

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Функциональный подход к решению уравнений и неравенств в школьном курсе
математики»

Студент

kat 22.05.22 Разживина Екатерина Александровна
(подпись, дата) (ФИО полностью)

Руководитель

Мол 22.05.22 Монахова О.А.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Жу 30.06.22 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 25.06.22 № 12)

Заведующий кафедрой

Пан 25.06.22 Паньженский В.И.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой хорошо (протокол заседания ГЭК от 14.07.22 № 13)

Секретарь ГЭК

Жу 14.07.22 Журавлева Е.Г.
(подпись, дата) (фамилия, инициалы)

Пенза 2022

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Теоретические основы изучения функциональной линии в школьном курсе математики.....	5
1.1 Цели и место изучения функциональной линии	5
1.2 Функции и их свойства.....	6
1.3 Анализ школьной программы.....	7
1.4 Анализ учебников по алгебре	8
1.5 Анализ линий изучения уравнений в школьном курсе математики	11
1.6 Анализ линий изучения неравенств в школьном курсе математики.....	29
Глава 2. Исследование функционального метода решения уравнений и неравенств.....	36
2.1 Применение функционального метода решения уравнений и неравенств	36
2.2 Разработка элективного курса «Решение уравнений и неравенств с использованием свойств функций».....	63
Заключение.....	73
Список литературы	74
Приложение №1	75

Введение

Существуют уравнения (неравенства) стандартного вида (линейные, квадратные, иррациональные, логарифмические и т. д.) и стандартные методы их решения. Однако не всякое уравнение или неравенство можно решить с помощью стандартных приемов, предназначенных для вполне определенных типов уравнений (неравенств). Встречаются такие уравнения (неравенства), которые с помощью традиционных алгоритмов решить затруднительно. В таких случаях иногда оказывается полезным использовать их нестандартные методы решения, которые порой существенно упрощают и сокращают решение. Остановимся на применении одного из таких методов – использования свойств элементарных функций при решении уравнений и неравенств, т.е. функциональный подход.

Функция – одно из важнейших понятий математики. В школьном курсе математики основное внимание уделяется числовым функциям. Причиной этого является тесная связь математики с естественными науками, в частности с физикой, для которой числовые функции служат средством количественного описания различных зависимостей между величинами.

Уравнения и неравенства имеют очень большую роль в математике, потому что любая задача сводится к построению математической модели как в виде уравнения либо неравенства, поэтому спектр применения этих понятий очень велик.

Актуальность работы: обусловлена появлением возможности более рационального решения уравнений и неравенств с помощью функционального подхода.

Объект исследования: методы решения уравнений и неравенств.

Предмет исследования: функциональный подход к решению уравнений и неравенств.

Практическая значимость: разработка элективного курса «Решение уравнений и неравенств с использованием свойств функций».

Цель: изучить нестандартные методы решения уравнений и неравенств, основанные на использовании свойств функции.

Задачи:

- 1) проанализировать материал по теме исследования;
- 2) описать сущность функционального метода;
- 3) решить уравнения и неравенства, используя свойства функции;

Гипотеза исследования: использование функционального метода позволяет прийти к рациональному и наиболее быстрому способу решения уравнений и неравенств.

Глава 1. Теоретические основы изучения функциональной линии в школьном курсе математики

1.1 Цели и место изучения функциональной линии

Ни одно из других понятий не отражает явлений реальной действительности с такой конкретностью, как понятие функциональной зависимости. Ученик буквально на каждом шагу встречается с разными применениями функциональной зависимости, в том числе изображённой в виде графиков и диаграмм, чтение и составление которых предполагает определённое функциональное мышление.

Понятие функции – это основное понятие в математике, поэтому качество подготовки учащихся средней школы к усвоению математики во многом зависит от того, насколько твёрдо и полно данное понятие изучено в школе.

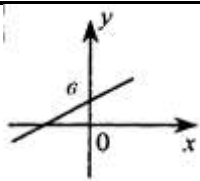
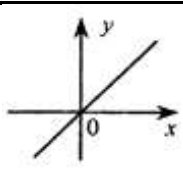
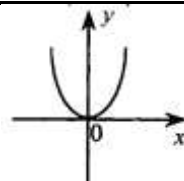
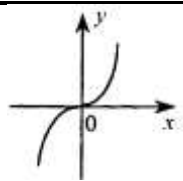
Многие понятия школьного курса математики строятся на понятии функции, а также решение многих задач, непосредственно связанных с понятием функции, используют знания о ней.

Итак, изучение понятия функции – это не только одна из важнейших целей преподавания математики в школе, но и средство, которое даёт возможность установить связь с другими предметами (физикой, химией).

В школьных учебниках место изучения функций различно. В одних учебниках функциональная линия является ведущей (здесь рассмотрены понятия и функции, которым не придаётся значения в других учебниках, например, непрерывность и выпуклость, функции). В других учебниках внимание уделяется другим содержательно-методическим линиям.

1.2 Функции и их свойства

Рассмотрим функции, изучаемые в 7 классе в школьном курсе математике.

Функция	<i>Линейная</i>	<i>Прямая пропорционал.</i>	<i>Квадратичная</i>	<i>Кубическая</i>
	$y = kx + b$	$y = kx$	$y = ax^2$	$y = ax^3$
<i>D(y) область опр.</i>	Любые числа	Любые числа	Любые числа	Любые числа
<i>График</i>				
<i>Особенности графика</i>	Точка O(0;0) не принадлежит графику	Точка O(0;0) принадлежит графику	Точка O(0;0) принадлежит графику	Точка O(0;0) принадлежит графику
<i>Симметрия</i>			Есть. Относительно оси y.	Есть. Относительно начала координат.
<i>Часто задаваемые вопросы</i>	<p>- <u>Условие пересечения графиков двух линейных функций?</u> k(уг.коэф.)различны.</p> <p>- <u>Условие параллельности графиков двух линейных функций?</u> k(уг.коэф.)одинаков.</p>	<p><u>Проверьте принадлежит ли точка графику функции</u> <u>Например,</u> $y = 5x + 3$ A(2;4) $4 = 5 \cdot 2 + 3$ $4 = 13$ Не верно, Не принадлежит, если верно, то принадлежит.</p>	<p><u>Как найти координаты точек пересечения функции с осями?</u> Если с осью X –то нулим «у», если с осью Y, то нулим «х».</p>	<p><u>Как найти точки пересечения графиков функций?</u> Графически или аналитически (приравнять правые части и решить уравнение, найти вторую координату)</p>

1.3 Анализ школьной программы

Функциональная линия – это одна из ведущих линий в школьной математике, знакомство с ней начинается в 5 классе, а заканчивается в 11 классе. В основной школе происходит изучение таких понятий, как функция, область определения функции, способы задания функции, график функции, возрастание и убывание функции, сохранение знака на промежутке, наибольшее и наименьшее значение функции, чётная и нечётная функции.

Изучаются линейная функция $y = kx + b$, степенные функции вида $y = x^2$, $y = x^3$, квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$, обратная пропорциональность $y = k/x$, функция, содержащая знак модуля $y = |x|$.

Кроме того, рассматриваются простейшие преобразования графиков функций.

После изучения функциональной линии в основной школе учащиеся должны:

- понимать, что функция – это математическая модель, позволяющая описывать и изучать разнообразные зависимости между реальными величинами, что конкретные типы функций описывают большое разнообразие реальных зависимостей;
- правильно употреблять функциональную терминологию (значение функции, аргумент, график функции, область определения, возрастание и др.) и символику; понимать её при чтении текста, в речи учителя, в формулировке задач;
- находить по графику функции промежутки возрастания и убывания функции, промежутки знакопостоянства, находить наибольшее и наименьшее значения;
- строить графики функций – линейной, прямой и обратной пропорциональностей, квадратичной функции;

- интерпретировать в несложных случаях графики реальных зависимостей между величинами, отвечая на поставленные вопросы.

1.4 Анализ учебников по алгебре

Приведем сравнительный анализ учебников по алгебре на тему «Неравенства и системы неравенств» для 8 - 11 классов.

Автор	Класс	Количество часов	Темы
Макарычев Ю.Н. Миндюк Н.Г. и др.	8 класс	18 часов. (3 часа в неделю) Две контрольные работы	Определение числовых неравенств, их свойств. Числовые промежутки. Пересечение и объединение множеств. Неравенства с одной переменной и их решение. Системы неравенств с одной переменной и их решение.
	9класс	10 часов. Две контрольные работы	Неравенства с одной переменной. Решение неравенств второй степени с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Неравенства с двумя переменными и их системы. Неравенства с двумя переменными. Системы неравенств с двумя переменными.
	10 класс	21 часа	Решение тригонометрических уравнений и неравенств.
	11 класс	23 часа.	Решение показательных неравенств. Решение логарифмических неравенств. Равносильность неравенств. Уравнения и неравенства с модулями. Иррациональные уравнения и неравенства. Доказательство неравенств. Уравнения и неравенства с

Автор	Класс	Количество часов	Темы
			двумя переменными.
Алимов Ш.А.	8 класс	21 час. (4 часа в неделю) одна контрольная работа	Неравенства. Положительные и отрицательные числа. Числовые неравенства. Основные свойства числовых неравенств. Сложение и умножение неравенств. Строгие и нестрогие неравенства. Неравенства с одним неизвестным. Решение неравенств. Система неравенств с одним неизвестным. Числовые промежутки. Решение систем неравенств. Модуль числа. Уравнения, содержащие модуль. Неравенства, содержащие модуль.
	8 класс	15 часов. одна контрольная работа	Квадратные неравенства. Квадратное неравенство и его решение. Решение квадратного неравенства с помощью графика квадратичной функции. Метод интервалов. Исследование квадратного трехчлена.
	9 класс	10 часов	Неравенства и уравнения, содержащие степень. Решение неравенств и их систем.
	11 класс	5 часов	Примеры решения простейших тригонометрических неравенств. Решение простейших тригонометрических неравенств содержащих только $\cos$. Решение простейших тригонометрических неравенств содержащих только $\sin$. Решение простейших тригонометрических неравенств, содержащих только tg .
Мордкович А. Г.	8 класс	15 часов. (3 часа в неделю) Одна контрольная	Неравенства. Свойства числовых неравенств. Исследование функций на монотонность. Решение линейных неравенств.

Автор	Класс	Количество часов	Темы
		работа	Решение квадратных неравенств
	9 класс	16 часов. Одна контрольная работа	Неравенства и системы неравенств. Основные понятия и свойства неравенств. Линейные и квадратные неравенства. Рациональные неравенства. Множества и операции над ними. Системы неравенств.
	10 класс	6 часов.	Свойства синуса, косинуса, тангенса, котангенса. Решение простейших неравенств. Решение неравенств вида: $\sin x > a$, $\sin x < a$, $\cos x > a$, $\cos x < a$, Решение неравенств способом подстановки.
	11 класс	13 часов	Показательные неравенства. Решение показательных неравенств. Логарифмические неравенства. Решение логарифмических неравенств. Решение неравенств с одной переменной. Системы и совокупности неравенств. Иррациональные неравенства Неравенства с модулями. Уравнения и неравенства с параметрами.

Проанализировав приведённое планирование можно сделать вывод, что в программе по учебнику Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г. и др. отводится наибольшее количество часов на изучение темы «Неравенства и системы неравенств». И особое внимание этой теме уделяется в 11 классе (23 часа). Тогда как в программе по учебнику Алимова Ш.А. в 11 классе – 5 часов. Поэтому, мы считаем, что для более прочного усвоения темы «Неравенства и системы неравенств» и эффективной подготовки к ЕГЭ соответствует

учебник Макарычева Ю.Н., Миндюк Н.Г. и др. Так же следует отметить учебник Мордкович А. Г. Темы, представленные в планировании, полно отражают содержание линии неравенств и их систем.

1.5 Анализ линий изучения уравнений в школьном курсе математики

В учебниках, рекомендованных Министерством образования и науки Российской Федерации к использованию в образовательном процессе в общеобразовательных учреждениях, существуют разные подходы к изучению уравнений.

В данном параграфе я проведу анализ школьных учебников по математике для того, чтобы узнать в каких классах изучают уравнения и как преподносится эта тема в каждом из учебников.

Проанализируем учебники, представленные непосредственно для основной школы.

1) Учебники по математике и алгебре за 5-9 класс. *Муравин Г. К., Муравина О. В.*

Учащиеся встречаются с уравнениями в начале 5 класса в главе «Числовые и буквенные выражения». Тема выделена в отдельный параграф, который носит название «Формулы и уравнения». Дается четкое определение уравнения: «Уравнение – это равенство с неизвестным, значение которого нужно найти». Говорится, что неизвестное обычно обозначается буквами x , y или z . Также дается определение корня уравнения и говорится, что значит решить уравнение. Помимо определений автор знакомит учащихся с правилом чтения уравнений. Что касается практической части учебника, то здесь автор предоставляет достаточно много заданий на закрепление данной темы. Учащимся предлагается: прочитать и решить уравнения; решить задачи на составление уравнения; по схемам,

изображенным на рисунке, составить и решить уравнения; отгадать число посредством составления уравнения.

В учебнике 6 класса параграф «Решение уравнений» начинается с повторения основных понятий по данной теме. Но так как учащиеся уже знакомы с отрицательными числами, то формулируется более удобное правило решения уравнений. Вот как оно звучит: «При решении уравнения можно переносить слагаемые из одной его части в другую, изменяя при этом их знаки на противоположные». Далее вводится следующее определение: «Числовой множитель при неизвестном называется коэффициентом». После чего следует еще одно правило: «При решении уравнения можно делить или умножать обе его части на любое число, отличное от нуля».

Затем автор дает несколько примеров, используя даже дробно-рациональное уравнение (конечно, не говоря, что оно таковым является). Практическая часть насыщена заданиями различной трудности, что помогает ученикам в полной мере овладеть материалом. В параграфе «Решение задач на проценты» так же имеются задания на составление уравнения – это задачи на сплавы, смеси и растворы.

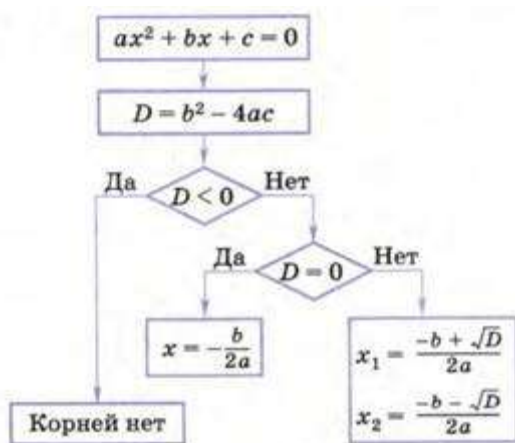
В учебнике 7 класса тема «Уравнения» начинается с обучения переводу условия задачи на математический язык. Рассматриваются следующие задачи (естественно на составление уравнения): на выполнение плановых заданий, на изменение количества, на сплавы и смеси, на движение. Далее в пункте «Решение уравнений» вводится определение высказывания и равносильных предложений. Затем повторяются правила, изученные в 6 классе. Весь материал сопровождается подробным решением примеров. Пункт «Уравнения с двумя переменными и их системы» начинается с решения задачи на составление системы уравнений. Далее говорится, что задача решена методом исключения переменной и приводится еще несколько подобных задач. В главе «Линейная функция» учащиеся знакомятся с графиком линейного уравнения с двумя переменными. Замечу, что о линейном уравнении с одной переменной речи в учебнике не идет. Даются

следующие определения: «Уравнение $ax + by = c$ называют линейным уравнением с двумя переменными», «Графиком уравнения называют множество точек координатной плоскости, координаты которых являются решением уравнения». В конце учебника представлено очень много заданий на повторение.

Много времени уделяется изучению уравнений в учебнике 8 класса. Так, в главе «Рациональные выражения» рассматривается тема «Дробные уравнения с одной переменной». Говорится, что дробные выражения часто встречаются при решении задач на совместную работу и движение. Вводится определение: «Рациональные уравнения с дробными выражениями называются дробными».

Позднее, уже после изучения квадратных корней, идёт глава «Квадратные уравнения». Четкого определения квадратного уравнения нет. Лишь говорится, что

« $ax^2 + by + c = 0$, где $a \neq 0$ – уравнение второй степени, или квадратное уравнение». Сначала учащихся знакомят с таким методом решения квадратных уравнений, как выделение полного квадрата. Следующим шагом в обучении по данному учебнику идет решение квадратного уравнения в общем виде. Дается определение дискриминанта: «Число корней квадратного уравнения зависит от знака числа $b^2 - 4ac$. Это число называют дискриминантом и обозначают буквой D ». Автор выделяет в табличку количество корней уравнения при различных знаках дискриминанта. Далее – очень удобная блок-схема алгоритма решения квадратного уравнения.



