

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования**

**«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль подготовки «Математика»

Форма обучения: заочная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

**«Методические материалы к изучению содержательной линии «Уравнения» в
курсе математики основной школы»**

Студент

Box 25.05.26
(подпись, дата)

Бажукина Е.Ч.
(фамилия, инициалы)

Руководитель

М - 25.05.26
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

М - 30.06.26
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 01.06.26 № 10)

И.о. заведующего кафедрой

М - 01.06.26
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично протокол заседания ГЭК от 08.07.26 № 5)

Секретарь ГЭК

М - 08.07.26
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2026

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
ГЛАВА I СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ.....	6
1.1 Роль и место линии «Уравнения» в школьном курсе математики	6
1.2 Сравнительный анализ рабочих программ по математике для 5-9 классов с целью выявления различий в изучении содержательной линии «Уравнения»	9
1.3 Типичные затруднения и ошибки учащихся при решении уравнений различных типов.....	15
ГЛАВА II РАЗРАБОТКА МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ К ИЗУЧЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ.....	26
2.1 Приёмы повышения мотивации обучающихся к изучению иррациональных уравнений.....	26
2.2. Общие методические рекомендации к изучению иррациональных уравнений.....	29
2.3 Дидактические разработки по теме «Иррациональные уравнения»	31
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	78
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	79
ПРИЛОЖЕНИЕ 1.....	82

ВВЕДЕНИЕ

Изучение математики играет системообразующую роль в образовании, развивая познавательные способности человека. Качественное математическое образование необходимо каждому для его успешной жизни в современном обществе. Действительно, практически любая сфера жизни общества не обходится без математических знаний.

Содержательно-методическая линия уравнений является одной из ведущих в школьном курсе математики. Она богата по содержанию, способам и приемам решения, возможностям применения. Ее последовательное освоение в 5-9 классах создает фундамент для дальнейшего изучения математики и смежных дисциплин, а также способствует развитию универсальных учебных действий, отвечающих требованиям Федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования. Образовательные программы по математике предусматривают систематизацию и обобщение различных методов и приемов решения уравнений.

Уравнения не только имеют важное теоретическое значение, но и служат чисто практическим целям. Овладевая способами их решения, мы находим ответы на различные вопросы из науки и техники. Центральное место здесь занимает усвоение принципа равносильности преобразований. Учащиеся впервые сталкиваются с необходимостью не просто производить вычисления, но и отслеживать логическую корректность каждого шага, различая равносильные преобразования и преобразования-следствия, требующие обязательной проверки или анализа условий, например, возведение в четную степень.

Вопросам решения определенных видов уравнений уделяется достаточно времени, однако современная образовательная практика выявляет устойчивые трудности учащихся в усвоении данной темы. Фрагментарность представления

методов решения, недостаточное внимание к принципам равносильности преобразований, недооценка роли пропедевтики и преемственности между этапами изучения приводят к поверхностным знаниям, типичным ошибкам и снижению мотивации.

Цель исследования: разработка и научно-методическое обоснование комплекса методических материалов, обеспечивающих эффективное, поэтапное и целостное изучение содержательной линии «Уравнения» в курсе математики основной школы.

Объект исследования: процесс обучения математике учащихся 5–9 классов.

Предмет исследования: методическая система формирования содержательно-методической линии уравнений в курсе математики 5-9 классов, включая теоретические основы, структуру, методы обучения и средства преодоления типичных затруднений учащихся.

Для реализации поставленной цели исследования были определены следующие **задачи исследования:**

1. Проанализировать учебно-методическую литературу и нормативные документы для определения места темы «Уравнения» в курсе основной школы;

2. Систематизировать типичные затруднения учащихся при решении линейных, квадратных, дробно-рациональных и иррациональных уравнений.

3. Разработать, теоретически обосновать комплекс методических материалов, обеспечивающих эффективное формирование умений и навыков в рамках содержательной линии иррациональных уравнений.

Новизна исследования состоит в создании целостной методической системы, обеспечивающей качественно новый уровень освоения

содержательной линии «Уравнения» за счет интеграции когнитивных, деятельностных и мотивационных компонентов обучения.

Теоретическая значимость исследования состоит в систематизации и углублении методов работы к изучению уравнений в школе; в обобщении и структуризации методов решения, включая нестандартные приемы.

Практическая значимость работы заключается в том, что разработанные дидактические материалы могут быть использованы учителями математики в практической работе для повышения эффективности преподавания темы.

Структура выпускной квалификационной работы состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы и приложения с разработанными методическими материалами.

ГЛАВА I СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

1.1 Роль и место линии «Уравнения» в школьном курсе математики

Линия уравнений является важной и обширной содержательно-методической линией школьного курса математики. Обычно в задачах требуется найти одну или несколько неизвестных, зная при этом результаты некоторых действий, произведенных над искомыми и данными величинами. Такие задачи сводятся к решению одного или системы нескольких уравнений, к нахождению искомого с помощью алгебраических действий над данными величинами.

Цели изучения буквенных выражений и преобразований-образовательная: формирование техники и культуры тождественных преобразований и умения ее использовать для решения других задач алгебры и ее приложений в арифметике и началах анализа. Воспитательная: осознание учащимися буквенного исчисления как формально-оперативного аппарата математики. Развивающая: развитие логического и алгоритмического мышления [1; 2].

Прикладная функция уравнений первоначально возникает как обобщение метода решения сюжетных задач арифметическим способом, а затем используется при решении текстовых задач, суть которых отражает реальные процессы окружающего мира и тесно связана с изучением многих предметов. Данный аспект линии уравнений во многом обеспечивает мотивацию изучения школьного курса математики в целом, отражает связь с линией сюжетных задач. При решении текстовых задач ведущим аппаратом является математическое моделирование, а одним из средств построения модели и разрешения проблемной ситуации в ее рамках – уравнения и их системы.

Теоретико-методологическая значимость данной линии раскрыта в двух аспектах:

1) выделение и изучение наиболее важных классов уравнений;

2) изучение обобщенных понятий, относящихся ко всей линии в целом, что позволяет сформировать обобщенный аппарат теории. Реализуя этот аспект, необходимо выделить общие понятия линии: неизвестное, равенство, уравнение, корень уравнения, неравенство, область или множество определения уравнений, система и совокупность уравнений; множество решений, равносильность, логическое следствие, общие и частные методы решения. Это направление указывает на связь с таким методологическим разделом, как «Элементы логики».

В 5-6 классах уравнения выступают как запись задачи на нахождение неизвестного компонента арифметического действия. На практике понятие уравнения может быть введено посредством выделения его в результате решения задач алгебраическим методом. В этом случае существенным является подход к понятию уравнения, при котором уравнение представляет косвенную форму задания некоторого неизвестного числа, имеющего в соответствии с сюжетом конкретную математическую интерпретацию. Учащиеся усваивают обратные операции как базовый прием и начинают формировать навыки составления уравнений по условию текстовой задачи. В старших классах это умение расширяться до работы с более сложными моделями, включая задачи из физики, экономики и других предметов [4; 8].

В 7 классе - системное начало алгебры: вводится определение линейного уравнения. При изучении этой темы педагогу необходимо напомнить школьникам о том, какую роль играет буква в алгебре и предложить для знакомства с понятием параметра задания, направленные на выражение одной переменной посредством другой. Здесь же появляется графическая

интерпретация решений, закрепляющая связь с координатной прямой[6]. При изучении темы линейных уравнений главная задача педагога сводится в том, чтобы обобщить и вспомнить ранее полученные знания по теме линейных уравнений с единственной переменной.

В курсе алгебры 8 класса изучение уравнений представляет собой одну из важнейших задач курса алгебры, в котором учащиеся овладевают умением решать ещё два основных вида уравнений – квадратные и дробно-рациональные.

В 9 классе осуществляется обобщение и выход за рамки элементарной алгебры: изучение иррациональных уравнений, уравнений с модулем и параметром требует освоения новых классов преобразований - возведение в степень, метода замены переменной и функционально-графического подхода [18].

Таблица 1 -Основные темы и навыки

Класс	Основные темы и навыки
5-6	Введение понятий уравнений, решение линейных уравнений, составление уравнений для решения текстовых задач.
7	Четкое определение уравнений, свойство уравнений, решение систем уравнений, графический метод.
8	Квадратные уравнения и неравенства, рациональные уравнения и неравенства.
9	Уравнения третьей и четвёртой степеней, системы уравнений с двумя переменными, уравнения с модулем и параметром.

Уметь решать уравнения и системы уравнений является фундаментом для изучения более сложных разделов математики в старших классах, таких как тригонометрия, показательные, логарифмические уравнения и в вузе[17].

В настоящее время выявлена проблема фрагментарности и недостаточной системности в изложении данной темы, приводящая к затруднениям обучающихся в освоении смежных математических понятий и методов[23].

Таким образом, важно понимать необходимость последовательного расширения представлений учащихся об уравнениях, соблюдения единой методической линии в различных определениях уравнений, активной работы по воспитанию культуры символики и графики, выработки системности знаний о классе уравнений и неравенств.

1.2 Сравнительный анализ рабочих программ по математике для 5-9 классов с целью выявления различий в изучении содержательной линии «Уравнения»

В 5-6 классах, согласно рабочей программе (на основе УМК Виленкина Н.Я., Жохова В.И. и др.) содержательная линия «Уравнения» носит пропедевтический характер[4]. Она еще не выделяется как самостоятельный раздел, но закладывает фундамент для систематического изучения в курсе алгебры основной школы 7-9 классы. Основная цель на данном этапе – подготовить учащихся к восприятию абстрактного алгебраического языка, сформировать первичные навыки работы с буквенными выражениями, равенствами и нахождения неизвестного компонента [8].

Линия реализуется через постепенное введение буквенной символики, решение простейших уравнений на основе правил нахождения неизвестных

компонентов арифметических действий, а также составление выражений и формул по условиям задач.

В 5-м классе уравнения решаются на множестве натуральных чисел. Как и в начальной школе - основной способ решения - на основании зависимости между результатами действий и их компонентами. Поэтому в 5-м классе рассматриваются 6 простейших видов уравнений: $a + x = b$; $a - x = b$; $x - a = b$; $x \cdot a = b$; $x : a = b$; $a : x = b$. Учащиеся опираются на взаимосвязь между компонентами сложения, вычитания, умножения и деления, что создаёт базу для последующего изучения [4]. При изучении деятельности обучающихся следует отметить, что к таким основным учебным действиям как описывать, распознавать, измерять, строить, формулировать, находить, в новой редакции ФГОС добавляются такие действия как исследовать, выполнять прикидку и оценку, конструировать математическое предложение, моделировать, критически оценивать.

В 6-м классе уравнения решаются на множествах Z и Q . Неизвестное может находиться в обеих частях уравнения. Появляются уравнения с модулем. Для обоснования возможности переноса членов уравнения из одной части в другую используются свойства противоположных чисел ($a + (-a) = 0$) и весы.

Отдельное место занимают формулы периметра и площади прямоугольника, квадрата, объема прямоугольного параллелепипеда и куба, и на их основе учатся вычислять неизвестную величину, что сводится к решению уравнений [8]. Наконец, важнейшим умением становится составление буквенных выражений и простейших уравнений по условию текстовых задач: ученики выделяют величины, записывают зависимости и решают полученные уравнения в рамках изученных видов.

К концу 6 класса учащиеся должны понимать смысл буквенных обозначений, находить значение буквенного выражения при заданных значениях букв, уверенно решать простейшие уравнения на основе правил

нахождения неизвестного компонента, составлять буквенные выражения и равенства по условию задачи, а также применять формулы для вычисления геометрических величин и находить неизвестную величину, входящую в формулу.

В 5-6 классах происходит переход к чистой математике: дети овладевают работой с абстрактными числами, вводятся новые виды чисел. На этом этапе формируется понятие переменной и даются первые знания о приёмах решения линейных уравнений, продолжается обучение решению текстовых задач, совершенствуются и обогащаются умения геометрических построений и измерений.

Линия уравнений является стержнем алгебраического материала школьного курса математики.

Обучение детей умению решать уравнения начинается уже в начальной школе. У учеников формируется понятие уравнения, как равенства с неизвестным числом, которое требуется найти. Используя правила нахождения неизвестных компонентов, дети учатся находить корни простейших уравнений. Свое дальнейшее развитие содержательно-методическая линия уравнений получает в 5-6 классах. Для организации учебной деятельности используются разнообразные формы: устные упражнения на нахождения неизвестного числа, самостоятельное составление выражений и уравнений по рисункам, схемам, таблицам, решение задач арифметическим и алгебраическим способом с их последующим сопоставлением, практические работы с формулами-вычисления, заполнения таблиц, а также применение цифровых ресурсов для тренировки и самоконтроля.

Проанализировав рабочую программу по алгебре для 7-9 классов базового и углубленного уровня изучения, можно сказать, что различия в изучении содержательной линии «Уравнения» являются одной из самых

показательных. Они отражают главную цель углубленного курса: формирование более абстрактного математического мышления, подготовка к решению нестандартных и олимпиадных задач, а также создание фундамента для изучения математического анализа в старшей школе[18].

Прежде всего, обращает на себя внимание разница в количестве часов, отводимых на изучение содержательной линии «Уравнения». В углубленном курсе время распределено таким образом, что позволяет, не спеша и всесторонне разобрать каждый вопрос. Например, в 7 классе базовый курс выделяет на уравнения и системы 20 часов, а углубленный 10 часов на линейные уравнения и еще 14 часов на системы линейных уравнений. В 8 классе разница становится еще заметнее: в базовом уровне на квадратные уравнения, системы и неравенства суммарно отведено около 40 часов, в то время в углубленном варианте только на неравенства отводится 20 часов, на квадратные уравнения-17 часов, на дробно-иррациональные-19 часов, а также не стоит забывать про блок по функциям и степеням, что в итоге превышает 70 часов. В 9 классе углубленная программа также демонстрирует большее количество часов на ключевые разделы, такие как квадратные неравенства - 15 часов, уравнения, неравенства и их системы 25 часов, по сравнению с базовым 14-16 часами на аналогичные темы.

Следующее важно различие касается теоретической базы. В базовой программе учащиеся знакомятся с основными понятиями: корень уравнения, равносильность, линейные и квадратные уравнения, простейшие системы. Углубленный курс существенно расширяет понятийный аппарат. Сюда включаются уравнения, содержащие знак модуля, уравнения с параметром, более строго рассматриваются вопросы равносильности и появления посторонних корней, вводится теорема Виета как полноценный инструмент для

анализа, а не просто как дополнительная формула. Это позволяет перейти от простого заучивания алгоритмов к осмысленному выбору стратегии решения.

Сложность уравнений, предлагаемых для решения, также отличается. Базовая программа ограничивается линейными, квадратными, простейшими дробно-рациональными и биквадратными уравнениями, а также системами, где одно уравнение линейное, а другое- второй степени.

