫХ ЗАДАЧ**

Применим численные методы, описанные в теоретической части для решения одномерного и многомерного уравнения теплопроводности с фазовыми переходами

#### 4.1. Вычислительная схема метода ловли фронта в узел пространственной сетки

Рассмотрим следующую разностную схему

$$\begin{aligned}
 \frac{T_{1i}^{n+1} - T_{1i}^n}{\tau_{n+1}} &= a_1 \frac{T_{1i+1}^{n+1} - 2T_{1i}^{n+1} + T_{1i-1}^{n+1}}{h^2}, i = 2, \dots, i^* - 1; \\
 \frac{T_{2i}^{n+1} - T_{2i}^n}{\tau_{n+1}} &= a_1 \frac{T_{2i+1}^{n+1} - 2T_{2i}^{n+1} + T_{2i-1}^{n+1}}{h^2}, i = i^* - 1, \dots, N - 1; \\
 T_1|_{i=1} &= T_c; \\
 T_1|_{i=i^*} &= T_{fr}; \\
 T_2|_{i=i^*} &= T_{fr}; \\
 \frac{\partial T}{\partial x}|_{i=N} &= 0; \\
 \lambda_1 \frac{T_{1,i^*} - T_{1,i^*-1}}{h} - \lambda_2 \frac{T_{2,i^*+1} - T_{2,i^*}}{h} &= Q_\phi \rho_w \frac{h}{\tau_{n+1}}.
 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Введем равномерную сетку по пространственной переменной

$$x_i = (i-1)h, h = \frac{L}{N-1}, i = \overline{1, N}, x_1 = 0, x_N = L. \tag{4.1.2}$$

А к переменной по времени применим неравномерную сетку

$$t_{n+1} = t_n + \tau_{n+1}, n = \overline{0, M-1}, t_0 = 0, t_M = t_{\text{конечное}}, \tau_{n+1} > 0. \tag{4.1.3}$$

Шаг  $\tau_{n+1}$  выберем таким образом, чтобы за это время граница фазового перехода сдвинулась ровно на один шаг по пространственной сетке.

Как и было подчеркнуто в теоретической части, разобьем ее на две разностных схемы (в промерзшей и талой зонах грунта).

В промерзшей части грунта будет аппроксимироваться разностной схемой вида

$$\begin{aligned}
 \frac{T_{1,j}^{n+1} - T_{1,j}^n}{\tau_{n+1}} &= \frac{T_{1,j+1}^{n+1} - 2T_{1,j}^{n+1} + T_{1,j-1}^{n+1}}{h^2}, i = \overline{2, i^*-1}; \\
 T_1|_{i=1} &= T_c; \\
 T_1|_{i=i^*} &= T_s;
 \end{aligned} \tag{4.1.4}$$

где  $i = i^*$  – граница фазового перехода.

Для получения приближенного решения исходной задачи в талой части грунта, воспользуемся следующей схемой

$$\begin{aligned} \frac{T_{2,j}^{n+1} - T_{2,j}^n}{\tau_{n+1}} &= \frac{T_{2,j+1}^{n+1} - 2T_{2,j}^{n+1} + T_{2,j-1}^{n+1}}{h^2}, i = \overline{i^*+1, N-1}; \\ T_2|_{i=i^*} &= T_3; \\ \left. \frac{\partial T_2}{\partial x} \right|_{i=N} &= 0. \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

Задачу (4.1.4) в промерзшей зоне грунта можно привести к более общему виду:

$$A_i T_{1,i+1}^{n+1} - B_i T_{1,i}^{n+1} + C_i T_{1,i-1}^{n+1} = F_i, \quad (4.1.6)$$

где  $A_i = C_i = \frac{a_1}{h^2}, B_i = \frac{2a_1}{h^2} + \frac{1}{\tau_{n+1}}, F_i = -\frac{T_{1,i}^n}{\tau_{n+1}}.$

Задачу (4.1.5) в талой зоне грунта можно привести к более общему виду:

$$A_i T_{1,i+1}^{n+1} - B_i T_{1,i}^{n+1} + C_i T_{1,i-1}^{n+1} = F_i, \quad (4.1.7)$$

где  $A_i = C_i = \frac{a_1}{h^2}, B_i = \frac{2a_1}{h^2} + \frac{1}{\tau_{n+1}}, F_i = -\frac{T_{1,i}^n}{\tau_{n+1}}.$

При численной реализации сначала будем определять шаг сетки по пространственной координате

$$h = \frac{L}{N-1}. \quad (4.1.8)$$

Затем определим коэффициенты теплопроводности:

$$a_1 = \frac{\lambda_1}{\rho_1 c_1}, a_2 = \frac{\lambda_2}{\rho_2 c_2}. \quad (4.1.9)$$

Теперь введем начальное поле температуры  $T_i^0 = T_0, i = \overline{1, N}.$

Определим переменную *time* и начальное положение границы фазового перехода  $k=1.$

На каждом шаге по времени будем запоминать поле температуры с предыдущего временного слоя

$$Tn_i = T_i^n, i = \overline{1, N}, \quad (4.1.10)$$

и положение границы фазового перехода  $k=k+1$ .

Запоминаем поле температуры с предыдущей итерации

$$Ts_i = T_i^s, i = \overline{1, N}, \quad (4.1.11)$$

и определяем шаг по времени

$$\tau_{n+1} = \frac{a_1 a_2 h^2 Q_\phi (\rho_1 + \rho_2) \omega - h^2 (\lambda_1 a_2 + \lambda_2 a_1) (T_3 - T_i^{*n})}{2 a_1 a_2 [\lambda_1 (T_3 - T_{i^*-1}^{n+1}) - \lambda_2 (T_{i^*+1}^{n+1} - T_3)]}. \quad (4.1.12)$$

Далее рассчитываем прогоночные коэффициенты в 1-ом узле разностной сетки  $\alpha_i, \beta_i, i = \overline{2, k-1}$ .

Определяем температуру на правой границе  $T_N^{s+1}$  на основе правого граничного условия.

Затем рассчитываем поле температуры в промерзшей зоне  $T_i^{s+1}, i = \overline{N-1, k}$ .

Проверяем условие

$$\max_i |T_i^{s+1} - T_i^s| \leq \varepsilon \quad (4.1.13)$$

И увеличиваем переменную времени  $time$  на шаг  $\tau_{n+1}$ .

## 4.2. Вычислительная схема метода преобразования координат

Продублируем постановку разностной схемы, описанный в теоретической части алгоритм решения задачи теплопроводности с фазовыми переходами.

Введем равномерные сетки по пространству и времени:

$$\begin{aligned} \xi_j &= jh, j = \overline{0, N}; \xi_0 = 0, \dots, \xi_N = 1; h = \frac{1}{N}; \\ t_n &= \tau n, n = 0, \dots, M; t_0 = 0, \dots, t_M = t_{end}; \tau = \frac{t_{end}}{M}. \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Разностная схема для описанного метода будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
a_1 \frac{T_{1,j+1}^{n+1} - 2T_{1,j}^{n+1} + T_{1,j-1}^{n+1}}{h^2} + s^{n+1} \xi_j \frac{s^{n+1} - s^n}{\tau} \frac{T_{1,j+1}^{n+1} - T_{1,j-1}^{n+1}}{2h} - (s^{n+1})^2 \frac{T_{1,j}^{n+1} - T_{1,j}^n}{\tau} &= 0; \\
a_2 \frac{T_{2,j+1}^{n+1} - 2T_{2,j}^{n+1} + T_{2,j-1}^{n+1}}{h^2} + (s^{n+1} - L) \xi_j \frac{s^{n+1} - s^n}{\tau} \frac{T_{2,j+1}^{n+1} - T_{2,j-1}^{n+1}}{2h} - (s^{n+1} - L)^2 \frac{T_{2,j}^{n+1} - T_{2,j}^n}{\tau} &= 0; \\
T_{1,j}^0 = T_0; T_{2,j}^0 = T_0; j = \overline{0, N}; \\
T_{1,0}^n = T_c; n = \overline{0, M}; \\
T_{1,N}^n = T_{fr}; n = \overline{0, M}; \\
\frac{T_{2,1}^n - T_{2,0}^n}{h} = 0; n = \overline{0, M}; \\
T_{2,N}^n = T_{fr}; n = \overline{0, M}; \\
\lambda_1 \frac{1}{s^n} \frac{T_{1,N}^n - T_{1,N-1}^n}{h} - \lambda_2 \frac{1}{s^n - L} \frac{T_{2,1}^n - T_{2,0}^n}{h} = Q_f \rho w \frac{s^{n+1} - s^n}{\tau}; n = \overline{0, M}.
\end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Данную задачу мы будем решать методом разностной прогонки.