Тема «Теорема Виета» начинается с доказательства, а затем звучит сама формулировка теоремы. Дается определение приведенного квадратного уравнения и формула Виета для него. Далее приводятся частные случаи квадратных уравнений. Вводится определение неполного квадратного уравнения, а также сокращенного дискриминанта $-\frac{D}{4}$, рассматриваются различные способы решения квадратного уравнения. Затем учащимся предлагаются задачи, приводящие к квадратному уравнению. Следующая тема в учебнике – «Системы двух уравнений с двумя переменными». Здесь, помимо уже знакомого с 7 класса способа сложения, учащимся предлагается решение систем уравнений способом подстановки и, конечно же, решение задач с помощью систем уравнений. В конце учебника в главе «Повторение» учащиеся снова встречаются с квадратными уравнениями. Помимо самих уравнений представлена интересная историческая справка по данной теме.

В учебнике 9 класса в главе «Квадратичная функция» учащиеся вновь сталкиваются с уравнениями. В параграфе «Корни многочленов» дается определение уравнения n -ой степени: «Уравнение, левая часть которого многочлен n -ой степени с одной переменной, а правая – нуль, называют уравнением n -ой степени». Решаются уравнения степени больше 2. Далее автор учит также решать уравнения и их системы графически. В конце учебника в главе «Повторение и обобщение» очень много заданий различной сложности на решение уравнений.

2) Учебники по математике за 5-6 класс. *Дорофеев Г.В., Петерсон Л.Г.*

В учебнике 5 класса никаких упоминаний об уравнениях нет.

Лишь ближе к концу учебника 6 класса в главе «Рациональные числа» выделен параграф «Уравнения». Начинается изучение темы с обучения раскрытию скобок. Здесь же сразу даются уравнения. В пункте «Коэффициент» определение коэффициента предлагается следующим образом: «Если выражение является произведением числа и буквенной части, то числовой множитель в этом выражении называют коэффициентом». Затем учащихся учат приводить подобные слагаемые. И только после того, как в течение всего параграфа учащимся уже много раз уравнения предлагались для решения, следует пункт «Понятие уравнения». Дается определение: «Уравнением будем называть равенство, содержащее переменную, значение которой надо найти». Говорится, что уравнение характеризуется двумя свойствами:

1. уравнение – это равенство;
2. в этом равенстве имеется буква, значение которой надо найти.

Также дается определение корня уравнения: «Значение переменной, при подстановке которого в уравнение получается верное числовое равенство, называется корнем уравнения». Автор говорит, что «решить уравнение – значит найти множество всех его корней». В пункте «Решение уравнений» учащиеся учатся приводить уравнение к более удобному виду. Также здесь даются такие методы решения уравнений, как метод проб и ошибок и метод перебора. В практической части учебника представлены как обычные уравнения, так и задачи на их составление. Дается четкий алгоритм решения задач с помощью уравнений.

3) Учебники по математике и алгебре за 5-9 класс. *Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С.*

Впервые с уравнениями учащиеся сталкиваются в учебнике 5 класса в главе «Сложение и вычитание натуральных чисел». Понятие уравнения вводится через сюжетную задачу. Дается определение корня уравнения:

«Корнем уравнения называют число, которое при подстановке вместо буквы обращает уравнение в верное числовое равенство». Также автор знакомит с такими понятиями, как решение уравнение и что значит «решить уравнение». Весь теоретический материал подробно разобран на примерах различной сложности, много заданий дано для самостоятельного решения.

В учебнике 6 класса учащиеся встречаются с уравнениями при изучении темы «Пропорции». Здесь представлены задачи, решаемые с помощью уравнений. Затем, в главе «Рациональные числа и действия над ними», присутствует два параграфа – «Решение уравнений» и «Решение задач с помощью уравнений». В первом выделяются основные свойства (о переносе членов уравнения из одной части в другую, об умножении или делении их на одно и то же число, неравное нулю, а также прибавлении или вычитании одного и того же числа). На основе этих свойств и решаются уравнения в данном параграфе. Во втором, соответственно, даются задачи различной сложности, решаемые с помощью уравнений. Практическая часть учебника насыщена множеством заданий.

В учебнике алгебры 7 класса уравнениям посвящена самая первая глава. Здесь учащиеся знакомятся с линейными уравнениями с одной переменной. Дается определение: «Уравнение вида $ax = b$, где x – переменная, a и b – некоторые числа, называют линейным уравнением с одной переменной». Дается удобная для использования таблица:

Значения a и b	$a \neq 0$	$a = 0, b = 0$	$a = 0, b \neq 0$
Корни уравнения $ax = b$	$x = \frac{b}{a}$	x — любое число	корней нет

Рис. 1. Таблица корней линейного уравнения

Теория закрепляется на подробно разобранных примерах и заданиях для самостоятельного решения. В этой же главе выделяется параграф «Решение задач с помощью уравнений». Здесь дается определение

математической модели, выводится четкий алгоритм действий при решении задач с помощью уравнений, рассматриваются примеры. Практическая часть очень насыщена задачами различной трудности.

Последняя глава учебника также полностью посвящена уравнениям, а именно – системам линейных уравнений с двумя переменными. Определение уравнения с двумя неизвестными вводится через задачи. Составляют уравнения и приходят к выводу, что они содержат две переменные. Здесь же дается определение решения уравнения с двумя переменными, выделяются основные свойства. Также автор знакомит с графиком такого уравнения. После чего уделяется внимание конкретно линейным уравнениям с двумя переменными, вводятся основные понятия и свойства. Далее автор переходит уже к самим системам уравнений с двумя переменными. Даются основные понятия, затем приводится пример решения одной из систем, после чего говорится, что она решена графическим способом. Следующий этап в изучении уравнений – решение систем линейных уравнений методом подстановки и методом сложения. Для всех трех методов автор дает четкий алгоритм действий.

И последняя тема – это «Решение задач с помощью систем линейных уравнений».

Много времени изучению уравнений выделено также в учебнике 8 класса. В главе «Рациональные выражения» учащиеся знакомятся с равносильными и рациональными уравнениями. Рассматриваются примеры уравнений, после чего вводится определение: «Два уравнения называют равносильными, если они имеют одни и те же корни или каждое из уравнений не имеет корней». На основе этого вновь формулируются свойства уравнений с одной переменной, уже используя понятие равносильности. Далее вводится понятие рационального уравнения. Весь теоретический материал закрепляется практическими заданиями.

Глава «Квадратные уравнения» начинается со знакомства учащихся с основными определениями. После введения понятия «квадратное уравнение»

подробно рассматриваются неполные квадратные уравнения. Материал излагается в доступной форме. В теме «Формула корней квадратного уравнения» вводится понятие дискриминанта. Подробно расписывается о количестве корней уравнения в зависимости от знака дискриминанта. Теорема Виета дается «в лоб», после краткой биографии Ф. Виета. Материал излагается подробно и с доказательствами. В параграфе «Уравнения, сводящиеся к квадратным» вводится определение биквадратного уравнения. Как дополнительная тема выделяется параграф «Решение уравнений методом замены переменной». Рассматриваются также и рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций. Все темы закрепляются на множестве заданий различной трудности.

В учебнике 9 класса уравнения встречаются лишь в главе «Квадратичная функция». Здесь изучаются системы уравнений с двумя переменными. Подробно рассматриваются такие методы решения систем, как метод подстановки, метод сложения и метод замены переменной.

4) Учебники по алгебре за 7-9 класс. *Алимов Ш.А., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В. и др.*

В учебнике 7 класса тема «Уравнения с одним неизвестным» изучается в начале учебного года, сразу после темы «Алгебраические выражения». Понятие уравнения вводится через сюжетную задачу и звучит так: «Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением». Далее дается определение корня уравнения: «Корнем уравнения называется то значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство». На примерах показано, что количество корней может быть разным. Затем вводится понятие «решить уравнение» (найти все его корни или установить, что их нет). Четкого определения линейного уравнения нет, оно заменяется описанием и несколькими примерами. В параграфе «Решение уравнений с одним неизвестным, сводящихся к линейным» выделяются свойства уравнений (о переносе членов уравнения из одной части в другую и умножении или

делении их на одно и то же число, неравное нулю). Следующий этап в изучении данной темы – решение задач с помощью уравнений. Здесь автор рассматривает подробный пример решения задачи и дает много заданий для самостоятельного решения.

После изучения линейной функции, автор вновь возвращается к теме «Уравнения», а именно – «Системы двух уравнений с двумя неизвестными». Дается определение: «Уравнением первой степени с двумя неизвестными x и y называется уравнение вида $ax + by = c$, в котором a, b, c – заданные числа, причем хотя бы одно из чисел a и b не равно нулю, т. е. $a^2 + b^2 \neq 0$ ». На примере подробно расписывается, что является коэффициентами, свободным членом. Затем следует еще одно определение: «Решением уравнения с двумя неизвестными x и y называется упорядоченная пара чисел $(x; y)$, при подстановке которых в это уравнение получается верное числовое равенство». Четкого определения системы двух уравнений нет, лишь приводится пример.

Далее подробно рассматриваются способы решения систем уравнений: способ подстановки, способ сложения и графический способ.

Также рассматривается решение задач с помощью систем уравнений. Приводится несколько примеров решения таких задач и выстраивается алгоритм. Что касается практической части учебника, то она очень насыщена заданиями различной сложности по данной теме.

Более глубоко данная тема изложена в учебнике 8 класса. Начинается знакомство с квадратными уравнениями. Вводится определение: «Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – заданные числа, $a \neq 0$, x – неизвестное», расписывается, где старший и второй коэффициенты, свободный член. Дается следующая теорема: «Уравнение $x^2 = d$, где $d > 0$, имеет два корня: $x_1 = \sqrt{d}$, $x_2 = -\sqrt{d}$ ». О дискриминанте пока речи не идет. Говорится лишь, что «если в уравнении $x^2 = d$ правая часть равна нулю, то уравнение $x^2 = 0$ имеет один

корень $x = 0$ » и «если $d < 0$, то уравнение $x^2 = d$ не имеет действительных корней». Далее происходит знакомство с неполными квадратными уравнениями: дается определение и разбираются решения всех видов таких уравнений. После этого следует тема «Метод выделения полного квадрата». Данный метод поясняется на примерах. В следующем параграфе, который называется «Решение квадратных уравнений», выводится формула корней квадратного уравнения и наконец, вводится определение дискриминанта: «Выражение $b^2 - 4ac$ называют дискриминантом и обозначают буквой D , т. е. $D = b^2 - 4ac$ ». Затем учащиеся знакомятся с приведенными квадратными уравнениями, теоремой Виета и теоремой, обратной теореме Виета. Даны четкие определения и всё разобрано на примерах. В параграфе «Уравнения, сводящиеся к квадратным» вводится определение биквадратного уравнения: «Уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, называют биквадратным». Здесь же, заглянув немного вперед, решается квадратное уравнение с параметром. Следующий шаг – решение задач с помощью квадратных уравнений. Разбирается несколько решенных задач, и даются задания для самостоятельного решения. Далее так же интуитивно на примерах разбираются такие темы, как «Решение простейших систем, содержащих уравнение второй степени», «Различные способы решения систем уравнений», «Решение задач с помощью систем уравнений».

Учебник 9 класса начинается с главы «Алгебраические уравнения. Системы нелинейных уравнений». Сначала учащиеся знакомятся с делением многочленов, а затем рассматривается пример алгебраического уравнения, которое как раз с помощью такого деления и решается. Дается определение: «Алгебраическим уравнением степени n называется уравнение $P_n(x) = 0$, где $P_n(x)$ – многочлен степени $n \geq 1$ ». Затем рассматриваются также уравнения, сводящиеся к алгебраическим. Продолжается изучение систем нелинейных уравнений с двумя неизвестными, рассматриваются различные

способы их решения и, конечно же, решаются задачи с помощью систем уравнений.

Заметим, что в упражнения для повторения включен отдельный пункт, в который входят упражнения на решение различных видов уравнений и их систем, задачи на составление уравнений. Примечательно то, что более трудные задачи по теме «Уравнения» нашли свое отражение в разделе «Задачи для внеклассной работы».

5) Учебники по алгебре за 7-9 класс. *Макарычев Ю. Н., Миндюк Н. Г., Нешков К. И., Суворова С. Б.*

Учебник 7 класса начинается с большой главы «Выражения, тождества, уравнения». Перед знакомством с уравнениями изучаются сначала выражения и их преобразования. Понятие уравнения с одной переменной вводится через сюжетную задачу. Затем дается определение: «Корнем уравнения называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство». Приведены примеры, из которых видно, что количество корней может быть различным. Говорится также, что «решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что корней нет», и дается определение равносильных уравнений. В рамку выделяются свойства уравнений (о переносе слагаемых из одной части уравнения в другую и о делении или умножении обеих частей уравнения на одно и то же число). Затем дается четкое определение линейного уравнения: «Уравнение вида $ax = b$, где x – переменная, a и b – некоторые

числа, называется линейным уравнением с одной переменной». Выделяется следующее правило: «Линейное уравнение $ax = b$ при $a \neq 0$ имеет один корень, при $a = 0$ и $b \neq 0$ не имеет корней, при $a = 0$ и $b = 0$ имеет бесконечно много корней (любое число является его корнем)». При изучении темы «Решение задач с помощью уравнений» учащимся предоставляется четкий алгоритм действий.

Хочется отметить, что система задач по данной теме включает лишь однотипные упражнения на решение уравнений, практически все из них – обязательного уровня. Но зато пункт «Дополнительные упражнения» содержит различные задания повышенной трудности.

В конце учебника – вновь уравнения, а именно системы линейных уравнений. Сначала производится знакомство с линейными уравнениями с двумя переменными: вводится их определение, понятие решения таких уравнений, а также их свойства. Далее следует тема «График линейного уравнения с двумя переменными». Вводится определение: «Графиком линейного уравнения с двумя переменными называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решением этого уравнения». Также говорится о том, что если хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю, то графиком линейного уравнения с двумя неизвестными является прямая. Понятие системы уравнений с двумя переменными формируется через сюжетную задачу. Автор знакомит учащихся с такими способами решения систем линейных уравнений, как способ подстановки, способ сложения. Для обоих способов дается четкий алгоритм действий. Далее идет тема «Решение задач с помощью систем уравнений». После этого следует пункт «Задачи повышенной трудности», в котором встречаются уравнения с модулем, целочисленные уравнения, уравнения с параметром и задачи на составление систем уравнений.

В учебнике 8 класса в главе «Квадратные корни» изучаются уравнения вида $x^2 = a$. Говорится о количестве корней такого уравнения, а именно: «если $a < 0$, то уравнение $x^2 = a$ не имеет корней; если $a = 0$, то уравнение имеет единственный корень; если $a > 0$, то уравнение имеет два корня». Последнее доказывается с помощью графика. Изучение квадратных уравнений начинается с темы «Неполные квадратные уравнения». Дается определение квадратного уравнения: «Квадратным уравнением называется

уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где x – переменная, a, b и c – некоторые числа, причем $a \neq 0$ ». Затем вводятся понятие приведенного и неполного квадратных уравнений. Параграф «Формула корней квадратного уравнения» начинается с подробного решения уравнения, после чего говорится, что оно решено способом, который называется выделение квадрата двучлена. Затем решается квадратное уравнение в общем виде и вводится определение дискриминанта. Прописано также о количестве решений уравнения при различных знаках дискриминанта и дан четкий алгоритм решения квадратного уравнения. Далее, конечно же, изучаются задачи, решаемые с помощью квадратных уравнений. Следующий этап – теорема Виета. Она звучит так: «Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком, а произведение корней равно свободному члену». Автор очень доступно доказывает как теорему Виета, так и теорему, обратную ей. Далее изучаются дробно-рациональные уравнения. Для примера дается несколько уравнений и говорится, что в них левая и правая части являются рациональными выражениями. «Такие уравнения называют рациональными уравнениями». Так же оговаривается, в каком случае уравнение целое, а в каком дробное. После приведения нескольких примеров дается алгоритм решения таких уравнений. Затем решаются задачи с помощью рациональных уравнений. Дополнительным пунктом в учебнике идет тема «Уравнения с параметром». Практическая часть учебника насыщена заданиями различной сложности. В пункте «Задачи повышенной трудности» учащимся вновь предоставляются уравнения.

В учебнике 9 класса уравнениям посвящены две главы. Сначала изучаются уравнения с одной переменной. Автор напоминает, что называется целым уравнением, рассматривает различные методы решения таких уравнений: разложение многочлена на множители и метод введения новой переменной. Вводится определение биквадратного уравнения: «Уравнения

вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$, где $a \neq 0$, являющиеся квадратным относительно x^2 , называют биквадратными уравнениями». Далее напоминает, что такое дробное рациональное уравнение и рассматриваются более сложные, чем в 8 классе, примеры. Вторая глава посвящена уравнениям с двумя переменными и их системам. Говорится, что является решением уравнения с двумя переменными, дается определение равносильных уравнений, графика уравнений с двумя переменными. Далее изучается графический способ решения систем уравнений: вводится понятие решения системы и разбирается подробный пример. Дается четкий алгоритм решения систем уравнений второй степени. Последний шаг в изучении уравнений – решение задач с помощью систем уравнений второй степени.

Как и в предыдущих учебниках этого автора, большое внимание уделяется уравнениям в пункте «Задачи повышенной трудности».