Углубленный курс включает в себя все это, но добавляет качественно новые классы задач: уже в 7 классе появляются линейные уравнения с модулем, в 8 классе –квадратные уравнения с параметрами и уравнения, содержащие модуль, а в 9 классе –уравнения высшей степени (3-й и 4-й), которые решаются не только разложением на множители, но и методом замены переменной или графически, а также системы нелинейных уравнений повышенной сложности и уравнения в целых числах.

Методы решения, которыми должны овладеть учащиеся, в углубленном курсе также значительно разнообразнее. Если в базовой программе упор делается на стандартные приемы - формулы корней квадратного уравнения, метод подстановки и сложения для систем, простейшую замену переменной, - то углубленный курс учит применять более широкий арсенал. Методы равносильных преобразований, графический метод не только как иллюстрация, но и как способ исследования количества решений, метод интервалов, который в базе часто рассматривается позже и только для неравенств, методы замены переменной в нестандартных ситуациях и даже применений свойств функций, таких как монотонность и четность, для решения уравнений[21; 24].

Если проследить развитие линий по классам, то различия становятся еще более наглядными. В 7 классе углубленный курс сразу выходит за рамки простых алгоритмов, вводя тему «Уравнения с модулем» и делая акцент на уравнении, как математической модели реальной ситуации. Это закладывает

основы для последующего анализа. В 8 классе добавляется новый уровень сложности -квадратные уравнения с параметром и уравнения с модулем, что требует от ученика не просто вычислительных навыков, но и логического анализа, умения рассматривать различные случаи. Дробно-рациональные уравнения изучаются более глубоко, а блок неравенств становится фундаментальным, готовя почву для метода интервалов. В 7-8 классах межпредметная связь реализуется при изучении тем «Уравнения», «Системы уравнений», «Функции», «Степень с натуральным показателем», так как решаются задачи с физическим содержанием: на движение, выражение переменных из различных физических формул, таких величин, как плотность, масса, скорость, время и т.д.; с экономическим содержанием; с химическим содержанием.

Наконец, в 9 классе разрыв между программами достигает максимума. Углублённый курс фактически представляет собой введение в алгебру старшей школы: систематически изучаются методы решения уравнений высших степеней, подробно разбираются системы нелинейных уравнений[18; 25]. Базовый же курс в 9 классе в основном обобщает и систематизирует пройденное, готовя учащихся к сдаче ОГЭ, но не выходя за его рамки.

Таким образом, основные отличия углубленной программы по линии «Уравнения» заключаются в следующем: она дает значительно более глубокую теоретическую подготовку, расширяет круг решаемых задач за счет включения уравнений с модулем, параметром, высших степеней и уравнений в целых числах, а также учит применять разнообразные методы решения, делая упор не на алгоритмическое исполнение, а на анализ и выбор оптимальной стратегии. Это, в свою очередь, формирует у учащихся математическое мышление, необходимое для успешного продолжения образования в классах с углубленным изучением предмета и для решения задач повышенной сложности на экзаменах[6; 18].

Особое место линия уравнений занимает в подготовке к итоговой аттестации в форме ОГЭ. Согласно кодификатору, задания на решение уравнений различных типов входят как в первую, так и во вторую часть экзаменационной работы. Таким образом, владение методами решения уравнений является одним из ключевых факторов успешной сдачи экзамена.

1.3 Типичные затруднения и ошибки учащихся при решении уравнений различных типов

Как показывает практика, значительная часть учащихся испытывает устойчивые затруднения при решении уравнений. Анализ учебной деятельности в рамках содержательной линии «Уравнения» позволяет выявить устойчивый комплекс затруднений учащихся 5-9 классов.

Линейные уравнения.

1. Неверное раскрытие скобок: учащиеся могут неправильно распределять знаки при раскрытии скобок, например:

$$-(2x-3) \neq -2x-3 \text{ (правильно: } -2x+3\text{)}.$$

$$\text{Решение уравнения: } 5 - (2x-3) = 10$$

Неправильный шаг: $5 - 2x - 3 = 10$. Ученик умножил только $(2x)$ на (-1) , забыв про (-3) .

$$\text{Правильный шаг: } 5 - 2x + 3 = 10$$

$$8 - 2x = 10$$

2. Ошибка при переносе слагаемых: при переносе слагаемых через знак равно часто теряется знак

$$2x+5=11$$

$$2x=11+5 \text{ (правильно: } 2x=11-5\text{)}.$$

$$\text{Решение уравнения: } 5x=10 - 5x.$$

$$\text{Неправильный шаг: } 5x - 5x=10$$

$$0x=10$$

Ученик механически перенес $(5x)$ слева направо, не понимая, что действие должно быть примерно к обеим частям.

$$\text{Правильно шаг: К обеим частям прибавляем } 5x: 5x+5x=10-5x+5x$$

$$10x=10.$$

3. Некорректное деление: деление только одного элемента вместо всего выражения

$$6x+2=18$$

$$x=18:6=3 \text{ (нужно сначала перенести и упростить.)}$$

Неправильное нахождение неизвестного множителя.

$$\text{Пример: Решение уравнения } -3x=12$$

Неправильный шаг: $x=12+3$ или $x=\frac{12}{3}$. Путаница между действиями для нахождения неизвестного множителя и слагаемого.

$$\text{Правильно шаг: } x=12 : (-3)$$

$$x=-4.$$

4. Работа с дробями: неправильное сокращение или домножение.

$$x:3+2=5$$

$$x=3 \text{ (пропущено действие)}$$

5. Потеря корня или игнорирование множества решений: уравнение вида $0x=0$ иногда интерпретируется как «нет решений», хотя оно имеет бесконечное количество корней.[23]

Квадратные уравнения.

1.Вычислительные ошибки при работе с дискриминантом.

$$\text{Решение уравнения } 2x^2 - 5x - 3 = 0$$

Ошибка: Неверное вычисление дискриминанта: $D=(-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 - 24 = 1$. Потерян знак «минус» у свободного члена.

$$\text{Правильно: } D=(-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 25 + 24 = 49.$$

$$\text{Решение уравнения: } -x^2 + 6x - 8 = 0$$

Ошибка: учащиеся часто подставляют $a = -1$, $b = 6$, $c = -8$ в формулу, но теряют знаки при вычислении: $D=6^2 - 4 \times (-1) \times (-8) = 36 - 32 = 4$.

Стандартной рекомендацией является умножение обеих частей уравнения на (-1) для получения положительного старшего коэффициента:

$$x^2 - 6x + 8 = 0. \text{ Это снижает вероятность вычислительной ошибки.}$$

2.Ошибки в применении формулы корней.

$$\text{Уравнение } 3x - 2 + x^2 = 0$$

Ошибка: неправильное определение коэффициентов a , b , c при нестандартной записи.

Уравнение $3x^2 - 12x = 0$.

$3x^2 - 12x = 0$. Делим правую и левую часть на x .

$$3x - 12 = 0$$

$x = 4$, корень $x = 0$ утерян.

Правильный вариант решения: вынести за корень множитель x .

$$x(3x - 12) = 0$$

$x = 0$, $x = 4$.

3. Ошибки, связанные с теоремой Виета.

Неправильное применение теоремы к приведенному уравнению.

Для уравнения $2x^2 - 9x + 10 = 0$ учащиеся часто ошибочно пишут:

$x_1 + x_2 = 9$, $x_1 \times x_2 = 10$, забывая, что теорема Виета в общем виде:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$$

Правильный вариант: $x_1 + x_2 = \frac{9}{2}$, $x_1 \times x_2 = \frac{10}{2} = 5$

Ошибка: Попытка применения теоремы Виета к уравнению с дискриминантом $D < 0$.

Учащиеся могут пытаться подобрать целые корни для уравнения

$$x^2 + 2x + 5 = 0$$

хотя $D = -16 < 0$ и действительно корней нет. Это указывает на непонимание области применимости теоремы.

4. Логические ошибки при работе с неполными квадратными уравнениями.

$$\text{Уравнение } x^2 + 9 = 0$$

Ошибка: «Решение» уравнения, не имеющего действительных корней.

$$x^2 = -9$$

$$x = \sqrt{-9}$$

$$x=3.$$

Ученик извлекает квадратный корень, игнорируя условие неотрицательности подкоренного выражения на множестве действительных чисел.

$$x^2 = -9, \text{ действительных корней нет.}$$

$$\text{Уравнение } 4x^2 - 16 = 0.$$

$$\text{Ошибка: } 4x^2 = 16$$

$$x^2 = 4, x=2$$

$$\text{Потеря одного из корней в уравнении вида } ax^2 + c = 0 \text{ при } \frac{c}{a} < 0.$$

$$\text{Правильный вариант: } x^2 = 4, x = \pm 2.$$

5. Ошибки в интерпретации ответа и записи решения.

Ошибка: неупорядоченная запись корней. Например, для уравнения:

$x^2 - 5x + 6 = 0$ записать ответ $\{3; 2\}$ вместо $\{2; 3\}$ хотя формально это не ошибка, но показывает отсутствие системности.

В целом освоение темы «Квадратные уравнения» поднимает учащихся на качественно новую ступень овладения содержанием школьной математики.

Рациональные уравнения.

Главная особенность таких уравнений связана с областью допустимых значений: не каждое найденное решение будет подходить, поэтому важно не только правильно решить уравнение, но и проверить полученные корни. Найденные значения переменной должны не только обращать уравнение в верное равенство, но и входить в область допустимых значений.

Решение уравнений, не имеющего смысла.

Рассмотрим уравнение $\frac{1}{x-2} = \frac{2}{x-2}$.

Неверный путь: приведя к общему знаменателю, ученики получают $1=2$ и делают вывод «корней нет». Однако, конкретное решение начинается с нахождения ОДЗ: $x \neq 2$. Только после этого, умножая на $(x-2)$, получаем $1=2$. Так как это неверное равенство, а $x \neq 2$, делаем вывод: корней нет.

В данном примере формально ответ совпал, но логика нарушена.

Более показательный пример: $\frac{x-1}{x-3} = \frac{-4}{x-3}$. ОДЗ: $x \neq 3$. Умножив на $(x-3)$, получаем $x - 1 = -4$, следовательно, $x = -3$. Корень $x = -3$ не входит в ОДЗ, значит, он посторонний, и уравнение не имеет решений. Без этапа ОДЗ учащийся запишет неверный ответ.

2. Неправильное приведение к общему знаменателю и ошибки в арифметике дробей. Например, в уравнении $\frac{1}{x+2} + \frac{3}{x-2} = \frac{4}{x^2-4}$ общим

знаменателем является $(x+2)(x-2)$ или $x^2 - 4$. Ошибочным является знаменатель $(x+2)(x-2)(x^2 - 4)$.

3. Некорректное применение свойства дроби и «перекрестного умножения». Учащиеся ошибочно применяют правило «крест –накрест» к уравнению вида $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$. Это недопустимо. Правильный путь- приведение всех слагаемых к общему знаменателю.

Незаконное «сокращение» знаменателей без учета нулевых значений. Уравнение $\frac{x^2-9}{x-3} = 1$. Учащийся видит, что $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$, сокращает на $(x-3)$ и решает $x+3=1$, следовательно $x = -2$. Хотя ответ верен, ход решения логически неверный, так как операция сокращения допустима только при условии $x-3 \neq 0$. Без этого условия возможно сокращение корня $x=3$, если бы он получился в ходе решения. Правильно: перенести 1 влево, привести к общему знаменателю:

$$\frac{(x^2-9)-(x-3)}{x-3} = 0$$

$$\frac{x^2-x-6}{x-3} = 0$$

Далее находим ОДЗ ($x \neq 3$) и решаем $x^2 - x - 6 = 0$, получая корни $x = -2$ и $x = 3$. Корень $x = 3$ исключаем по ОДЗ.

Зачастую ученик проверяет корни не подстановкой в исходное уравнение, а в промежуточное. Это не выявляет ошибок, допущенное на этапе приведения к общему знаменателю. Проверка должна осуществляться только подставкой в исходное уравнение.

Для профилактики ошибок необходимо жесткое внедрение алгоритма, первым шагом которого является нахождения ОДЗ. Оно должно быть записано

явно. Отказ от неформального «сокращения» знаменателей - целесообразно требовать переноса всех слагаемых в одну сторону и приведения к виду:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0.$$

Условие $A(x) = 0$ решается совместно с условием $B(x) \neq 0$.

Иррациональные уравнения.

Главная сложность таких уравнений заключается в том, что недостаточно просто выполнить алгебраические действия и найти корни. Нужно учитывать ограничения, связанные со знаком подкоренного выражения, и внимательно проверять, какие значения действительно подходят. Типичные ошибки здесь носят наиболее системный и концептуальный характер [21].

1. Игнорирование области определения уравнения (ОДЗ) или ее некорректное нахождение.

Уравнение $\sqrt{x-5} = 2-x$. Учащийся сразу возводит в квадрат:

$x-5 = (2-x)^2$, решает полученное квадратное уравнение и находит корни $x_1 = 1, x_2 = 3$.

Но необходимо изначально наложить два условия:

1) ОДЗ (условие существования корня): $x-5 \geq 0 \rightarrow x \geq 5$;

2) Условие неотрицательности правой части (так как арифметический корень $\sqrt{x-5} \geq 0$): $2-x \geq 0 \rightarrow x \leq 2$.

Система $\begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 2 \end{cases}$ не имеет решений, следовательно, исходное уравнение не имеет корней еще до этапа возведения в квадрат. Учащийся, пропустивший этот анализ, выполнит лишнюю работу и может получить посторонние корни.

2. Отсутствие проверки полученных корней или ее формальное выполнение.

Классическое уравнение $\sqrt{2x+3} = x$. Возводя в квадрат, ученик получает:

$$2x + 3 = x^2,$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0,$$

$$x_1 = -1, x_2 = 3.$$

Учащийся записывает оба корня в ответ, забыв при этом выполнить проверку подстановкой корней в исходное уравнение.

$$\text{Подставим } x = -1: \sqrt{2 \times (-1)} = \sqrt{1} = 1.$$

$$\text{Подставим } x = 3: \sqrt{2 \times 3} = \sqrt{9} = 3, \text{ правая часть равна 3. Корень верный.}$$

3. Некорректное возведение в квадрат сложных выражений.

Учащиеся часто возводят в квадрат каждое слагаемое отдельно, забывая формулу квадрата суммы/разности.

При решении уравнения вида $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-2} = 3$, учащиеся решают так:

$$(\sqrt{x+1})^2 + (\sqrt{x-2})^2 = 3^2$$

$$x + 1 + x - 2 = 9$$

Правильно: Нужно сначала изолировать один из радикалов, а затем возводить в квадрат: $\sqrt{x+1} = 3 - \sqrt{x-2}$. Теперь возводим в квадрат всю левую и всю правую часть, получаем $x + 1 = 9 - 6\sqrt{x-2} + (x + 2)$.