Задачу (4.2.1) в промерзшей зоне грунта можно привести к более общему виду:

$$A_i T_{1,i+1}^{n+1} - B_i T_{1,i}^{n+1} + C_i T_{1,i-1}^{n+1} = F_i,$$

$$\text{где } A_i = C_i = \frac{a_1}{h^2} + s^{n+1} \xi_j \frac{s^{n+1} - s^n}{2h\tau}, B_i = \frac{2a_1}{h^2} + \frac{(s^{n+1})^2}{\tau_{n+1}}, F_i = -\frac{(s^{n+1})^2 T_{1,i}^n}{\tau_{n+1}}.$$

Задачу (4.2.1) в талой зоне грунта можно также привести к более общему виду:

$$A_i T_{1,i+1}^{n+1} - B_i T_{1,i}^{n+1} + C_i T_{1,i-1}^{n+1} = F_i,$$

где

$$A_i = C_i = \frac{a_1}{h^2} + (s^{n+1} - L) \xi_j \frac{s^{n+1} - s^n}{2h\tau}, B_i = \frac{2a_1}{h^2} + \frac{(s^{n+1} - L)^2}{\tau_{n+1}}, F_i = -\frac{(s^{n+1} - L)^2 T_{1,i}^n}{\tau_{n+1}}.$$

Значение функции межфазной границы  $s^n$  находилось из граничного условия на каждом шаге.

### 4.3. Численное моделирование задачи о промерзании грунта

В данной задаче между промерзшей и талой зоной грунта находится граница фазового перехода. Именно из-за того, что происходит процесс перехода

вещества из одного состояния в другое, ее и относят к типу задач с подвижной границей (задача Стефана) [1].

Таблица 1 – Теплофизические характеристики, используемые в модельной задаче [2]

| Название                           |             | Количество        | Ед. измерения       |
|------------------------------------|-------------|-------------------|---------------------|
| Глубина слоя грунта $L$            |             | 0,3               | М                   |
| Влажность $w$                      |             | 1                 | доля                |
| Коэффициент теплопроводности       | $\lambda_1$ | 2,3               | $Вт / (м \cdot К)$  |
|                                    | $\lambda_2$ | 0,6               |                     |
| Плотность грунта                   | $\rho_1$    | 917               | $кг / м^3$          |
|                                    | $\rho_2$    | 1000              |                     |
| Удельные теплоемкости              | $c_1$       | 2090              | $Дж / (кг \cdot К)$ |
|                                    | $c_2$       | 4220              |                     |
| Теплота фазового перехода $Q_\phi$ |             | $3,32 \cdot 10^5$ | $Дж / кг$           |
| $T_0$                              |             | 293               | $К$                 |
| $T_c$                              |             | 268               | $К$                 |
| $T_\phi$                           |             | 273               | $К$                 |

$M=N=500$  – количество узлов в пространственной и временных сетках.

На рисунке 4 представлены функции распределения температуры в зависимости от времени при решении задачи (2.1.1) – (2.1.2) методом ловли фронта в узел пространственной сетки.

На рисунке 5 представлены графики сравнения численных результатов, полученных при решении одномерной задачи теплопроводности методом ловли фронта в узел пространственной сетки и методом преобразования координат.

Следует отметить, что на первом участке (фаза 1,  $T < 0$ ) функции линейны – это соответствует естественным физическим процессам. А на втором участке

(фаза 2 ,  $T > 0$ ) все функции нелинейны – это обусловлено наличием граничного условия второго рода на нижней границе.

На рисунке 6 представлен график движения границы фазового перехода с течением времени.

Как видно из графика, зависимость нелинейна. Скорость движения границы замедляется с течением времени.

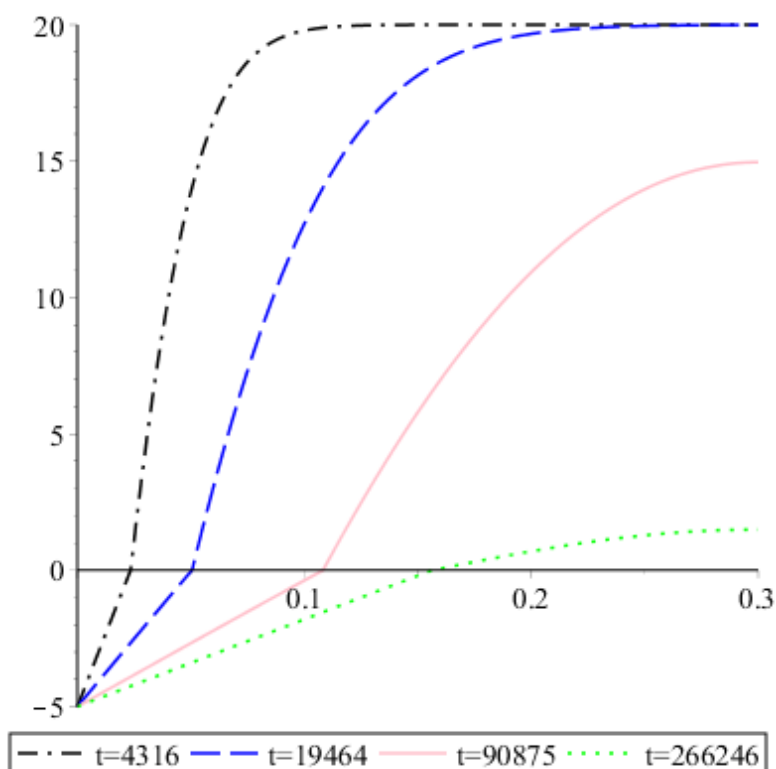


Рисунок 4 – Распределение температуры (градусы) в зависимости от глубины грунта ( $t$  в секундах) методом ловли фронта в узел пространственной сетки

На рисунке 5 прослеживается зависимость точности результатов, полученных каждым из методов, от длительности промежутка процесса промерзания.

Таким образом, метод прогонки позволяет найти решение разностной схемы (2.2.11).

При практической оценке погрешности полученного решения обычно применяют правило Рунге. [11] Если  $y(x_i)$  – точное значение решения в узле  $x_i$ , а  $y_i$  и  $\tilde{y}_i$  – приближённые значения решения в том же узле, полученные

соответственно с шагом  $h$  и  $\frac{h}{2}$ , то оценка погрешности решения  $y_i$  определяется приближённой формулой

$$|\tilde{y} - y(x_i)| \approx \frac{|y_i - \tilde{y}_i|}{3}.$$

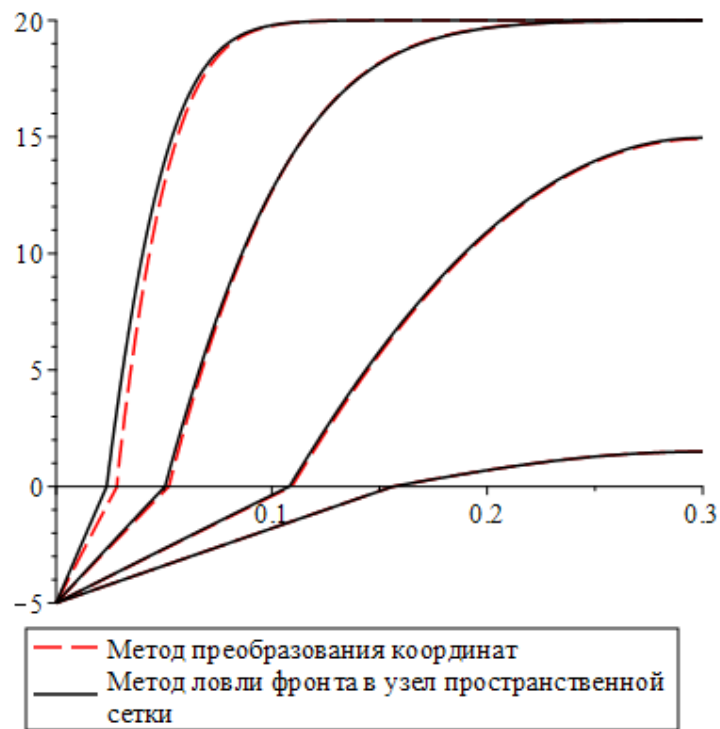


Рисунок 5 – Сравнение распределений температуры  
в зависимости от глубины грунта