6) Учебники по алгебре за 7-9 класс. *Мордкович А. Г.*

В учебнике 7 класса знакомство с уравнениями начинается уже в первой главе, которая называется «Математический язык. Математическая модель». Здесь происходит знакомство с линейным уравнением с одной переменной. Определение вводится следующим образом: сначала приводятся примеры, известные с 5-6 класса и говорится, что это и есть линейные уравнения с одной переменной; затем дается определение «решить уравнение» и корня уравнения, всё это разбирается на примерах; и наконец, делается оговорка, что же такое линейное уравнение. Звучит определение так: «Линейным уравнением с одной переменной x называется уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b – любые числа (коэффициенты)». Далее даются два четких алгоритма для решения линейного уравнения: 1) для уравнения $ax + b = 0$ в случае, когда $a \neq 0$; 2) для уравнения, записанного в более сложном виде – $ax + b = cx + d$ ($a \neq c$). И, естественно, всё закрепляется на примерах.

Заметим, что в конце главы написаны темы исследовательских работ, в которые входят линейные уравнения с одной переменной.

Следующая встреча с уравнениями происходит во второй главе под названием «Линейная функция». Здесь учащиеся знакомятся с темой «Линейное уравнение с двумя переменными и его график». Определение линейного уравнения с двумя переменными вводится через сюжетную задачу. Что касается графика таких уравнений, то тут автор рассматривает 5 случаев: 1) график уравнения – вся плоскость; 2) уравнение не имеет решений; 3) графиком служит прямая, параллельная оси x ; 4) график уравнения – прямая, параллельная оси y ; 5) графиком является прямая, не параллельная ни одной из осей координат. Затем вводится теорема: «Если хотя бы один из коэффициентов a, b линейного уравнения $ax + by + c = 0$ отличен от нуля, то графиком уравнения служит прямая линия». Также автор дает алгоритм построения графика линейного уравнения с двумя переменными.

Следующая глава полностью посвящена уравнениям, а именно – системам двух линейных уравнений с двумя переменными. Даются основные понятия, такие как, система уравнений, решение системы. Далее изучается метод подстановки. Прописывается четкий алгоритм решения систем уравнений данным способом. Также автор знакомит учащихся с методом алгебраического сложения. Затем рассматриваются системы двух линейных уравнений с двумя переменными как математические модели реальных ситуаций, чего нет ни в одном учебнике других авторов. В конце главы в темах исследовательских работ 2 вопроса: 1) решение систем линейных уравнений методом подстановки; 2) решение систем линейных уравнений методом алгебраического сложения.

В конце учебника в главе «Функция $y = x^2$ » рассматривается графическое решение уравнений. В задачнике к этому учебнику даны задания различной сложности на решение уравнений.

В учебнике 8 класса в главе «Алгебраические дроби» учащимся представлена тема «Первые представления о решении рациональных уравнений». Здесь дается следующее определение: «Если $p(x)$ – рациональное выражение, то уравнение $p(x) = 0$ называют рациональным уравнением». Рассматриваются простейшие рациональные уравнения.

В главе «Квадратичная функция. Функция $y = \frac{k}{x}$ » учащиеся сталкиваются с графическим решением квадратных уравнений. Здесь дано следующее определение: «Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c – любые числа (коэффициенты), причем $a \neq 0$ ». Далее автор знакомит с 5 способами решения квадратного уравнения графически. После чего следует большая глава «Квадратные уравнения». Сначала даются основные определения: квадратное уравнение и квадратный трехчлен, приведенное и неприведенное квадратные уравнения, полное и неполное квадратное уравнение, корень квадратного уравнения и квадратного трехчлена. Затем происходит знакомство с формулами корней квадратного уравнения. Дается определение дискриминанта: «Выражение $b^2 - 4ac$ обозначают буквой D и называют дискриминантом квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ (или дискриминантом квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$)». Количество корней квадратного уравнения при различных знаках дискриминанта выражено в теоремах. После подробного решения несколько примеров дается четкий алгоритм действий при решении квадратных уравнений. Далее автор вновь возвращается к рациональным уравнениям. Снова повторяется определение, вводится понятие постороннего корня. Как и везде ранее, формулируется четкий алгоритм решения рациональных уравнений. При изучении метода введения новой переменной вводится определение биквадратного уравнения:

«Уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называют биквадратным уравнением («би» – два, т. е. как бы дважды квадратное уравнение)». Решаются более

сложные уравнения. Затем рассматриваются рациональные уравнения как математические модели реальных ситуаций. Это единственный учебник,

в котором вводится еще одна формула корней квадратного уравнения, а именно

$$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a} \text{ для уравнения } ax^2 + 2kx + c = 0 .$$

Очень подробно разбирается теорема Виета. Также, еще одной особенностью этого учебника является изучение иррациональных уравнений. Вводится определение: «Если в уравнении переменная содержится под знаком квадратного корня, то уравнение называют иррациональным». Изучается основной метод решения иррациональных уравнений – метод возведения в квадрат. Также дается определение равносильных уравнений и равносильных преобразований уравнения.

В учебнике 9 класса уравнениям выделена одна глава, которая называется «Системы уравнений». Сначала речь идет о рациональных уравнениях с двумя переменными. Вводится определение: «Рациональное уравнение с двумя переменными x, y – это уравнение вида $h(x, y) = g(x, y)$, где $h(x, y), g(x, y)$ – рациональные выражения, т. е. алгебраические выражения, составленные из чисел и переменных x, y с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в натуральную степень». Также дается определение решения такого уравнения. Далее рассматривается график уравнения с двумя переменными. Вводится определение: «Пусть дано уравнение $p(x, y) = 0$. Множество точек (x, y) координатной плоскости xOy , таких, что (x, y) – решение уравнения $p(x, y) = 0$, называют графиком уравнения». Затем идет тема «Формула расстояния между двумя точками координатной плоскости. График уравнения $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ». Здесь вводятся и доказываются две теоремы: о расстоянии между двумя точками координатной плоскости и о графике уравнения, написанного выше. И только потом осуществляется переход к изучению систем уравнений. Если в 7 классе учащиеся

знакомились с системами линейных уравнений, то здесь речь идет о системах нелинейных уравнений с двумя переменными. После введения основных понятий идет изучение методов решения систем уравнений: метод подстановки, метод алгебраического сложения, метод введения новых

переменных. В конце главы рассматриваются системы уравнений как математические модели реальных ситуаций. На этом изучение уравнений заканчивается.

7) Учебники по математике за 5-6 класс. *Виленкин Н. Я., Жохов В. И., Чесноков А. С., Шварцбург С. И.*

Понятие уравнения вводится через сюжетную задачу в учебнике 5 класса в главе «Натуральные числа». Звучит оно так: «Уравнением называют равенство, содержащее букву, значение которой надо найти». Также даются определения корня уравнения и решения уравнения. Нахождение неизвестного происходит не с помощью основных свойств, а с помощью правил нахождения неизвестного слагаемого, уменьшаемого, вычитаемого, множителя, делимого и делителя, с использованием переместительного, сочетательного и распределительного законов.

В 6 классе учащиеся вновь сталкиваются с решением уравнений. Здесь они учатся раскрывать скобки, приводить подобные слагаемые, знакомятся с основными свойствами уравнений. Также после разбора нескольких примеров вводится определение линейного уравнения: «Уравнение, которое можно привести к виду $ax = b$ с помощью переноса слагаемых и приведения подобных слагаемых, называют линейным уравнением с одним неизвестным».

Практическая часть обоих учебников состоит из большого количества заданий различного типа по теме «Уравнения».

Проанализировав данные комплекты учебников, хочу сделать небольшой вывод. По-моему мнению, для изучения уравнений в 5-6 классе самыми рациональными являются учебники Виленина. Мне кажется, что

здесь информация по данной теме дана более доступно для понимания. Что касается 7-9 класса, то здесь хочу выделить двух авторов – это Мордкович и Макарычев. В учебниках Мордковича дано намного больше информации по данной теме, нежели в других. Но все-таки, мне кажется, что для понимания учащимися данные учебники сложны. А в учебниках Макарычева всё доступно и ясно.

1.6 Анализ линий изучения неравенств в школьном курсе математики

Можно выделить два основных пути развертывания содержания линии неравенств.

1) Сначала проходит материал, относящийся к уравнениям, затем к неравенствам. Раздельное изложение проводится до теории квадратного трехчлена включительно. Дальнейшее изучение, происходящее в старших классах, лишено этого противопоставления; логарифмические, показательные, тригонометрические уравнения и соответствующие неравенства изучаются в более тесной связи друг с другом.

2) Основные классы неравенств изучаются сразу вслед за изучением соответствующих классов уравнений.

Имеются и промежуточные пути, когда некоторые классы уравнений и неравенств сближены друг с другом по времени изучения, а другие, наоборот, не связаны.

Проанализируем, как представлена тема «Тригонометрические неравенства» в основных школьных учебниках.

Сравнивать учебники будем для того, чтобы узнать, в чем состоит их сходство и различие при изучении данной темы, подбору заданий по данной теме.

Рассмотрим учебники «Алгебра и начала анализа. 10-11» Мордковича А.Г. и Колмогорова А.Н.

В учебнике Мордковича А.Г. 8 глав. В конце каждой главы выделены основные их результаты. Курс математики в 10 классе начинается с первой главы «Тригонометрические функции». Здесь автор рассматривает понятие тригонометрической окружности на координатной плоскости, определения синуса и косинуса, основные тригонометрические соотношения, связанные с ними, показывает решения простейших тригонометрических уравнений по окружности. Знакомство с формулами приведения происходит только после изучения тригонометрических функций углового аргумента. Затем изучаются свойства и графики тригонометрических функций. В следующей главе «Тригонометрические уравнения» детально показано решение каждого простейшего тригонометрического уравнения, на базе ранее введенных определений арксинуса, арккосинуса, арктангенса. Тут же показаны такие способы решения, как разложение на множители и введение новой переменной; метод решения однородных тригонометрических уравнений. Другие способы решения показаны только после изучения третьей главы «Преобразование тригонометрических выражений».

Схема изучения показана следующим образом: функция $\rightarrow$ уравнения $\rightarrow$ преобразования.

Учебник Мордковича очень удобен для самостоятельного изучения учащихся, поскольку, имеет очень сильную теоретическую базу. Изложение теоретического материала ведётся очень подробно. В условиях огромной нехватки часов для изучения материала в классе увеличивается значение самостоятельной работы школьников с книгой. Опираясь на учебник, учитель легко разберётся в том, что нужно рассматривать с учениками на уроке, а что им необходимо выучить, и что попросить их самостоятельно посмотреть дома. Недостатком, скорее всего, является не очень большое число упражнений по данной теме в самом учебнике.

В учебнике Колмогорова 4 главы. Схема изучения материала по теме «Решение тригонометрических неравенств» совершенно отличается от схемы Мордковича т.к. сперва рассматриваются тригонометрические функции

числового аргумента и основные формулы тригонометрии. Здесь же, далее, показаны основные свойства тригонометрических функций, их графики и их исследование. Потом вводятся определения арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса и «параллельно» с этим решение простейших тригонометрических уравнений и неравенств. Автор не называет способов решения тригонометрических неравенств, а показывает алгоритм их решения. Также рассматриваются и решения тригонометрических уравнений.

Итак, схема изучения такая: преобразования $\rightarrow$ функции $\rightarrow$ уравнения и неравенства.

Обратим внимание, что учебник содержит большое количество дидактических материалов, от простых к более сложным. Это дает учителю возможность варьировать задания для учащихся.

Для самостоятельного изучения нельзя сказать, что учебник совершенно подходит.

Проанализируем еще, как представлена тема «Показательные неравенства». Мы проведем анализ школьных учебников алгебра и начал анализа, для того, чтобы узнать в каком классе изучают показательные неравенства и как преподносится эта тема в каждом из учебников. Для сравнения возьмем 3 учебника алгебры для старших классов общеобразовательной школы.

- А.Г. Мордкович, Алгебра и начала анализа 10-11 классы, учебник для общеобразовательных учреждений;

- А.Н. Колмогоров, Алгебра и начала математического анализа, учебник для 10-11 классов общеобразовательных учреждений;

- Ш.В. Алимов, Алгебра и начала математического анализа 10-11 классы, учебник для общеобразовательных учреждений.

Впервые тему «Показательные неравенства» изучают в 10 классе. Проанализировав учебники, мы можем узнать, в чем сходство и различие теоретического и задачного материала.

Учебник алгебры А.Г. Мордковича дает цельное и полное представление о школьном курсе алгебры и начала анализа, отвечает требованиям обязательного минимума содержания образования. Изложение теоретического материала ведется очень подробно. Построение курса алгебры осуществляется на основе приоритетной функциональной линии.

Прежде чем познакомить нас с методами решения показательных уравнений и неравенств автор знакомит нас с такими понятиями как, корень n -ой степени числа и его свойства. Далее мы знакомимся с функцией $y = \sqrt[n]{x}$, ее графиком и свойствами. После мы изучаем логарифмическую функцию, ее свойства. И уже потом переходим к показательной функции и затем, к решению показательных уравнений и неравенств.

Сначала вводится понятие показательного уравнения, как показательным называют уравнения вида: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, где a – положительное число, отличное от 1, и уравнения сводящиеся к нему. Далее приведена теорема о решении показательного уравнения с одинаковыми основаниями. В учебнике предложены методы решения показательных уравнений: метод уравнивания показателей, функционально-графический метод и метод введения новой переменной.

В следующем параграфе учебника переходят к изучению показательных неравенств. Сначала вводится определение показательного неравенства и рассматривают два случая, когда $a > 1$ и $0 < a < 1$, тем самым эти два случая являются доказательством теоремы: показательное $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ неравенство равносильно неравенству того же смысла $f(x) > g(x)$ если $a > 1$; показательное неравенство $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ равносильно неравенству противоположного смысла $f(x) < g(x)$ если $0 < a < 1$. Далее приведены примеры решения показательного неравенства этим способом и представлен метод решения показательного неравенства методом введения новой переменной.

Учебник выпускается в двух частях. В первой части мы можем познакомиться с теорией, а во второй части уже приступить к решению задач.

В каждом параграфе представлено большое количества заданий. Упражнения сконцентрированы по двум блокам. Первый блок содержит задания базового и среднего уровня сложности, второй блок включает задания среднего и повышенного уровня.

По данной теме предлагаются задания:

- решить уравнения;
- решить систему уравнений;
- решить неравенство;
- сколько натуральных чисел являются решениями неравенства;
- найдите наибольшее целочисленное решение неравенства.

Следует отметить, что учебник «Алгебры и начала анализа 10-11 классы» используется в обычном классе. Для профильных классов есть другой учебник этого автора.

Учебник «Алгебры и начала анализа» А.Н. Колмогорова является самым распространенным учебником алгебры в 10-11 классах. Теоретический материал иллюстрируется большим количеством примеров. Задания для учащихся делятся на две части. Первая часть заданий обязательный минимум для учеников, который они должны уметь решать. В следующей части задания сложнее. Также в конце каждой темы можно увидеть задания и вопросы на повторение, что помогает в подготовке к контрольной работе.

В учебнике хорошо изложен дополнительный материал, интересные факты, биография ученых, происхождение терминов. Это позволяет развить интерес к предмету и окружающему миру.

Содержание учебника Колмогорова начинается с главы «Функции», в которой изучаем показательную функцию. Затем в следующей главе, переходим к решению показательных уравнений и неравенств. Однако,

четкого определения показательного уравнения и неравенства в учебнике нет.

В учебнике представлены следующие задания:

- решите уравнения;
- решите систему уравнений;
- решите неравенства;
- решите графически неравенства.

В учебнике рассмотрены: методы уравнивания показателей, методы введения новой переменной и метод вынесения общего множителя за скобку при решении показательного неравенства. А также указывается на свойства возрастания и убывания функций при решении показательных неравенств. Далее рассматривается решение системы показательных уравнений.

Учебник «Алгебра и начала математического анализа» Ш.В. Алимова пользуется меньшей популярностью среди учебников алгебры. Изложение учебника уже близко подходит к математическому анализу. В учебнике очень много разобранных примеров, графических иллюстраций к решению задач.

Задания, предоставляемые в параграфе, разделены на два уровня: средний и высокий. В конце учебника к каждому параграфу есть дополнительные задачи, которые помогают подготовиться к контрольной работе.

Прежде чем перейти к решению показательных уравнений и неравенств автор предлагает сначала познакомиться с показательной функцией, ее графиком и свойствами. В учебнике представлены методы: метод уравнивания показателей, вынесения общего множителя за скобки, метод введения новой переменной. При решении показательных неравенств, также автор предлагает обратить внимание на возрастание и убывание функции. В учебнике предлагается пример решения показательного неравенства графическим методом. После изучения методов решения

показательных уравнений и неравенств, сразу дается решение систем, содержащих показательные уравнения и неравенства.

Задания, представленные в учебнике:

- решить уравнения;
- доказать, что уравнение имеет один корень при фиксированном значении;
- решить неравенства;
- решить графически уравнения;
- найти целые значения неравенства на отрезке;
- решить графически неравенства;
- решить систему.

