

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное**  
**учреждение высшего образования**  
**ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. Г. БЕЛИНСКОГО**

Факультет физико-математических  
и естественных наук

Кафедра «Математическое  
образование»

Направление подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»  
Профиль подготовки «Математика»  
Форма обучения: заочная

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА**  
**бакалаврская работа на тему**

**«Методические особенности изучения уравнений с параметром в 7-9  
классах»**

Студент

 15.06.23  
(подпись, дата)

Митрофанова Анастасия Сергеевна  
(ФИО полностью)

Руководитель

 15.06.23  
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.  
(ФИО)

Нормоконтролёр

 29.06.23  
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.  
(ФИО)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 26.06.23 № 14)

Заведующий кафедрой

 26.06.23  
(подпись, дата)

Паньженский В.И.  
(ФИО)

Работа защищена с оценкой хорошо (протокол заседания ГЭК от 13.04.23 № 6)

Секретарь ГЭК

 13.04.23  
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.  
(ФИО)

Пенза 2023

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                                                   |           |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Введение.....                                                                                     | 3         |
| <b>Глава 1. Теоретические аспекты изучения уравнений с параметром в 7-9 классах .....</b>         | <b>6</b>  |
| 1.1 Некоторые сведения о задачах с параметром .....                                               | 6         |
| 1.2 Основные методы решений уравнений с параметром.....                                           | 8         |
| 1.3 Анализ содержания темы «Уравнения с параметром» в школьных учебниках алгебры 7-9 классов..... | 10        |
| 1.4 Линейные и дробно-рациональные уравнения с параметром.....                                    | 19        |
| 1.5 Квадратные уравнения с параметром.....                                                        | 24        |
| 1.6 Уравнения, содержащие модуль и параметр.....                                                  | 27        |
| <b>Глава 2. Методические аспекты изучения уравнений с параметром в 7-9 классах. ....</b>          | <b>31</b> |
| 2.1 Программа и содержание элективного курса по теме: "Решение уравнений с параметром" .....      | 31        |
| 2.2 Фрагменты конспектов лекционных и практических занятий элективного курса .....                | 37        |
| Заключение.....                                                                                   | 55        |
| Список литературы.....                                                                            | 57        |

## Введение

Задачи с параметрами – один из наиболее трудных разделов школьного курса математики. Специфика данных задач заключается, прежде всего, в их творческом и исследовательском характере. Для выполнения этих заданий недостаточно прочного усвоения теоретического содержания школьного курса математики, необходимо также иметь развитое логическое мышление, умение ориентироваться в нестандартных ситуациях, определенные навыки исследовательской работы, достаточно высокий уровень общей математической культуры [8].

ОГЭ – итоговый экзамен для выпускников 9 классов за курс основного общего образования в России. Сдача экзамена на «отлично» требует умения решения задач второй части экзамена. В одном из заданий письменной части можно встретить задачи с параметром, которые на первый взгляд могут вызвать трудности у выпускников 9 классов. Научиться решать задачи с параметрами на уровне ОГЭ очень важно, так как они встретятся на Едином государственном экзамене (ЕГЭ) по математике профильного уровня и на олимпиадах, которые позволят получить преимущества при поступлении в высшие учебные заведения, так как демонстрируют умение выстраивать логическую цепочку рассуждений и высокий уровень математической культуры обучающихся. Задачи с параметрами способствуют развитию вариативного мышления и фундаментальности знаний, тем самым позволяют выявить наиболее способных абитуриентов для вузов, требования к которым с каждым годом повышаются.

Приобретение навыков решения нестандартных заданий, в том числе задач с параметрами, учащимися школ по-прежнему остается актуальным. Педагоги сталкиваются с трудностями при обучении решению таких задач, несмотря на наличие большого количества материалов по теме. Причина понятна: основная стратегия математического обучения в школе – получение навыков и умений, позволяющих решать определенный набор стандартных

однотипных задач. Уравнения с параметром к такому типу не относятся, так как требуют для своего решения более высокой математической подготовки для проведения сложных логических рассуждений, исследований, выполнения построений, порой достаточно объемных и непохожих на другие задачи [2].

Рассматриваемый материал не относится к базовому уровню, поэтому на его изучение в школьной программе выделяется мало времени или не выделяется вообще. По этой причине обучающиеся на олимпиадах и экзаменах совершают много ошибок при громоздких вычислениях и построениях или вовсе не справляются с такими заданиями.