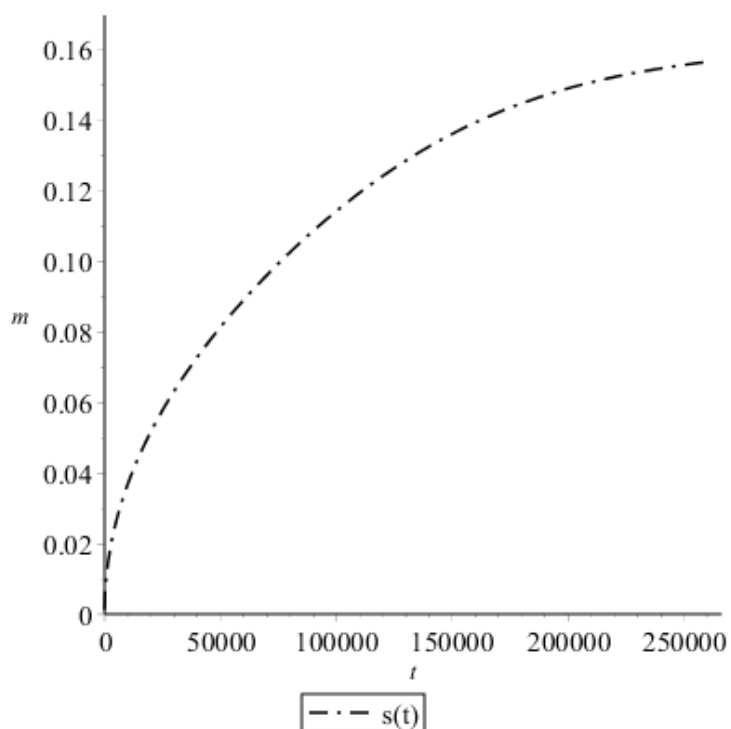


Рисунок 6 – Функция изменения положения границы  $s(t)$

Для данной модельной задачи теплопроводности с фазовыми переходами были получены следующие численные результаты:

Результаты представлены при  $t = 4316$  сек, на каждом слое разбиение по переменной  $x$  равно 500 точек.

Таблица 2 – Оценка погрешности метода ловли фронта в узел пространственной сетки

| № узла | Приближенное<br>решение с шагом $h$ | Приближ. решение<br>с шагом $\frac{h}{2}$ | Погрешность<br>метода<br>$\frac{ y_i - \tilde{y}_i }{3}$ |
|--------|-------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 5      | -3.73878                            | -2.77439                                  | 0.321462                                                 |
| 50     | 18.0948                             | 17.2943                                   | 0.266849                                                 |
| 100    | 19.991                              | 19.9609                                   | 0.0100507                                                |
| 110    | 19.9974                             | 19.9847                                   | 0.00424653                                               |
| 120    | 19.9993                             | 19.9941                                   | 0.00173635                                               |

| № узла | Приближенное<br>решение с шагом $h$ | Приближ. решение<br>с шагом $\frac{h}{2}$ | Погрешность<br>метода<br>$\frac{ y_i - \tilde{y}_i }{3}$ |
|--------|-------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 130    | 19.9998                             | 19.9977                                   | 0.000692861                                              |
| 140    | 20                                  | 19.9991                                   | 0.000271591                                              |
| 150    | 20                                  | 19.9997                                   | 0.000105115                                              |
| 160    | 20                                  | 19.9999                                   | 4.03338e-05                                              |
| 170    | 20                                  | 20                                        | 1.54147e-05                                              |
| 180    | 20                                  | 20                                        | 5.95256e-06                                              |
| 190    | 20                                  | 20                                        | 2.51814e-06                                              |
| 200    | 20                                  | 20                                        | 1.65054e-06                                              |

Таблица 3 – Оценка погрешности метода преобразования координат

| № узла | Приближенное<br>решение с шагом $h$ | Приближ. решение<br>с шагом $\frac{h}{2}$ | Погрешность<br>метода<br>$\frac{ y_i - \tilde{y}_i }{3}$ |
|--------|-------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 5      | -3.73877                            | -2.77439                                  | 0.321462                                                 |
| 50     | 18.0953                             | 17.295                                    | 0.266769                                                 |
| 100    | 19.991                              | 19.9609                                   | 0.0100417                                                |
| 110    | 19.9974                             | 19.9847                                   | 0.00424217                                               |
| 120    | 19.9993                             | 19.9941                                   | 0.00173433                                               |
| 130    | 19.9998                             | 19.9977                                   | 0.000691957                                              |
| 140    | 20                                  | 19.9991                                   | 0.000271198                                              |
| 150    | 20                                  | 19.9997                                   | 0.000104948                                              |
| 160    | 20                                  | 19.9999                                   | 4.02637e-05                                              |
| 170    | 20                                  | 20                                        | 1.53856e-05                                              |
| 180    | 20                                  | 20                                        | 5.94037e-06                                              |

| № узла | Приближенное<br>решение с шагом $h$ | Приблиз. решение<br>с шагом $\frac{h}{2}$ | Погрешность<br>метода<br>$\frac{ y_i - \tilde{y}_i }{3}$ |
|--------|-------------------------------------|-------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 190    | 20                                  | 20                                        | 2.51254e-06                                              |
| 200    | 20                                  | 20                                        | 1.64669e-06                                              |

#### 4.4. Исследование на устойчивость метода ловли фронта в узел пространственной сетки

Для проведения исследования, будем использовать вводные данные из таблицы 1, немного исказив значение граничных условий, прибавив к исходной величине значение, равное среднему значению погрешности.

Результаты представлены для процесса промерзания грунта, происходящего по времени  $t = 4316$  сек, на каждом слое разбиение по переменной  $x$  равно 1000 точек.

Таблица 4 – Исследование на устойчивость метода ловли фронта в узел пространственной сетки

| № узла | Приближенное<br>решение без<br>искажений нач.<br>данных | Приближенное<br>решение с<br>искажением нач.<br>данных | Разница   |
|--------|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-----------|
| 20     | -3.78711                                                | -3.78151                                               | 0.0055933 |
| 80     | 0                                                       | 0.0650001                                              | 0.0650001 |
| 240    | 18.2959                                                 | 17.6247                                                | 0.671249  |
| 300    | 19.5372                                                 | 19.211                                                 | 0.325881  |
| 360    | 19.8973                                                 | 19.7739                                                | 0.12338   |
| 400    | 19.9662                                                 | 19.9084                                                | 0.0578633 |

| № узла | Приближенное<br>решение без<br>искажений нач.<br>данных | Приближенное<br>решение с<br>искажением нач.<br>данных | Разница     |
|--------|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-------------|
| 460    | 19.9945                                                 | 19.9783                                                | 0.0162442   |
| 500    | 19.9985                                                 | 19.9921                                                | 0.00646692  |
| 560    | 19.9998                                                 | 19.9983                                                | 0.00149068  |
| 600    | 20                                                      | 19.9994                                                | 0.000536567 |
| 660    | 20                                                      | 19.9999                                                | 0.000110855 |
| 700    | 20                                                      | 20                                                     | 3.79935e-05 |
| 760    | 20                                                      | 20                                                     | 7.49806e-06 |
| 800    | 20                                                      | 20                                                     | 2.52611e-06 |
| 860    | 20                                                      | 20                                                     | 4.92136e-07 |
| 900    | 20                                                      | 20                                                     | 1.65773e-07 |
| 960    | 20                                                      | 20                                                     | 3.5709e-08  |
| 1000   | 20                                                      | 20                                                     | 2.15511e-08 |

Как видно из полученных результатов, метод ловли фронта является устойчивым.

#### **4.5. Исследование на устойчивость метода преобразования координат**

Для проведения исследования на устойчивость метода преобразования координат, будем использовать вводные данные из таблицы 1, немного исказив значение граничных условий, прибавив к исходной величине значение, равное среднему значению погрешности метода.

Результаты представлены при промежутке времени проведения процесса промерзания грунта равном  $t = 4316$  сек, на каждом слое разбиение по переменной  $x$  равно 1000 точек.

Как видно из полученных результатов, метод преобразования координат является устойчивым (таблица 5).