4. Нарушение логики последовательного освобождения от радикалов.

В уравнениях с несколькими радикалами ошибкой является возведение в квадрат суммы радикалов без предварительного их разделения.

Уравнение $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-1} = 4$. Учащиеся приводят его к уравнению $(\sqrt{x+5} + \sqrt{x-1})^2 = 4^2$, где остался смешанный радикал $2\sqrt{(x+5)(x-1)}$. Это корректный шаг, но часто после этого учащиеся допускают арифметические ошибки или снова неправильно возводят в квадрат.

Рекомендованный метод: изолировать один радикал: $\sqrt{x+5} = 4 - \sqrt{x-1}$.

Далее возвести в квадрат, получить линейное уравнение относительно оставшегося радикала, снова его изолировать и возвести в квадрат. Ключевое правило: возводить в квадрат нужно только тогда, когда в одной части уравнения находится единственный радикал.

5. Механическое «сокращение» на общий множитель, содержащий радикал.

Уравнение $x\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x+1}$. Учащийся сокращает на $\sqrt{x+1}$, что приводит к $x=2$. Потерян корень, который получается при $\sqrt{x+1} = 0$, т.е. $x = -1$.

Правильно: перенести все в одну сторону и вынести общий множитель: $\sqrt{(x+1)} \times (x-2) = 0$. Отсюда, $\sqrt{x+1} = 0$, $x = -1$ или $x-2=0$, $x=2$ (с проверкой). Оба корня удовлетворяют уравнению.

Большинство ошибок напрямую не связаны с наличием или отсутствием знаний, хотя доведение некоторых вычислительных операций до автоматизма несколько снижает вероятность их появления.

Самостоятельная работа учащихся над ошибками оказывает благоприятное влияние на качество получаемых знаний и стимулирует развитие логического мышления. Для исправления и предупреждения многих ошибок важно сформировать у школьников навыки самоконтроля. Каждый учитель знает, что планомерное и систематическое повторение и есть основной помощник в ликвидации пробелов, а, следовательно, и ошибок.

ГЛАВА II РАЗРАБОТКА МЕТОДИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ К ИЗУЧЕНИЮ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

2.1 Приёмы повышения мотивации обучающихся к изучению иррациональных уравнений

Мотивация – важнейший компонент структуры учебной деятельности, а для личности выработанная внутренняя мотивация есть основной критерий ее сформированности. Он заключается в том, что ребенок получает «удовольствие от самой деятельности, значимости для личности непосредственного ее результата» (Б.И. Додонов).

Формирование устойчивой познавательной мотивации при освоении темы «Иррациональные уравнения» требует реализации системного дидактического подхода[20]. Формирование у учеников мотивов, придающих дальнейшей учебе ребенка значимый для него смысл, в свете которого его собственная учебная деятельность становилась бы для него сама по себе жизненно важной целью, является крайне необходимым, без чего дальнейшая учеба школьника может оказаться просто невозможной. Надеяться на то, что такие мотивы возникнут сами по себе не приходится. Поэтому важно обеспечить такое ее формирование, которое поддерживало бы эффективную и плодотворную учебную деятельность каждого ученика на протяжении всех лет его пребывания в школе, и было бы основой для его самообучения и самосовершенствования в будущем.

Ключевой принцип обучения-помещать материал в реальный контекст. Этот прием заключается в том, что учитель обсуждает с учащимися хорошо знакомые им ситуации, понимание сути которых можно лишь при условии изучения предлагаемого материала. Необходимо только, чтобы ситуация действительно была жизненной, а не надуманной. Так ученики

перестают воспринимать тему как абстрактную и видят, зачем нужны изучаемые инструменты [17]. Вместе с тем из-за инертности образования сегодня широко распространено предоставление уже готовых знаний с опорой в большей степени на память обучаемых. Современные подходы к образовательному процессу диктуют необходимость внедрения форм обучения, которые максимально способствовали бы активизации познавательной деятельности учащихся, поскольку необходимо не простое овладение определенным перечнем навыков и умений, а воспитание индивида, способного к самостоятельному усваиванию новой информации, его интеллектуальное развитие, а также формирование ключевых компетентностей.

Важнейшую роль играет визуально-графическая поддержка, реализуемая через параллельное использование аналитического и функционально-графического методов. Построение графиков функций, входящих в уравнение, обеспечивает наглядную интерпретацию понятий «корень» и «посторонний корень», а применение динамических математических сред, например, GeoGebra позволяет организовать интерактивное исследование зависимости множества решений от параметров, переводя учащихся в позицию активного экспериментатора. В целях активизации учебно-познавательной деятельности целесообразно применять элементы геймификации и коллективно-распределённой работы, например, в формате командного турнира с взаимной проверкой решений и составлением алгоритмических предписаний, что формирует ответственность за обоснованность каждого преобразования [14].

Мотивационное обеспечение изучения иррациональных уравнений основывается на интеграции контекстного, проблемного, визуального, деятельностного и личностно-ориентированного подходов, переводящих учащегося из пассивного реципиента алгоритмов в субъекта исследовательской деятельности [13].

Эффективным инструментом является контекстно-моделирующий модуль, представляющий собой тематический блок задач, объединённых единой практической ситуацией. В рамках модуля последовательно решаются задачи на составление и решение иррациональных уравнений: расчёт минимального расстояния с учётом препятствий, определение размеров участка по заданному периметру и площади, моделирование траектории. Это формирует целостное восприятие темы как инструмента для решения комплексных прикладных проблем.

Важным дополнением выступает метод представления алгоритма в наглядной, удобной для восприятия форме, который учитывает когнитивные возможности обучающихся. Учащимся предлагается работать с интерактивными опорными схемами-конструкторами. Собирая алгоритм решения для конкретного уравнения, ученик совершает осознанный выбор и выстраивает логическую цепь, что развивает метапредметные навыки структурирования деятельности и рефлексии.

Для фазы закрепления целесообразно внедрение дифференцированных диагностических карт с обратной связью. Карта содержит задания трёх уровней: 1) применение алгоритма к стандартной ситуации, 2-3) самостоятельное составление уравнения по заданным свойствам корней. После выполнения система указывает на тип потенциальной ошибки, отсылая к соответствующему разделу теоретического справочника, реализуя тем самым индивидуальную траекторию коррекции знаний.

Наконец, мощным мотивационным ресурсом является организация мини-проектной деятельности исследовательского характера. Учащимся предлагается, используя графические онлайн-калькуляторы или среды программирования, исследовать вопрос: «При каких условиях уравнение вида $\sqrt{ax + b} = cx + d$ имеет единственный корень, не имеет корней, имеет два

корня?». Результатом становится созданная визуальная модель, наглядно демонстрирующая зависимость числа решений от коэффициентов.

Таким образом, системное применение комплекса специализированных дидактических инструментов, интерактивных алгоритмических конструкторов, дифференцированных диагностических карт с аналитической обратной связью и элементов учебного исследования - позволяет трансформировать процесс изучения иррациональных уравнений из рутинного усвоения алгоритмов в мотивированную познавательную деятельность, направленную на формирование знаний и исследовательских компетенций.

2.2. Общие методические рекомендации к изучению иррациональных уравнений

Изучение иррациональных уравнений в рамках основной школы представляет собой логически завершающий и концептуально важный этап в развитии содержательной линии «Уравнения» [21]. Основная идея решения иррационального уравнения состоит в сведении его к рациональному алгебраическому уравнению, которое либо равносильно исходному иррациональному уравнению, либо является его следствием. При решении иррациональных уравнений применяют метод возведения в степень обеих частей уравнения и метод введения новой переменной. Иногда удобнее решать иррациональные уравнения, определив область допустимых значений и используя равносильные переходы.

Ключевой дидактической задачей становится усвоение принципа равносильности преобразований, а также развитие исследовательской компетенции через анализ условий существования решений [9].

Разработка эффективного комплекса заданий по иррациональным уравнениям требует системного подхода, основанного на интеграции

дидактических, психологических и предметно-методических принципов [12]. Комплекс должен представлять собой дидактически целостную систему, направленную на последовательное формирование понятий, методов и метапредметных умений, а не набор разрозненных упражнений. Его построение необходимо начинать с принципа преемственности и актуализации опорных знаний [7]. Центральным должен стать принцип приоритета содержательного понимания над формальным алгоритмом, согласно которому введение темы осуществляется через проблемные ситуации и задания-исследования, направленные на осознание ограничений и условий существования решений, а не на механическое применение формул.

Следующим этапом является реализация принципа последовательного наращивания сложности и вариативности, предусматривающего структурирование материала по уровням: от формирования базового алгоритма для простейших уравнений через освоение метода возведения в квадрат с составлением равносильных систем к решению задач с несколькими радикалами, а затем к углублённым заданиям, включающим метод замены, анализ монотонности и работу с параметрами [18].

Для учёта индивидуальных особенностей учащихся в комплекс должен быть заложен принцип дифференциации и индивидуализации, обеспечивающий наличие заданий обязательного минимума с опорными подсказками, упражнений повышенной сложности [17]. Дифференциация обучения направлена на решение двух задач: формирования у всех обучающихся базовой математической подготовки, составляющей функциональную основу общего образования, и одновременного создания условий, способствующих получению частью обучающихся подготовки повышенного уровня, достаточной для активного использования математики во время дальнейшего обучения, прежде всего при изучении её в средней школе на профильном уровне. Завершающим элементом системы является принцип формирования контрольно-оценочной самостоятельности, реализуемый через

снабжение комплекса инструментами для самоконтроля и рефлексии, например, чек-листами ключевых этапов решения.

Таким образом, грамотно составленный комплекс выступает как многофункциональный методический инструмент, обеспечивающий не только освоение конкретной темы, но и систематизацию алгебраического аппарата, развитие логического мышления и исследовательской культуры учащихся основной школы[22].

2.3 Дидактические разработки по теме «Иррациональные уравнения»

Дидактические разработки по теме «Иррациональные уравнения» структурированы и разделены на 6 модулей. Каждый модуль может быть использован учителем на уроках алгебры 8-9 классов при изучении Иррациональных уравнений, начиная с базового уровня и заканчивая подготовкой к поступлению в профильные классы. Материалы могут быть адаптированы для работы в классе на уроках, на факультативах, в группах взаимопомощи и для самостоятельного повторения.

Модуль 1 «Вспоминаем важное» предназначен для учащихся 8–9 классов и служит отправной точкой при изучении темы «Иррациональные уравнения». Его главная цель –сформировать устойчивую теоретическую базу: чёткое понимание, что такое арифметический квадратный корень, почему он не может быть отрицательным, как правильно находить область допустимых значений и зачем нужна проверка. Модуль особенно полезен на начальном этапе знакомства с темой, а также при повторении перед ОГЭ. Он позволяет организовать плавный переход от теории к практике, минимизируя типичные ошибки. Использовать модуль можно на этапе актуализации знаний, на этапе тренировки и на этапе первичного закрепления или самостоятельной работы. Структура модуля помогает учителю гибко компоновать его элементы:

например, теоретическую часть дать в качестве экспресс-опроса в начале урока, задание на ОДЗ использовать для парной работы в середине урока, а карточку №1 применить как самостоятельную работу на 15–20 минут, в том числе для дифференцированного зачёта – слабые ученики получают именно её, а сильные переходят к карточкам №2 и №3. Благодаря наличию памятки и перечня «ловушек» у каждого ученика, модуль эффективно работает и в режиме взаимопроверки, и для самоконтроля.

Модуль 1. Вспоминаем важное

Прежде чем решать иррациональные уравнения, давай убедимся, что мы твердо знаем, что такое арифметический квадратный корень.

Теоретическая часть (заполните пропуски)

1. Уравнение, содержащее переменную под знаком _____, называется иррациональным.

2. Арифметический квадратный корень $\sqrt{a}$ определен только при $a \geq 0$ и сам принимает только _____ значения.

3. При решении уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$ необходимо учитывать два условия:

-Условие существования корня (ОДЗ): _____ ≥ 0 .

-Условие неотрицательности правой части:

Так как $\sqrt{f(x)} \geq 0$, то и _____ ≥ 0 .

4. Стандартный метод решения- возведение обеих частей в квадрат. Важно помнить, что это преобразование не всегда равносильно. Исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) = (g(x))^2 \\ \text{_____} \geq 0 \end{cases}$$

5. Обязательным завершающим этапом является _____ найденных корней подстановкой в _____ уравнение. Это позволяет посторонние корни.

Задание 1.1. (Устный опрос – письменно)

Закончи предложения:

1. $\sqrt{25} = \underline{\hspace{2cm}}$, потому что $\underline{\hspace{2cm}}$ и $\underline{\hspace{2cm}}$.
2. Выражение $\sqrt{-4}$ не имеет смысла, так как $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. Уравнение $\sqrt{x} = -3$ не имеет решений, потому что $\underline{\hspace{2cm}}$.

Задание 1.2. (Область определения)

Найди область допустимых значений (ОДЗ) переменной в выражениях:

1. $\sqrt{2x-6}$ ОДЗ: $\underline{\hspace{4cm}}$
2. $\sqrt{5-x}$ ОДЗ: $\underline{\hspace{4cm}}$
3. $\sqrt{x^2+1}$ ОДЗ: $\underline{\hspace{4cm}}$ (объясни, почему так)
4. $\frac{1}{\sqrt{x}}$ ОДЗ: $\underline{\hspace{4cm}}$

Карточка №1. 8-9 класс. Базовый уровень (на оценку «3»)

Тема: Простейшие иррациональные уравнения. Начальные навыки.

Цель: Проверка умения решать уравнения вида $\sqrt{f(x)} = a$ и простейшие уравнения с проверкой. Карточка решается с использованием памятки (рис.1).



Рисунок 1- Карточка-подсказка

На обратной стороне памятки расположены «Ловушки» с возможными ошибками.

«Ловушка №1»: Не забыл ли я проверить, что правая часть ($g(x)$) неотрицательна? Если $g(x) < 0$, ответа нет сразу!

«Ловушка №2»: После возведения в квадрат могли появиться посторонние корни. Проверка обязательна!

«Ловушка №3»: Если в уравнении несколько радикалов, сначала уедини один из них, прежде чем возводить в квадрат.

«Совет»: Для уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$ можно использовать равносильную систему:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) = \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^2. \end{cases}$$

Аккуратное возведение в четную степень уравнения вида $\sqrt{A(x)} = B(x)$ состоит в *переходе к равносильной ему системе*:

$$\sqrt{A(x)} = B(x) \Leftrightarrow \begin{cases} A(x) = B^2(x), \\ B(x) \geq 0. \end{cases}$$

Неравенство $B(x) \geq 0$ в этой системе выражает условие, при котором уравнение можно возводить в четную степень, отсекает посторонние решения и позволяет обходиться без проверки.

Пример: Решить уравнение $\sqrt{-3x+3} = x-1$.