**Объектом** выпускной квалификационной работы является процесс обучения математике школьников 7-9 классов.

**Предметом** – методы обучения решению задач с параметром обучающихся 7-9 классов.

**Цель** данной работы: разработка методики обучения решению уравнений с параметром в 7-9 классах.

Для реализации этой цели потребовалось решить следующие **задачи**:

1. Провести анализ психолого-педагогической, методической литературы по теме исследования;
2. Раскрыть ключевые понятия темы «Уравнения с параметром»;
3. Выявить виды уравнений с параметром и методы их решения;
4. Проанализировать учебники по алгебре по соответствующей теме за 7-9 классы;
5. Рассмотреть методы и алгоритмы решения линейных, квадратных, дробно-рациональных уравнений с параметром.
6. Разработать элективный курс на тему: "Решение уравнений с параметром".

При выполнении работы были использованы следующие методы исследования: изучение учебной и методической литературы по теме исследования, анализ, обобщение материалов учебно-методических пособий, самостоятельное решение заданий с параметром, их классификация.

Практическая значимость выпускной квалификационной работы состоит в том, что в ней представлен материал для начального изучения темы «Решение уравнений с параметром», который будет полезен будущим учителям математики, а также учителям и студентам-практикантам, планирующим осуществлять целенаправленную подготовку учащихся к решению таких задач.

Выпускная квалификационная работа включает в себя введение, две главы, заключение, список литературы.

## Глава 1. Теоретические аспекты изучения уравнений с параметром в 7-9 классах

### 1.1 Некоторые сведения о задачах с параметрами

Толковый словарь математических терминов дает следующее определение параметру: «*Параметр (греч. *parametron* – отмеривающий) – величина, входящая в формулы и выражения, значение которой является постоянным в пределах рассматриваемой задачи, но в другой задаче меняет свои значения*» [6].

Если в уравнении (неравенстве и их системах) некоторые коэффициенты заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами (*a, b, c, ..., z*), то они называются *параметрами*, а уравнение (неравенство и их системы) называется *уравнением/неравенством с параметром/ами*.

Наличие параметра в уравнениях и неравенствах приводит к тому, что исходная задача распадается на серию однотипных задач, соответствующих возможным числовым значениям параметра. Порой кажущаяся на первый взгляд простота задач с параметрами весьма обманчива, так как зачастую возникают нестандартные и сразу не очевидные ситуации.

Задачи с параметрами имеют повышенный уровень сложности, потому что не существует универсального (единого) алгоритма их решения (в силу многообразия формулировок задачи), ведь наличие и значения параметров существенно влияют на логический и технический ход решения задачи, и форму ответа. Однако для любого рода задач всегда следует определить множество допустимых значений переменной и параметра, при которых уравнение (неравенство и их системы) имеет смысл, затем для каждой допустимой системы значений параметров найти соответствующие множества решений.

Задачи с параметрами являются упрощенным прообразом важных научно исследовательских задач. Они чрезвычайно многообразны: задачи на исследование квадратичной функции и систем линейных уравнений, задачи на

делимость многочленов, задачи на минимум и максимум, геометрические задачи с параметрами («логические» задачи) и т.д. Порой решение задачи и не выглядит слишком изощренно, но имеет какую-то особенность, изюминку.

Уравнение, неравенство и их системы могут быть представлены в виде как выражений, содержащих *одну* переменную и *один* параметр, так и выражений, содержащих *несколько* переменных и/или *несколько* параметров.

Пусть дано уравнение с двумя переменными:

$$F(x; a) = 0 \quad (1)$$

Задачи с параметрами виртуозны, но в основном в своей классической формулировке выглядят следующим образом:

– для каждого значения переменной ***a*** из некоторого числового множества ***A*** решить уравнение (неравенство и их системы) относительно ***x***.

В таком случае уравнение (1) называют *уравнением/неравенством с переменной *x* и параметром *a**, а множество ***A*** – областью изменения параметра ***a***. Если же ограничение над областью отсутствует (***A*** не задано в условии задачи), то подразумевается множество всех действительных чисел или естественная область допустимых значений параметра ***a***.

Решить уравнение (неравенство и их системы) с параметром –это значит, на множестве действительных чисел решить семейство уравнений (неравенств и их систем), получаемых из (1), при всех допустимых значениях параметра ***a***. Другими словами, указать, при каких значениях параметра ***a*** какое решение имеет уравнение (неравенство и их системы), и при каких не имеет решения [8].

## 1.2 Основные методы решений уравнений с параметрами

Чаще всего в литературных источниках можно встретить следующую классификацию методов решений задач с параметрами.

### **Аналитический метод.**

Это способ прямого решения, повторяющий стандартные процедуры нахождения ответа в задачах без параметра. При решении заданий аналитическим способом требуется владение методами решения уравнений, неравенств и их систем, определенные навыки математической деятельности, уровня логического мышления, глубокое понимание изученного материала школьной программы.