Таблица 5 – Исследование на устойчивость метода преобразования координат

| № узла | Приближенное<br>решение без<br>искажений нач.<br>данных | Приближенное<br>решение с<br>искажением нач.<br>данных | Разница     |
|--------|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-------------|
| 20     | -3.78709                                                | -3.78142                                               | 0.00567516  |
| 80     | 0                                                       | 0.0655319                                              | 0.0655319   |
| 300    | 19.5385                                                 | 19.196                                                 | 0.342512    |
| 360    | 19.8977                                                 | 19.767                                                 | 0.130714    |
| 400    | 19.9664                                                 | 19.9047                                                | 0.0617039   |
| 460    | 19.9946                                                 | 19.977                                                 | 0.017537    |
| 500    | 19.9985                                                 | 19.9915                                                | 0.00705357  |
| 560    | 19.9998                                                 | 19.9982                                                | 0.00165683  |
| 600    | 20                                                      | 19.9994                                                | 0.000605345 |
| 660    | 20                                                      | 19.9999                                                | 0.000128319 |
| 700    | 20                                                      | 20                                                     | 4.48204e-05 |
| 760    | 20                                                      | 20                                                     | 9.11853e-06 |
| 800    | 20                                                      | 20                                                     | 3.13772e-06 |
| 860    | 20                                                      | 20                                                     | 6.31477e-07 |
| 900    | 20                                                      | 20                                                     | 2.17487e-07 |
| 960    | 20                                                      | 20                                                     | 4.85927e-08 |
| 1000   | 20                                                      | 20                                                     | 2.9831e-08  |

#### **4.6. Вычислительная схема для трехмерной задачи теплопроводности с фазовыми переходами**

Трехмерную разностную схему (3.8.1) заменим последовательностью трех одномерных разностных схем, как и было описано в теоретической части

$$\begin{aligned} \frac{T_{ijk}^{n+1/3} - T_{ijk}^n}{\tau} - \delta L_x(T_{ijk}^{n+1/3}) - (1-\delta)L_x(T_{ijk}^n) &= \delta(L_y(T_{ijk}^{n+1/3}) + L_z(T_{ijk}^{n+1/3})) + \\ &+ (1-\delta)(L_y(T_{ijk}^n) + L_z(T_{ijk}^n)); \end{aligned} \quad (4.6.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{ijk}^{n+2/3} - T_{ijk}^{n+1/3}}{\tau} - \delta L_y(T_{ijk}^{n+2/3}) - (1-\delta)L_y(T_{ijk}^{n+1/3}) &= \delta(L_x(T_{ijk}^{n+2/3}) + L_z(T_{ijk}^{n+2/3})) + \\ &+ (1-\delta)(L_x(T_{ijk}^{n+1/3}) + L_z(T_{ijk}^{n+1/3})); \end{aligned} \quad (4.6.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{ijk}^{n+1} - T_{ijk}^{n+2/3}}{\tau} - \delta L_z(T_{ijk}^{n+1}) - (1-\delta)L_z(T_{ijk}^{n+2/3}) &= \delta(L_x(T_{ijk}^{n+1}) + L_y(T_{ijk}^{n+1})) + \\ &+ (1-\delta)(L_x(T_{ijk}^{n+2/3}) + L_y(T_{ijk}^{n+2/3})). \end{aligned} \quad (4.6.3)$$

Каждую из которых будем решать методом разностной прогонки.

Введем четыре равномерные сетки:

$$\begin{aligned} x_i &= ih_x, \quad j = \overline{0, N}; \quad h_x = \frac{1}{N}; \\ y_j &= ih_y, \quad j = \overline{0, N_1}; \quad h_y = \frac{1}{N_1}; \\ z_k &= kh_z, \quad k = \overline{0, N_2}; \quad h_z = \frac{1}{N}; \end{aligned} \quad (4.6.4)$$

$$t_n = \tau n, \quad n = 0, \dots, M; \quad t_0 = 0, \dots, t_M = t_{end}; \quad \tau = \frac{t_{end}}{M}.$$

Задачу (4.6.1) можно привести к более общему виду:

$$A_i T_{1,i+1}^{n+1} - B_i T_{1,i}^{n+1} + C_i T_{1,i-1}^{n+1} = F_i,$$

где

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{\delta \lambda_x}{h_x^2} + \frac{\delta b}{2h_x}; \\ B_i &= \frac{1}{\tau} + \frac{2\delta \lambda_x}{h_x^2} + \frac{2\delta \lambda_y}{h_y^2} + \frac{2\delta \lambda_z}{h_z^2}; \\ C_i &= \frac{\delta \lambda_x}{h_x^2} - \frac{\delta b}{2h_x}; \\ F_i &= \frac{\delta \lambda_y}{h_y^2} T_{i(j+1)k}^1 + \frac{\delta \lambda_y}{h_y^2} T_{i(j-1)k}^1 + \frac{\delta \lambda_z}{h_z^2} T_{ij(k+1)}^1 + \frac{\delta \lambda_z}{h_z^2} T_{ij(k-1)}^1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(1-\delta)\lambda_x}{h_x^2} \left( (T^1_{(i+1)jk} - T^1_{ijk}) - (T^1_{ijk} - T^1_{(i-1)jk}) \right) - \frac{(1-\delta)b}{2h_x} (T^1_{(i+1)jk} - T^1_{(i-1)jk}) + \\
& + \frac{(1-\delta)\lambda_y}{h_y^2} \left( (T^1_{i(j+1)k} - T^1_{ijk}) - (T^1_{ijk} - T^1_{i(j-1)k}) \right) + \\
& + \frac{(1-\delta)\lambda_z}{h_z^2} \left( (T^1_{ij(k+1)} - T^1_{ijk}) - (T^1_{ijk} - T^1_{ij(k-1)}) \right).
\end{aligned}$$

Задачу (4.6.2) можно также привести к более общему виду:

$$A_i T_{1,i+1}^{n+1} - B_i T_{1,i}^{n+1} + C_i T_{1,i-1}^{n+1} = F_i,$$

где

$$\begin{aligned}
A_i &= C_i = \frac{\delta\lambda_y}{h_y^2}; \\
B_i &= \frac{1}{\tau} + \frac{2\delta\lambda_x}{h_x^2} + \frac{2\delta\lambda_y}{h_y^2} + \frac{2\delta\lambda_z}{h_z^2}; \\
F_i &= \frac{\delta\lambda_x}{h_x^2} (T^1_{(i+1)jk} - T^1_{(i-1)jk}) - \frac{\delta b}{2h_x} (T^1_{(i+1)jk} - T^1_{(i-1)jk}) + \\
& + \frac{\delta\lambda_z}{h_z^2} (T^2_{ij(k+1)} - T^2_{ij(k-1)}) + \\
& + \frac{(1-\delta)\lambda_x}{h_x^2} \left( (T^1_{(i+1)jk} - T^1_{ijk}) - (T^1_{ijk} - T^1_{(i-1)jk}) \right) - \frac{(1-\delta)b}{2h_x} (T^1_{(i+1)jk} - T^1_{(i-1)jk}) + \\
& + \frac{(1-\delta)\lambda_y}{h_y^2} \left( (T^2_{i(j+1)k} - T^2_{ijk}) - (T^2_{ijk} - T^2_{i(j-1)k}) \right) + \\
& + \frac{(1-\delta)\lambda_z}{h_z^2} \left( (T^2_{ij(k+1)} - T^2_{ijk}) - (T^2_{ijk} - T^2_{ij(k-1)}) \right).
\end{aligned}$$

Задачу (4.6.3) можно также привести к более общему виду:

$$A_i T_{1,i+1}^{n+1} - B_i T_{1,i}^{n+1} + C_i T_{1,i-1}^{n+1} = F_i,$$

где  $A_i = C_i = \frac{\delta\lambda_z}{h_z^2}; B_i = \frac{1}{\tau} + \frac{2\delta\lambda_x}{h_x^2} + \frac{2\delta\lambda_y}{h_y^2} + \frac{2\delta\lambda_z}{h_z^2};$

$$F_i = \frac{\delta\lambda_x}{h_x^2} (T^1_{(i+1)jk} - T^1_{(i-1)jk}) - \frac{\delta b}{2h_x} (T^1_{(i+1)jk} - T^1_{(i-1)jk}) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\delta \lambda_y}{h_y^2} (T_{i(j+1)k}^2 - T_{i(j-1)k}^2) + \\
& + \frac{(1-\delta) \lambda_x}{h_x^2} \left( (T_{(i+1)jk}^1 - T_{ijk}^1) - (T_{ijk}^1 - T_{(i-1)jk}^1) \right) - \frac{(1-\delta)b}{2h_x} (T_{(i+1)jk}^1 - T_{(i-1)jk}^1) + \\
& + \frac{(1-\delta) \lambda_y}{h_y^2} \left( (T_{i(j+1)k}^2 - T_{ijk}^2) - (T_{ijk}^2 - T_{i(j-1)k}^2) \right) + \\
& + \frac{(1-\delta) \lambda_z}{h_z^2} \left( (T_{ij(k+1)}^3 - T_{ijk}^3) - (T_{ijk}^3 - T_{ij(k-1)}^3) \right).
\end{aligned}$$

#### 4.7. Численное моделирование задачи о процессе лазерной сварки двух металлических пластин

В данной работе моделируется процесс лазерной сварки встык двух металлических пластин одинакового габарита.