Решение. Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 3-3x = (x-1)^2, \\ x-1 \geq 0. \end{cases}$$

Решая первое уравнение этой системы, равносильное уравнению $x^2 + x - 2 = 0$, получим корни $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$.

Второй корень не удовлетворяет неравенству системы и, следовательно, является посторонним корнем исходного уравнения.

Ответ. $x = 1$.

Пример для решения. Решить уравнение $\sqrt{5 - 4x} = 2x + 5$.

Решение. Возведем обе части этого уравнения в квадрат $(\sqrt{5 - 4x})^2 = (2x + 5)^2$ и получим $5 - 4x = 4x^2 + 20x + 25 \Leftrightarrow 4x^2 + 24x + 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 5 = 0$, откуда следует, что $x = -5$ или $x = -1$.

Проверка. $x = -5$: $\sqrt{5 - 4 \cdot (-5)} = 2 \cdot (-5) + 5 \Leftrightarrow \sqrt{25} = -5$. Это неверное числовое равенство, значит, число -5 не является корнем данного уравнения.

$x = -1$: $\sqrt{5 - 4 \cdot (-1)} = 2 \cdot (-1) + 5 \Leftrightarrow \sqrt{9} = 3$. Это верное числовое равенство, значит, число -1 является корнем данного уравнения.

Ответ. $x = -1$.

Вариант 1.

а) $\sqrt{x} = 6$

б) $\sqrt{x - 4} = 0$

в) $\sqrt{3x + 1} = 5$

г) $\sqrt{2x - 1} = x - 2$

Выполни проверку корней.

Вариант 2.

а) $\sqrt{x} = 8$

б) $\sqrt{2x + 6} = 0$

в) $\sqrt{4x - 3} = 7$

г) $\sqrt{3x + 4} = x$

Выполни проверку корней.

Модуль 2 «Простейшие иррациональные уравнения» предназначен для учащихся 9 класса и является логическим продолжением Модуля 1. Главная цель модуля – выработать у ученика устойчивый навык: прежде чем возводить в квадрат, всегда проверять знак правой части и обязательно выполнять проверку корней подстановкой или использовать равносильную систему. Модуль активно борется с типичными ошибками, которые возникают, когда ученики механически возводят в квадрат и получают посторонние корни, не задумываясь об исходных ограничениях.

Структура модуля включает три ключевых элемента. Первый – задание 2.1, где на трёх простых примерах отрабатывается правило для уравнений с числом в правой части; второй пример показывает, что корень может быть равен нулю, третий – что отрицательное число в правой части сразу даёт ответ «нет решений». Второй элемент – задание 2.2 «Анализируем ошибку» содержит два разобранных примера с типичными ученическими ошибками. Здесь учащиеся выступают в роли эксперта: проверяют каждый корень подстановкой, объясняют, почему корень стал посторонним, и затем записывают правильное решение через равносильную систему. Такая работа формирует критическое мышление и осознанное отношение к каждому шагу. Третий элемент – Карточка №2 предназначена для базового уровня (подготовка к ОГЭ) и может использоваться как для самостоятельной работы в классе, так и для домашнего задания. Особое место в модуле занимает «Математический дневник» – специальный бланк на разворот, где ученик фиксирует не только решение, но и анализ типа уравнения, ОДЗ, условие на правую часть, рефлекссию. Дневник ведётся регулярно и приучает к осознанному выполнению алгоритма. Использовать модуль 2 на уроке можно на этапе актуализации – быстрое решение уравнений из задания 2.1 устно или письменно; на этапе отработки и

закрепления – задание 2.2 в парах, на этапе самостоятельной работы – Карточка №2 с обязательным заполнением математического дневника. Учитель может дифференцировать нагрузку: слабым учащимся предложить только первые три уравнения из карточки, сильным – все четыре, а также дополнить дневник пунктом «Совет самому себе». Модуль 2 рассчитан на 1–2 спаренных урока или на 2–3 обычных занятия, он идеально вписывается в систему подготовки к ОГЭ, так как именно уравнения с корнями часто встречаются в задании №20. В результате использования модуля ученики перестают «терять» условия, учатся проверять корни и приобретают привычку действовать по алгоритму.

Модуль 2. Простейшие иррациональные уравнения

Уравнения вида $\sqrt{f(x)} = a$, где a - число.

Правило:

- если $a < 0$, то уравнение не имеет решений (корень не может быть отрицательным).

- если $a \geq 0$, то возводим обе части в квадрат: $f(x) = a^2$. Затем решаем полученное уравнение и обязательно делаем проверку, подставляя корни в исходное уравнение (или проверяем, что они входят в ОДЗ).

Задание 2.1. Реши уравнения:

1. $\sqrt{x-1} = 2$

Решение:

$$x-1=4$$

$$x=5$$

Проверка: $\sqrt{5-1} = 2$

$$\sqrt{4} = 2 \text{ - верно.}$$

Ответ: $x=5$.

2. $\sqrt{2x+3} = 0$

Решение: _____

3. $\sqrt{5-x} = -1$

Решение: _____

Уравнение вида $\sqrt{f(x)} = g(x)$, где $g(x)$ – выражение с переменной.

Здесь самое главное – не забыть про условие: правая часть должна быть неотрицательной, ведь левая часть (корень) всегда ≥ 0 .

Задание 2.2. Анализируем ошибку

Пример 1. Ученик решал уравнение $\sqrt{2x+1} = x-1$

1. Возвел в квадрат: $2x+1=(x-1)^2$
2. Раскрыл скобки: $2x+1=x^2-2x+1$
3. Получил: $0=x^2-4$
4. Решил: $x(x-4)=0$, следовательно, $x=4$, $x=0$.
5. Записал ответ $x=0$; 4 .

Твоя задача:

1. Проверь каждый корень подстановкой:

$x=0$: _____ - верно/неверно

$x=4$: _____ - верно/неверно

2. Почему корень $x=$ __ оказался посторонним? Чего не учел ученик?

Ответ: _____

3. Запиши правильно решение, начав с условия $x-1 \geq 0$ ($x \geq 1$).

Правильное решение:

Уравнение $\sqrt{2x+1} = x-1$ равносильно системе:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 2x+1 = (x-1)^2 \end{cases}$$

Решая второе уравнение, необходимо учесть первое условие $x \geq 1$.

Ответ: $x=4$.

Пример 2. Ученик решал уравнение $\sqrt{4x+5} = x$

1. Возвел в квадрат: $4x+5=x^2$
2. Получил: $x^2-4x-5=0$
3. Решил: $(x-5)(x+1)=0$, следовательно, $x=5$, $x=-1$
5. Записал ответ $x=-1$; 5 .

Твоя задача:

1. Проверь каждый корень подстановкой:

$x = -1$: _____ - верно/неверно

$x = 5$: _____ - верно/неверно

2. Почему корень $x = \underline{\hspace{1cm}}$ оказался посторонним? Чего не учел ученик?

Ответ: _____

3. Запиши правильно решение, начав с условия $x \geq 0$.

Правильное решение:

Уравнение $\sqrt{4x + 5} = x$ равносильно системе:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 4x + 5 = x^2 \end{cases}$$

Решая второе уравнение, необходимо учесть первое условие $x \geq 0$.

Карточка №2. 9 класс. Базовый уровень (повторение, подготовка к ОГЭ)

Тема: Разные методы решения иррациональных уравнений.

Цель: Проверка умения применять различные приемы: возведение в квадрат, замена переменной.

Пример для решения: Решить уравнение $\sqrt{3x^2 - x - 2} = x - 1$.

Решение. После возведения в квадрат получаем уравнение $3x^2 - x - 2 = (x - 1)^2 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 3 = 0$, откуда следует что $x = 1$ или $x = -\frac{3}{2}$.

Проверка. $x = 1$: $\sqrt{3 \cdot 1^2 - 1 - 2} = 1 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{0} = 0$. Это верное числовое равенство, значит, число 1 является корнем данного уравнения.

$x = -\frac{3}{2}$: $\sqrt{3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right) - 2} = -\frac{3}{2} - 1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{5}{2}$. Это неверное

числовое равенство, значит, число $-\frac{3}{2}$ не является корнем данного уравнения.

Ответ. $x = 1$.

Вариант 1.

а) $\sqrt{3x-2} = 4$

Шаг 1. Находим ОДЗ (подкоренное выражение неотрицательно):

$$3x-2 \geq 0$$

$$3x \geq 2$$

$$x \geq \frac{2}{3}$$

Шаг 2. Возводим обе части в квадрат (обе части неотрицательны):

$$(\sqrt{3x-2})^2 = 4^2$$

$$3x - 2 = 16$$

Шаг 3. Решаем линейное уравнение:

$$3x = 16 + 2$$

$$x = 6.$$

Шаг 4. Проверяем, удовлетворяет ли корень ОДЗ:

$$6 \geq \frac{2}{3} \text{ верно}$$

Ответ: $x=6$.

б) $\sqrt{x^2-16} = 3$

Шаг 1. Находим ОДЗ (подкоренное выражение неотрицательно):

$$x^2 - 16 \geq 0$$

$$(x-4)(x+4) \geq 0$$

Решаем методом интервалов: $x \leq -4$ или $x \geq 4$

Шаг 2. Возводим обе части в квадрат (обе части неотрицательны):

$$(\sqrt{x^2-16})^2 = 3^2$$

$$x^2 - 16 = 9$$

Шаг 3. Решаем линейное уравнение:

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5.$$

Шаг 4. Проверяем, удовлетворяет ли корень ОДЗ:

$$6 \geq \frac{2}{3} \text{ верно}$$

Ответ: $x=6$.

$$\text{в) } x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$$

Шаг 1. Вводим переменную:

Замечаем, что $x = (\sqrt{x})^2$, пусть $t = \sqrt{x}, t \geq 0$.

Шаг 2. Подставляем в уравнение:

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

Шаг 3. Решаем квадратное уравнение:

$$D = 1, t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

Шаг 4. Возвращаемся к $x=t^2$:

$$x_1 = 2^2 = 4, x_2 = 3^2 = 9$$

Ответ: $x=4;9$

$$\text{г) } \sqrt{2x+3} = x$$

Шаг 1. Находим область допустимых значений (ОДЗ).

Подкоренное выражение: $2x+3 \geq 0 \rightarrow 2x \geq -3 \rightarrow x \geq -1,5$.

Квадратный корень всегда неотрицателен, поэтому правая часть x тоже должна быть ≥ 0 .

Объединяем: $x \geq 0$.

Шаг 2. Возводим обе части в квадрат (при $x \geq 0$ это равносильное преобразование):

$$\begin{aligned} (\sqrt{2x+3})^2 &= x^2 \\ 2x+3 &= x^2 \end{aligned}$$

Шаг 3. Переносим всё в одну сторону:

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

Шаг 4. Решаем квадратное уравнение:

$$\begin{aligned} D &= 16, x_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \\ x_1 &= -1, x_2 = 3. \end{aligned}$$

Шаг 5.Проверяем соответствие ОДЗ ($x \geq 0$):

$x = -1$ не подходит (отрицательное).

$x = 3$ подходит.

Ответ: $x = 3$

Вариант 2. (решить самостоятельно)

а) $\sqrt{5x + 1} = 6$

б) $\sqrt{x^2 - 9} = 4$

в) $x - 6\sqrt{x} + 8 = 0$

г) $\sqrt{3x + 1} = x - 1$

При отработке данных уравнений рекомендуется использовать заполнение математического дневника. (см.Приложение 1.)

1. На начальном этапе учитель показывает, как заполнять дневник на примере одного уравнения.

2. В процессе изучения темы дневник ведется регулярно.

3. На этапе закрепления учащиеся могут использовать дневник как опору при решении сложных задач.

4. Периодически учитель собирает дневники для проверки, обращая внимание не только на правильность ответов, но и на качество рефлексии.

Модуль 3 «Равносильные переходы» предназначен для учащихся 9 класса, которые уже освоили решение простейших иррациональных уравнений с проверкой подстановкой и готовы перейти к методу равносильных систем. Главная цель модуля – научить ученика решать уравнения без избыточной проверки, заменяя исходное уравнение системой, где условие $g(x) \geq 0$ автоматически отсекает посторонние корни ещё до того, как они попадут в ответ. Модуль также расширяет кругозор: знакомит с уравнениями,

содержащими полный квадрат под корнем, которые решаются через переход к модулю. Кроме того, модуль включает самый сложный тип – уравнения с двумя радикалами, где требуется уединение одного корня и двукратное возведение в квадрат, причём на каждом шаге применяется равносильный переход или строгая проверка. Материал модуля соответствует повышенному уровню сложности и готовит учащихся к успешному решению задания №20 в ОГЭ, а также к дальнейшему изучению иррациональных неравенств и уравнений с параметрами.

Модуль 3 рекомендуется использовать на уроках на этапе углубления и систематизации знаний. На этапе введения нового материала учитель объясняет равносильный переход на двух-трёх примерах, затем класс выполняет задание 3.1 в парах. После этого ученики приступают к заданию 3.2 – первые два уравнения решаются коллективно с комментированием у доски, остальные три – самостоятельно с последующей фронтальной проверкой. Карточки №3 и №4 можно использовать на следующем уроке как самостоятельную работу на 15–20 минут (уровень «4» и «5»). При этом учитель может дифференцировать задания: слабым учащимся предложить только пункты а и б - уравнения с модулем и с равными корнями, учащимся среднего уровня – добавить пункт в), а сильным – все четыре пункта, включая уравнение с двумя радикалами. Очень эффективно сочетать работу с карточками и ведение «Математического дневника» из Модуля 2. Модуль 3 также хорошо вписывается в технологию «перевернутого класса»: ученики дома знакомятся с алгоритмом и примерами, а в классе решают задачи из карточек в группах с взаимопроверкой

Модуль 3. Равносильные переходы (метод систем)

Алгоритм решения уравнения $\sqrt{f(x)} = g(x)$ равносильным переходом:

$$\sqrt{f(x)} = g(x) = \begin{cases} g(x) \geq 0, \\ f(x) = (g(x))^2. \end{cases}$$

Примечание: Условие $f(x) \geq 0$ автоматически выполняется, так как $(g(x))^2 \geq 0$.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{-9x^2 + 3x - 6} = \sqrt{-6x - 24}$.

Решение. Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} -9x^2 + 3x - 6 = -6x - 24, \\ -6x - 24 \geq 0. \end{cases}$$

Решая первое уравнение этой системы, равносильное уравнению $-x^2 + x + 2 = 0$, получим корни $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Однако при этих значениях не выполняется неравенство $-6x - 24 \geq 0$, и потому данное уравнение не имеет корней.

Ответ. Корней нет.