Владение следующими алгебраическими преобразованиями: метод сведения задачи к равносильной, перебор различных значений параметра, замена переменной, выявление необходимых и достаточных условий или необходимых условий.

### **Графический метод.**

Это наглядный способ решения задачи путем построения графиков. В зависимости от условия (с переменной  $x$  и параметром  $a$ ) строятся и рассматриваются графики или в координатной плоскости  $(x; y)$ , или в координатной плоскости  $(x; a)$ . Для успешного решения заданий графическим методом необходимо знать типы элементарных функций (линейные, степенные, показательные, логарифмические, тригонометрические, обратные тригонометрические), их свойства и графики.

Использование графического способа даже схематически помогает найти решение задачи гораздо проще, чем аналитическим методом, а в некоторых задачах является единственно возможным путем их решения.

Следует понимать, что владение только одним методом не дает гарантию решения 100% задач с параметрами, которые могут встретиться обучающимся, поэтому необходимо освоить их все.

Казалось бы, область задач с параметрами необъятна, однако не трудно выделить ее фундаментальные образующие. Это задачи, приводящие к исследованию уравнений или неравенств не выше второй степени, к их системам и совокупностям, к задачам, использующим свойства квадратного трехчлена и линейного двучлена. С рассмотрением каждой новой функции появляются дополнительные условия в заданиях, связанные со спецификой их решения (иррациональные, например), однако они обычно сводятся к уравнениям, неравенствам, системам и совокупностям, о которых говорилось выше (линейные и квадратные уравнения и неравенства).

В 7-9 классах изучается небольшой набор функций, основными из которых являются линейная (в том числе ее частный случай – прямая пропорциональность), обратная пропорциональность и квадратичная функция. Выпускник основной школы должен уметь узнавать формулы, графики, знать свойства перечисленных функций, уметь строить их графики, переходить от одной записи формулы к другой, находить области определения функций, исследовать функцию, использовать свойства функций при решении задач, оперировать понятиями «сдвиг», «симметрия», «сжатие» и «растяжение» при построении графиков функций. Приобрести данные навыки необходимо, так как в ОГЭ обязательно применение графика для решения задачи [8].

Для каждого вида уравнений существует большое количество материалов с заданиями и решениями, содержащихся в учебных пособиях и на образовательных порталах Интернета. Каждый вид уравнений с параметром следует рассматривать, как отдельную тему, за счет многообразия формулировок заданий, способов их решения и, конечно, уровня сложности (и проверяемых математических знаний). В пунктах 1.5-1.7 данной главы будут рассмотрены линейные, дробно-рациональные, квадратичные уравнения, а также уравнения, содержащие знак модуля, представлен небольшой комментарий к соответствующему виду уравнений и примеры задач с параметром с ними в целях ознакомления с комплексом возможных заданий, которые могут встретиться на олимпиадах и ОГЭ.

### 1.3 Анализ содержания темы «Уравнения с параметром» в школьных учебниках алгебры 7-9 классов

Для подготовки элективного курса по теме «Решение задач с параметром» необходимо проанализировать учебники общеобразовательных классов курса алгебры, используемых большинством школ города Пенза, чтобы выяснить, насколько полно в них отражены темы и задания, использующие понятия «параметр» и «уравнение с параметром». Для анализа были отобраны учебники авторов Ю. Н. Макарычева (под редакцией С. А. Теляковского) и А. Г. Мордковича.

Начнем с серии учебников **Ю. Н. Макарычева и др. «Алгебра»**.

В учебнике «Алгебра. 7 класс» в главе 1 «Выражения, тождества, уравнения» в параграфе 1 «Выражения» можно найти задания, отдаленно напоминающие задачи с параметром, где необходимо найти значения выражения при неизвестной (большим преимуществом является возможность большого выбора заданий для учителя). Кроме этого, в параграфе присутствуют задания с параметром на сравнение двух величин.

В главе 2 «Функции» в первых параграфах дается определение функции, зависимой и независимой переменных. Понятие «параметр» в учебнике не встречается, но данное определение уже подготавливает к его введению. Здесь же предлагаются задания на анализ изменения одной величины в зависимости от другой.

В этой же главе в параграфе 6 «Линейная функция» изучается прямая пропорциональность, где, не вводя понятие параметр, его используют.

А именно, выясняется расположение графика функции  $y = kx$  в зависимости от коэффициента  $k$ , который и является параметром. В упражнениях к параграфу можно найти те, где необходимо сопоставить графики функций и их записи, а затем построить другие графики, меняя коэффициенты  $k$  и  $b$  ( $y = kx + b$ ) на противоположные, а также увеличивая и уменьшая их, проанализировать и сделать выводы.