Таблица 6 – Теплофизические характеристики, используемые в модельной задаче [8]

| Название                     |             | Количество | Ед. измерения |
|------------------------------|-------------|------------|---------------|
| Толщина пластин $g_p$        |             | 2          | мм            |
| Мощность лазера $W$          |             | 3,18       | кВт           |
| Количество шагов сетки по    | $x$         | 70         | ш             |
|                              | $y$         | 70         | ш             |
|                              | $z$         | 70         | ш             |
| Коэффициент теплопроводности | $\lambda_1$ | 155,7      | Вт/(м*К)      |
|                              | $\lambda_2$ | 127,85     |               |
|                              | $\lambda_3$ | 100        |               |
| Удельная теплоемкость        | $c_1$       | 1000       | Дж/(кг*К)     |
|                              | $c_2$       | 1050       |               |
|                              | $c_3$       | 1100       |               |

| Название                                  |       | Количество        | Ед. измерения        |
|-------------------------------------------|-------|-------------------|----------------------|
| Плотность фазы                            | $p_1$ | $2,6 \cdot 10^3$  | Кг/(м <sup>3</sup> ) |
|                                           | $p_2$ | $2,45 \cdot 10^3$ |                      |
|                                           | $p_3$ | $2,3 \cdot 10^3$  |                      |
| Температура начала затвердевания $T_{l0}$ |       | 862               | К                    |

Полученные в результате практической реализации описанной выше вычислительной схемы изображены на рисунке 7 и рисунке 8.

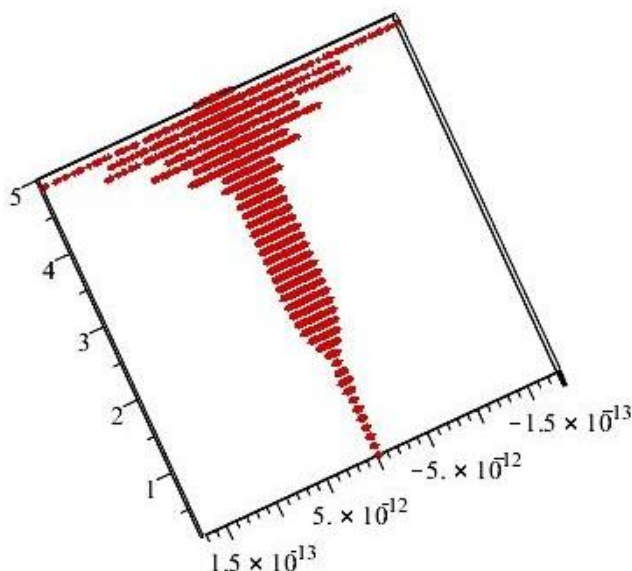


Рисунок 7 – Результаты решения модельной задачи двумерном виде

Представленная форма сварной ванны соответствует прогнозируемой в теоретическом описании форме. Благодаря полученным результатам можно определять глубину и протяженность сварной ванны, что позволит рассчитать

1. Время для изготовления сварных изделий различной сложности;
2. Затраты на производство, реализуя данную модель, не проводя эксперименты на практике.

В верхней части сварной ванны наблюдаются выступы, именуемые “плечом”, которые возникают из-за интенсивных вихревых течений, которые возникают из-за трения о свободную поверхность сварной ванны паров металла из парового канала.

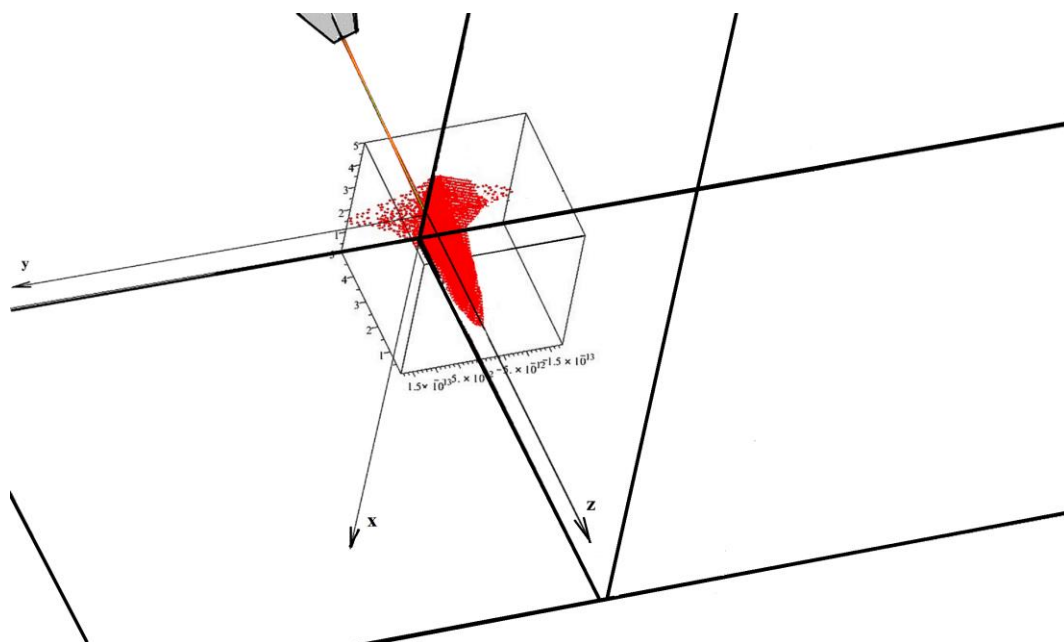


Рисунок 8 – Результаты решения модельной задачи в трехмерном виде

Далее приведена оценка погрешности метода решения трехмерной задачи теплопроводности с фазовыми переходами. Данная оценка производилась правилом Рунге.

Таблица 7 – Оценка погрешности решения трехмерной задачи теплопроводности с фазовыми переходами

| № узла по x | № узла по y | № узла по z | Приближенное решение с шагом $h$ | Приблиз. решение с шагом $\frac{h}{2}$ по всем переменным | Погрешность метода $\frac{ y_i - \tilde{y}_i }{3}$ |
|-------------|-------------|-------------|----------------------------------|-----------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| 0.075       | 0.075       | 0.075       | 1.38182e-15                      | 1.38182e-15                                               | 3.29221e-19                                        |
| 0.075       | 0.825       | 0.75        | -2.42242e-16                     | -2.42242e-16                                              | 3.25924e-20                                        |

| №<br>узла<br>по x | №<br>узла<br>по y | №<br>узла<br>по z | Приближенное<br>решение с<br>шагом $h$ | Приблизж. решение<br>с шагом $\frac{h}{2}$ по всем<br>переменным | Погрешность<br>метода<br>$\frac{ y_i - \tilde{y}_i }{3}$ |
|-------------------|-------------------|-------------------|----------------------------------------|------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| 0.075             | 1.875             | 0.75              | 2.97466e-14                            | 2.97466e-14                                                      | 3.22677e-18                                              |
| 0.075             | 3                 | 0.75              | -1.68201e-13                           | -1.68201e-13                                                     | 3.19442e-17                                              |
| 0.15              | 0.075             | 3                 | 3.43289e-12                            | 3.43289e-12                                                      | 3.22645e-18                                              |
| 0.15              | 0.825             | 3                 | 1.13812e-10                            | 1.13812e-10                                                      | 3.16188e-16                                              |
| 0.225             | 0.075             | 0.75              | -8.35484e-14                           | -8.35484e-14                                                     | 3.19343e-18                                              |
| 0.225             | 0.525             | 0.75              | 3.22172e-16                            | 3.22172e-16                                                      | 3.09766e-20                                              |
| 0.225             | 0.75              | 3                 | 6.23132e-12                            | 6.23132e-12                                                      | 3.00479e-18                                              |
| 0.3               | 0.075             | 0.75              | -4.00943e-14                           | -4.00943e-14                                                     | 3.16051e-18                                              |
| 0.3               | 0.75              | 2.25              | -3.20526e-11                           | -3.20526e-11                                                     | 3.06574e-16                                              |
| 0.3               | 2.325             | 3                 | -7.71663e-11                           | -7.71663e-11                                                     | 2.97377e-16                                              |
| 0.3               | 3                 | 2.25              | 3.68689e-12                            | 3.68689e-12                                                      | 2.88452e-15                                              |
| 0.225             | 0.075             | 0.75              | -8.35484e-14                           | -8.35484e-14                                                     | 3.09765e-18                                              |
| 0.225             | 0.525             | 0.75              | 3.22172e-16                            | 3.22172e-16                                                      | 2.97378e-20                                              |
| 0.375             | 0.675             | 0.75              | -9.48553e-16                           | -9.48553e-16                                                     | 2.85483e-20                                              |
| 0.375             | 1.575             | 0.75              | -1.69196e-16                           | -1.69196e-16                                                     | 2.74066e-20                                              |
| 0.45              | 0.825             | 0.75              | -1.3368e-17                            | -1.3368e-17                                                      | 2.63099e-21                                              |
| 0.525             | 0.375             | 0.75              | -5.76761e-15                           | -5.76761e-15                                                     | 2.52571e-19                                              |
| 0.525             | 2.325             | 2.25              | 4.3867e-15                             | 4.3867e-15                                                       | 3.06544e-19                                              |
| 0.525             | 2.775             | 0.75              | 3.65061e-14                            | 3.65061e-14                                                      | 2.94287e-18                                              |
| 0.525             | 3                 | 2.25              | -2.46985e-13                           | -2.46985e-13                                                     | 2.82512e-17                                              |

#### 4.8. Исследование на устойчивость метода решения трехмерной задачи теплопроводности с фазовыми переходами

При проведении исследования, используем входные данные, искажив значения функций, выражающих условия на границах.