Задание 3.1. Переход к системе

Составь систему, равносильную уравнению:

1. $\sqrt{3x + 4} = x$

Система: $\begin{cases} x \geq 0 \\ 3x + 4 = x^2 \end{cases}$

2. $\sqrt{x + 5} = x - 1$

Система: $\begin{cases} x - 1 \geq 0 \\ x + 5 = (x - 1)^2 \end{cases} = \begin{cases} x \geq 1 \\ x + 5 = x^2 - 2x + 1 \end{cases}$

3. $\sqrt{2x - 1} = x - 2$

Система: $\begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x - 1 = (x - 2)^2 \end{cases} = \begin{cases} x \geq 2 \\ 2x - 1 = x^2 - 4x + 4 \end{cases}$

4. $\sqrt{3x - 2} = x$

Система: _____

5. $\sqrt{5 - 2x} = 1 - x$

Система: _____

6. $\sqrt{x^2 - 4} = 2 - x$

Система: _____

Задание 3.2. Реши уравнения, используя равносильный переход:

Пример для решения 1. $\sqrt{2x+7} = x+2$

Решение:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0, \\ 2x+7 = (x+2)^2. \end{cases} = \begin{cases} x \geq -2, \\ 2x+7 = x^2+4x+4. \end{cases}$$

Приводим квадратное уравнение:

$$x^2 + 4x + 4 - 2x - 7 = 0.$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0.$$

$$(x+3)(x-1)=0 \rightarrow x=-3 \text{ или } x=1.$$

Учитывая условие $x \geq -2$, корень $x=-3$ отбрасываем.

Ответ: $x=1$.

Пример для решения 2. $\sqrt{3x-2} = 4-x$

Решение:

$$\begin{cases} 4-x \geq 0, \\ 3x-2 = (4-x)^2. \end{cases} = \begin{cases} x \leq 4, \\ 3x-2 = 16-8x+x^2. \end{cases}$$

Приводим квадратное уравнение:

$$16 - 8x + x^2 - 3x + 2 = 0.$$

$$x^2 - 11x + 18 = 0.$$

$$(x-2)(x-9) = 0 \rightarrow x=2 \text{ или } x=9.$$

Условие $x \leq 4$: $x=2$ подходит, $x=9$ отбрасываем.

Ответ: $x=2$.

Примеры для самостоятельного решения:

1. $\sqrt{6-x} = x$

Решение: _____

2. $\sqrt{x+2} = 2-x$

Решение: _____

3. $\sqrt{2x-3} = x-3$

Решение: _____

$$4. \sqrt{5x+1} = x+1$$

Решение: _____

$$5. \sqrt{x+3} = x+1$$

Решение: _____

Карточка №3. 9 класс. Повышенный уровень

Тема: Решение уравнений с учетом ОДЗ и уравнений с двумя корнями.

Цель: Проверка навыков решения уравнений, где правая часть – выражение, и уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$.

Ситуация усложняется, если в уравнении есть сразу два квадратных корня. В этом случае их приходится убирать последовательно. Сначала мы переносим слагаемые через знак «=» таким образом, чтобы слева остался один из радикалов и ничего, кроме него. Возводя в квадрат такое уравнение, мы избавимся от одного радикала, после чего мы получим более простое уравнение. После получения всех корней надо проверить, какие из них являются посторонними.

Пример для решения 1. $\sqrt{x^2 - 6x + 9} = 4$

Решение:

Замечаем, что $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$

Уравнение принимает вид: $\sqrt{(x - 3)^2} = 4$

По определению: $\sqrt{(x - 3)^2} = |x - 3|$

Имеем: $|x - 3| = 4$

$x - 3 = 4$ или $x - 3 = -4 \rightarrow x = 7$ или $x = -1$.

Проверка не нужна, так как модуль всегда неотрицателен.

Ответ: $x = -1; 7$.

Пример для решения 2. $\sqrt{3x+2} = \sqrt{x+8}$

Решение:

ОДЗ: $3x+2 \geq 0$ и $x+8 \geq 0$

$x \geq -\frac{2}{3}$, $x \geq -8$ следовательно $x \geq -\frac{2}{3}$

$$3x+2=x+8$$

$$2x=6$$

$$x=3.$$

Проверяем ОДЗ: $3 \geq -\frac{2}{3}$ -верно.

Ответ: $x=3$.

Для самостоятельного решения.

Вариант 1.

$$а) \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3$$

$$б) \sqrt{2x + 5} = \sqrt{3x - 2}$$

$$в) \sqrt{4x - 11} = 2 - x$$

$$г) \sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 1} = 3$$

Вариант 2.

$$а) \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 5$$

$$б) \sqrt{5x - 1} = \sqrt{4x + 3}$$

$$в) \sqrt{2x + 1} = 3 - x$$

$$г) \sqrt{2x + 3} + \sqrt{x - 2} = 4$$

Карточка №4. 9 класс.

Тема: Решение уравнений с учетом ОДЗ и уравнений с двумя корнями.

Вариант 1.

$$а) \sqrt{x^2 + 2x + 1} = 3$$

$$б) \sqrt{2x + 5} = \sqrt{3x - 2}$$

$$в) \sqrt{4x - 11} = 2 - x$$

$$г) \sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 1} = 3$$

Вариант 2.

$$а) \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 5$$

$$б) \sqrt{5x - 1} = \sqrt{4x + 3}$$

$$в) \sqrt{2x + 1} = 3 - x$$

$$г) \sqrt{2x+3} + \sqrt{x-2} = 4$$

Главная цель модуля 4 – показать, что иногда можно ввести замену переменной, сведя уравнение к квадратному, или воспользоваться методом оценки, особенно когда сумма неотрицательных слагаемых равна нулю. Эти методы развивают математическое мышление, гибкость и наблюдательность – качества, необходимые для успешной сдачи ОГЭ и участия в олимпиадах. Модуль 4 состоит из двух независимых частей, каждая из которых может изучаться как отдельно, так и в комплексе. Часть 4.1 «Метод замены переменной». Часть 4.2 «Метод оценки». Структура модуля включает теоретическое объяснение, разобранные примеры, задания для самостоятельного решения и две тематические карточки. Модуль 4 рекомендуется использовать после того, как учащиеся уверенно решают уравнения возведением в квадрат, чтобы показать альтернативные, более короткие пути. На этапе введения метода замены учитель объясняет суть приёма, решает вместе с классом пример, затем учащиеся самостоятельно решают аналогичные уравнения из карточки №5 в парах или индивидуально. Карточку №6 можно использовать как экспресс-тренинг: каждое уравнение решается устно или с краткой записью системы, после чего делается вывод о наличии или отсутствии корней. Учитель может организовать мини-соревнование «Кто быстрее определит, есть ли корни?». Модуль 4 также можно интегрировать с «Математическим дневником»: для одного уравнения из карточки №5, а для уравнения из карточки №6 – анализируют, почему система несовместна или почему корней заведомо нет. Эти нестандартные методы особенно полезны для подготовки к олимпиадам и при решении уравнений повышенной сложности, где традиционный подход приводит к многоэтажным преобразованиям.

Модуль 4. Нестандартные методы

Иногда уравнение с корнем можно решить красиво, не прибегая к громоздким вычислениям.

4.1. Метод замены переменной

Задание 4.1. Реши уравнение, сделав замену $t = \sqrt{x}$ (помни, что $t \geq 0$)

$$x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$$

Подсказка: $x = t^2$. Получишь квадратное уравнение относительно t .

Решение:

Пусть $t = \sqrt{x} \geq 0$. Тогда $x = t^2$.

Уравнение: $t^2 - 5t + 6 = 0$.

Дискриминант: $D = 25 - 24 = 1$

Корни: $t = 2, t = 3$ (оба ≥ 0).

Возвращаемся к x : $\sqrt{x} = 2, x = 4$

$\sqrt{x} = 3, x = 9$.

При проверке оба корня подходят.

Ответ: 4; 9.

4.2. Метод оценки (сумма неотрицательных чисел)

Если в левой части сумма корней, а в правой – ноль, можно воспользоваться тем, что каждый корень ≥ 0 .

Задание 4.2. Реши уравнение:

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{x-1} = 0.$$

Решение: Так как $\sqrt{x+5} \geq 0$ и $\sqrt{x-1} \geq 0$, их сумма равна нулю только тогда, когда оба слагаемых равны нулю одновременно. Получаем систему:

$$\begin{cases} x + 5 = 0, \\ x - 1 = 0. \end{cases}$$

Эта система не имеет решений (первое уравнение дает $x = -5$, второе $x = 1$).
Значит, исходное уравнение не имеет корней.

Ответ: решений нет.

Реши самостоятельно:

$$\sqrt{2x-3} + \sqrt{x+4} = 0$$

Решение: _____

Карточка №5. Замена переменной.

а) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

б) $x - 7\sqrt{x} + 10 = 0$

в) $x + 2\sqrt{x} - 8 = 0$

г) $2x - 5\sqrt{x} - 3 = 0$

Карточка №6. Метод оценки- сумма неотрицательных чисел.

а) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-1} = 0$

б) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{x+4} = 0$

в) $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-2} = 0$

г) $\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x-4} = 0$

Главная цель модуля 5 – познакомить обучающихся с широким спектром нестандартных иррациональных уравнений, которые выходят за рамки базового курса и требуют комбинирования различных методов: уединения радикалов с повторным возведением в квадрат, использования сопряжённых выражений, замены переменной, перехода к модулю, выделения полных квадратов, метода оценки и монотонности, а также решения уравнений с параметрами и с кубическими корнями. Модуль развивает математическую интуицию, гибкость мышления, навыки алгебраических преобразований и готовит учащихся к участию в олимпиадах, поступлению в профильные классы и успешной сдаче ОГЭ на максимальный балл. Структура модуля 5 включает семь подразделов, каждый из которых посвящён определённому методу или типу уравнений. Модуль 5 рекомендуется использовать на этапе углублённого изучения темы, после полного освоения базовых и средних уровней, а также в рамках подготовки к олимпиадам и экзаменам профильного уровня.

На уроке учитель может организовать работу следующим образом: первые два-три подраздела разбираются коллективно с подробным

комментированием каждого преобразования, например, уравнение с двумя радикалами и уравнение с сопряжённым. Затем учащиеся в парах или малых группах решают оставшиеся примеры из подразделов, сверяясь с приведёнными решениями, которые служат образцом. На следующем уроке проводится самостоятельная работа по Карточке №7: каждый вариант содержит четыре уравнения, для успешного выполнения которых нужно не только владеть методами, но и уметь выбирать рациональный путь. Учитель может дифференцировать задание: обязательными сделать первые два уравнения из карточки (уровень «4»), а третье и четвёртое – на «5» или для олимпиадного резерва. Важно, что в модуле 5 приведены не только ответы, но и полные, детальные решения с пояснениями, поэтому он может использоваться для самообразования, дистанционного обучения и в качестве справочного материала при подготовке к экзаменам. Модуль также отлично вписывается в технологию «математического дневника»: учащиеся выбирают 2–3 наиболее сложных уравнения из модуля, заполняют на них дневник, а затем защищают своё решение перед классом. В результате освоения модуля 5 учащиеся не только научатся решать сложные иррациональные уравнения, но и приобретут опыт исследования параметров, работы с модулями и вложенными радикалами, научатся видеть скрытые замены и применять метод оценки – всё это является фундаментом для дальнейшего изучения математики в старших классах и успешного выступления на олимпиадах.

Данный модуль можно и нужно использовать для работы с 9 классом, но с определёнными оговорками и дифференцированным подходом. В заданиях ОГЭ по математике присутствуют иррациональные уравнения, в том числе требующие нестандартных приёмов. В 9 классе изучаются квадратные уравнения, свойства корней, методы замены переменной, системы уравнений – всё это используется в модуле. Уравнения с кубическими корнями и с параметром обычно выходят за рамки ОГЭ, но могут быть предложены в профильных классах или на факультативах.

Развитие математического мышления. Именно в 9 классе, на этапе предпрофильной подготовки, полезно давать задания, требующие не алгоритмического, а аналитического подхода. Это помогает выявить одарённых детей и подготовить их к обучению в профильных 10–11 классах.

Модуль 5. Задания повышенной сложности

5.1. Уравнения с двумя и более радикалами (уединение и повторное возведение в квадрат)

1. $\sqrt{x+5} - \sqrt{x-3} = 2$

Решение.

ОДЗ: $x+5 \geq 0$ и $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$

Уединим один корень: $\sqrt{x+5} = 2 + \sqrt{x-3}$

Возводим в квадрат (обе части неотрицательны):

$$x+5 = 4 + 4\sqrt{x-3} + (x-3)$$

Упрощаем: $x+5 = x+1 + 4\sqrt{x-3}$

$$4 = 4\sqrt{x-3}$$

$$\sqrt{x-3} = 1$$

$$x-3 = 1$$

$$x = 4$$

Проверка ОДЗ: $4 \geq 3$ – верно.

Ответ: $x = 4$.

2. $\sqrt{x+1} + \sqrt{4x+13} = \sqrt{3x+12}$

Возведём в квадрат (обе части неотрицательны):

$$(x + 1) + (4x + 13) + 2\sqrt{(x + 1)(4x + 13)} = 3x + 12$$

$$5x + 14 + 2\sqrt{(x + 1)(4x + 13)} = 3x + 12$$

$$2\sqrt{(x + 1)(4x + 13)} = 3x + 12 - 5x - 14$$

$$2\sqrt{(x + 1)(4x + 13)} = -2x - 2$$

$$\sqrt{(x + 1)(4x + 13)} = -x - 1$$

Правая часть должна быть неотрицательной: $-x-1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1$.

С учётом ОДЗ ($x \geq -1$) получаем $x = -1$

$$\text{Проверяем } x = -1: \sqrt{0} + \sqrt{4(-1) + 13} = \sqrt{9} = 3$$

Равенство выполняется.

Ответ: $x = -1$.

$$3.\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2$$

Решение:

$$\text{ОДЗ: } x - 1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$$\text{Замена: } t = \sqrt{x - 1} \geq 0, \text{ тогда } x = t^2 + 1$$

Вычислим подкоренное выражение:

$$x + 2\sqrt{x - 1} = t^2 + 1 + 2t = (t + 1)^2$$

$$x - 2\sqrt{x - 1} = t^2 + 1 - 2t = (t - 1)^2$$

$$\text{Тогда уравнение принимает вид: } \sqrt{(t + 1)^2} + \sqrt{(t - 1)^2} = 2$$

$$|t + 1| + |t - 1| = 2$$

Так как $t \geq 0$, рассмотрим два случая:

Если $0 \leq t \leq 1$: $|t + 1| = t + 1, |t - 1| = 1 - t$.

Сумма: $t + 1 + 1 - t = 2$ - тождество.

Значит, все $t \in [0, 1]$ являются решениями.

Если $t > 1$: $|t + 1| = t + 1, |t - 1| = t - 1$.

Сумма: $t + 1 + t - 1 = 2t$ - тождество.

$t = 1$, но $t > 1$ не выполняется.