Проанализировав учебники, можно сделать вывод о том, что во всех трех учебниках почти одинаковый порядок изучения темы, но методы решения показательных уравнений представлены по-разному. Теоретическое изложение этой темы, задания представленные в учебнике алгебры и начал анализа изложены лучше под редакцией А.Г. Мордковича.

Можно сделать вывод, рассмотрев планирование по разным учебникам и проанализировав как представлены в них конкретные темы по изучению неравенств и их систем, что учебники под редакцией Мордковича А.Г. и Макарычева Ю.Н., Миндюк Н.Г. и др. наиболее полно раскрывают данную тему (см. Приложение №1).

Глава 2. Исследование функционального метода решения уравнений и неравенств

2.1 Применение функционального метода решения уравнений и неравенств

Функциональный метод решения уравнений и неравенств, направлен на повышение умения решать уравнения и неравенства. Чтобы овладеть данным методом, надо знать Элементарные функции и их свойства.

Не всякое уравнение и неравенство в результате преобразований может быть сведено к уравнению и неравенству, для которого существует определённый метод решения. В таких случаях ключевую роль могут сыграть свойства функций, входящих в уравнение или неравенство.

Решение уравнений и неравенств с использованием свойств функций часто основывается на следующих соображениях и утверждениях:

- Область определения функции. Областью определения функции, заданной формулой, считают множество всех значений переменной, при которых эта формула имеет смысл.
- Область значений (область изменения) – множество всех значений функции $y = f(x), x \in X$.
- Ограниченность функции. Функцию $y = f(x), x \in X$ называют ограниченной снизу (сверху), если существует такое число M , что для любого x из области определения верно неравенство $f(x) \geq M$, ($f(x) \leq M$). Функция называется ограниченной, если она ограничена и сверху и снизу.
- Возрастание, убывание функции. Функция возрастает (убывает), если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции. Общее название этих двух понятий – монотонность.

- Четность, нечетность функции. Функцию $y = f(x), x \in X$ называют четной (нечетной), если для любого значения x из множества X выполняется равенство $f(-x) = f(x)$, ($f(-x) = -f(x)$).
- Периодичность функции. Функцию $y = f(x), x \in X$ называют периодической, если существует число $T \neq 0$, такое что для любого x из области определения X число $(x+T) \in X$, число $(x-T) \in X$ и справедливо равенство $f(x+T) = f(x)$ и $f(x-T) = f(x)$. Число T называют периодом функции $f(x)$.

Рассмотрим разновидности уравнений, неравенств и их систем, для решения которых используется функциональный подход.

1) $\sqrt{x-1} = 3-x$ **Решение:** $\sqrt{x-1} = 3-x$

$$\sqrt{x-1} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x \geq 0, \\ x-1 = (3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ (x-2)(x-5) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$$

Ответ: $x = 2$. Комментарий: в данных примерах использован прием – область определения функции.

2) $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{3x-5} = 3$. **Решение:** Единственный корень данного уравнения сразу можно найти, заметив, что его левая часть представляет собой монотонно возрастающую на своей области определения функцию.

$f(x) = \sqrt[3]{x-2} + \sqrt{3x-5}$, поскольку $f(3) = 3 \Rightarrow x = 3$ - корень уравнения, и других корней в силу монотонности $f(x)$ уравнение $f(x) = 3$ не имеет.

Комментарий: здесь использован прием - использование монотонности функции.

3) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}{\sqrt{y}} = 0, \\ y - \cos x = 0. \end{cases}$$

Решение: Из уравнения $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$ находим: $\sin x = \frac{1}{2}$ или $\sin x = 1$.

1) пусть $\sin x = \frac{1}{2}$, тогда либо $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, либо

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$ - не дает решения.

2) пусть $\sin x = 1$, тогда $y = \cos x = 0$ - не дает решения.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Комментарий: при решении данного примера

использован прием – использование области определения и области значений входящих в уравнение функций.

4) $\cos x + \cos 3x = 2$. **Решение:** В левой части уравнения записана сумма косинусов, что при стандартном приеме решения предполагает представление ее в виде произведения. Однако этот путь нахождения корней уравнения довольно длинный, так как первая его часть отлична от нуля. Комментарий: проще сразу использовать свойство ограниченности тригонометрических функций. Действительно, $|\cos x| \leq 1, |\cos 3x| \leq 1$, поэтому сумма косинусов может быть равной 2 только в том случае, когда оба слагаемых одновременно будут равны по 1. Иначе говоря,

$$\cos x + \cos 3x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos 3x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi k, \\ x = \frac{2}{3}\pi n, \end{cases} n, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

- Рассмотрим несколько примеров применения функционального метода при решении уравнений и неравенств, которые предлагает А.Г.Мордкович:

5) Решить уравнение $x^5 + 5x - 42 = 0$

Решение: По виду это уравнение относится к числу тех, которые решаются методом разложения на множители. Этот метод требует значительных усилий. Представив это уравнение в виде: $x^5 = 42 - 5x$ и заметив, что функция $y = x^5$ возрастает, а функция $y = 42 - 5x$ убывает, можно сделать вывод (по теореме 8), что уравнение имеет не больше одного корня. Подбором

выясним, что $x = 2$. Комментарий: здесь использован прием - использование монотонности функции.

6) Решить уравнение: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5} = 2^x$ [18]

Решение: подбором выясняем, что $x=1$ – корень уравнения. Так как функция $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \frac{7}{5}$ убывает, а функция $y=2^x$ возрастает, то других корней нет.

Ответ: корней нет. Комментарий: здесь использован прием - использование монотонности функции.

7) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{2\sin^2 x + 3\sin x + 1}{\sqrt{-y}} = 0, \\ y = -\cos x. \end{cases}$$

Решение: Из уравнения $2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0$, находим: $\sin x = -\frac{1}{2}$ или $\sin x = -1$.

1) пусть $\sin x = -\frac{1}{2}$, тогда либо $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$, и $y = -\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0$, либо

$x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$, и $y = -\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$ - не дает решения.

2) пусть $\sin x = -1$, тогда $y = -\cos x = 0$ – не дает решения.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Комментарий: при решении данного примера использован прием – использование области определения входящих в уравнение функций.

8) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7, \\ 2\sqrt{2} \sin y = x. \end{cases}$$

Решение: 1) Сделаем замену $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = t$. Тогда $x^2 + 3x = t^2 + 1$. Теперь первое уравнение системы можно привести к виду: $t^2 - t - 6 = 0$. Корни: $t = -2, t = 3$.

Получаем $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = -2$. или $\sqrt{x^2 + 3x - 1} = 3$. Первое из этих уравнений не имеет корней. Решим второе: $x^2 + 3x - 10 = 0$. $x = -5, x = 2$.

2) При каждом из найденных значений x решим второе уравнение системы.

а) Если $x = -5$, то $\sin y = -\frac{5}{2\sqrt{2}}$. Поскольку $2\sqrt{2} = \sqrt{8}$, получаем, что $\frac{5}{2\sqrt{2}} > 1$.

Значит, уравнение $\sin y = -\frac{5}{2\sqrt{2}}$ не имеет решений, поскольку его правая часть < -1 .

б) Если $x = 2$, то $\sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$. $y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = 2, y = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Комментарий: при решении данного примера использован прием – использование области значений входящих в уравнение функций.

9) Решите уравнение $\sqrt{9-x^2} \cos x = 0$.

Решение: $\sqrt{9-x^2} \cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9-x^2} = 0, \\ \cos x = 0, \\ 9-x^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3, \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \\ -3 \leq x \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 3, \\ x = \pm \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Ответ: $\pm 3; \pm \frac{\pi}{2}$. Комментарий: при решении данного примера использован прием – использование области определения входящих в уравнение функций и условие произведение равно 0.

10) Решите неравенство $\frac{x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 8(2x - x^2) + 17}{x^2 - 2x - 4} \leq -2$.

Решение: Выполним преобразования:

$$\frac{(x^2 - 2x)^2 - 8(x^2 - 2x) + 16}{x^2 - 2x - 4} + \frac{1}{x^2 - 2x - 4} \geq -2; \frac{(x^2 - 2x - 4)^2}{x^2 - 2x - 4} + \frac{1}{x^2 - 2x - 4} \geq -2;$$
$$x^2 - 2x - 4 + \frac{1}{x^2 - 2x - 4} \geq -2;$$

Сделаем замену: $a = x^2 - 2x - 4$. Получим: $a + \frac{1}{a} \geq -2$, откуда $\frac{a^2 + 2a + 1}{a} \geq 0$; $\frac{(a+1)^2}{a} \geq 0$.

Решая это неравенство, находим: $a = -1$ или $a > 0$. Если $x^2 - 2x - 4 = -1$, то $x = 3$ или $x = -1$. Если $x^2 - 2x - 4 > 0$, то $x < 1 - \sqrt{5}$ или $x > 1 + \sqrt{5}$.

Ответ: $x \in (-\infty; 1 - \sqrt{5}) \cup \{-1\} \cup \{3\} \cup (1 + \sqrt{5}; +\infty)$. Комментарий: здесь использовано в любой части уравнения можно раскрыть скобки и в любой части уравнения можно привести подобные слагаемые, а также обе части уравнения можно умножать или делить на одно и то же число, отличное от нуля.

11) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{81^{\cos x} - 12 \cdot 9^{\cos x} + 27}{\log_7(1+2y)} = 0, \\ y = \sin x. \end{cases}$$

Решение: Из уравнения $81^{\cos x} - 12 \cdot 9^{\cos x} + 27 = 0$ находим: $9^{\cos x} = 9$ или $9^{\cos x} = 3$, $\Rightarrow \cos x = 1$ или $\cos x = \frac{1}{2}$. (при условиях $\log_7(1+2y) \neq 0$ и $1+2y > 0$) 1) пусть $\cos x = \frac{1}{2}$, тогда либо $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$, и $y = \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} > -\frac{1}{2}$ либо $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$, и $y = \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < -\frac{1}{2}$ - не дает решения, поскольку в этом случае $1+2y < 0$. 2) пусть $\cos x = 1$, тогда $y = \sin x = 0$ и, $\Rightarrow \log_7(1+2y) = 0$. В этом случае решений нет.

Ответ: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

12) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{16^{\sin x} - 6 \cdot 4^{\sin x} + 8}{\log_2(1-2y)} = 0, \\ y = \cos x. \end{cases}$$

Решение: Из уравнения $16^{\sin x} - 6 \cdot 4^{\sin x} + 8 = 0$ находим: $4^{\sin x} = 2$ или $4^{\sin x} = 4$, $\Rightarrow \sin x = 1$ или $\sin x = \frac{1}{2}$. 1) пусть $\sin x = \frac{1}{2}$, тогда либо $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} > \frac{1}{2}$ - не дает решения, поскольку в этом случае $1-2y < 0$, либо $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$, и $y = \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{1}{2}$. 2) пусть $\sin x = 1$, тогда $y = \cos x = 0$ и, $\Rightarrow \log_2(1-2y) = 0$. В этом случае решений нет.

Ответ: $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$, $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

13) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 16^{\cos x} - 10 \cdot 4^{\cos x} + 16 = 0, \\ \sqrt{y} + 2\sin x = 0 \end{cases}$$

Решение: 1. Решим первое уравнение системы:

$$16^{\cos x} - 10 \cdot 4^{\cos x} + 16 = 0 \Leftrightarrow (4^{\cos x} - 8) = 0 \Leftrightarrow 4^{\cos x} = 2 \text{ (т.к. } 4^{\cos x} \leq 4)$$

$$\Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}.$$

2. Рассмотрим два случая:

1) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi m \Rightarrow \sin x > 0$ уравнение $\sqrt{y} + 2\sin x = 0$ решений не имеет;

2) $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m \Rightarrow \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} : \sqrt{y} - 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{y} = \sqrt{3} \Leftrightarrow y = 3.$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi m, y = 3, (m \in \mathbb{Z}).$ Комментарий: в этих примерах использован прием – использование области значений.

14) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{2\sin^2 x + 3\sin x + 1}{\sqrt{-y}} = 0, \\ y + 4\sqrt{3}\cos x = 0. \end{cases}$$

Решение:
$$\begin{cases} \frac{2\sin^2 x + 3\sin x + 1}{\sqrt{-y}} = 0, \\ y + 4\sqrt{3}\cos x = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x + 3\sin x + 1 = 0, \\ y = -4\sqrt{3}\cos x, \\ y < 0, \\ \cos x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin x = -\frac{1}{2}, \\ y = -4\sqrt{3}\cos x, \\ y < 0, \\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi m < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^{m+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ y = -4\sqrt{3}\cos x, \\ y < 0, \\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi m < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi m, n \in \mathbb{Z}, \\ \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi m; -6\right), m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ y = -4\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ y < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ -\frac{\pi}{2} + 2\pi m < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi m, n \in \mathbb{Z}, \\ y = -6. \end{cases} \Leftrightarrow$$

Ответ: $\left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi m; -6\right), m \in \mathbb{Z}.$

15) Решите неравенство
$$\left(x + \frac{3}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x} - 1}\right)^2 \geq 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5-x} - 1}\right)^2.$$

Решение: Решение неравенства ищем при условиях:
$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 5 - x \geq 0, \\ 5 - x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 1$, т.е. $|x - 3| = 1$ и, значит $x = 2$ или $x = 4$. Значит, $x = 2$.

2) $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \neq 1$. Разделим обе части неравенства на $\left(\frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9} - 1}{\sqrt{5 - x} - 1}\right)^2$ (при условии, что выражение положительно), получим: $x + \frac{3}{x} \geq 4$, откуда $\frac{(x-1)(x-3)}{x} \geq 0$. Решим это неравенство: $0 < x \leq 1, x \geq 3$.

С учетом ограничений получаем: $0 < x \leq 1; x = 2; 3 \leq x < 4; 4 < x \leq 5$.

Ответ: $0 < x \leq 1; x = 2; 3 \leq x < 4; 4 < x \leq 5$. Комментарий: при решении данного примера использован прием – использование области определения входящих в уравнение функций и обе части неравенства можно умножать или делить на одно и то же число, большее нуля.

16) Решите неравенство $\left(x + \frac{4}{x}\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6 - x} - 1}\right)^2 \geq 5 \cdot \left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6 - x} - 1}\right)^2$.

Решение: Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x \neq 0, \\ 6 - x \geq 0, \\ 6 - x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 6, \\ x \neq 0, \\ x \neq 5. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} = 1$, т.е. $|x - 4| = 1$ и, значит $x = 3, x = 5$. Значит, $x = 3$.

2) $\sqrt{x^2 - 8x + 16} \neq 1$. Разделим обе части неравенства на $\left(\frac{\sqrt{x^2 - 8x + 16} - 1}{\sqrt{6 - x} - 1}\right)^2$,

Получим: $x + \frac{4}{x} \geq 5$, откуда $\frac{(x-1)(x-4)}{x} \geq 0$. Решим это неравенство: $0 < x \leq 1, x \geq 4$.

С учетом ограничений получаем: $0 < x \leq 1, x = 3, 4 \leq x < 5, 5 < x \leq 6$.

Ответ: $0 < x \leq 1, x = 3, 4 \leq x < 5, 5 < x \leq 6$.

17) Решите неравенство $\frac{x^4 + 8x^3 + 16x^2 - 8(x^2 + 4x) + 17}{x^2 + 4x - 4} \leq 2$

Решение: Выполним преобразования:

$$\frac{(x^2 + 4x)^2 - 88(x^2 + 4x) + 16}{x^2 + 4x - 4} + \frac{1}{x^2 + 4x - 4} \leq 2; \Rightarrow \frac{(x^2 + 4x - 4)^2}{x^2 + 4x - 4} + \frac{1}{x^2 + 4x - 4} \leq 2; \Rightarrow x^2 + 4x - 4 + \frac{1}{x^2 + 4x - 4} \leq 2$$

.

Сделаем замену: $a = x^2 + 4x - 4$. Получим: $a + \frac{1}{a} \leq 2$, откуда $\frac{a^2 + 2a + 1}{a} \leq 0$;

$\frac{(a-1)^2}{a} \leq 0$. Решая это неравенство, находим: $a = 1$ или $a < 0$.

Если $x^2 + 4x - 4 = 1$, то $x = 1$ или $x = -5$. Если $x^2 + 4x - 4 < 0$, то $-2 - 2\sqrt{2} < x < 2\sqrt{2} - 2$.

Ответ: $1, -5, (-2 - 2\sqrt{2}; 2\sqrt{2} - 2)$.

18) Решите неравенство $\frac{x^4 + 6x^3 + 9x^2 - 6(x^2 + 3x) + 10}{x^2 + 3x - 3} \leq 2$.

Решение: Выполним преобразования: $\frac{(x^2 + 3x)^2 - 6(x^2 + 3x) + 9}{x^2 + 3x - 3} + \frac{1}{x^2 + 3x - 3} \leq 2$;

$\frac{(x^2 + 3x - 3)^2}{x^2 + 3x - 3} + \frac{1}{x^2 + 3x - 3} \leq 2$; $x^2 + 3x - 3 + \frac{1}{x^2 + 3x - 3} \leq 2$. Сделаем замену: $a = x^2 + 3x - 3$.