Данные берем из модельной задачи 2, теплофизические параметры которой указаны в таблице 6.

Результаты представлены на 10000 временном слое, на каждом слое разбиение по переменной  $x$  равно 5000 точек.

Таблица 8 – Исследование на устойчивость метода решения трехмерной задачи теплопроводности с фазовыми переходами

| №<br>узла<br>по $x$ | №<br>узла<br>по $y$ | №<br>узла<br>по $z$ | Приближенное<br>решение без<br>искажений нач.<br>данных | Приближенное<br>решение с<br>искажением нач.<br>данных | Разница     |
|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-------------|
| 0.075               | 0.075               | 0.075               | 1.38182e-15                                             | 1.38182e-15                                            | 7.86419e-20 |
| 0.075               | 0.825               | 0.75                | -2.42242e-16                                            | -2.42242e-16                                           | 4.75185e-21 |
| 0.075               | 1.875               | 0.75                | 2.97466e-14                                             | 2.97466e-14                                            | 1.65411e-19 |
| 0.075               | 3                   | 0.75                | -1.68201e-13                                            | -1.68201e-13                                           | 5.56907e-18 |
| 0.15                | 0.075               | 3                   | 3.43289e-12                                             | 3.43289e-12                                            | 9.49509e-17 |
| 0.15                | 0.825               | 3                   | 1.13812e-10                                             | 1.13812e-10                                            | 6.43073e-16 |
| 0.225               | 0.075               | 0.75                | -8.35484e-14                                            | -8.35484e-14                                           | 3.37473e-19 |
| 0.225               | 0.525               | 0.75                | 3.22172e-16                                             | 3.22172e-16                                            | 5.73456e-21 |
| 0.225               | 0.75                | 3                   | 6.23132e-12                                             | 6.23132e-12                                            | 7.62438e-17 |
| 0.3                 | 0.075               | 0.75                | -4.00943e-14                                            | -4.00943e-14                                           | 8.72592e-19 |
| 0.3                 | 0.75                | 2.25                | -3.20526e-11                                            | -3.20526e-11                                           | 5.60977e-16 |
| 0.3                 | 2.325               | 3                   | -7.71663e-11                                            | -7.71663e-11                                           | 2.51221e-16 |
| 0.3                 | 3                   | 2.25                | 3.68689e-12                                             | 3.68689e-12                                            | 3.43026e-17 |
| 0.225               | 0.075               | 0.75                | -8.35484e-14                                            | -8.35484e-14                                           | 7.71728e-19 |
| 0.225               | 0.525               | 0.75                | 3.22172e-16                                             | 3.22172e-16                                            | 9.59534e-21 |
| 0.375               | 0.675               | 0.75                | -9.48553e-16                                            | -9.48553e-16                                           | 1.49413e-21 |
| 0.375               | 1.575               | 0.75                | -1.69196e-16                                            | -1.69196e-16                                           | 4.41013e-21 |
| 0.45                | 0.825               | 0.75                | -1.3368e-17                                             | -1.3368e-17                                            | 8.34041e-21 |

| №<br>узла<br>по x | №<br>узла<br>по y | №<br>узла<br>по z | Приближенное<br>решение без<br>искажений нач.<br>данных | Приближенное<br>решение с<br>искажением нач.<br>данных | Разница     |
|-------------------|-------------------|-------------------|---------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------|-------------|
| 0.525             | 0.375             | 0.75              | -5.76761e-15                                            | -5.76761e-15                                           | 7.70864e-20 |
| 0.525             | 2.325             | 2.25              | 4.3867e-15                                              | 4.3867e-15                                             | 5.58109e-20 |
| 0.525             | 2.775             | 0.75              | 3.65061e-14                                             | 3.65061e-14                                            | 9.47649e-19 |
| 0.525             | 3                 | 2.25              | -2.46985e-13                                            | -2.46985e-13                                           | 2.39071e-18 |

Как видно из полученных результатов, данный метод является устойчивым.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

1. В работе рассмотрены два численных метода решения одномерной двухфазовой задачи Стефана с граничным условием второго рода (метод ловли фронта в узел пространственной сетки и метод преобразования координат).

2. Представлено сравнение результатов численной реализации вышеуказанных методов. Полученные результаты показали преимущество метода преобразования координат по сравнению с методом ловли фронта. Данное преимущество заключается в возможности выбора произвольного шага по времени.

3. Проведено исследование аппроксимации, устойчивости и сходимости вышеописанных численных методов в одномерном и многомерных случаях.

4. Также рассмотрен метод решения трехмерной модели процесса лазерной сварки металлических пластин и численный алгоритм ее реализации. Предложен и запрограммирован алгоритм построения сварной ванны. Результаты могут быть полезны при расчете расхода материалов и затрат при производстве металлокорпусов.

5. К каждому описанному в работе методу разработана разностная схема и описан метод ее решения.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Самарский А.А. Вычислительная теплопередача / А.А. Самарский, П.К. Вабищевич – М.: Едиториал УРСС, 2003 – 784 с.
2. Бородин С.Л. Численные методы решения задачи Стефана/ С.Л. Бородин – Вестник ТюмГУ. Физ.-мат. мод.. Нефть, газ, энергетика, 2015 – 175 с.
3. Кузнецов Г.В. Разностные методы решения задач теплопроводности: учебное пособие/ Г.В. Кузнецов, М.А. Шеремет – Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.
4. Борисов В.С. Численное решение задачи о процессах промерзания и протаивания в многолетних грунтах – Вестник СВФУ, 2015 – Т. 12 – № 2. С. 36-42.
5. Шапеев В.П. Конечно-разностный алгоритм для численного моделирования процессов лазерной сварки металлических пластин/ В.П. Шапеев, А.Н. Черепанов //Вычислительные технологии-2006-С.102-117
6. Черепанов А.Н. Численное исследование процесса сварки тонких металлических пластин/ А.Н. Черепанов, В.П. Шапеев , -2009-С.96-106
7. Рыкалин Н. Н. Расчеты тепловых процессов при сварке / Н. Н. Рыкалин. – М.: Машгиз, 1951 – 296 с.
8. Черепанов, А. Н. Численное моделирование теплофизических процессов при лазерной сварке с образованием парового канала/ А. Н. Черепанов, В.П. Шапеев, В.М. Фомин, Л.Г. Семин – ПМТФ, 2006. Т.11, №4, С. 102-117
9. Черепанов А.Н, Численное моделирование лазерной сварки тонких металлических пластин с учетом конвекции в сварочной ванне/ А.Н. Черепанов, В.П, Шапеев, В.И, Исаев – Изд-во НГУ, 2010., Т.17 №3, С. 451-466.
10. Черепанов А.Н. Численное моделирование теплофизических процессов при лазерно-лучевой сварке / А.Н. Черепанов, В.П. Шапеев, В.М. Фомин, Л.Г. Семин – Прикл. механика и техн. Физика, 2006 – 88-96 с.

11. Кудряшова Н.Ю. Вычислительная математика: методические указания к выполнению лабораторных работ/ Н.Ю. Кудряшова, Н.В. Мойко. – Пенза: Изд-во ПГУ, 2016 - 50 с.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Листинг программы для метода ловли фронта в узел пространственной сетки (обязательное)

Приложение содержит листинг программы на языке C/C++ для решения уравнения теплопроводности с фазовыми переходами в одномерном случае методом ловли фронта в узел пространственной сетки.

Описание программы.

Переменные:  $M$  – переменная, отвечающая за размерность системы;  $\text{eps}$  – максимально возможная погрешность;  $t_{\text{fin}}$  – время окончания процесса промерзания грунта,  $h$ ,  $\tau$  – шаги сетки по  $x$  и  $t$  соответственно;  $i$  – переменная типа `int`, предназначена для решения системы.