Итак, $0 \leq t \leq 1$. Возвращаемся к $x = t^2 + 1$

$t \in [0, 1] \rightarrow x = t^2 + 1 \in [1, 2]$.

Проверка: при $x \in [1, 2]$ исходное уравнение верно: каждое слагаемое равно $1 + \sqrt{x - 1}$ и $1 - \sqrt{x - 1} \leq 1$, их сумма равна 2.

Ответ: $x \in [1, 2]$

5.2. Уравнения с кубическими корнями.

$$4. \sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x - 1} = \sqrt[3]{5x}$$

Решение:

Возведем обе части в куб, используя формулы сокращенного умножения:

$$(x + 1) + (x - 1) + 3\sqrt[3]{(x + 1)(x - 1)} \times (\sqrt[3]{x + 1} + \sqrt[3]{x - 1}) = 5x$$

$$\text{Упрощаем: } 2x + 3\sqrt[3]{x^2 - 1} \times \sqrt[3]{5x} = 5x$$

$$3\sqrt[3]{5x(x^2 - 1)} = 3x$$

$$\sqrt[3]{5x(x^2 - 1)} = x$$

Возводим в куб:

$$5x(x^2 - 1) = x^3$$

Если $x=0$, то обе части равны 0, проверяем: $\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{-1} = 1 - 1 = 0$ – верно.

Если $x \neq 0$, то обе части делим на x : $5(x^2 - 1) = x^2$

$$4x^2 = 5$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Ответ: $x=0$, $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

5.3.Использование сопряженного выражения

$$5. \sqrt{x^2 + 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 2$$

Решение

ОДЗ: подкоренные всегда положительны (дискриминанты отрицательны).

Умножим левую и правую части на сопряженное:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x^2 + 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 2x + 5}) \times (\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 2x + 5}) \\ = 2(\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 2x + 5}) \end{aligned}$$

В левой части – разность квадратов: $(x^2 + 2x + 5) - (x^2 - 2x + 5) = 4x$.

$$\text{Итак: } 4x = 2(\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 2x + 5})$$

$$\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 2x + 5} = 2x$$

Поскольку левая часть неотрицательна, то $2x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$.

Теперь сложим полученное уравнение с исходное:

$$(\sqrt{x^2 + 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 2x + 5}) + (\sqrt{x^2 + 2x + 5} + \sqrt{x^2 - 2x + 5}) = 2 + 2x$$

Слева: $2\sqrt{x^2 + 2x + 5}$. Получим: $2\sqrt{x^2 + 2x + 5} = 2x + 2$

$$\sqrt{x^2 + 2x + 5} = x + 1$$

Возводим в квадрат (правая часть неотрицательна при $x \geq -1$, что совпадает с $x \geq 0$):

$$x^2 + 2x + 5 = x^2 + 2x + 1$$

$5=1$ - противоречие.

Вывод: нет решение? Проверим внимательно.

Исходное уравнение могло иметь решением только при $x \geq 0$, но мы пришли к противоречию. Попробуем проверить графически или подбором: при $x=0$ левая часть $\sqrt{5} - \sqrt{5} = 0 \neq 2$. При больших x разность стремится к 0, значит, уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений.

$$6. \sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 3x$$

Решение

ОДЗ: подкоренные всегда положительны (дискриминанты < 0)

Заметим, что левая часть $\geq 0 \rightarrow 3x \geq 0 \rightarrow x \geq 0$.

Умножим на сопряженное $(\sqrt{2x^2 + 3x + 5} + \sqrt{2x^2 - 3x + 5}) \times$

$$\sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5} = 3x(\sqrt{2x^3 - 3x + 5} - \sqrt{2x^3 - 3x + 5})$$

Слева: $(2x^2 + 3x + 5) - (2x^2 - 3x + 5) = 6x$.

$$\text{Итак: } 6x = 3x(\sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5})$$

Если $x=0$, то исходное: $\sqrt{5} + \sqrt{5} = 0$?

$$2\sqrt{5} = 0 - \text{неверно.}$$

Значит, $x \geq 0$, можно сократить на $3x$:

$$2 = \sqrt{2x^2 + 3x + 5} - \sqrt{2x^2 - 3x + 5}.$$

Теперь имеем систему: $\begin{cases} A + B = 3x, \\ A - B = 2, \end{cases}$

Где $A = \sqrt{2x^2 + 3x + 5}$, $B = \sqrt{2x^2 - 3x + 5}$.

Складываем: $2A = 3x + 2, A = \frac{3x+2}{2}$.

Вычитаем: $2B = 3x - 2, B = \frac{3x-2}{2}$.

Так как $A \geq 0, B \geq 0$, то $\frac{3x-2}{2} \geq 0 \rightarrow x \geq \frac{2}{3}$.

Возведем A в квадрат: $2x^2 + 3x + 5 = \left(\frac{3x+2}{2}\right)^2 = \frac{9x^2+12x+4}{4}$.

Умножаем на 4: $8x^2 + 12x + 20 = 9x^2 + 12x + 4$

$$8x^2 + 20 = 9x^2 + 4$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4.$$

Учитывая $x \geq \frac{2}{3}$, берем $x=4$.

Ответ: $x=4$.

5.4. Замена переменной (неочевидная)

$$7. (x+4)\sqrt{x+3} + (x+2)\sqrt{x+1} = 0$$

Решение

ОДЗ: $x \geq -1$ (чтобы оба корня были определены)

$$(x + 4)\sqrt{x + 3} = -(x + 2)\sqrt{x + 1}$$

Заметим, что при $x \geq -1$ множитель $\sqrt{x + 3} > 0$, $\sqrt{x + 1} \geq 0$.

Рассмотрим знаки: если $x \geq -1$, то $x + 4 > 0$ всегда. Правая часть имеет знак минус перед $(x + 2)\sqrt{x + 1}$

1) При $x > -2$ (а у нас $x \geq -1$), $x + 2 > 0$, тогда правая часть отрицательна, левая положительна – равенство невозможно.

2) При $x = -1$: левая часть $(-1 + 4)\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, правая: $(-1 + 2) \times 0 = 0$.

3) При $x = -2$ не входит в ОДЗ.

Таким образом, решений нет.

Ответ: решений нет.

$$8. \sqrt{x + \sqrt{x + 11}} + \sqrt{x - \sqrt{x + 11}} = 4$$

Решение:

ОДЗ: $x + 11 \geq 0$ и подкоренные второго уровня неотрицательны:

$$x \pm \sqrt{x + 11} \geq 0.$$

Сделаем замену $t = \sqrt{x + 11} \geq 0$, тогда $x = t^2 - 11$.

$$\text{Подставим: } \sqrt{t^2 - 11 + t} + \sqrt{t^2 - 11 - t} = 4.$$

$$\text{Обозначим } A = \sqrt{t^2 + 11 - t}, B = \sqrt{t^2 - 11 - t}$$

Заметим, что $A^2 - B^2 = 2t$.

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB = (t^2 + t - 11) + (t^2 - t - 11) + 2AB \\ = 2t^2 - 22 + 2AB.$$

Но мы знаем, что $A+B=4$, значит $16 = 2t^2 - 22 + 2AB$

$$2AB=38-2t^2$$

$$AB=19-t^2$$

$$\text{Сдругой стороны, } AB=\sqrt{(t^2 + t - 11)(t^2 - t - 11)} = \sqrt{(t^2 - 11)^2 - t^2} = \\ \sqrt{t^4 - 22t^2 + 121 - t^2} = \sqrt{t^4 - 23t^2 + 121}$$

$$\text{Имеем уравнение: } \sqrt{t^4 - 23t^2 + 121} = 19 - t^2$$

Правая часть должна быть неотрицательна: $19 - t^2 \geq 0 \rightarrow t^2 \leq 19$.

$$\text{Возводим в квадрат: } t^4 - 23t^2 + 121 = (19 - t^2)^2 = 361 - 38t^2 + t^4$$

$$\text{Сокращаем на } t^4: -23t^2 + 121 = 361 - 38t^2$$

$$15t^2 = 240$$

$$t^2 = 16, t = 4 \ (t \geq 0)$$

Проверка $t = 4$: $19 - 16 = 3 \geq 0$ – условие выполнено.

Тогда $x = t^2 - 11 = 16 - 11 = 5$. Проверяем исходное уравнение при $x=5$: $= 4$ - верно.

Ответ: $x=5$.

5.5. Уравнения с параметром

9. При всех значениях параметра a решите уравнение $\sqrt{x-a} = x - 2a$

Решение:

Запишем равносильную систему:

$$\begin{cases} x - 2a \geq 0, \\ x - a = (x - 2a)^2. \end{cases}$$

Второе уравнение: $x - a = x^2 - 4ax + 4a^2$

$$0 = x^2 - 4ax + 4a^2 - x + a$$

$$x^2 - (4a + 1)x + (4a^2 + a) = 0$$

$$D = (4a + 1)^2 - 4(4a^2 + a) = 16a^2 + 8a + 1 - 16a^2 - 4a = 4a + 1$$

$$x_{1,2} = \frac{4a + 1 \pm \sqrt{4a + 1}}{2}$$

Исследуем $D \geq 0 \rightarrow 4a + 1 \geq 0 \rightarrow a \geq -\frac{1}{4}$

При $a = -\frac{1}{4}$: $\sqrt{4a + 1} = 0$, тогда $x = 0$.

Проверка: $x \geq 2a = -\frac{1}{2}$ — верно.

Решение: $x = 0$.

При $a > -\frac{1}{4}$: два корня, необходимо проверить, какой из них удовлетворяет условию $x \geq 2a$.

Очевидно, $x_2 \geq x_1$. $x_2 \geq 2a$?

$$\text{Вычислим } x_2 - 2a = \frac{4a+1+\sqrt{4a+1}}{2} - 2a = \frac{4a+1+\sqrt{4a+1}-4a}{2} = \frac{1+\sqrt{4a+1}}{2} > 0.$$

Значит, x_2 всегда подходит.

$$\text{Для } x_1: x_1 - 2a = \frac{4a+1-\sqrt{4a+1}-4a}{2} = \frac{1-\sqrt{4a+1}}{2}$$

Это выражение неотрицательно, если $1 - \sqrt{4a + 1} \geq 0$

$$\sqrt{4a + 1} \leq 1$$

$$4a + 1 \leq 1$$

$$a \leq 0$$

С учетом $a > -\frac{1}{4}$ получаем: при $-\frac{1}{4} < a \leq 0$ оба корня подходят, при $a > 0$ только x_2 .

Также проверим, что корни различны: при $a > -\frac{1}{4}$ и $a \neq 0$.

При $a=0$: $\sqrt{1} = 1, x_1 = \frac{1-1}{2} = 0, x_2 = \frac{1+1}{2} = 1$.

Условие $x \geq 2a = 0$: оба подходят.

Ответ: при $a < -\frac{1}{4}$: решений нет.

При $a = -\frac{1}{4}$: $x = 0$.

При $-\frac{1}{4} < a \leq 0$: $x = \frac{4a+1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$.

При $a > 0$: $x = \frac{4a+1 + \sqrt{4a+1}}{2}$.

10. Найдите все значения a , при которых уравнение $\sqrt{2x+a} = x+1$ имеет ровно один корень.

Решение:

Система: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 2x+a = (x+1)^2 \end{cases}$

Второе уравнение: $2x+a = x^2 + 2x + 1$

$$a = x^2 + 1$$

Из первого: $x \geq -1$

Подставляем $a = x^2 + 1$ в условие $x \geq -1$ и затем найдем, при каких a ровно одно x удовлетворяет.

По сути, уравнение $a = x^2 + 1$ при $x \geq -1$ задает параболу. Количество решений-количество пересечений горизонтальной прямой $y = a$ с ветвью параболы $y = x^2 + 1$ при $x \geq -1$.

Вершина параболы в $x=0$, значение $y=1$. При $x = -1, y = (-1)^2 + 1 = 2$.

Таким образом, для каждого $a > 1$ Есть два значения x (одно слева, одно справа), для $a=1$ одно решение $x=0$, а для $a=2$ - одно решение $x=-1$.

При $a=2: x^2 + 1 = 2$

$$x^2 = 1$$

$$x = \pm 1.$$

Условию $x \geq -1$ удовлетворяют оба $x=1, x=-1$ корня.

При $a > 2: x^2 = a - 1 > 1$

$$x = \pm \sqrt{a - 1}$$

Меньший корень $-\sqrt{a - 1} < -1$

При $a > 2, \sqrt{a - 1} > 1$, значит $-\sqrt{a - 1} < -1$ -не входит в ОДЗ. Остается только $x = \sqrt{a - 1} \geq 0$. Значит, при $a > 2$ – ровно один корень.

Также при $a=1$ - один корень $x=0$. При $1 < a < 2$: например, $a=1,5$: $x^2 = 0,5$,

$x = \pm 0,5 \approx \pm 0,707$. Оба больше -1 , значит два корня.

При $a=2$ -два корня (-1 и 1).

При $a < 1$: решений нет, т.к. $x^2 + 1 \geq 1$.

Ответ: $a=1$ или $a > 2$.

5.6 Нестандартные методы (оценка, монотонность)

$$11. \sqrt{x^2 - 4x + 13} + \sqrt{x^2 - 6x + 10} = 3.$$

Решение:

Выделим полные квадраты:

$$x^2 - 4x + 13 = (x^2 - 4x + 4) + 9 = (x - 2)^2 + 9$$

$$x^2 - 6x + 10 = (x^2 - 6x + 9) + 1 = (x - 3)^2 + 1$$

Таким образом, уравнение: $\sqrt{(x - 2)^2 + 9} + \sqrt{(x - 3)^2 + 1} = 3$.

Каждое слагаемое не меньше квадратного корня из свободного члена: :

$$\sqrt{(x - 2)^2 + 9} \geq \sqrt{9} = 3$$

$$\sqrt{(x - 3)^2 + 1} \geq \sqrt{1} = 1$$

Следовательно, левая часть $\geq 3 + 1 = 4$. Равенство 3 невозможно.

Ответ: решений нет.

$$12. \sqrt[3]{x + 2} + \sqrt[3]{x - 2} = \sqrt[3]{2x}$$

Решение

Сделаем замену $u = \sqrt[3]{x + 2}$, $v = \sqrt[3]{x - 2}$. Тогда $u^3 = x + 2$, $v^3 = x - 2$.

$$u^3 - v^3 = 4.$$

$$u + v = \sqrt[3]{2x}. \text{ Но } 2x = (x + 2) + (x - 2) = u^3 + v^3.$$

$$u + v = \sqrt[3]{u^3 + v^3}. \text{ Возведем в куб: } (u + v)^3 = u^3 + v^3$$

$$\text{Раскроем: } u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3.$$

$$3uv(u + v) = 0.$$

Значит, $uv=0$ или $u+v=0$.