Получим: $a + \frac{1}{a} \leq 2$, откуда $\frac{a^2 - 2a + 1}{a} \leq 0$; $\frac{(a-1)^2}{a} \leq 0$. Решая это неравенство,

находим: $a = 1$ или $a < 0$. Если $x^2 + 3x - 3 = 1$, то $x = -4$ или $x = 1$. Если

$x^2 + 3x - 3 < 0$, то $-\frac{\sqrt{21} + 3}{2} < x < \frac{\sqrt{21} - 3}{2}$.

Ответ: $1, 4, (-\frac{\sqrt{21} + 3}{2}; \frac{\sqrt{21} - 3}{2})$.

19) Решите систему уравнений
$$\begin{cases} \frac{81^{\cos y} - 4 \cdot 9^{\cos y} + 3}{\sqrt{1 - 2 \sin y}} = 0, \\ \sqrt{x + 3} + \cos 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Решение:
$$\begin{cases} \frac{81^{\cos y} - 4 \cdot 9^{\cos y} + 3}{\sqrt{1 - 2 \sin y}} = 0, \\ \sqrt{x + 3} + \cos 2y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^{2 \cos y} - 4 \cdot 9^{\cos y} + 3 = 0, \\ \sqrt{x + 3} = -1 - \cos 2y, \\ 1 - 2 \sin y > 0, \\ -1 - \cos 2y \geq 0, \\ x + 3 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 9^{\cos y} = 1, \\ 9^{\cos y} = 3, \\ x + 3 = 1 + 2 \cos 2y + \cos^2 2y, \\ \sin y < \frac{1}{2}, \\ \cos 2y \leq -1, \\ x \geq -3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = 0, \\ \cos y = \frac{1}{2}, \\ x + 3 = 1 + 2 \cos 2y + \cos^2 2y, \\ -\frac{7}{6}\pi + 2\pi m < y < \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x \geq -3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{2} + \pi t, t \in \mathbb{Z}, \\ y = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ x + 3 = 1 + 2 \cdot (-1) + 1, \\ -\frac{7}{6}\pi + 2\pi m < y < \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}, \\ y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x \geq -3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ x = -3. \end{cases}$$

Ответ: $\left(-3; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

20) Решите неравенство $\left(x + \frac{3}{x}\right) \cdot (\log_{(5-x)}(x^2 - 6x + 9))^2 \geq 4 \cdot (\log_{(5-x)}(x^2 - 6x + 9))^2$.

Решение: Решение неравенства ищем при условиях:
$$\begin{cases} x \neq 0, \\ 5 - x > 0, \\ 5 - x \neq 1, \\ x^2 - 6x + 9 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 5, \\ x \neq 0, \\ x \neq 4, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\log_{(5-x)}(x^2 - 6x + 9) = 0$, откуда $x^2 - 6x + 9 = 1$, т.е. $|x - 3| = 1$ и, значит $x = 2; x = 4$.

Значит, $x = 2$ – решение задачи.

2) $\log_{(5-x)}(x^2 - 6x + 9) \neq 0$, откуда $x^2 - 6x + 9 \neq 1$. Разделив обе части неравенства на

$(\log_{(5-x)}(x^2 - 6x + 9))^2$, получим: $x + \frac{3}{x} \geq 4$, откуда $\frac{(x-1)(x-3)}{x} \geq 0$. Решим это

неравенство: $0 < x \leq 1, x \geq 3$. С учетом ограничений получаем:

$0 < x \leq 1, x = 2, 3 < x < 4, 4 < x \leq 5$.

Ответ: $0 < x \leq 1, x = 2, 3 < x < 4, 4 < x \leq 5$.

21) Решите неравенство $\frac{\log_{0,5}(8x^2 + 24x - 16) + \log_2(x^4 + 6x^3 + 9x^2)}{x^2 + 3x - 10} \geq 0$.

Решение: $\frac{\log_{0,5}(8x^2 + 24x - 16) + \log_2(x^4 + 6x^3 + 9x^2)}{x^2 + 3x - 10} \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\frac{\log_2(x^2 + 3x)^2 - \log_2(8(x^2 + 3x) - 16)}{(x^2 + 3x) - 10} \geq 0.$$

Сделав замену переменной $t = x^2 + 3x$, получаем:

$$\frac{\log_3 t^2 - \log_2(8t - 16)}{t - 10} \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t > 2, \\ \frac{t^2 - 8t + 16}{t - 10} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t > 2, \\ \frac{(t - 4)^2}{t - 10} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4, \\ t > 10. \end{cases}$$

$$x^2 + 3x = 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, \\ x = 1. \end{cases} \quad x^2 + 3x > 10 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -5, \\ x > 2. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -5) \cup \{-4; 1\} \cup (2; +\infty)$.

22) Решите неравенство $5\log_{11}(x^2 - x - 6) \leq 6 + \log_{11} \frac{(x-3)^5}{x+2}$.

Решение: ОДЗ: $\begin{cases} x^2 - x - 6 > 0, \\ \frac{(x-3)^5}{x+2} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)(x+2) > 0, \\ \frac{(x-3)^5}{x+2} > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2, \\ x > 3. \end{cases}$

Решим неравенство на ОДЗ $5 \log_{11}((x-3)(x+2)) - \log_{11} \frac{(x-3)^5}{x+2} \leq 6$,

$$\log_{11} \frac{(x-3)^5(x+2)^5(x+2)}{(x-3)^5} \leq 6, \log_{11}(x+2)^6 \leq 6, \Rightarrow 6 \log_{11} |x+2| \leq 6, \Rightarrow \log_{11} |x+2| \leq 1, \Rightarrow |x+2| \leq 11,$$

$-11 \leq x+2 \leq 11, -13 \leq x \leq 9$. Учитывая ОДЗ, имеем $-13 \leq x < -2, 3 < x \leq 9$.

Ответ: $[-13; -2) \cup (3; 9]$

23) Решите неравенство $3 \log_{11}(x^2 + 8x - 9) \leq 4 + \log_{11} \frac{(x-1)^3}{x+9}$.

Решение: Значения x , при которых определены обе части неравенства:

$$\begin{cases} x^2 + 8x - 9 > 0, \\ \frac{(x-1)^3}{x+9} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+9)(x-1) > 0, \\ \frac{(x-1)^3}{x+9} > 0, \end{cases} \Rightarrow \text{откуда } x \in (-\infty; -9) \cup (1; +\infty). \text{ Для таких } x \text{ получаем:}$$

$$3 \log_{11}(x^2 + 8x - 9) + \log_{11} \frac{x+9}{(x-1)^3} = \log_{11} \frac{(x+9)^3(x-1)^3(x+9)}{(x-1)^3} = \log_{11}(x+9)^4.$$

Исходное неравенство примет вид: $\log_{11}(x+9)^4 \leq 4$. Так как $(x+9)^4 \geq 0$, то при условии $x \neq -9$ имеем: $\log_{11}(x+9)^4 \leq 4; (x+9)^4 \leq 11^2; (x-2)(x+20) \leq 0$, откуда.

$x \in [-20; -9) \cup (-9; 2]$ Учитывая, что $x \in (-\infty; -9) \cup (1; +\infty)$, получаем: $x \in [-20; -9) \cup (1; 2]$

Ответ: $[-20; -9); (1; 2]$.

24) Решите неравенство $11 \cdot \lg(x^2 + 11x + 30) \leq 12 + \lg \frac{(x+6)^{11}}{x+5}$

Решение: Значения x , при которых определены обе части неравенства:

$$\begin{cases} x^2 + 11x + 30 > 0, \\ \frac{(x+6)^{11}}{x+5} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)(x+5) > 0, \\ \frac{(x+6)^{11}}{x+5} > 0, \end{cases} \Rightarrow x \in (-\infty; -6) \cup (-5; +\infty). \text{ Для таких } x \text{ получаем:}$$

$$11 \cdot \lg(x^2 + 11x + 30) + \lg \frac{x+5}{(x+6)^{11}} = \lg \frac{(x+5)^{11}(x+6)^{11}(x+5)}{(x+6)^{11}} = \lg(x+5)^{12}. \quad \text{Исходное}$$

неравенство примет вид: $\lg(x+5)^{12} \leq 12$. Так как $(x+5)^{12} \geq 0$, то при условии

$x \neq -5$ имеем: $\lg(x+5)^{12} \leq 12; (x+5)^{12} \leq 10^{12}; (x-5)(x+15) \leq 0$, откуда

$x \in [-15; -5) \cup (-5; 5]$. Учитывая, что $x \in (-\infty; -6) \cup (-5; +\infty)$, получаем:

$x \in [-15; -6) \cup (-5; 5]$.

Ответ: $[-15; -6) \cup (-5; 5]$.

25) Решите систему неравенств
$$\begin{cases} 4^x \leq 9 \cdot 2^x + 22, \\ \log_3(x^2 - x - 2) \leq 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2}. \end{cases}$$

Решение: 1) Неравенство $4^x \leq 9 \cdot 2^x + 22$ запишем в виде $(2^x)^2 - 9 \cdot 2^x - 22 \leq 0$.

Относительно $t = 2^x$ неравенство имеет вид $t^2 - 9t - 22 \leq 0 \Rightarrow (t+2)(t-11) \leq 0, -2 \leq t \leq 11$. Значит, $-2 \leq 2^x \leq 11, x \leq \log_2 11$. 2)

Второе неравенство системы определено при $\begin{cases} (x+1)(x-2) > 0, \\ \frac{x+1}{x-2} > 0, \end{cases}$ т.е. при

$x < -1, x > 2$. При допустимых значениях переменной получаем:

$$\log_3(x^2 - x - 2) \leq 1 + \log_3 \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow \log_3((x+1)(x-2)) - \log_3 \frac{x+1}{x-2} \leq 1 \Rightarrow$$

$$\log_3(x-2)^2 \leq 1 \Rightarrow (x-2)^2 \leq 3, 2 - \sqrt{3} \leq x \leq 2 + \sqrt{3}.$$

С учетом ОДЗ переменной получаем решение второго неравенства системы: $2 < x \leq 2 + \sqrt{3}$. 3) Сравним $\log_2 11$ и $2 + \sqrt{3}$,

т.к. $\sqrt{3} > \sqrt{2,25} = 1,5$; то $2 + \sqrt{3} > 3,5 = \log_2(8 \cdot \sqrt{2}) > \log_2(8 \cdot 1,4) = \log_2(11,2) > \log_2 11 \Rightarrow \log_2 11 < 2 + \sqrt{3}$;

Решение системы неравенств: $(2; \log_2 11)$.

Ответ: $(2; \log_2 11)$.

26) Решите уравнение
$$\frac{2\sin^2 x + 3\cos x}{2\sin x - \sqrt{3}} = 0.$$

Решение: Левая часть уравнения имеет смысл при $\sin x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$. Преобразуем

уравнение:
$$\frac{-2\cos^2 x + 3\cos x + 2}{2\sin x - \sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \frac{(2\cos x + 1)(\cos x - 2)}{2\sin x - \sqrt{3}} = 0, \text{ поскольку } \cos x - 2 \neq 0,$$

получаем: $2\cos x + 1 = 0 \Rightarrow \cos x = -\frac{1}{2}$. Учитывая, что $\sin x \neq \frac{\sqrt{3}}{2}$, находим

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

27) Решите неравенство
$$\frac{(x^2 + x) \lg(x^2 + 2x - 2)}{|x - 1|} \geq \frac{\lg(-x^2 - 2x + 2)^2}{x - 1}$$

Решение: Преобразуем неравенство
$$\frac{(x^2 + x) \lg(x^2 + 2x - 2)}{|x - 1|} \geq \frac{\lg(x^2 + 2x - 2)}{x - 1}.$$

Если $x > 1$, то $\frac{(x^2 + x - 2) \lg(x^2 + 2x - 2)}{x - 1} \geq 0$; $\frac{(x - 1)(x + 2) \lg(x^2 + 2x - 2)}{x - 1} \geq 0$; $\begin{cases} \lg(x^2 + 2x - 2) \geq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 2 \geq 1, \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 1)(x + 3) \geq 0, \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow x > 1.$$

Если $x < 1$, то $\frac{(x^2 + x + 2) \lg(x^2 + 2x - 2)}{1 - x} \geq 0$; $\frac{\lg(x^2 + 2x - 2)}{1 - x} \geq 0$; $\begin{cases} \lg(x^2 + 2x - 2) \geq 0, \\ x < 1; \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 2 \geq 1, \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x - 3 \geq 0, \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x - 1)(x + 3) \geq 0, \\ x < 1 \end{cases} \Rightarrow x \leq -3.$$

Ответ: $(-\infty; -3] \cup (1; +\infty)$.

28) Решите уравнение $(4\cos^2 x - 12\cos x + 5)\sqrt{-7\sin x} = 0$.

Решение: 1) $-7\sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi, n \in \mathbb{Z}$. 2) $\begin{cases} 4\cos^2 x - 12\cos x + 5 = 0, \\ \sin x \leq 0; \end{cases}$

Решим уравнение системы $4\cos^2 x - 12\cos x + 5 = 0$. Обозначим $\cos x = t, |t| \leq 1$.

Уравнение примет вид: $4t^2 - 12t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2}, \\ t = 2,5 \end{cases} \Rightarrow t = 2,5$ не удовлетворяет

условию $|t| \leq 1$. Вернемся к исходной переменной $\cos x = \frac{1}{2}, x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Условию $\sin x \leq 0$ удовлетворяет $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\pi, -\frac{\pi}{3} + 2\pi, n \in \mathbb{Z}$.

29) $3^x + 4^x = 5^x$

Решение: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$; $f(x) = t^x$, где $0 < t < 1$ убывающая $\Rightarrow f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x -$

убывающая, т.о. уравнение $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1$ по теореме 6 имеет хотя бы одно

решение. Подбором выясняем $x = 2$.

Ответ: $x = 2$.

30) Решите систему уравнений $\begin{cases} y + \cos x = 0, \\ (5\sqrt{\cos x} - 1)(4y + 5) = 0. \end{cases}$

Решение: Из второго уравнения получаем:
$$\begin{cases} \cos x \geq 0, \cos x = \frac{1}{25}, \\ y = -\frac{5}{4} \end{cases}$$

Если $y = -\frac{5}{4}$, то из первого уравнения $\cos x = \frac{5}{4}$. Уравнение не имеет решений.

Если $\cos x = \frac{1}{25}$, то $x = \pm \arccos \frac{1}{25} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, и из первого уравнения получаем:

$$y = -\frac{1}{25}.$$

Ответ: $\left\{ \left(\arccos \frac{1}{25} + 2\pi n, -\frac{1}{25} \right), \left(-\arccos \frac{1}{25} + 2\pi n, -\frac{1}{25} \right), n \in \mathbb{Z} \right\}.$

31) Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x - 7\sin x - 4}{\sqrt{-3\operatorname{tg} x}} = 0.$

Решение:
$$\frac{2\sin^2 x - 7\sin x - 4}{\sqrt{-3\operatorname{tg} x}} = 0. \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin^2 x - 7\sin x - 4 = 0 \\ -3\operatorname{tg} x > 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 4 \\ \sin x = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x < 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x < 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$

32) Решите уравнение $\frac{1}{\cos^2 x} + 3\operatorname{tg} x - 5 = 0.$ Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right].$

Решение: Запишем уравнение иначе: $(\operatorname{tg}^2 x + 1) + 3\operatorname{tg} x - 5 = 0.$

$$\Rightarrow \operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 4 = 0, \operatorname{tg} x = t, t^2 + 3t - 4 = 0; t_1 = 1; t_2 = -4. \Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x = 1 \\ \operatorname{tg} x = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \\ x = -\arctg 4 + \pi k, \end{cases} k \in \mathbb{Z}.$$

Отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ принадлежат корни $-\frac{3\pi}{4}, -\arctg 4, \frac{\pi}{4}.$

Ответ: $-\frac{3\pi}{4}, -\arctg 4, \frac{\pi}{4}.$

33) Решите неравенство $\log_x 3 + 2\log_{3x} 3 - 6\log_{9x} 3 \leq 0$.

Решение: Запишем неравенство в виде: $\frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{\log_3 2x} - \frac{6}{\log_3 9x} \leq 0$;

$$\frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{1 + \log_3 x} - \frac{6}{2 + \log_3 x} \leq 0;$$

Сделаем замену $y = \log_3 x$ и приведем левую часть к общему знаменателю:

$$\frac{3(y-1)(y+\frac{2}{3})}{y(y+1)(y+2)} \geq 0 \quad \text{Решая получаем: } -2 < y < -1, -\frac{2}{3} \leq y < 0 \text{ или } y \geq 1, \Rightarrow,$$

$$\frac{1}{9} < x < \frac{1}{3}, 3^{-\frac{2}{3}} \leq x < 1, x \geq 3.$$

Ответ: $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3}\right) \cup \left[3^{-\frac{2}{3}}; 1\right) \cup [3; +\infty).$

34) Решите неравенство $3\log_{11}(x^2 + 8x - 9) \leq 4 + \log_{11} \frac{(x-1)^3}{x+9}$.