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <fstream>
#include <math.h>
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
using namespace std;
const int M=500;
double eps=0.000000001;
double Max=0.;
double t_fin=4316.;//конечное время
double tau=0.;
//Теплофизические характеристики промерзшей зоны грунта
double L=0.3;//Толщина грунта
double lyamda1= 2.3;
double p1=917.;
double c1=2090.;
//Теплофизические характеристики талой зоны грунта
double lyamda2= 0.6;
double p2=1000.;
double c2=4220.;
double T0=293.;//начальное время
double Tc=268.;//
double Tfr=273.;
//Теплота фазового перехода
double Qfr=332000;
//влажность грунта
double w=1;
double a1=lyamda1/(p1*c1);
double a2=lyamda2/(p2*c2);
```

```

double time=0;//начальное время
double * T=new double[M+1];//узлы T
double * Tn=new double[M+1];//узлы Tn
double * Ts=new double[M+1];//узлы Ts
double A,B, C,F;
double h=(L)/(M-1);
double * alfa=new double[M+1];
double * beta=new double[M+1];
ofstream write("1.txt");
void main()
{
    setlocale(LC_ALL, "Russian");
    for(int i=0;i<=M;i++)
    { T[i]=T0;//записала в начальный момент }
    int k=1;//для определения положения границы
while (time< t_fin)
{ //1
    for(int i=1;i<=M;i++)
    {
        Tn[i]=T[i];//записываю на предыдущем слое
    }
    k++;//смещаю
do
{ //2
    for (int i=1;i<=M;i++)
        Ts[i]=T[i];//запоминаем поле t на предыдущей итерации
    tau=(a1*a2*Qfr*w*(p1+p2)*(pow(h,2))-
(pow(h,2))*(lyamda1*a2+lyamda2*a1)*(Tfr-Tn[k]))/(2.0*a1*a2*(lyamda1*(Tfr-T[k-1])-
lyamda2*(T[k+1]-Tfr)));
    //прогночный коэффициент
    //cout<<"tau"<<" "<<tau<<endl;
    alfa[1]=0.;
    beta[1]=Tc;
    for(int i=2;i<k;i++)
    {
        A=a1/(pow(h,2));
        B=2.*a1/(pow(h,2))+1./abs(tau);
        C=a1/(pow(h,2));
        F=-Tn[i]/abs(tau);
        alfa[i]=A/(B-C*alfa[i-1]);
        beta[i]=(C*beta[i-1]-F)/(B-C*alfa[i-1]);
    }
    T[k]=Tfr;
    //cout<<"T"<<k<<" "<<T[k]<<endl;
    for (int i=k-1;i>0;i--)
    {
        T[i]=alfa[i]*T[i+1]+beta[i];//Начальный коэффициент для талой зоны грунта на
основе условия на границе раздела двух сред
        //cout<<"i="<<i<<" "<<T[i]<<endl;
    }
    alfa[k]=0.;

```

```

    beta[k]=Tfr;
    for(int i=k+1;i<M;i++)
    {
        A=a2/(pow(h,2));
        B=2.*a2/(pow(h,2))+1./abs(tau);
        C=a2/(pow(h,2));
        F=-Tn[i]/abs(tau);
        alfa[i]=A/(B-C*alfa[i-1]);
        beta[i]=(C*beta[i-1]-F)/(B-C*alfa[i-1]);
    }
    T[M]=(2.*a2*tau*beta[M-1]+(pow(h,2))*Tn[M])/(2.*a2*tau*(1.-alfa[M-
1])+(pow(h,2)));//условие на правой границе
    for (int i=M-1;i>k;i--)
    {
        T[i]=alfa[i]*T[i+1]+beta[i];//поле температуры в талой зоне грунта
    }
    Max=abs(T[1]-Ts[1]);
    for(int i=2;i<=M;i++)
    {
        if(Max<abs(T[i]-Ts[i])) Max=abs(T[i]-Ts[i]);
    }
}
while ( Max<=eps);

time=time+abs(tau);
cout<<time<<" "<<tau<<endl;
} //1
for(int i=1;i<=M;i++)
{
    cout<<i<<" "<<h*(i-1)<<" "<<T[i]-273<<endl;
    write<<h*(i-1)<<" "<<T[i]-273<<endl;
}
getch();
}

```

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Листинг программы для метода преобразования координат

(обязательное)

Приложение содержит листинг программы на языке C/C++ для решения уравнения теплопроводности с фазовыми переходами в одномерном случае методом преобразования координат.

Описание программы.

Переменные:  $M$  – переменная, отвечающая за размерность системы;  $\text{eps}$  – максимально возможная погрешность;  $t_{\text{fin}}$  – время окончания процесса промерзания грунта,  $h$ ,  $\tau$  – шаги сетки по  $x$  и  $t$  соответственно;  $i$  – переменная типа `int`, предназначена для решения системы.

```
#include <iostream>
#include <iomanip>
#include <fstream>
#include <math.h>
#include <conio.h>
#include <stdio.h>
using namespace std;
const int M = 10; //размерность для времени
const int N = 10; //размерность по пространству
double eps = 0.000000001;
double Max = 0.;
double t_fin = 4316.; //конечное время
double * ksi = new double[N + 1]; //узлы в пространстве
double * t = new double[M + 1]; //узлы по времени
double * s = new double[M + 1]; // массив для определения значения границы
//Теплофизические характеристики промерзшей зоны грунта
double L = 0.3; //Толщина грунта
double lyamda1 = 2.3;
double p1 = 917.;
double c1 = 2090.;
//Теплофизические характеристики талой зоны грунта
double lyamda2 = 0.6;
double p2 = 1000.;
double c2 = 4220.;
double T0 = 293.; //начальное время
double Tc = 268.; //
double Tfr = 273.;
//Теплота фазового перехода
double Qfr = 332000;
//влажность грунта
```

```

double w = 1;
double a1 = lyamda1 / (p1*c1);
double a2 = lyamda2 / (p2*c2);
double time1 = 0;//начальное время
double * T = new double[M + 1];//узлы T
double * Tn = new double[M + 1];//узлы Tn
double * Ts = new double[M + 1];//узлы Ts
double A, B, C, F;
double h = (1.) / (N);
double tau = t_fin / (M);
double * alfa = new double[M + 1];
double * beta = new double[M + 1];
ofstream write("1.txt");
void main()
{
    setlocale(LC_ALL, "Russian");
    for (int j = 0; j <= N; j++)
    {ksi[j] = j * h;}
    for (int n = 0; n <= M; n++)
    {    t[n] = n * tau;}
    for (int n = 0; n <= M; n++)
    {    T[n] = T0;//записала в начальный момент}
    s[0] = Tc;
    s[1] = T0;
    for ( int n=1; n<= M; n++)
    {
        for (int i = 1; i <= M; i++)
        {
            Tn[i] = T[i];//записываю на предыдущем слое    }
        for ( int j=2; j<= N; j++)
        {
            for (int k = 1; k <= M; k++)
            {
                for (int i = 1; i <= M; i++) Ts[i] = T[i];//запоминаем поле t на предыдущей итерации
                alfa[1] = 0.;
                beta[1] = Tc;
                for (int i = 1; i <=j; i++)
                {
                    A = a1 / (pow(h, 2))-s[i+1]*ksi[k]*(s[i+1]-s[i])/(tau*2.*h);
                    B = a1 / (pow(h, 2)) + s[i + 1] * ksi[k] * (s[i + 1] - s[i]) / (tau*2.*h);
                    C = 2.*a1 / (pow(h, 2))-(pow(s[i+1],2))/(tau);
                    F = Tn[i] / (tau);
                    alfa[i] = A / (B - C * alfa[i - 1]);
                    beta[i] = (C*beta[i - 1] - F) / (B - C * alfa[i - 1]);    }
                T[j] = Tfr;
                //cout<<"T"<<k<<" "<<T[k]<<endl;
                for (int i =j - 1; i > 0; i--)
                {T[i] = alfa[i] * T[i + 1] + beta[i];//Начальный коэффициент для
талой зоны грунта на основе условия на границе раздела двух сред}
                alfa[j] = 0.;
                beta[j] = Tfr;
                for (int i = j + 1; i < M; i++)
                {
                    A = a2 / (pow(h, 2));

```

```

        B = 2.*a2 / (pow(h, 2)) + 1. / abs(tau);
        C = a2 / (pow(h, 2));
        F = -Tn[i] / abs(tau);
        alfa[i] = A / (B - C * alfa[i - 1]);
        beta[i] = (C*beta[i - 1] - F) / (B - C * alfa[i - 1]);    }
        T[M] = (2.*a2*tau*beta[M - 1] + (pow(h, 2))*Tn[M]) / (2.*a2*tau*(1.
- alfa[M - 1]) + (pow(h, 2)));//условие на правой границе
        for (int i = M - 1; i > j; i--)
        {
            T[i] = alfa[i] * T[i + 1] + beta[i];//поле температуры в талой зоне грунта
        }
        Max = abs(T[1] - Ts[1]);
        for (int i = 2; i <= M; i++)
        {
            if (Max < abs(T[i] - Ts[i])) Max = abs(T[i] - Ts[i]);
        }
    } while (Max <= eps);

    time1 = time1 + abs(tau);
    cout << time1 << " " << tau << endl;
} //1
for (int i = 1; i <= M; i++)
{
    cout << i << " " << h * (i - 1) << " " << T[i] - 273 << endl;
    write << h * (i - 1) << " " << T[i] - 273 << endl;
}
_getch();
}

```

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### Листинг программы для решения трехмерного уравнения теплопроводности с фазовыми переходами (обязательное)

Данное приложение содержит листинг программы на языке C/C++ для решения многомерного уравнения теплопроводности с фазовыми переходами.

Описание программы.

Переменные:  $M$ ,  $M1$ ,  $M2$ ,  $N$  – переменные, отвечающие за размерность системы по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$  соответственно;  $hx$ ,  $hy$ ,  $hz$ ,  $\tau$  – шаги сетки по  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$  соответственно;  $i$ ,  $j$ ,  $k$ ,  $t$  – переменные типа `int`, предназначены для решения системы.