В дополнительных задачах к этой главе можно встретить такие задачи с параметром, где в линейном уравнении необходимо найти такое значение  $a$ , при котором график уравнения будет проходить через заданную точку (№1152-1153) или же где заданные прямые будут иметь точку пересечения (№1159-1161), а также задания, где для системы уравнений необходимо найти определенное количество решений (№1165-1167). На каждую из формулировок условия в учебнике отведено по 2-3 задания.

После основного курса в конце учебника также можно найти дополнительный раздел «Задачи повышенной трудности», где самым первым представлено задание с параметром, которое звучит так:

№1184. Найдите все натуральные значения  $a$ , при которых корень уравнения  $(a - 1)x = 12$  является натуральным числом [1].

В учебнике «Алгебра. 8 класс» в главе 3 «Квадратные уравнения» в статье «Для тех, кто хочет знать больше» после основного материала предлагается к изучению параграф «Уравнения с параметром», где вводится понятие параметра, уравнения с параметром, а также рассматривается, что значит «решить уравнение с параметром» на примере линейных и квадратных уравнений. Кроме теории здесь даются и упражнения, в которых необходимо

- решить уравнения с параметром (№641-644, 647-648),
- выяснить, при каких значениях параметра уравнение будет иметь единственный корень (№645),
- выяснить, при каких значениях параметра сумма квадратов корней уравнения будет принимать наименьшее значение (№646),
- выяснить, при каких значениях параметра сумма корней уравнения будет равна 7 (№649).

В разделе дополнительных упражнений к теме «Квадратные уравнения» для повторения или более углубленного изучения материала также можно найти задачи с параметром, подобные тем, что даны в дополнительном параграфе

(№651, 659, 672, 684) и чуть более сложные, в которых нужно найти значение параметра при известном отношении корней друг к другу или же их знаков (№673, 676-679, 686-687).

В разделе задач повышенной сложности представлены задачи, подобные тем, что уже рассматривались в ранее указанных разделах (№1123-1124, 11261127) [4].

В ученике «Алгебра. 9 класс» в 1 главе «Квадратичная функция» формулируются свойства функции в зависимости от коэффициента, стоящего перед  $x^2$ , а в упражнениях предлагается задача на нахождение нулей функции (№35, 37), которая зависит от параметра.

В «Дополнительных упражнениях» к главе даны следующие задачи с параметром: на исследование области значений функции (№231), на расположение графика относительно прямой (№238, 240), на исследование значения параметра при известной вершине параболы (№239) или нулях функции (№241), и прохождение через точки функции, содержащей в себе параметр (№242).

Также в этой главе рассматриваются графики функций  $y = ax^2 + n$  и  $y = a(x - m)^2$ , которые необходимы для изучения свойств квадратичной функции (отработка использования графического метода) и использования их при анализе уравнений с параметром.

В конце учебника после основной программы даны «Упражнения для повторения курса 7-9 классов». С изучаемой темой связаны задачи раздела «Уравнения и системы уравнений», в которых необходимо выяснить, при каких значениях параметра уравнения или системы уравнений имеют: решения (№976); имеют единственное решение (№978); хотя бы один корень (№933) или не имеют их вообще (№934); задача с системой уравнений, в которой необходимо подобрать два значения так, чтобы система не имела решений, имела бесконечно много решений и имела единственным решением такую пару чисел, в которой  $x = 4$  (№961).

В разделе «Задачи повышенной трудности» в учебнике 9 класса можно найти задания, где нужно найти такое значение параметра, при котором на корни квадратного трехчлена накладывается дополнительное условие: один корень является квадратом другого (№1048); или корни принадлежат заданному интервалу (№1049); или же они различны (№1050); а также задания, подобные ранее указанным (№1039, 1045) [5].

По серии учебников Ю. Н. Макарычева можно сделать следующий вывод: в основной курс 7, 8 и 9 классов задачи с параметром не входят, однако начиная с 7 класса уже идут предпосылки к формированию у школьников понятия «параметр» (через зависимые и независимые переменные); формируются навыки исследования функций в 8-9 классах (использование графического метода при изменяющихся коэффициентах); а для более любознательных и способных обучающихся в 8 классе появился дополнительный параграф про уравнения с параметром, а также глава с задачами повышенной трудности, в которую в 8 и 9 классах авторы добавили базовые задачи с параметрами, которые могут быть использованы при разработке элективного курса.