Случай 1: $uv=0$. Тогда $u=0$ или $v=0$.

$$u=0 \rightarrow \sqrt[3]{x+2} = 0 \rightarrow x = -2. \text{ Тогда } v = \sqrt[3]{-4}.$$

Проверка: $\sqrt[3]{0} + \sqrt[3]{-4} = -\sqrt[3]{4}$, а $\sqrt[3]{2x} = \sqrt[3]{-4}$. – равенство выполняется.

$v=0 \rightarrow \sqrt[3]{x-2} = 0 \rightarrow x = 2$. Тогда $v = \sqrt[3]{4}$. Проверка $\sqrt[3]{4} + 0 = \sqrt[3]{4}$. Правая часть $\sqrt[3]{4}$ – верно.

Случай 2:

$$u+v=0 \rightarrow v = -u. \text{ Тогда } u^3 - v^3 = u^3 - (-u^3) = u^3 + u^3 = 2u^3 = 4.$$

$$u^3 = 2, u = \sqrt[3]{2}.$$

$$\text{Тогда } x + 2 = u^3 = 2 \rightarrow x = 0.$$

При этом $v = -u = -\sqrt[3]{2}$. $v^3 = -2$, и $x - 2 = -2$ – верно.

Ответ: $x = -2, 0, 2$.

5.7. Комбинированные задания

$$13. \sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x}$$

Решение

$$\text{ОДЗ: } 3x+1 \geq 0, x-1 \geq 0, 2x \geq 0 \rightarrow x \geq 1.$$

$$\text{Уединим: } \sqrt{3x+1} = \sqrt{x-1} + \sqrt{2x}.$$

$$\text{Возведем в квадрат: } 3x+1 = (x-1) + 2x + 2\sqrt{(x-1) \times 2x}$$

$$3x+1 = 3x-1 + 2\sqrt{2x(x-1)}$$

Упростим: $3x + 1 - 3x + 1 = 2\sqrt{2x(x-1)}$

$$2 = 2\sqrt{2x(x-1)}$$

$$\sqrt{2x(x-1)} = 1$$

Возводим в квадрат: $2x(x-1) = 1$

$$2x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x^2 - x - 0,5 = 0$$

$$D=1+2=3, x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$$

Учитывая $x \geq 1$, берем $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1,366$

Второй корень отрицателен- не подходит.

Ответ: $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$$14. \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = 2$$

Решение:

ОДЗ: $x \geq 0$ и $x - \sqrt{x} \geq 0 \rightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) \geq 0$.

Так как $\sqrt{x} \geq 0$, то условие сводится к $\sqrt{x} - 1 \geq 0$

$$\sqrt{x} \geq 1 \rightarrow x \geq 1.$$

Обозначим $t = \sqrt{x} \geq 1$, тогда $x = t^2$.

Уравнение: $\sqrt{t^2 + t} - \sqrt{t^2 - t} = 2$

Возведем в квадрат: $(t^2 + t) + (t^2 - t) - 2\sqrt{(t^2 + t)(t^2 - t)} = 4$

$$2t^2 - 2\sqrt{t^2(t^2 - 1)} = 4.$$

Разделим на 2: $t^2 - \sqrt{t^4 - t^2} = 2$

$$\sqrt{t^4 - t^2} = t^2 - 2.$$

Правая часть должна быть неотрицательна: $t^2 - 2 \geq 0 \rightarrow t \geq \sqrt{2}$.

Возводим в квадрат: $t^4 - t^2 = (t^2 - 2)^2 = t^4 - 4t^2 + 4$

$$-t^2 = -4t^2 + 4$$

$$3t^2 = 4$$

$$t^2 = \frac{4}{3}, t = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (t > 0)$$

Проверим: $t \geq \sqrt{2}$: $\frac{2}{\sqrt{3}} \approx 1,155, \sqrt{2} \approx 1,414$ – условие не выполняется.

Следовательно, решений нет.

Ответ: решений нет.

$$15. \frac{\sqrt{x+3} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x-1}} = 3$$

Решение:

ОДЗ: $x \geq 1$.

Умножим числитель и знаменатель на сопряженное знаменателя, но проще: пусть $a = \sqrt{x+3}, b = \sqrt{x-1}$.

Тогда $\frac{a+b}{a-b} = 3$.

$$a + b = 3(a - b)$$

$$a + b = 3a - 3b$$

$$a = 2b.$$

Возвращаемся: $\sqrt{x+3} = 2\sqrt{x-1}$.

Возводим в квадрат: $x+3 = 4(x-1)$

$$x+3 = 4x-4$$

$$x = \frac{7}{3}$$

Проверка ОДЗ: $\frac{7}{3} \geq 1$ — верно.

Ответ: $x = \frac{7}{3}$

$$16. \sqrt{2-x} + \sqrt{3-x} = 1$$

Решение

ОДЗ: $2-x \geq 0$ и $3-x \geq 0$

$$x \leq 2.$$

Пусть $a = \sqrt{2-x} \geq 0, b = \sqrt{3-x} \geq 0$.

Тогда $b^2 - a^2 = (3-x) - (2-x) = 1$

Имеем систему: $\begin{cases} a+b=1 \\ b^2-a^2=1 \end{cases}$

Второе: $(b-a)(b+a) = 1$

$$(b-a) \times 1 = 1$$

$$b-a = 1$$

Складываем с первым: $2b = 2$

$b=1$, тогда $a=0$.

$$b=1 \rightarrow \sqrt{3-x} = 1$$

$$3 - x = 1$$

$$x=2$$

Проверка ОДЗ: $x=2$ подходит.

Ответ: $x=2$.

Карточка №7. 9 класс. Углубленный уровень

Тема: Уравнения повышенной сложности. Подготовка к олимпиадам и профессиональным классам.

Цель: Проверка умения комбинировать методы и работать с нестандартными уравнениями.

Вариант 1.

а) $\sqrt{x+1} = 1 - x$

б) $\sqrt{2x^2 + 3x - 2} = x + 2$

в) $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2} = 2$

г) $\sqrt{3x+1} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x}$

Вариант 2.

а) $\sqrt{2x-1} = x - 2$

б) $\sqrt{3x^2 + 5x - 4} = 2x + 1$

в) $\sqrt{2x+5} - \sqrt{x+2} = 1$

г) $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{x+1}$

Модуль 6 является завершающим и предназначен для итогового повторения, систематизации знаний и проверки уровня усвоения материала после прохождения всех предыдущих модулей. Структура модуля позволяет учителю сначала провести урок-практикум, на котором учащиеся вспоминают все изученные методы и выбирают рациональный способ решения, а затем – контрольную работу, результаты которой объективно отражают степень достижения планируемых результатов. Для учителя в модуле приведены

полные, подробные решения всех вариантов с комментариями, что облегчает проверку и анализ ошибок.

Таким образом, модуль 6 выполняет оценочную, систематизирующую и мотивационную функции, позволяя учителю подвести итог изучению темы, а учащимся – объективно оценить свои достижения и выявить пробелы, требующие доработки перед экзаменом.

Модуль 6. Итоговый практикум

Реши уравнения, выбрав рациональный метод:

1. $\sqrt{3x - 5} = 4$

Ответ: _____

2. $\sqrt{2 - x} = x$

Ответ: _____

3. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = x - 2$

Ответ: _____ (не забудь про условие!)

4. $x - \sqrt{x} - 2 = 0$

Подсказка: Замена $t = \sqrt{x}$

Ответ: _____

5. $\sqrt{x + 6} + \sqrt{x - 2} = 0$

Ответ: _____

Контрольная работа по теме «Иррациональные уравнения» для 9 класса

Тема: Иррациональные уравнения.

Класс: 9.

Цель: Проверить усвоение алгоритмов решения иррациональных уравнений, умение находить область допустимых значений (или выполнять проверку), решать уравнения методом возведения в квадрат и методом замены переменной.

Структура работы: Работа состоит из двух частей. Часть 1 (4 задания) - базовый уровень сложности. Часть 2 (2 задания) - повышенный уровень сложности.

Инструкция для учащихся: На выполнение работы отводится 40 минут.
Задания части 1 оцениваются в 1 балл, задания части 2 - в 2 балла.

Максимальный балл - 8.

Критерии оценок: «5» - 7-8 баллов, «4» - 5-6 баллов, «3» - 3-4 балла.

Вариант 1. Часть 1. (1 балл)

а) $\sqrt{3x-2} = 4$

б) $\sqrt{x+5} = 0$

в) $\sqrt{x^2-9} = 4$

г) $x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$

Часть 2 (2 балла)

д) $\sqrt{2x+5} = x+1$

е) $\sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 5$

Вариант 2. Часть 1. (1 балл)

а) $\sqrt{5x+1} = 6$

б) $\sqrt{2x-4} = 0$

в) $\sqrt{x^2-16} = 3$

г) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

Часть 2 (2 балла)

д) $\sqrt{3x+4} = x-2$

е) $\sqrt{x+5} + \sqrt{x-1} = 6$

Ответы для учителя:

Вариант 1. Часть 1. (1 балл)

а) $\sqrt{3x-2} = 4$

Решение: возведем обе части в квадрат (правая часть положительна, дополнительных ограничений не требует)

$$3x - 2 = 16$$

$$3x = 18$$

$$x = 6$$

Ответ: $x = 6$.

$$б) \sqrt{x+5} = 0$$

Решение: квадратный корень равен нулю только тогда, когда подкоренное выражение равно нулю

$$x + 5 = 0$$

$$x = -5$$

Ответ: $x = -5$

$$в) \sqrt{x^2 - 9} = 4$$

Решение: возведем обе части в квадрат (правая часть положительна, дополнительных ограничений не требует)

$$x^2 - 9 = 16$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5.$$

Ответ: $x = \pm 5$.

$$г) x - 3\sqrt{x} - 4 = 0$$

Решение: сделаем замену $t = \sqrt{x}$, ($t \geq 0$) тогда $t^2 = x$.

Уравнение имеет вид $t^2 - 3t - 4 = 0$

$$D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 16 + 9 = 25$$

$$\sqrt{D} = 5$$

$$t_1 = \frac{3+5}{2} = 4, t_2 = \frac{3-5}{2} = -1$$

$t = -1$ не подходит, так как ($t \geq 0$)

Возвращаемся к x : $\sqrt{x} = 4$, $x = 16$

Ответ: $x = 16$

Часть 2 (2 балла)

$$д) \sqrt{2x+5} = x+1$$

Решение: ОДЗ:

1. Подкоренное выражение: $2x + 5 \geq 0$

$$x \geq -2,5$$

2. Правая часть: $x + 1 \geq 0$

$$x \geq -1$$

3. Объединяем: $x \geq -1$

Возводим в квадрат обе части:

$$2x + 5 = (x + 1)^2$$

$$2x + 5 = x^2 + 2x + 1$$

$$2x + 5 - x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$4 - x^2 = 0$$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Учет ОДЗ: $x=2$ удовлетворяет всем условиям, $x=-2$ не подходит.

Ответ: $x = 2$

$$е) \sqrt{x+3} + \sqrt{x-2} = 5$$

Решение: 1. ОДЗ:

$$x + 3 \geq 0, x \geq -3$$

$$x - 2 \geq 0, x \geq 2$$

ОДЗ: $x \geq 2$

2. Возводим в квадрат правую и левую часть:

$$x + 3 = (5 - \sqrt{x-2})^2$$

$$x + 3 = 25 - 10\sqrt{x-2} + x - 2$$

$$3 = 23 - 10\sqrt{x-2}$$

$$10\sqrt{x-2} = 20$$

$$\sqrt{x-2} = 2$$

3. Снова возводим в квадрат: $x - 2 = 4$

$$x = 6$$

Ответ: $x = 6$.

Вариант 2. Часть 1. (1 балл)

а) $\sqrt{5x + 1} = 6$

Решение: возведем обе части в квадрат (правая часть положительна, дополнительных ограничений не требует)

$$5x + 1 = 36$$

$$5x = 35$$

$$x = 7$$

Ответ: $x = 7$.

б) $\sqrt{2x - 4} = 0$

Решение: квадратный корень равен нулю только тогда, когда подкоренное выражение равно нулю

$$2x - 4 = 0$$

$$x = 2$$

Ответ: $x = 2$

в) $\sqrt{x^2 - 16} = 3$

Решение: возведем обе части в квадрат (правая часть положительна, дополнительных ограничений не требует)

$$x^2 - 16 = 9$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5.$$

Ответ: $x = \pm 5$.

г) $x - 5\sqrt{x} + 6 = 0$

Решение: сделаем замену $t = \sqrt{x}$, ($t \geq 0$) тогда $t^2 = x$.

Уравнение имеет вид $t^2 - 5t + 6 = 0$

$$D = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1$$

$$\sqrt{D} = 1$$

$$t_1 = \frac{5 + 1}{2} = 3, t_2 = \frac{5 - 1}{2} = 2$$

Возвращаемся к х:

$$\sqrt{x} = 3, x = 9$$

$$\sqrt{x} = 2, x = 4$$

Ответ: $x = 9, x = 4$.

Часть 2 (2 балла)

д) $\sqrt{3x + 4} = x - 2$

Решение: ОДЗ:

1. Подкоренное выражение: $3x + 4 \geq 0$

$$x \geq -\frac{4}{3}$$

2. Правая часть: $x - 2 \geq 0$

$$x \geq 2$$

3. Объединяем: $x \geq 2$

Возводим в квадрат обе части:

$$3x + 4 = (x - 2)^2$$

$$3x + 4 = x^2 - 4x + 4$$

$$3x + 4 - x^2 + 4x - 4 = 0$$

$$x^2 - 7x = 0$$

$$x = 0, x = 7.$$

Учет ОДЗ: $x = 7$ удовлетворяет всем условиям, $x = 0$ не подходит.

Ответ: $x = 7$

е) $\sqrt{x + 5} + \sqrt{x - 1} = 6$

Решение: 1. ОДЗ:

$$x + 5 \geq 0, x \geq -5$$

$$x - 1 \geq 0, x \geq 1$$

ОДЗ: $x \geq 1$

2. Возводим в квадрат правую и левую часть:

$$x + 5 = (6 - \sqrt{x - 1})^2$$

$$x + 5 = 36 - 12\sqrt{x - 1} + x - 1$$

$$5 = 35 - 12\sqrt{x-1}$$

$$12\sqrt{x-1} = 30$$

$$\sqrt{x-1} = 2,5$$

3. Снова возводим в квадрат: $x-1=6,25$

$$x = 7,25$$

Ответ: $x = 7,25$.