```
#include <conio.h>
#include <fstream>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <iomanip>
#include <iostream>
using namespace std;
const int M = 3;//размерность для x
const int M1 = 5;//размерность для y
const int M2 = 5;//размерность для z
const int N = M;//размерность для t

double U1[M + 1][M1 + 1][M2 + 1]; //на n+1/3-ем слое
double U2[M + 1][M1 + 1][M2 + 1]; //на n+2/3 - ом слое
double U3[M + 1][M1 + 1][M2 + 1]; //на n - ом слое
double a, T, betta;
double b;
double hx, hy, hz, tau;
double lyamdax=1, lyamday=1, lyamdaz=1;
double * t = new double[N + 1]; //узлы T
double * x = new double[M + 1]; //узлы X
double * y = new double[M1 + 1]; //узлы Y
double * z = new double[M2 + 1]; //узлы Z
//double * t2 = new double[2 * N + 1]; //узлы T
//double * x2 = new double[2 * M + 1]; //узлы X
ofstream write("1.txt");
int main()
{
    setlocale(LC_ALL, "Russian");
    a = 5, T = 1., betta = 1;
```

```

hx = a / M, hy = a / M1, hz = a / M2, tau = T / N;
for (int i = 0; i <= M; i++)
{
    x[i] = i * hx;}
for (int i = 0; i <= M1; i++)
{
    y[i] = i * hy;}
for (int i = 0; i <= M2; i++)
{
    z[i] = i * hz;}
for (int j = 0; j <= N; j++)
{
    t[j] = tau * j;}
for (int i = 0; i <= M; i++)
{
    for (int j = 0; j <= M1; j++)
    {
        for (int k = 0; k <= M2; k++)
        {
            U1[i][j][k] = 0.5;
            U2[i][j][k] = 0.5;
            U3[i][j][k] = 0.5;
        }
    }
}
double A1, B1, C1, F1[M + 1][M1 + 1][M2 + 1];
double A2, B2, C2, F2[M + 1][M1 + 1][M2 + 1];
double A3, B3, C3, F3[M + 1][M1 + 1][M2 + 1];
A1 = betta/(hx*hx)*lyamdax+betta*b/(2.*hx);
C1 = -(-1./tau -2.*betta/(hx* hx)*lyamdax- 2.*betta / (hy* hy)*lyamday- 2.*betta / (hz*
hz)*lyamdaz);
B1 = betta/(hx*hx)*lyamdax-betta*b/(2.*hx);
A2 = betta/(hy*hy)*lyamday;
C2 = -(-1. / tau - 2*betta / (hx* hx)*lyamdax - 2.*betta / (hy* hy)*lyamday - 2.*betta / (hz*
hz)*lyamdaz);
B2 = betta / (hy*hy)*lyamday;
A3 = tau; C3 = 2.*tau + hx * hx; B3 = tau;
double alpha1 [M1 + 1][M2+1];
double beta1 [M1 + 1][M2 + 1];
double alpha2[M + 1][M2 + 1];
double beta2[M + 1][M2 + 1];
double alpha3[M + 1][M1 + 1];
double beta3[M + 1][M1 + 1];
for (int t = 0; t < N; t++)
{
    for (int i = 0; i < M; i++)
    {
        alpha1[1][1] = 0;
        beta1[1][1] = U1[0][0][0];
        for (int j = 1; j < M1; j++)
        {
            for (int k = 1; k < M2 ; k++)
            {
F1[i][j][k] = betta/(hy*hy)*lyamday*U1[i][j+1][k]+ betta / (hy*hy)*lyamday*U1[i][j - 1][k]+ betta
/ (hz*hz)*lyamdaz*U1[i][j][k+1] + betta / (hz*hz)*lyamdaz*U1[i][j][k-1]+(1-
betta)/(hx*hx)*lyamdax*((U1[i+1][j][k]- U1[i][j][k])- (U1[i][j][k] - U1[i-1][j][k]))-(1-
betta)*b*(U1[i + 1][j][k] - U1[i-1][j][k])/(2*hx)+(1 - betta) / (hy*hy)*lyamday*((U1[i ][j+1][k] -

```

```

U1[i][j][k]) - (U1[i][j][k] - U1[i][j-1][k]))+(1 - betta) / (hz*hz)*lyamdaz*((U1[i][j][k+1] -
U1[i][j][k]) - (U1[i][j][k] - U1[i][j][k-1]));

```

```

    alpha1[j + 1][k + 1] = B1 / (C1 - (A1*alpha1[j][k]));
    beta1[j + 1][k + 1] = (F1[i][j][k] + A1 * beta1[j][k]) / (C1 - A1 * alpha1[j][k]);
}
}

```

```

for (int j = M1 - 1; j > 0; j--)
{
    for (int k = M2 - 1; k > 0; k--)
    {

```

```

        U1[i][j][k] = alpha1[j + 1][k + 1] * U1[i + 1][j + 1][k + 1] + beta1[j + 1][k + 1];
    }
}

```

```

for (int j = 0; j < M1; j++)
{

```

```

    alpha2[1][1] = 0;
    beta2[1][1] = U2[0][0][0];
    for (int i = 1; i < M ; i++)
    {

```

```

        for (int k = 1; k < M2; k++)
        {

```

```

            F2[i][j][k] = betta/(hx*hx)*lyamdax*(U1[i+1][j][k]+ U1[i - 1][j][k])-betta*b*(U1[i+1][j][k]-
U1[i-1][j][k])+betta/(hz*hz)*lyamdaz*(U1[i][j][k+1]-U1[i][j][k-1]);

```

```

            alpha2[i + 1][k + 1] = B2 / (C2 - (A2*alpha2[i][k]));
            beta2[i + 1][k + 1] = (F2[i][j][k] + A2 * beta2[i][k]) / (C2 - A2 * alpha2[i][k]);
        }
    }

```

```

    for (int i = M - 1; i > 0; i--)
    {
        for (int k = M2 - 1; k > 0; k--)
        {

```

```

            U2[i][j][k] = alpha2[i + 1][k + 1] * U2[i + 1][j + 1][k + 1] + beta2[i + 1][k + 1];
        }
    }
}

```

```

for (int k = 0; k < M2; k++)
{

```

```

    alpha3[1][1] = 0;
    beta3[1][1] = U3[0][0][0];
    for (int i = 1; i < M - 1; i++)
    {

```

```

        for (int j = 1; j < M1 - 1; j++)
        {

```

```

            F3[i][j][k] = U3[i][j][k] * hx*hx;
            alpha3[i + 1][j + 1] = B3 / (C3 - (A3*alpha3[i][j]));

```

```

            beta3[i + 1][j + 1] = (F3[i][j][k] + A3 * beta3[i][j]) / (C3 - A3 * alpha3[i][j]);
        }
    }

```

```

    for (int i = M - 1; i > 0; i--)
    {

```

```

        for (int j = M1 - 1; j > 0; j--)
        {

```

```

            U3[i][j][k] = alpha3[i + 1][j + 1] * U3[i + 1][j + 1][k + 1] + beta3[i + 1][j + 1];
        }
    }
}

```

```

for (int i = 0; i <= M; i++)

```

```

{
    for (int j = 0; j <= M1; j++)
    {
        for (int k = 0; k <= M2; k++)
        {
            cout << setw(15) << U1[i][j][k] << "\t";
            write << setw(15) << U1[i][j][k] << "\t";
        }
        cout << endl; write << endl;
    }cout << endl;cout << endl;
    _getch();
}

```