Наиболее часто в школах можно найти учебники под авторством **А. Г. Мордковича**. Анализ пособия показал, что в 7 классе в главе 2 «Линейная функция» при изучении 7 параграфа «Линейное уравнение с двумя переменными и его график» в дополнительных задачах даны задания с параметром, в которых необходимо найти значение коэффициента в уравнении при том, что известно его решение, то есть пара чисел, удовлетворяющих уравнению (№7.26-7.29).

В заданиях 8 параграфа «Линейная функция и ее график» есть два задания, в которых нужно найти значение параметра (коэффициент при  $x$  или свободный член), если график заданной линейной функции проходит через определенную точку (№8.58-8.59) [2, 3].

В 3 главе «Квадратичная функция. Функция  $y = \frac{k}{x}$ » задачника 8 класса дано задание №17.10, аналогичное тому, что представлено в параграфе про линейную функцию (найти коэффициент при  $x^2$ , при котором парабола проходит через данную точку).

Для функций  $y = kx^2$  и  $y = \frac{k}{x}$  в самом конце подборок упражнений для параграфов можно найти несколько задач с параметром, а конкретно: №17.59-17.60, 18.54-18.55 – задания с параметром на определение количества общих точек графика и прямой  $x = a$  для каждого  $a$  из области действительных чисел и прямой  $y = a$  для положительных  $a$  и  $a \in [0; 4]$ . Данные задачи подобны тем, что встречаются во 2 части ОГЭ. Здесь они отмечены, как задания с повышенным уровнем сложности. №17.61-17.63, 18.56-18.57 – задания с параметром на нахождение определенного количества решений уравнения при наложении дополнительного условия на параметр.

В заданиях для функции  $y = ax^2 + bx + c$  даны такие формулировки задач, где необходимо найти такие значения параметра, при которых график функции пересекает или касается какой-либо координатной оси (№20.29-20.30), используется понятие оси симметрии (№20.31, 20.47), вершины параболы (№20.45-20.46, 20.48, 20.49, 20.51-20.53). Именно в 20 параграфе впервые в формулировке условия задачи используется слово «параметр». Это происходит в задачах №20.59-20.60, в которых нужно выяснить, для каких значениях параметра квадратичная функция будет возрастать или убывать на заданных промежутках, а также принимать равные значения в разных точках (№20.61).

В следующем параграфе «Графическое решение квадратных уравнений» предлагаются задания, где непосредственно представлены уравнения, содержащие параметр в правой его части, а по условию необходимо найти такое значение  $P$ , при котором уравнение имеет один, два, хотя бы один корень или не имеет их вообще (№21.17-21.21). Подобно этому заданию дается задача, в которой нужно указать, при каких значениях параметра графики функций

пересекаются в одной, двух точках, имеют их бесконечно много или не пересекаются (№21.29). Все задачи автором отмечены, как усложненные.

В главе 4 «Квадратные уравнения» в теории и на практике используются аналитический и графический методы решения уравнений. В задачнике даны такие уравнения с параметром, где необходимо: выяснить вид квадратного уравнения (№24.34) или решить его при найденных значениях параметра (№24.33); а также найти значения параметра, если известен один из корней квадратного уравнения (№24.35-24.36).

В параграфе «Формулы корней квадратного уравнения» с параметром представлено несколько заданий, одни из которых на нахождение одного или двух корней в зависимости от параметра (№25.22, 25.24), или на нахождение общей точки (№25.26), другие – на доказательство (№25.23, 25.25), которые сформулированы чуть сложнее, чем мы привыкли, но и требуют немного другого уровня анализа задачи, как минимум, в том, что для ее упрощения нужно перефразировать условие.

При изучении темы «Теорема Виета» предлагаются задания на нахождение такого значения параметра, при котором сумма, разность, произведение или отношение корней равны заданному числу (№26.23-26.25, 26.40-26.41, 26.45-26.46), сумма квадратов корней задана (№26.44), либо же корни являются противоположными (№26.42) или взаимнообратными числами (№26.43).

В параграфе «Квадратные неравенства» также можно найти задачи с параметром в уже известной нам классической формулировке: «При каких значениях параметра квадратное уравнение а) имеет два различных корня; б) имеет один корень; в) не имеет корней?» (№30.34-30.36). А также представлены задачи, в которых уравнение имеет или не имеет действительных корней (№20.37-20.39), имеет целочисленные решения (№30.40). В этом параграфе также даны задачи с неравенствами с параметром, при которых неравенство выполняется при всех значениях  $x$  (№30.53-30.56) или на указанном промежутке (№30.57-30.58) [5, 6].