Решение: Значения x , при которых определены обе части неравенства:

$$\begin{cases} x^2 + 8x - 9 > 0, \\ \frac{(x-1)^3}{x+9} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+9)(x-1) > 0, \\ \frac{(x-1)^3}{x+9} > 0, \end{cases} \Rightarrow \text{откуда } x \in (-\infty; -9) \cup (1; +\infty). \text{ Для таких } x \text{ получаем:}$$

$$3\log_{11}(x^2 + 8x - 9) + \log_{11} \frac{x+9}{(x-1)^3} = \log_{11} \frac{(x+9)^3 (x-1)^3 (x+9)}{(x-1)^3} = \log_{11}(x+9)^4.$$

Исходное неравенство примет вид: $\log_{11}(x+9)^4 \leq 4$. Так как $(x+9)^4 \geq 0$, то при условии $x \neq -9$ имеем: $\log_{11}(x+9)^4 \leq 4$; $(x+9)^4 \leq 11^2$; $(x-2)(x+20) \leq 0$, откуда.

$x \in [-20; -9) \cup (-9; 2]$ Учитывая, что $x \in (-\infty; -9) \cup (1; +\infty)$, получаем: $x \in [-20; -9) \cup (1; 2]$.

Ответ: $[-20; -9); (1; 2]$

35) Решите уравнение $\frac{2\sin^2 x + 2\sin x \cos 2x - 1}{\sqrt{\cos x}} = 0$.

Решение: $\frac{2\sin^2 x + 2\sin x \cos 2x - 1}{\sqrt{\cos x}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin x \cos 2x - \cos 2x = 0, \\ \cos x > 0. \end{cases} (*)$

Решим уравнение: $2\sin x \cos 2x - \cos 2x = 0$.

$$2\sin x \cos 2x - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x(2\sin x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

откуда $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Из найденных решений условию (*)

удовлетворяет только $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

36) Решите неравенство $\frac{\log_2 x - 5}{1 - \log_2 x^2} \geq 2 \log_2 x$.

Решение: Сделаем замену переменной $t = \log_2 x$. Неравенство принимает вид

$$\frac{t-5}{1-2t} \geq 2t \Leftrightarrow 0 \geq 2t + \frac{t-5}{2t-1} \Leftrightarrow 0 \geq \frac{4t^2 - t - 5}{2t-1} \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -1, \\ \frac{1}{2} < t \leq \frac{5}{4}, \text{ или} \end{cases} \begin{cases} 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ \sqrt{2} < x \leq 2^{\frac{5}{4}}. \end{cases}$$

Ответ: $0 < x \leq \frac{1}{2} \cup \sqrt{2} < x \leq 2^{\frac{5}{4}}$.

37) Решите уравнение $|\cos x + \sin x| = \sqrt{2} \sin 2x$.

Решение: $|\cos x + \sin x| = \sqrt{2} \sin 2x \Leftrightarrow \begin{cases} (\cos x + \sin x)^2 = 2 \sin^2 2x, \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1, \\ \sin 2x = -\frac{1}{2}, \Leftrightarrow \\ \sin 2x \geq 0 \end{cases}$

$$\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$.

38) Решите уравнение $\frac{3 \cos 2x + 7 \cos x + 3}{\sqrt{-\sin x}} = 0$.

Решение: Уравнение равносильно системе $\begin{cases} 3 \cos 2x + 7 \cos x + 3 = 0, \\ \sin x < 0. \end{cases}$

Уравнение системы приводится к виду $6 \cos^2 x + 7 \cos x = 0, \Rightarrow \cos x = 0$ или

$\cos x = -\frac{7}{6}$. Уравнение $\cos x = -\frac{7}{6}$ не имеет решений. Учитывая, что $\sin x < 0$,

получаем: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

39) Решите уравнение $(2 \cos^2 x - \cos x) \sqrt{-11 \tan x} = 0$.

Решение: Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из

них равен нулю, а другой при этом не теряет смысла. Поэтому данное уравнение равносильно совокупности:
$$\begin{cases} 2\cos^2 x - \cos x = 0, \\ \operatorname{tg} x < 0, \\ \cos x \neq 0, \\ \operatorname{tg} x = 0. \end{cases} \quad . \quad \text{Из уравнения}$$

$2\cos^2 x - \cos x = 0$ получаем $\cos x = \frac{1}{2}$ либо $\cos x = 0$ (что противоречит условию $\cos x \neq 0$). Решением уравнения $\cos x = \frac{1}{2}$ соответствуют две точки единичной окружности, одна из которых лежит в I четверти (и значит, для нее неравенство $\operatorname{tg} x < 0$ не выполняется), а другая — в IV четверти (для нее неравенство $\operatorname{tg} x < 0$ выполняется, и решение уравнения дается формулой $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$).

Теперь осталось выписать решение простейшего тригонометрического уравнения $\operatorname{tg} x = 0$, т. е. $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, и записать ответ.

Ответ: $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

40) Решите неравенство $7^{-|x-3|} \cdot \log_2(6x - x^2 - 7) \geq 1$.

Решение: Так как $0 < 7^{-|x-3|} \leq 1$ и $\log_2(6x - x^2 - 7) = \log_2(2 - (x-3)^2) \leq 1$, переходим к системе
$$\begin{cases} \log_2(2 - (x-3)^2) = 1, \\ 7^{-|x-3|} = 1. \end{cases} \quad . \quad \text{Получаем: } x = 3.$$

Ответ: $\{3\}$.

41) Решите неравенство

$$\log_2((7^{-x^2} - 3)(7^{-x^2+16} - 1)) + \log_2 \frac{7^{-x^2} - 3}{7^{-x^2+16} - 1} > \log_2(7^{7-x^2} - 2)^2 \dots$$

Решение: Пусть $t = 7^{-x^2}, 0 < t \leq 1$. тогда неравенство принимает вид:

$$\log_2((t-3)(7^{16}t-1)) + \log_2 \frac{t-3}{7^{16}t-1} > \log_2(7^7 t - 2)^2. \quad \text{Так как } t-3 < 0, \text{ то } 7^{16}t-1 < 0, \text{ а}$$

значит, $0 < t < \frac{1}{7^{16}}$. Получаем:

$$\begin{cases} \log_2(t-3)^2 > \log_2(7^7 t - 2)^2, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |t-3| > |7^7 t - 2|, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-t > 2-7^7 t, \\ 0 < t < \frac{1}{7^{16}}; \end{cases} \Leftrightarrow 0 < t < \frac{1}{7^{16}}$$

$$\text{Тогда } 7^{-x^2} < 7^{-16} \Leftrightarrow x^2 > 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4, \\ x < -4. \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; -4) \cup (4; +\infty)$.

42) Решите неравенство $\left(x + \frac{4}{x}\right) \cdot (\log_{(6-x)}(x^2 - 8x + 16))^2 \geq 5 \cdot (\log_{(6-x)}(x^2 - 8x + 16))^2$.

Решение: Решение неравенства ищем при условиях: $\begin{cases} x \neq 0, \\ 6-x > 0, \\ 6-x \neq 1, \\ x^2 - 8x + 16 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 6, \\ x \neq 0, \\ x \neq 5, \\ x \neq 4. \end{cases}$

Рассмотрим два случая:

1) $\log_{(6-x)}(x^2 - 8x + 16) = 0$, откуда $x^2 - 8x + 16 = 1$, т.е. $|x - 4| = 1$ и, значит $x = 3; x = 5$.

Значит, $x = 3$ – решение задачи.

2) $\log_{(6-x)}(x^2 - 8x + 16) \neq 0$, откуда $x^2 - 8x + 16 \neq 1$. Разделив обе части неравенства на $(\log_{(6-x)}(x^2 - 8x + 16))^2$ (при условии, что выражение больше нуля), Получим: $x + \frac{4}{x} \geq 5$, откуда $\frac{(x-1)(x-4)}{x} \geq 0$. Решим это неравенство:

$0 < x \leq 1, x \geq 4$. С учетом ограничений получим: $0 < x \leq 1; x = 3; 4 < x < 5; 5 < x \leq 6$.

Ответ: $0 < x \leq 1; x = 3; 4 < x < 5; 5 < x \leq 6$. Комментарий: здесь использован прием – область определения входящих в уравнение функций.

43) Решите неравенство $\log_{x+3}(9 - x^2) - \frac{1}{16} \log_{x+3}^2(x - 3)^2 \geq 2$.

Решение: Преобразуем неравенство: $\log_{x+3}((3-x)(3+x)) - \frac{1}{4} \log_{x+3}^2 |x - 3| \geq 2$.

Найдем, при каких значениях x левая часть неравенства имеет смысл:

$$\begin{cases} 9 - x^2 > 0, \\ x + 3 > 0, \\ x + 3 \neq 1, \\ x - 3 \neq 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-x)(3+x) > 0, \\ x > -3, \\ x \neq -2, \\ x \neq 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 < x < -2, \\ -2 < x < 3 \end{cases}$$

Получаем: $-3 < x < -2$ или $-2 < x < 3$. Значит, $|x-3| = 3-x$ при всех допустимых значениях x . Поэтому $\log_{x+3}(3-x) + \log_{x+3}(3+x) - \frac{1}{4} \log^2_{x+3}(3-x) \geq 2$.

$\log_{x+3}(3-x) + 1 - \frac{1}{4} \log^2_{x+3}(3-x) \geq 2$. Сделаем замену $\log_{x+3}(3-x) = y$. Получаем:

$y - \frac{1}{4} y^2 \geq 1; y^2 - 4y + 4 \leq 0; (y-2)^2 \leq 0; y = 2$. Таким образом, $\log_{x+3}(3-x) = 2$, откуда

$(x+3)^2 = 3-x; x^2 + 7x + 6 = 0$. Корни уравнения: -6 и -1 . Условию $-3 < x < -2$ или $-2 < x < 3$ удовлетворяет только $x = -1$.

Ответ: $x = -1$. Комментарий – прием применения области определения функции.

44) Решите неравенство $\log_{0,1}(x^2 + x - 2) > \log_{0,1}(x + 3)$.

Решение: Так как функция $y = \log_{0,1} t$ убывает на промежутке $(0; +\infty)$, то данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 < x + 3, \\ x^2 + x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) < 0, \\ (x - 1)(x + 2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow (-\sqrt{5}; -2), (1; \sqrt{5}).$$

Ответ: $(-\sqrt{5}; -2), (1; \sqrt{5})$. Комментарий: здесь использован прием - использование монотонности функции.

$$45) \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{\lg(-x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{\lg(-x)} = 0 \Leftrightarrow (ОДЗ) \begin{cases} x^2 - 9 \geq 0, \\ -x > 0, \\ -x \neq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| \geq 3, \\ x < 0, \\ x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq -3$$

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - 9} = 0, \\ x \leq -3; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ x = -3, \\ x \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$$

Ответ: $x = -3$. Комментарий: здесь использован прием - использование области определения функции.

46) Решите неравенство $\sqrt{4-x^2}(x^2 + 4x + 5) \geq 0$.

Решение: Неравенство эквивалентно совокупности

$$\begin{cases} 4 - x^2 = 0; \\ 4 - x^2 > 0; \\ x^2 + 4x + 5 \geq 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2; \\ x \in (-2; 2); \\ x \in R. \end{cases}$$

Ответ: $x \in [-2; 2]$. Комментарий: здесь использован прием - использование области определения функции и условие произведение равно 0.

47) Решите неравенство $\sqrt{x+18} < 2-x$

Решение: Данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} x+18 < (2-x)^2, \\ x+18 \geq 0, \\ 2-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-7)(x+2) > 0, \\ x \geq -18, \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -18 \leq x < -2$$

Ответ: $-18 \leq x < -2$. Комментарий: здесь использован прием - использование области определения функции.

48) Решить уравнение $\sqrt{3-x} = \log_5(x-3)$

ОДЗ этого уравнения состоит из всех x , одновременно удовлетворяющих условиям $\begin{cases} 3-x \geq 0 \\ x-3 > 0 \end{cases}$. Это значит, что ОДЗ есть пустое множество. Этим

решение уравнения и завершается, т. к. установлено, то ни одно число не может являться решением, т.е. уравнение не имеет корней.

Ответ: решений нет. Комментарий: здесь использован прием - использование области определения функции. При решении неравенств иногда можно не находить ОДЗ, а решать неравенство переходом к равносильной ему системе неравенств, в которой либо одно из неравенств не имеет решений, либо знание его решения помогает решить систему неравенств.

49) Решить неравенство $\sqrt{\sin x} < \sqrt{1-|x|} + \sin x$

Нахождение ОДЗ неравенства есть трудная задача, поэтому перейдем к равносильной ему системе неравенств $\begin{cases} \sin x \geq 0 \\ 1-|x| + \sin x \geq 0 \\ \sin x < 1-|x| + \sin x \end{cases}$.

Третье неравенство имеет решение $-1 < x < 1$. Первое и второе неравенство справедливо лишь для x из промежутка $0 \leq x < 1$. Поэтому этот промежуток является множеством решений системы.

Ответ: $0 \leq x < 1$.

$$50) \sqrt{1-x} = \sqrt{x-2}; D(f): \begin{cases} 1-x \geq 0, \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq 2 \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений}$$

Ответ: нет решений.

$$51) \sqrt{1-x} - \sqrt{x-3} = 5; D(f): \begin{cases} 1-x \geq 0, \\ x-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1, \\ x \geq 3 \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений.}$$

Ответ: нет решений.

$$52) \sqrt{x-12} + \sqrt{11-x} = 6; D(f): \begin{cases} x-12 \geq 0, \\ 11-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 12, \\ x \leq 11 \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений.}$$

Ответ: нет решений. [21]

$$53) \sqrt{2-x} = \frac{1}{\sqrt{x-2}}; D(f): \begin{cases} 2-x \geq 0, \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений.}$$

Ответ: нет решений.

$$54) \quad \sqrt{x} + \sqrt{2-x} + \sqrt{x^2-3x} = \sqrt{2}; D(f): \begin{cases} x \geq 0, \\ 2-x \geq 0 \\ x(x-3) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 2 \\ \begin{cases} x \leq 0 \\ x \geq 3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow x = 0.$$

Проверим, является ли $x = 0$ корнем уравнения: $\sqrt{0} + \sqrt{2} + \sqrt{0} = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \sqrt{2}$

Ответ: $x = 0$ [27].

$$55) \quad \sqrt{2-x} = \log_a(x-2), a > 0, a \neq 1; D(f): \begin{cases} 2-x \geq 0, \\ x-2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2, \\ x > 2 \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений.}$$

Ответ: нет решений.

$$56) \quad 1 + \sqrt{x} + \sqrt{-x} = 2^x; D(f): \begin{cases} x \geq 0, \\ -x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0. \quad 1 + \sqrt{0} + \sqrt{0} = 2^0, 1 = 1$$

Ответ: $x = 0$.

Комментарий: во всех примерах использован прием - использование области определения функции.

$$57) \sqrt{x} + \sqrt{1-x} = \cos\sqrt{x-1}; D(f): \begin{cases} x \geq 0, \\ 1-x \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

Проверим, является ли $x = 1$ корнем уравнения: $\sqrt{1} + \sqrt{0} = \cos\sqrt{0}; 1 = 1$

Ответ: $x = 1$.

$$58) 2^{\sqrt{x-1}} = \sqrt{1-x} + 1; D(f): \begin{cases} x-1 \geq 0, \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow x=1$$

Проверим, является ли $x = 1$ корнем уравнения: $2^{\sqrt{0}} = \sqrt{0} + 1; 1 = 1$

Ответ: $x = 1$. [25]

$$59) x^2 + 4x = 3^{\log_3(4\sqrt{x} + x\sqrt{x})} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x = 4\sqrt{x} + x\sqrt{x}, \\ x > 0. \end{cases}$$

Обозначим $\sqrt{x} = t, t > 0$. Система примет вид:

$$\begin{cases} t^4 - t^3 + 4t^2 - 4t = 0, \\ t > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 - t^2 + 4t - 4 = 0, \\ t > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2(t-1) + 4(t-1) = 0, \\ t > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (t-1)(t^2+4) = 0, \\ t > 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow t=1$. Вернемся к исходной переменной: $\sqrt{x} = 1, x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

$$60) \sqrt{9-x^2} = \log_3(|x|-3); D(f): \begin{cases} 9-x^2 \geq 0, \\ |x|-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 3, \\ x > 3 \\ x < -3 \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений.}$$

Ответ: нет решений. Комментарий: во всех примерах использован прием - использование области определения функции.

$$61) \sqrt{10 + \sqrt{x-x^2}} = 3$$

$$\text{Решение: } x-x^2 \geq 0 \Rightarrow 10 + \sqrt{x-x^2} \geq 0 \Leftrightarrow \sqrt{10 + \sqrt{x-x^2}} \geq \sqrt{10} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \sqrt{10 + \sqrt{x-x^2}} \geq \sqrt{10} \\ \sqrt{10 + \sqrt{x-x^2}} = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений.}$$

Ответ: нет решений.

$$62) \sqrt{3x-1} + \sqrt{5x+8} + 1 = 0$$

$$\text{Решение: } \sqrt{3x-1} \geq 0, \sqrt{5x+8} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{3x-1} + \sqrt{5x+8} + 1 \geq 1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{3x-1} + \sqrt{5x+8} + 1 \geq 1 \\ \sqrt{3x-1} + \sqrt{5x+8} + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

нет решений.