Интерактивные карточки для групповой работы

Данный комплект интерактивных карточек предназначен для организации деятельности на уроках алгебры в 8–9 классах при изучении иррациональных уравнений. Комплект включает три карточки разного уровня сложности, каждая из которых имеет свой цвет. Структура позволяет учителю гибко дифференцировать нагрузку в зависимости от подготовленности группы. Карточка №1 содержит простейшее уравнение. Учитель может использовать её на этапе первичного закрепления для работы в парах или малых группах, а также для «мозгового штурма» перед более сложными уравнениями. Карточка №2 содержит уравнение и три задания: составить равносильную систему, решить уравнение самостоятельно каждому участнику, а затем сравнить результаты и найти возможную ошибку. Эта карточка предназначена для учащихся 9 класса, уверенно решающих простейшие иррациональные уравнения и переходящих к уравнениям с переменной в правой части. Учитель может использовать её на этапе отработки метода равносильных систем, а также как элемент урока-соревнования, где более сильные ученики объясняют слабым их ошибки.

Состав комплекта

Карточка №1 (зеленая, базовый уровень)

Лицевая сторона:

Решите уравнение: $\sqrt{x+2} = 3$

Вопросы для группы:

1. Какое условие нужно проверить в первую очередь?
2. Объясните, почему проверка здесь формальна, но обязательна.

Оборотная сторона (для самопроверки):

Решение: $x + 2 = 9 \rightarrow x = 7$.

Проверка: $\sqrt{7+2} = \sqrt{9} = 3$, верно.

Ответ: 7.

Карточка №2 (желтая, средний уровень)

Лицевая сторона:

Решите уравнение: $\sqrt{2x-1} = x-2$

Задания для группы:

1. Составьте равносильную систему для этого уравнения.
2. Каждый участник решает самостоятельно, затем сверяет ответы.
3. Если ответы разошлись, найдите, на каком шаге ошибка.

Оборотная сторона:

Равносильная система:
$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ 2x-1 = (x-2)^2 \end{cases}$$

Решение квадратного уравнения: $2x - 1 = x^2 - 4x + 4$

$$x^2 - 6x + 5 = 0$$

$x = 1$ или $x = 5$.

Условие $x \geq 2 \rightarrow$ подходит $x = 5$.

Проверка: $\sqrt{2 \times 5 - 1} = \sqrt{9} = 3$, верно.

Ответ: 5.

Карточка №3 (красная, повышенный уровень)

Лицевая сторона:

Решите уравнение: $\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2} = 4$

Роли в группе: «Теоретик», «Вычислитель», «Контролер», «Спикер».

Оборотная сторона (краткие ответы):

Уединяем первый радикал: $\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{x-2}$

Возводим в квадрат:

$$x+6=16-8\sqrt{x-2}+x-2$$

$$8\sqrt{x-2}=10$$

$$x-2=1$$

$$x=3$$

Проверка: $\sqrt{3+6} + \sqrt{3-2} = 4$, верно.

Ответ: 3.

Рефлексия (заполни после работы)

1. Какие задания показались тебе самыми лёгкими? _____
2. В каких заданиях ты ошибся(лась)? Почему? _____
3. Какой новый метод решения иррациональных уравнений тебе понравился больше всего? _____
4. Оцени свою уверенность в решении иррациональных уравнений по шкале от 1 до 5: _____

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе была рассмотрена методика обучения школьников решению рациональных уравнений в курсе математики основной школы. Материал, связанный с уравнениями, составляет значительную часть школьного курса математики.

Сформулированная во введении цель была достигнута.

В рамках проделанной работы были решены следующие задачи:

1. Проанализированы теоретические основы изучения уравнений в школьном курсе математики;
2. Систематизированы типичные затруднения и классифицировать ошибки учащихся при решении уравнений различных типов;

В практической части разработан, теоретически обоснован комплекс методических материалов, обеспечивающих эффективное формирование учений и навыков в рамках содержательной линии иррациональных уравнений. Материал, связанный с уравнениями занимает значительную часть школьного курса математики. Необходимо учитывать два процесса, сопровождающие обучение. Первый процесс – постепенное возрастание количества классов уравнений и приемов их решения, различных преобразований, применяемых в решении. Второй процесс – установление разнообразных связей между различными классами уравнений, выявление общих классов; закрепление более обобщенных типов преобразований, упрощение описания и обоснования решений.

В результате взаимодействия этих процессов изученный материал должен представляться учащимся в сравнительно компактном виде, не затрудняющем, а наоборот, облегчающем усвоение нового.

Эта работа может быть рекомендована для практического использования студентами-практикантами математического факультета и учителями математики. Представленный материал может использоваться как на уроках, так и на факультативных занятиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Приказ Министерства просвещения РФ от 31 мая 2021 г. № 287 «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования» (ред. от 18.06.2025).
2. Примерная рабочая программа основного общего образования по математике (одобрена решением федерального учебно-методического объединения по общему образованию, протокол 3/21 от 27.09.2021 г.).
3. Примерные программы по учебным предметам. Математика. 5-9 классы. М.: Просвещение, 2011. 64 с.
4. Бекаревич А. Н. Основные вопросы методики преподавания уравнений в средней школе : автореф. дис. канд. пед. наук. Минск, 1955. С. 19-21.
5. Бекаревич А. Н. Уравнения в школьном курсе математики : пособие для учителей. Минск : Народная асвета, 1968. 216 с.
6. Виленкин Н. Я. Математика. 5 класс. В 2 ч. : учебник для общеобразоват. учреждений (базовый уровень) .М. : Просвещение, 2021. 158 с.
7. Глейзер Г. И. История математики в школе : VII-VIII кл. : пособие для учителей. М. : Просвещение, 1982. 240 с.
8. Дорофеев Г. В. Математика. 6 класс : учебник для общеобразоват. организаций . М. : Просвещение, 2018.
9. Жумаев М. Э. Краткий очерк существующих методических систем обучения решению задач // Проблемы современного педагогического образования. 2019. № 62-2. С. 112-115.
10. Иванова А.А., Семенова Е.А. Проблемные места в решении иррациональных уравнений в школьном курсе математики // Математика в школе. 2019. № 4. С. 23-27.
11. Исаева З. И. Деятельностный подход в процессе изучения уравнений в основной школе. Махачкала : ДГПУ, 2016. 112 с.
12. Кисельников И. В. Влияние изучения иррациональных уравнений в школьном курсе математики на активизацию учебно-познавательной

деятельности учащихся // Научно-методический журнал «Концепт». 2022. № 02. С.101-113.

13. Колягин Ю. М., Оганесян В.А. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. М. : Просвещение, 1975. 462 с.

14. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 8 класс : учебник для общеобразоват. Учреждений. М. : Просвещение, 2024. 157 с.

15. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 класс. В 2 ч. : учебник для общеобразоват. учреждений с повышенным уровнем математической подготовки (углубленный уровень). М. : Мнемозина, 2019. 234 с.

16. Никольский С. М. Алгебра. 8 класс : учебник для общеобразоват. учреждений. М. : Просвещение, 2022. 310 с.

17. Нуруллин Н. И. Иррациональные уравнения в основной школе // Материалы 5-й Всероссийской научно-методической школы-семинара «Непрерывность образования от школы к вузу». Ульяновск, 2021. С. 112-115.

18. Оганесян В. А. Методика преподавания математики в средней школе. Частная методика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов. М. : Просвещение, 1974. 352 с.

19. Пичурин Л. Ф. За страницами учебника алгебры : книга для учащихся 7-9 классов средней школы. М. : Просвещение, 1990. 224 с.

20. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе : учеб. пособие для студентов пед. вузов. М. : Просвещение, 2002. 224 с.

21. Тестов В. А. Профессиональная направленность предметной подготовки учителя математики // Вестник Ярославского государственного университета. 2010. № 4. С. 88-92.

22. Устименко В. В. Обучение школьников решению иррациональных уравнений в контексте укрупнения дидактических единиц // Вестник ВГУ. Серия: Проблемы высшего образования. 2018. № 2. С. 91-94.

23. Фирстова Н. И. Иррациональные уравнения: основные методы и приемы решения // Математика в школе. 2020. № 8. С. 29-34.
- 24.Фридман Л. М. Теоретические основы методики обучения математике: учеб.-метод. лит. 3-е изд. М. : URSS, 2009. 244 с.
- 25.Эрдниев П. М. Укрупнение дидактических единиц как технология обучения : в 2 ч. М. : Просвещение, 1992. 431 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Левая страница математического дневника

Поле	Содержание
Дата	— . — . —
Тема	Иррациональные уравнения
Уравнение	(записывается исходное уравнение)
Анализ типа уравнения	(Есть ли радикалы? Сколько?)
ОДЗ	Запись условия: $f(x) \geq 0$, ...
Условие на правую часть (если есть $g(x)$)	$g(x) \geq 0$
Решение (пошагово)	1. ... 2. ... 3. ..
Найденные корни	$x_1 = \dots, x_2 = \dots$
Проверка корней подстановкой в исходное уравнение	x_1 : ... $\rightarrow$ вывод x_2 : ... $\rightarrow$ вывод
Ответ	

Правая страница математического дневника

Поле	Содержание
Самооценка	(Оцени свою уверенность при решении по шкале 1–5)
Что было самым трудным?	(Запись своими словами)
Какая ошибка могла быть допущена?	(Предположения)
Совет самому себе	(Что нужно запомнить / повторить)
Работа над ошибками (если они были)	Исправление неверного шага
Подпись учителя / комментарий	

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
высшего образования учреждение
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»
Форма обучения: заочная

Утверждаю: зав. кафедрой
« 12 » 09 20 25 г.
Паньженский В.И.

Задание

по ВКР студента Баклушиной Елены Ивановны
(ФИО полностью)

Тема работы Методические материалы к изучению содержательной линии
«Уравнения» в курсе математики основной школы

Утверждена приказом по университету от « 25. 09 » 20 25 г. № 1102/0

Срок сдачи студентом законченной работы « 25 » 05 20 26 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1	Роль и место содержательно-методической линии «Уравнения» в школьном курсе математики основной школы	сентябрь- октябрь 2025	Выполнено
2	Содержательные и временные различия в изучении темы «Уравнения» в базовом и углублённом курсах алгебры	октябрь- ноябрь 2025	Выполнено
3	Типичные ошибки допускают учащиеся при решении различных видов уравнений	ноябрь- декабрь 2025	Выполнено
4	Теоретические основания для разработки комплекса методических материалов по теме «Иррациональные уравнения»	декабрь- январь 2026	Выполнено
5	Дидактические разработки по теме «Иррациональные уравнения»	Февраль 2026	Выполнено
6	Оформление списка литературы	Март 2026	Выполнено

Дата выдачи задания « 11 » 09 2025 г.

Руководитель  (подпись) Муромова Е. Г. (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению Ванущина (подпись) Ванущина Е. Г. (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студента (ки) 5 курса ФФМЕН
заочной формы обучения

Бажушнина Елена
Ивановна

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Бажушнина Елена Ивановна,
Ф.И.О. студента

студент (ка) 5 курса заочной формы обучения направления подготовки
44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика»
прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ»
бакалаврской работы на тему «Методические материалы
к изучению содержания свойств мним. Уравнение
в курсе математики основных мнений»,
выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а
также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ,
кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен (на) с действующим Стандартом университета
«Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным
программам высшего образования – программам бакалавриата, программам
специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение
плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из
университета.

Бажу
Подпись
10.03.26
дд.мм.гггг

ВКР представлена на проверку 10.03.26
дд.мм.гггг

Руководитель ВКР Исупова Е. Г.
подпись И.О.Ф.

ПРОТОКОЛ

проверки на оригинальность в системе "Антиплагиат.ВУЗ" выпускной квалификационной работы на тему «Методические материалы к изучению содержательной линии «Уравнения» в курсе математики основной школы» студентки 5 курса **Баклушиной Елены Ивановны** направления подготовки 44.03.01 "Педагогическое образование"

профиль подготовки "Математика"

Руководитель ВКР Журавлева Е.Г.



Отчет предоставлен сервисом
«Антиплагиат» - <http://on7gu.antiplagiar.ru>



Отчет о проверке

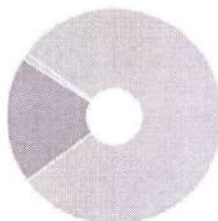
Автор: Баклушина Елена Ивановна

Проверяющий: Журавлева Екатерина Геннадьевна

Название документа: Методические материалы к изучению содержательной линии "Уравнения" в курсе математики основной школы

Организация: Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Пензенский государственный университет"

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
19,39%

Оригинальность:
50,18%

ИИ-контент:
0%

Цитирование:
0,43%

Самоцитирование:
0%

- «Совпадения», «Цитирование», «Самоцитирование», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.
- Проверено: 94,73% текста документа, исключено из проверки: 5,27% текста документа. Разделы и элементы, отключенные пользователем: Библиография, Таблицы

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 151

Количество страниц: 32

Тип документа: Выпускная квалификационная работа

Символов в тексте: 90300

Дата проверки: 11.03.2026 10:27:54

Слов в тексте: 14589

Дата корректировки: 30.06.2026 09:53:26

Число предложений: 2063

Комментарий: не указано

Руководитель ВКР

11.03.26

Е.Г. Журавлева

дата, подпись

ОТЗЫВ

**РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Методические материалы к изучению содержательной линии
«Уравнения» в курсе математики основной школы»
студентки Баклушиной Елены Ивановны
факультета физико-математических и естественных наук
направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»
профиль «Математика», гр. 213ФПМ1**

Выпускная квалификационная работа Баклушиной Елены Ивановны посвящена разработке методического материала для подготовки обучающихся 8-9 классов к решению иррациональных уравнений.

В школьном курсе алгебры уравнения занимают важное место. Линия уравнений и неравенств основана на построении и изучении математических моделей, включает вырабатывание и совершенствование техники алгебраических преобразований для решения уравнений, неравенств и систем. В процессе изучения данной темы у учащихся формируются способности строить и исследовать математические модели при решении задач из смежных дисциплин. Значительное большинство задач о количественных отношениях и о пространственных формах окружающей действительности решается с помощью уравнений. Уравнения являются существенной частью математических средств, используемых в математическом моделировании. Установление междисциплинарных связей в образовательной практике ведет к качественному развитию общекультурных компетенций. Согласно программе для классов с углубленным изучением математики в результате изучения темы "Уравнения" учащиеся должны научиться решать различные уравнения и использовать приобретенные знания, умения и навыки в практической деятельности.

Выпускная квалификационная работа Баклушиной Е.И. состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

В ходе выполнения работы были решены следующие задачи: проанализированы теоретические основы изучения уравнений в школьном курсе математики; систематизированы типичные затруднения и классифицированы ошибки учащихся при решении уравнений различных типов; разработан комплекс методических материалов, обеспечивающих эффективное формирование умений и навыков в рамках содержательной линии иррациональных уравнений.

Работа является самостоятельным исследованием. Полученные результаты могут быть использованы в общеобразовательных организациях для повышения эффективности образовательного процесса.

Выпускная квалификационная работа Баклушиной Е.И. удовлетворяет требованиям, предъявляемым к выпускным работам и заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель, к.п.н., доцент кафедры
«Математическое образование»



Е.Г. Журавлева