В 1 параграфе задачника 9 класса «Линейные уравнения и квадратные неравенства» даны стандартные формулировки задач с параметром (№1.15, 1.23), к новым заданиям можно отнести №1.24-1.26, 2.37, в которых нужно найти «такое целочисленное значение параметра  $p$ , при котором во множестве решений неравенства содержатся ...» несколько целых/ натуральных/ положительных/отрицательных чисел или не содержится их вообще.

В главе «Системы уравнений» задания с параметром встречаются в последний раз. В №5.36-5.38 нужно выяснить, при каком значении параметра, пара чисел является решением системы уравнений, имеет одно решение, имеет три решения [13, 14].

По данной линии учебников можно сделать следующий вывод: введение задач с параметром автором, аналогично прошлой серии, активно начинается в 8 классе, когда школьники уже изучили линейные и квадратные уравнения и соответствующие им функции и их свойства, имеют представление об аналитическом и графическом способах решения задач. Здесь предлагаются задания начального уровня сложности (и достаточно много), которые можно использовать в элективном курсе. В отличие от учебников Ю. Н. Макарычева задания с параметром здесь встречаются в основном курсе программы, хоть и чаще всего представлены в конце списка предлагаемых упражнений, указывая на повышенный уровень сложности и характер дополнительного материала. Особенно следует отметить тот факт, что в упражнениях предлагаются задачи, аналогичные тем, которые выпускники 9 классов встречают на ОГЭ.

В целом, анализ данных учебных пособий показал, что отдельных занятий и тем на изучение задач с параметрами не отводится, хотя их можно встретить в достаточном количестве в учебниках 7 и 8 классов, но все они носят характер проверки знаний и умений, приобретенных во время изучения определенной темы, и предлагаются они как задания творческого характера. Ни в одном из рассмотренных учебников четко не раскрывается суть параметра и задач с параметрами. А также стоит отметить, что во всех

учебниках задания однотипны, хотя А. Г. Мордкович предлагает больше различных формулировок условий.

В силу своего богатого общекультурного потенциала и развивающего характера, соответствия целям математического образования, задачи с параметрами стали объектом пристального изучения многих математиков и методистов. В книгах большого количества авторов рассмотрен широкий класс задач с параметрами и различные методы их решения. Однако обилие задач в них привело к тому, что обучающиеся столкнулись с трудностями в ориентации в их обширном спектре. К тому же в ряде пособий подразумевается, что использующие их школьники свободно владеют основными методами решения любых задач школьной программы, что также затрудняет использование ими данных пособий.

В данной выпускной квалификационной работе собраны базовые задачи, соответствующие базовым школьным знаниям по соответствующим темам (линейная функция и ее график, решение линейных и квадратных уравнений и т. д.). Такой выбор основан на том, чтобы использовать разработку элективного курса как первую книгу в классе этих задач, постепенно вводить школьников в эту тему и научить их не бояться приступать к решению таких задач на олимпиадах и экзаменах.

## 1.4 Линейные и дробно-рациональные уравнения с параметром

Линейная функция – это функция, которую можно задать формулой  $y = kx + c$ , где  $x$  – независимая переменная,  $k$  и  $c$  – некоторые числа. Графиком линейной функции является прямая.

Если  $k > 0$ , то функция  $y = kx + c$  возрастает; если  $k < 0$ , то убывает.

Коэффициент  $k$ , угловой коэффициент, определяет угол между прямой и положительным направлением оси  $Ox$ : если  $k > 0$ , то этот угол острый, если  $k < 0$ , то этот угол тупой.

Изменение коэффициента  $c$  также влечет изменения в расположении прямой на плоскости: если  $c > 0$ , то график функции поднимается вверх на  $c$  единиц, если  $c < 0$  – опускается на  $|c|$  единиц.

Линейное уравнение представимо в виде  $ax - b = 0$ , где  $a$ ,  $b$  – произвольные параметры, принимающие допустимые значения,  $x$  – неизвестная переменная.

Алгоритм решения линейного уравнения или неравенства состоит из двух шагов:

1. перенести все слагаемые, содержащие  $x$  в левую часть уравнения или неравенства, оставшиеся слагаемые – в правую;
2. выразить  $x$ .

Выполнив шаг 1 в уравнении с параметром, начнем его анализ:

1) если  $a \neq 0$ , то получим, что  $x = \frac{b}{a}$ ; если  $a = 0$ , то решение зависит от параметра  $b$ :

2) если  $b = 0$ , то получим  $0 \cdot x + 0 = 0$ , где решением уравнения послужит любое значение  $x$ , взятое из множества всех действительных чисел  $R$ ;

3) если  $b \neq 0$ , то получим  $0 \cdot x + b = 0$ , что является противоречием, а значит, уравнение не имеет решений.