Ответ: нет решений.

$$63) \sqrt{x+17} + \sqrt{x} = 4$$

Решение: $x \geq 0 \Rightarrow x+17 \geq 17 \Rightarrow \sqrt{x+17} \geq \sqrt{17} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+17} + \sqrt{x} = 4, \\ \sqrt{x+17} + \sqrt{x} \geq \sqrt{17} \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений.}$

Ответ: нет решений. Комментарий: в этих трех примерах использован прием - использование свойств неравенств одинакового смысла для оценки области значения функции.

64) Сумма неотрицательных выражений равна нулю, если одновременно каждое из слагаемых обращается в ноль [31].

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{x^2-3} = 0$$

Решение: $\begin{cases} \sqrt{x-4} = 0, \\ \sqrt{x^2-3} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4, \\ x = \sqrt{3}, \\ x = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \text{нет решений.}$

65) $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = -2.$

Решение: Т.к. $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} \geq 0 \Rightarrow \text{нет решений.}$

Ответ: нет решений. Комментарий: здесь использован прием - использование области значения функции и утверждение сумма неотрицательных выражений равна нулю, если одновременно каждое из слагаемых обращается в 0.

66) Решите систему уравнений $\begin{cases} \sqrt{\cos y} \cdot \sqrt{6x-x^2-8} = 0, \\ \sqrt{\sin x} \cdot \sqrt{2-y-y^2} = 0. \end{cases}$

Решение: Из неравенства $6x-x^2+8 \geq 0$, получаем $2 \leq x \leq 4$. Рассмотрим два случая: 1) Пусть $x = 2$ или $x = 4$. Если $x = 4$, то $\sin x < 0$; если $x = 2$, то $\sin x > 0$.

Из второго уравнения получаем $2-y-y^2 = 0$, откуда $y = -2$ или $y = 1$. 2)

Пусть теперь $2 < x < 4$. Тогда $6x-x^2-8 > 0$, и поэтому из первого уравнения получаем: $\cos y = 0$. Учтем, что $2-y-y^2 \geq 0$, тогда $-2 \leq y \leq 1$. Из всех решений уравнения $\cos y = 0$ этому условию удовлетворяет только $y = -\frac{\pi}{2}$.

При этом $2-y-y^2 > 0$ и, из второго уравнения получаем: $\sin x = 0$. Из всех

решений этого уравнения интервалу $2 < x < 4$. принадлежит только $x = \pi$.

Значит, $x = \pi$, $y = -\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\left\{(2;1);(\pi;-\frac{\pi}{2})\right\}$.

67) $\sqrt{x^3+1} \geq 5-x$ [31]

Решение: $f(x) = \sqrt{x^3+1}$ – возрастающая на $[-1;+\infty)$; $g(x) = 5-x$ – убывающая на $(-\infty;+\infty)$; $\sqrt{x^3+1} = 5-x \Rightarrow x = 2$ по теореме 8 решение уравнения

единственное. Таким образом: $\begin{cases} \sqrt{x^3+1} > 5-x, \\ \sqrt{x^3+1} = 5-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 2, \\ x = 2. \end{cases}$ На основании решения

уравнения неравенство выполняется для всех $x \geq 2$.

Ответ: $[2;+\infty)$.

68) $\sqrt{3+x} \geq 3-x$

Решение: $f(x) = \sqrt{3+x}$ – возрастающая на $[-3;+\infty)$; $g(x) = 3-x$ – убывающая на $(-\infty;+\infty)$; $\sqrt{3+x} = 3-x \Rightarrow x = 2$ по теореме 8 решение уравнения единственное.

Таким образом: $\begin{cases} \sqrt{3+x} > 3-x, \\ \sqrt{3+x} = 3-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 1, \\ x = 1. \end{cases}$

На основании решения уравнения неравенство выполняется для всех $x \geq 1$.

Ответ: $[1;+\infty)$. Комментарий: в этих примерах использован прием – использование свойства монотонности функций.

69. $x^3 + 6 = 7\sqrt[3]{7x-6}$

Решение: Преобразуем данное уравнение: $x^3 + 6 = 7\sqrt[3]{7x-6} \Leftrightarrow \sqrt[3]{7x-6} = \frac{x^3+6}{7} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 7x-6 = \left(\frac{x^3+6}{7}\right)^3 \Leftrightarrow x = \frac{\left(\frac{x^3+6}{7}\right)+6}{7}. (t) = \frac{t^3+6}{7} f''(t) = \frac{3t^2}{7} > 0 \quad t \in \mathbb{R}, t \neq 0.$$

$f(t) = \frac{t^3 + 6}{7}$ - возрастающая, т.о. $\frac{\left(\frac{x^3 + 6}{7}\right)^3 + 6}{7} f(f(x))$, тогда по теореме $1 \Rightarrow f(f(x)) =$

$$\frac{\left(\frac{x^3 + 6}{7}\right)^3 + 6}{7} = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3 + 6}{7} = x; x^3 + 6 - 7x = 0 \Leftrightarrow x^3 - x - 6x + 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ x = -3, \\ x = 2 \end{cases}$$

$$x(x^2 - 1) - 6(x - 1) = 0 \Rightarrow (x - 1)(x^2 + x - 6) = 0.$$

Ответ: 1; -3; 2. Комментарий: здесь использован прием – использование свойства монотонности функций.

70. $27^x - 7 \cdot \sqrt[3]{7 \cdot 3^x + 6} = 6 [31]$

Решение: $3^x = t, t > 0 \Rightarrow \frac{t^3 - 6}{7} = \sqrt[3]{7t + 6}$ (1) $f(x) = \frac{t^3 - 6}{7}$ – возрастающая, значит,

имеет обратную функцию. Выразим $t = \sqrt[3]{7y + 6}$; Уравнение (1) можно записать в виде: $f(t) = g(t)$, где $g(t)$ – функция, обратная к $f(t)$.

$$\text{Значит, по теореме 7 } f(t) = g(t) \Leftrightarrow f(t) = t; \frac{t^3 - 6}{7} = t \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3, \\ t = -2, \\ t = -1, \\ t > 0 \end{cases} \Rightarrow t = 3; 3^x = 3 \Rightarrow x = 1$$

Ответ: $x = 1$.

71) $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{4x + 1} = 4$

Решение: Подбором выясняем, что $\sqrt{2x - 3} + \sqrt{4x + 1} = 1 + 3 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x - 3} = 1, \\ \sqrt{4x + 1} = 3 \end{cases} \Rightarrow x = 2.$

Докажем, что других корней нет. Если $x > 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x - 3} > 1, \\ \sqrt{4x + 1} > 3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2x - 3} + \sqrt{4x + 1} > 4$

. Если $x < 2 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2x - 3} < 1, \\ \sqrt{4x + 1} < 3 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{2x - 3} + \sqrt{4x + 1} < 4.$

Ответ: $x = 2$. Комментарий: здесь использован прием – корни находим подбором и доказываем отсутствие других решений.

72) $x^2 + \sqrt{-x} = 18$

Решение: ОДЗ уравнения: $x \leq 0$. Функция $y(x) = x^2 + \sqrt{-x}$ убывает на промежутке $(-\infty; 0]$, а $g(x) = 18$ – постоянная функция. Подбором находим, что $x = -4$. В силу теоремы 7, найденный корень единственный.

Ответ: $x = -4$.

73) Решите уравнение $24^x + 7^x = 25^x$

Решение: Заметим, что $x = 2$ – корень данного уравнения. На самом деле:

$24^2 + 7^2 = 25^2$, $574 + 49 = 625$, $625 = 625$ – верно. Убедимся, что других корней нет. $24^x > 0$, так как множество значений данной функции – множество положительных чисел. Разделим обе части этого уравнения на

$24^x > 0$. $1 + \frac{7^x}{24^x} = \frac{25^x}{24^x}$, $1 + \left(\frac{7}{24}\right)^x = \left(\frac{25}{24}\right)^x$. Функция $y = a^x$ при $a > 1$ монотонно

возрастающая, а при $0 < a < 1$ монотонно убывающая. Поэтому функция

$y = \left(\frac{25}{24}\right)^x$ монотонно возрастающая, а функция $y = 1 + \left(\frac{7}{24}\right)^x$ монотонно

убывающая. $\Rightarrow x = 2$ – единственный корень данного уравнения.

Ответ: $x = 2$. Комментарий: здесь использован прием – использование свойства монотонности функций.

74) Решите уравнение $\log_{0,5}(3x + 2) - \log_{0,5}(7 - 2x) + 2 = 2x + 7$.

Решение: $\log_{0,5}(3x + 2) - \log_{0,5}(7 - 2x) = 2x + 5$. Поскольку логарифмы определены лишь для положительных чисел, то находим ОДЗ уравнения:

$\begin{cases} 3x + 2 > 0, \\ 7 - 2x > 0; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{2}{3}, \\ x < 3,5. \end{cases}$ Получили: $(-\frac{2}{3}; 3,5)$. Перепишем уравнение в виде:

$\log_{0,5}(3x + 2) - 2x = \log_{0,5}(7 - 2x) + 5$. Мы видим, что $x = -\frac{1}{2}$ – единственный корень

уравнения. Проверим это. $\log_{0,5}(-1,5 + 2) + 1 = \log_{0,5}(7 + 1) + 5$,

$\log_{0,5} 0,5 + 1 = \log_{0,5} 8 + 5$, $1 + 1 = -3 + 5$, $2 = 2$. Верно. Так как $y = \log_{0,5}(3x + 2) - 2x$

монотонно убывающая функция, а $y = \log_{0,5}(7 - 2x) + 5$ монотонно

возрастающая функция, то других корней нет, поскольку графики таких функций не могут иметь более одной точки пересечения.

Ответ: $x = -\frac{1}{2}$. Комментарий: здесь использованы приемы – область определения функции и использование свойства монотонности функций.

$$75) 4\sqrt{x-5} - \sqrt{2x-1} = x^2 + 3;$$

Решение: $D(f): \begin{cases} x-5 \geq 0, \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 5, \\ 2x-1 > x-5; \end{cases}$

$$E(f): \sqrt{2x-1} - \sqrt{x-5} > 0 \Rightarrow \sqrt{x-5} - \sqrt{2x-1} < 0 \text{ при } x \geq 5; \text{ Но! } E(f): x^2 + 3 > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-5} - \sqrt{2x-1} < 0, \\ x^2 + 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow$$

нет решений.

Ответ: нет решений.

$$76) \sqrt{2-x} + x - 3 = \sqrt{x-1}$$

Решение: $D(f): \begin{cases} 2-x \geq 0, \\ x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x \leq 2$; С учетом области определения:

$$\sqrt{2-x} + x - 3 = \sqrt{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2-x} + x \leq \sqrt{2-1} + x - 3 = x - 2 \leq 0, \\ \sqrt{x-1} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2-x} + x - 3 = 0, \\ \sqrt{x-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{нет}$$

решений.

Ответ: нет решений.

77) Решить уравнение $\lg(x^2 - 4) = \lg(6x + 4)$

Данное уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2 - 4 = 6x + 4 \\ 6x + 4 > 0 \end{cases}$. Уравнение имеет два

корня $x_1 = 3 + \sqrt{17}; x_2 = 3 - \sqrt{17}$. Неравенству удовлетворяет только первый корень, следовательно, система, а, значит, и равносильное ей уравнение имеют единственное решение.

Ответ: $x = 3 + \sqrt{17}$.

78) Решить уравнение $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x = 4$

Функция $f(x) = (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x$ - четная, так как $(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})=1$, то $(2-\sqrt{3})^{-x} = (2+\sqrt{3})^x$.

Значение $x = 0$ не является корнем уравнения. Для $x > 0$ данное уравнение имеет корень $x = 2$. Тогда $x = -2$ также является корнем уравнения.

Ответ: -2;2.

79) $\cos x \cos 3x < \cos 5x \cos 7x$.

Эквивалентными преобразованиями придём к неравенству $\cos 4x - \cos 12x = 2 \sin 8x \sin 4x$. Её период $T = \frac{2\pi}{\text{НОД}(4;12)} = \frac{\pi}{2}$. Следовательно, решение неравенства достаточно найти на промежутке, равном по длине периоду функции. За такой промежуток возьмём $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. Так как функция чётная, то решения достаточно найти лишь на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$. Функция на данном промежутке имеет два корня: $0, \frac{\pi}{8}$ – которые разбивают промежуток $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ на два интервала знакопостоянства: $\left[0; \frac{\pi}{8}\right], \left[\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}\right]$. Неравенство выполняется для всех $x \in \left[\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{4}\right]$. Но тогда оно будет выполняться и для $x \in \left[-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{8}\right]$.

Учитывая периодичность функции, запишем общее **решение неравенства**

$$-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} < x < -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} < x < \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, одним из методов решения уравнений и неравенств является функциональный, основанный на использовании свойств функций. В отличие от графического метода, знание свойств функций позволяет находить точные корни уравнения (неравенства), при этом не требуется построения графиков функций. Использование свойств функций способствует рационализации решений уравнений и неравенств.

2.2 Разработка элективного курса «Решение уравнений и неравенств с использованием свойств функций»

Пояснительная записка.

Основная задача обучения математике в школе – обеспечить прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и

умений, необходимых в повседневной жизни и трудовой деятельности каждому члену современного общества, достаточных для изучения смежных дисциплин и продолжения образования. Данный элективный курс связан с основным курсом математики. Развивает систему ранее приобретенных программных знаний, углубляет и расширяет курс математики основной школы. Материал, связанный с уравнениями и неравенствами, составляет значительную часть школьного курса математики. Это объясняется тем, что уравнения и неравенства широко используются в различных разделах математики, в решении важных прикладных задач. Есть много уравнений и неравенств, которые считаются для школьников задачами повышенной трудности. Для решения таких задач лучше применять не традиционные методы, а приёмы, которые не совсем привычны для учащихся. В данном элективном курсе рассматривается метод решения уравнений и неравенств, основанный на применении свойств функций (монотонность, ограниченность, четность и др.). Целесообразность этого метода состоит в том, что он дает более рациональное решение уравнений или неравенств. Учебный материал, касающийся нестандартных методов решения уравнений и неравенств, содержится в учебных пособиях для подготовки к ЕГЭ по математике, к конкурсным экзаменам в вузы.

Цели изучения курса:

Познакомить учащихся с некоторыми приёмами решения уравнений и неравенств с использованием свойств входящих в них функций, показать применение производной при решении уравнений или неравенств;

- обеспечить прочное и сознательное овладение учащимися системой математических знаний и умений;
- углубление и расширение знаний учащихся;

- привить ученику навыки употребления нестандартных методов рассуждения при решении задач;
- формирование у учащихся устойчивого интереса к предмету;
- выявление и развитие их математических способностей, ориентация на профессии, существенно связанный с математикой;
- подготовка учащихся к итоговой аттестации и к обучению в вузе.

Требования к подготовке учащихся.

Тематика и содержание данного элективного курса отвечает следующим **требованиям**:

- поддержание изучения базового курса алгебры;
- социальная и личностная значимость: повышается уровень образованности учащихся, расширяется их кругозор, удовлетворяются познавательные интересы в области математики;
- обладание значительным развивающим потенциалом (развитие математического мышления, умения систематизировать, обобщать, делать выводы).

Ожидаемый результат изучения курса:

- знание учащимися методов решения уравнений и неравенств с использованием свойств, входящих в них функций;
- умение самостоятельно добывать информацию и осознанно ее использовать при выполнении заданий;
- приобретение опыта в нахождении правильного и рационального пути решения уравнений и неравенств;
- практика работы в группе: умение распределять обязанности, учитывать мнение каждого члена группы, адекватно оценивать работу товарищей (при условии коллективной формы организации обучения).

Система форм контроля уровня достижений учащихся и критерии оценки.

Уровень достижений учащихся определяется в результате:

- наблюдения активности на практикумах;
- беседы с учащимися;
- анализа творческих, исследовательских работ;
- проверки домашнего задания;
- выполнения письменных работ;
- самостоятельно созданных слайдов, мини-задачников, выполненных проектов, которые могут быть индивидуальными и коллективными.

Тематическое планирование учебного материала.

Программа рассчитана на второе полугодие 11 класса (2 часа в неделю, всего 11 часов). Это обусловлено тем, что во втором полугодии уже изучены основные функции и их свойства.

1. Функции и их основные свойства.(1час)

Понятие функции. Область определения и область значения функции. Монотонность функции. Ограниченность функции. Четность, нечетность, периодичность функций.

2. Использование области определения функций.(1час)

Решение уравнений и неравенств с использованием области определения входящих в них функций

3. Использование монотонности функций.(2 часа)

Теоремы о корне. Нахождение промежутков монотонности с помощью производной. Решение уравнений и неравенств. Уравнения вида $h(f(x)) = h(g(x))$.

4. Использование понятия области изменения функции при решении уравнений.(3 часа)

Способы определения области изменения функции: с помощью построения схемы графика, введение нового неизвестного, сведение к простой функции с помощью преобразований. Решение уравнений и неравенств. Использование неотрицательности функций, входящих в уравнение или неравенство.