*Пример 1.* Решите уравнение  $kx + k^2 = 4 - 2x$ .

*Решение.* Решить уравнение – значит указать, при каких значениях параметра уравнение имеет решения, какие они, а также указать, при каких значениях не имеет решений.

Преобразуем уравнение, перенеся все зависимые от  $x$  переменные в одну сторону:

$$kx + 2x = 4 - k^2 \Leftrightarrow x(k + 2) = 4 - k^2.$$

Проанализируем полученное уравнение.

Если  $k + 2 \neq 0$ , то есть  $k \neq -2$ , то уравнение будет иметь решение  $x = \frac{4-k^2}{k+2} = \frac{(2+k)(2-k)}{2+k} = 2 - k$ , то есть  $x = 2 - k$ .

Если  $k = -2$ , то уравнение будет иметь вид  $0 \cdot x = 0$ , которому удовлетворяет любое действительное значение  $x$ .

*Ответ.* Если  $k \neq -2$ , то  $x = 2 - k$ ; если  $k = -2$ , то  $x \in \mathbb{R}$ .

Особенностью следующего примера является то, что прямая, заданная параметрически, не всегда параллельна оси абсцисс, другими словами, параметром будет служить угловой коэффициент.

Дробно-рациональная функция – это функция вида  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , где  $f(x)$  и  $g(x)$  – многочлены. Графиком ее является гипербола, парабола и кубическая парабола. Функция может иметь вертикальные, горизонтальные, наклонные асимптоты. При решении таких часто используется графический метод, как в следующем примере.

*Пример 2.* Определите, при каких значениях параметра  $k$  уравнение

$$\frac{(x^2 + 4)(x - 1)}{1 - x} = kx$$

имеет с графиком одну общую точку.

*Решение.* Данное задание удобно решать графически. Введем две функции.

Область определения  $y_1 = \frac{(x^2+4)(x-1)}{1-x}$  – это  $x \neq 1$ .

Упростим выражение:

$$y_1 = \frac{(x^2 + 4)(x - 1)}{1 - x} = -\frac{(x^2 + 4)(1 - x)}{1 - x} = -x^2 - 4, x \neq 1.$$

График функции  $y = y_1(x)$  сводится к графику параболы  $y = -x^2 - 4$  с выколотой точкой  $(1; -5)$ , ветви параболы направлены вниз, вершиной является точка  $(0; -4)$ . Построим график (рисунок 1):

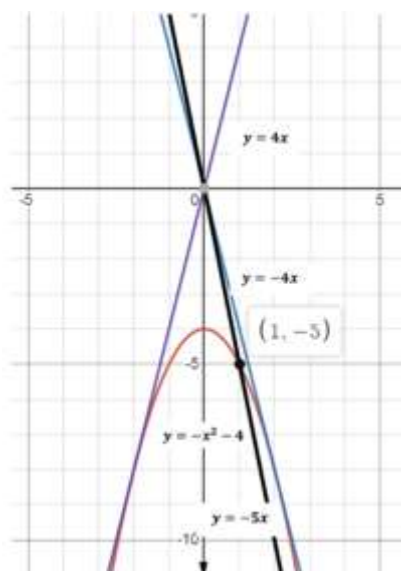


Рисунок 1 - График функции  $y = y_1(x)$  к примеру 2

Прямая  $y_2 = kx$  может иметь с построенным графиком ровно одну общую точку в двух случаях: либо является касательной к параболе  $y = -x^2 - 4$  (при этом точка касания не равна 1), либо она пересекает график в точке  $x = 1$  и какой-то второй точке.

Чтобы прямая касалась параболы в одной точке, дискриминант уравнения  $-x^2 - 4 = kx$  должен быть равен нулю:

$$k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 16 \Leftrightarrow k = \pm 4.$$

При  $k = -4$  точка касания  $x = 2$ , при  $k = 4$  точка касания  $x = -2$

Для другого случая подставим  $x = 1$  в уравнение  $-x^2 - 4 = kx$ . Получим  $k = -5$ . (Замечание: дискриминант этого уравнения больше нуля, а значит, есть еще одно решение). Значит, уравнение имеет одно решение при  $k = -5$ ,  $k = -4$ ,  $k = 4$ .

Ответ.  $-5; -4; 4$ .

Решение дробно-рациональных уравнений проходит по следующей схеме: данное в условии уравнение мы заменяем на равносильное уравнение (систему уравнений), не содержащее знака деления, путем умножения обеих частей уравнения на общий знаменатель левой и правой его частей. Далее следует решение полученного уравнения, (при условии соблюдения ОДЗ). Когда в таком уравнении появляется параметр, задача усложняется. Теперь при исключении посторонних корней требуется находить значение параметра, обращающее общий знаменатель в нуль, то есть решать соответствующие уравнения относительно параметра.