5. *Использование свойств четности или нечетности функций. (1 час).*

В результате изучения данного элективного курса ученик должен

знать:

- основные свойства функций, которые применяются при решении уравнений и неравенств;
- о применении производной при решении уравнений и неравенств;

уметь:

- объяснять, на основе какого свойства функции решаются уравнение или неравенство;
- применять производную для доказательства свойства функции, входящей в уравнение или неравенство;
- использовать приобретённые знания и умения в практической деятельности при подготовке к ЕГЭ.

Занятие №8 Тема: «Использование свойств четности или нечетности функций».

1. Организационный момент (2 мин)

Приветствую Вас, уважаемые ученики, садитесь. Я очень рада вас видеть, и думаю, что Вы сегодня успешно пополните свои знания.

2. Проверка готовности (4 мин)

Задания:

1) Начинается фронтальная работа с учащимися: Заполнить таблицу. Сравнить для каждой из заданных функций значения при $x = 1$ и $x = -1$; при $x = 3$ и при $x = -3$.

Заполните таблицу:				
	$x = 1$	$x = -1$	$x = 3$	$x = -3$
$f(x) = x^2$				
$f(x) = x^3$				

(обучающиеся выполняют задания, отвечают)

3. Актуализация знаний, целеполагание и мотивация (стадия вызова). (3 мин)

Какие вы видите факты? Какой возникает вопрос?

(Почему значения функции от противоположных аргументов равны, а значения функции отличаются знаком?)

Итак, на уроке будет решаться вопрос – когда значения функции от противоположных аргументов равны, когда будут отличаться только знаком, что это за свойство функции?

(обучающиеся предлагают)

Объявляется тема урока: «Основные свойства функции: Чётность и нечётность»

Открываем рабочие тетради и записываем тему урока.

Таким образом, мы определили тему урока. Предложите, какие вопросы нам надо рассмотреть в рамках данной темы? *(обучающиеся предлагают)*

4. Изучение нового материала (стадия осмысления): (22мин)

Я предлагаю на этом этапе изучение нового материала в виде лекции-диалога.

1) Формулируется определение четной и нечетной функций *(записывается обучающимися в тетрадь)*

2) Что же такое симметричное множество? *(обучающиеся отвечают)*



3) Проверяются задания на доске. Как вы думаете, есть среди этих функций четные или нечетные? *(обучающиеся отвечают)*

4) Составляем алгоритм проверки функций на четность и на нечетность.

5) Чётность тригонометрических функций.

6) Решение примеров: определите вид функций:

Пример: определите вид функций:

ИНСТРУКЦИЯ К РЕШЕНИЮ

Для того чтобы выяснить четная или нечетная функция **необходимо:**

- найти область определения функции $D(f)$ (значения для x) и показать, что эта область симметрична относительно 0.
- найти $f(-x)$ и если: $f(-x) = f(x)$, то функция четная, а если $f(-x) = -f(x)$, то функция нечетная.

а) $f(x) = x^3 - \sin x + \operatorname{ctg} x$

б) $f(x) = 2x^4 - 10\cos x + 11x \operatorname{tg} x$

в) $f(x) = -x^2 + 2\cos x - \sin x$

ИНСТРУКЦИЯ К РЕШЕНИЮ

Для того чтобы выяснить четная или нечетная функция **необходимо:**

- найти область определения функции $D(f)$ (значения для x) и показать, что эта область симметрична относительно 0.

- найти $f(-x)$ и если: $f(-x) = f(x)$, то функция четная, а если $f(-x) = -f(x)$, то функция нечетная.

(обучающиеся решают, отвечают)

а) $f(x) = x^3 - \sin x + \operatorname{ctg} x$ - **нечётная**

б) $f(x) = 2x^4 - 10\cos x + 11x \operatorname{tg} x$ - **чётная**

в) $f(x) = -x^2 + 2\cos x - \sin x$ - **ни чётная, ни нечётная (т.е. общего вида)**

7) Посмотрите на графики тех функций, которые являются четными. Что вы заметили? (График четной функции симметричен относительно оси y)

- А что можно сказать о графике нечетной функции? (График нечетной функции симметричен относительно начала координат)

Вывод: при построении графиков четных функций используется осевая симметрия относительно оси ординат, а при построении графиков нечетной функции – центральная симметрия относительно точки начала координат.

5. Закрепление (3 мин)

В ходе изучения нового материала производим первичное закрепление при рассмотрении практических заданий по материалу изучаемой темы.

6. Проверка усвоения нового материала. (8 мин)

И в заключении мне бы хотелось обобщить полученную информацию. Для этого предлагаю вспомнить пройденный материал и ответить на следующие тестовые вопросы. *(обучающиеся решают, заполняют ответы в таблицу)*

Таблица для заполнения ответов (закрепление)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>ответ</i>									

Таблица (ответы)

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<i>ответ</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>1, a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	$(2x^6 + 12x^4) +$ $(11x^9 + 7x)$	$A_1(0;0)$ $B_1(2;-3)$ $C_1(4;2)$	$A_1(0;0)$ $B_1(4;-4)$ $C_1(6;2)$

7. Итоги урока. Рефлексия. (1 мин)

Подводя итоги урока, хотелось бы вспомнить, **какие** цели мы ставили в начале урока? Выполнили задуманное? (*обучающиеся отвечают*) Отлично, нам удалось выполнить цели урока, потому что вы были внимательны, сосредоточены и активны. За активную работу устно и у доски следующие учащиеся получили отметки:....

Сегодня мы с Вами проделали большую работу, познакомились с новыми понятиями и методами решения. Все сегодня хорошо поработали.

8. Домашнее задание. (2 мин)

Чаще всего функция выражается суммой, произведением или отношением двух и более чётных или нечётных функций или представляет собой сочетание нескольких чётных и нечётных функций. Как быстро доказать чётная функция или нечётная? Чтобы ответить на эти вопросы проведите дома исследование различных функций и сформулируйте правила, которые позволят нам сразу определять чётная функция или нечётная.

- сумма двух чётных функций –
- сумма двух нечётных функций –
- произведение двух нечётных функций -
- произведение двух чётных функций –
- отношение двух чётных функций -
- отношение двух нечётных функций -
- сумма нечётной и чётной функций -
- произведение нечётной и чётной функций -
- отношение нечётной и чётной функций -

Заключение

Функциональный метод решения уравнений, неравенств и их систем позволяет сделать более осмысленным их изучение. Свойства функции необходимо широко использовать при изучении уравнений и неравенств. От учащихся требуется во всякой конкретной задаче отвлечься от несущественных деталей и увидеть в ней общее функциональное содержание: найти реальные области изменения величин, выяснить характер их зависимости. Решение таких задач воспитывает умение схематизировать; развивает интуицию, логику мышления; прививает навыки дедуктивного мышления; развивает творческие исследовательские способности. Иначе говоря, способствует развитию математической культуры, играет большую роль для развития личности учащихся. Во временных рамках уроков полностью материал, связанный с решением уравнений и неравенств функциональным методом рассмотреть невозможно, поэтому есть смысл вынести его на курсы по выбору.

В результате исследования были решены следующие задачи:

1. Выполнен сравнительно-сопоставительный анализ программы и основных учебников, предусмотренные Федеральным перечнем учебников по математике для 5-11 классов, с точки зрения применения свойств функций при решении уравнений и неравенств.
2. Описан функциональный метод, его компоненты.
3. Решены уравнения, неравенства и их системы.

Гипотеза, выдвинутая в начале исследования о том, что умение применять необходимые свойства функций при решении уравнений и неравенств позволит учащимся выбирать наиболее рациональный способ решения получила положительные подтверждения. Опираясь на полученные положительные результаты, можно сделать вывод, что цель работы была достигнута.

Список литературы

1. Алилов М. А., Колягин Ю. М. и др. «Алгебра и начала анализа» Пробный учебник для 10-11 кл. средней школы. М. : «Просвещение» 2002.
2. Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И. «Лекции и задачи по элементарной математике» М. : Изд. «Наука» 1974.
3. Вавилов В. В., Мельников И. И. и др. «Задачи по математике. Уравнения и неравенства» М. : Изд. «Наука» 1987.
4. Груденов Я. И. «Совершенствование методики работы учителя математики» Книга для учащихся. М. : «Просвещение» 1988.
5. Гусев В. А., Мордович А. Г. «Математика. Справочные материалы» Книга для учащихся М. : «Просвещение» 1990.
6. Звавич Л. И. «Сборник задач по алгебре 8-9» Учебное пособие для учащихся школ с углубленным изучением математики
7. Кравцов С. В., Макаров Б. Н. и др. «Методы решения задач по алгебре» Экзамен «Оникс 21 век» М. : 2001.
8. Комигорова А. Н. «Алгебра и начала анализа 10-11» М. : «Просвещение» 1990.
9. Мишина В. И. «Методика преподавания математики в средней школе» Частная методика М. : «Просвещение» 1987.
10. Макарычева Ю. Н., Миндюк Н. Г. «Преподавание алгебры в 6-8 классах» М. : «Просвещение» 1980.
11. Теляковского С. Л. «Алгебра» учебник для 9 кл. общественных учреждений. М. : «Просвещение» 1995
12. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н. «Как научиться решать задачи» Книга для учащихся старших классов средней школы. М. : «Просвещение» 1987.

Приложение №1

Учебник	А.Г.Мордкович «Алгебра и начала анализа 10-11», учебник для общ еоб- разовательных учреждений [5],[6]	А.Г.Мордкович, П.В.Семенов «Алгебра и начала анализа 11», учебник для общеобразовател ьных учреждений (профильный уровень) [3]	С.М.Никольский и др. «Алгебра и начала анализа 11», учебник для общеобразовательных учреждений[2]	А.Н. Колмогоров и др. «Алгебра и начала анализа 11», учебник для общеобразовательных учреждений[4]	Ш.А. Алимов и др. «Алгебра и начала анализа 10- 11», учебник для общеобразователь ных учреждений[1]
Место в курсе	Глава 8 «Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств» (последняя тема курса)	Глава 6 «Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств» (последняя тема курса)	Глава II «Уравнения, неравенства, системы»	Нет отдельно выделенной темы. Но в теме «Решение тригонометрических уравнений и неравенств» формулируется теорема о корне, которая используется в дальнейшем изучении	Нет отдельно выделенной темы

Содержание темы	§56 Общие методы решения уравнений и неравенств ($f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$, функционально-графический метод: теорема о корне, ограниченность функции)	§27 Общие методы решения уравнений и неравенств ($f(\alpha(x)) = f(\beta(x))$, функционально-графический метод: теорема о корне, ограниченность функции)	Уравнения (неравенства) вида $f(\alpha(x)) = f(\beta(x)); f(\alpha(x)) > f(\beta(x))$ §12*Нестандартные методы решения уравнений и неравенств (использование областей существования функций, неотрицательности функций, ограниченности, использование свойств $\sin$ и $\cos$, использование производной)	Свойство монотонности функции, четности-нечетности (при выводе формул корней тригонометрических уравнений)	Упоминается свойство монотонности при разборе примера в теме «Показательная функция»
Примеры рассматриваемых уравнений и неравенств	$(\log_{0.2} \sqrt{5x-4} = \log_{0.2} x;$ $(x-1)^2 = \ln x);$ $\sin \frac{5\pi}{4} x = x^2 - 4x + 5$		$5\sqrt{-x^2+9x-14} - 2\sqrt[4]{x^2-5x-14} - 1 = \sin \frac{\pi x}{2}$ $x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0$ $\sqrt{x^2-5} + \sqrt{x^2-3} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3}$ $3 + \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - x + 1) = 3 \cdot \cos((x-1) \cdot \cos 2x) $ $\sqrt{x^2 - 8x + 15} + \lg(x^2 - 10x + 26) \leq 0$	Решить уравнение $x^3 + x = 2$. Сколько корней, принадлежащих данному промежутку, имеет уравнение $(x-3)^3 = -4; x \in [-2; +\infty)$?	Решить уравнение $3^x = 27$

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: заочная

Утверждаю: зав. кафедрой
« 05 » 10 2022 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Разживиной Екатерины Александровны

(ФИО полностью)

Тема работы «Функциональный подход к решению уравнений и неравенств в школьном курсе математики»

Утверждена приказом по Университету от « 27.12 » 2021 г. № 1056/0

Срок сдачи студентом законченной работы « 22 » 03 2022 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Анализ научной и учебно-методической литературы по теме исследования.	декабрь - январь 2021	Выполнено
2.	Изложение цели и места изучения функциональной линии в школьном курсе математики.	январь 2021	Выполнено
3.	Анализ линий изучения уравнений и неравенств в школьном курсе математики.	январь 2021	Выполнено
4.	Изучение решения разновидностей уравнений и неравенств с использованием функционального подхода.	февраль 2021	Выполнено
5.	Разработка элективного курса по данной теме.	март 2021	Выполнено
6.	Оформление текста работы.	апрель - май 2021	Выполнено
7.	Подготовка презентации и выступления.	июнь 2021	Выполнено

Дата выдачи задания « 05 » 10 2021 г.
 Руководитель Моф Можаева О.А.
 (подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению
Вал Рахимова Е.А.
 (подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского государственного
университета
А.Д. Гулякову
студентки 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения
Разживиной Екатерины
Александровны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Разживина Екатерина Александровна,
Ф.И.О. студента

студентка 5 курса заочной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Функциональный подход к решению уравнений и неравенств в школьном курсе математики» выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен (на) с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

kef-
подпись
24.06.22
дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 24.06.22
дд.мм.гггг

Руководитель ВКР Мож О.А. Мошахов
подпись И.О.Ф.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат. ВУЗ» выпускной квалификационной работы на тему «Функциональный подход к решению уравнений и неравенств в школьном курсе математики»

студентки 5 курса Екатерины Александровны Разживиной

И.О. Фамилия

направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

профиля «Математика»

Руководитель ВКР Оксана Александровна Монахова

И.О. Фамилия



Отчет о проверке на заимствования №1



Автор: Разживина Екатерина Александровна
Проверяющий: Монахова Оксана Александровна
Организация: Пензенский государственный университет
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» <http://www.antiplagiat.ru>

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

№ документа: 61
Начало загрузки: 24.06.2022 15:45:14
Длительность загрузки: 02:03:14
Имя исходного файла: Разживина
диплом.docx
Название документа: Разживина диплом
Размер текста: 123 кБ
Тип документа: Выпускная
квалификационная работа
Символов в тексте: 126057
Слов в тексте: 15930
Число предложений: 345

ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ

Начало проверки: 24.06.2022 16:43:28
Длительность проверки: 00:02:10
Комментарии: не указаны
Поиск с учетом редактирования: да
Модуль поиска: Переводные заимствования, СМБ России и СНГ, Переводные
заимствования издательства Wiley (Wiley), Издательства Wiley, Переводные
заимствования по eLIBRARY.RU (eLib), Переводные заимствования по Интернету
(eLib), Медицина, Интернет Поиск, Скользящая 360, Перефразирование по
eLIBRARY.RU, Скользящая 360, Перефразирование по Интернету, Библиотечка ИТС,
Адрес, Скользящая 360, Переводные заимствования (Wiley),
Диссертации ИБС, СПС ГАРАНТ, Патенты СССР, РФ, СНГ, eLIBRARY.RU, Цитирование,
шаблонные фразы, Модуль поиска "ITC"



ЗАИМСТВОВАНИЕ
14.79%

САМОЦИТИРОВАНИЕ
0%

ЦИТИРОВАНИЕ
0.03%

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ
84.32%

24.06.22

ДД.ММ.ГГГГ.

подпись

О.А. Монахова

И.О.Ф. руководителя ВКР

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему «Функциональный подход к решению уравнений и неравенств
школьном курсе математики»
студентки Разживиной Екатерины Александровны
факультета физико-математических и естественных наук направления
подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 173ФПМ51

Линия уравнений является важной содержательно-методической линией в курсе алгебры. Она богата по содержанию, по способам и приемам решения уравнений, по возможностям ее применения при изучении ряда других тем школьного курса алгебры. Это объясняется тем, что уравнения широко используются в различных разделах математики, в решении важных прикладных задач.

Линия уравнений тесно связана также и с функциональной линией. С одной стороны, линия уравнений помогает в аналитическом исследовании функции, с другой стороны, функциональная линия оказывает существенное влияние как на содержание линии уравнений, так и на стиль ее изучения. В частности, функциональные представления служат основой привлечения графической наглядности к решению и исследованию уравнений и их систем.

Цель представленной работы изучить нестандартные методы решения уравнений и неравенств, основанные на использовании свойств функции разработать элективный курс «Решение уравнений и неравенств с использованием свойств функций» достигнута.

Работа заслуживает оценки «хорошо» и может быть использована в учебном процессе учителем при обучении решению уравнений и неравенств с использованием свойств функций.

Руководитель ВКР:
Монахова Оксана Александровна,
кафедра «Математическое образование»
Педагогического института
им. В.Г. Белинского, ПГУ,
доцент, кандидат физико-математических наук