*Пример 3.* Решить уравнение

$$\frac{3ax - 5}{(a + 2)(x^2 - 9)} = \frac{2a + 1}{(a + 2)(x - 3)} - \frac{5}{x + 3}.$$

*Решение.* Обратим внимание на знаменатели в уравнении: там содержатся как переменная  $x$ , так и параметр  $a$ .

Сначала отметим, при каких значениях переменной уравнение не имеет смысла:  $x \neq \pm 3$ ; теперь проанализируем параметр  $a$ .

При  $a = -2$  уравнение не имеет смысла.

Переместим все слагаемые в левую часть уравнения, получим:

$$\frac{6ax + 9x - 21a - 38}{(a + 2)(x - 3)(x + 3)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(6a + 9) = 21a + 38 \\ x \neq \pm 3 \\ a \neq -2 \end{cases}$$

Рассмотрим отдельно первое уравнение  $x(6a + 9) = 21a + 38$ :

1 случай:  $6a + 9 = 0$ , тогда  $a = -1,5$ , получим  $x \cdot 0 = 21 \cdot (-1,5) + 38$ , а значит, решений нет;

2 случай:  $6a + 9 \neq 0$ , тогда получим решение  $x = \frac{21a+38}{6a+9}$ .

Вернемся к ОДЗ и выясним, при каких значениях параметра, полученный во втором случае  $x$ , является посторонним корнем:

Если  $x = 3$ , то  $21a + 38 = 3(6a + 9) \Leftrightarrow a = -\frac{11}{3}$ ,

Если  $x = -3$ , то  $21a + 38 = -3(6a + 9) \Leftrightarrow a = -\frac{5}{3}$ ,

А теперь соберем весь ответ: если  $a \neq -2, a \neq -1,5, a \neq -\frac{11}{3}, a \neq -\frac{5}{3}$ ,  
то уравнение имеет единственное решение  $x = \frac{21a+38}{6a+9}$ .

*Ответ.* При  $a \neq \{-\frac{11}{3}; -2; -\frac{5}{3}; -1,5\}$  решением будет  $x = \frac{21a+38}{6a+9}$ ; при  
 $a \in \{-\frac{11}{3}; -2; -\frac{5}{3}; -1,5\}$  уравнение не имеет решений.

## 1.5 Квадратные уравнения с параметром

Большинство заданий с параметром сводятся к рассмотрению квадратного уравнения, отсюда вытекает очень много свойств и условий, которые могут пригодиться в той или иной задаче [7]. Подробнее они будут разобраны в элективном курсе, а в ознакомительном характере мы также рассмотрим пример решения одной такой задачи с параметром.

Для начала вспомним некоторую информацию о квадратных уравнениях.

Корни квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ , абсциссы точек пересечения параболы с осью  $Ox$ , вычисляются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Кроме того, полезным может быть равенство

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

При решении задач, сводящихся к исследованию квадратных уравнений, нужно помнить о геометрической интерпретации квадратного уравнения, то есть, выделяя полный квадрат, получаем (при  $a \neq 0$ )

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right) = a(x - x_v)^2 + y_v,$$

$$\text{где } x_v = -\frac{b}{2a}, y_v = c - \frac{b^2}{4a}.$$

Квадратичной функцией называется функция вида  $y = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ), где  $x$  и  $y$  – независимые и зависимые переменные соответственно,  $a, b, c$  – заданные числа. Графиком функции является парабола, ветви которой направлены вверх, если  $a > 0$ , или вниз, если  $a < 0$ . График функции симметричен относительно прямой  $x = x_v$ . Также важно знать, что парабола может пересекать ось  $Ox$  в двух точках (каждой ветвью), и значения  $x$  в этих точках будут являться корнями соответствующего уравнения; парабола может касаться оси, то есть ее вершина лежит на этой прямой, тогда говорят, что соответствующее уравнение имеет один корень; парабола также

может не пересекать эту прямую – находиться выше или ниже оси  $Ox$ , в таком случае говорят, что соответствующее уравнение решений не имеет.

Необходимые и достаточные условия, задающие возможные случаи расположения корней квадратного уравнения.

1. Квадратное уравнение не имеет действительных корней, если

$$D = b^2 - 4ac < 0.$$

2. Квадратное уравнение имеет один действительный корень вида

$$x_1 = x_2 = x_0 = -\frac{b}{2a}, \text{ если } D = b^2 - 4ac = 0.$$

3. Квадратное уравнение имеет два действительных корня

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$
$$D = b^2 - 4ac > 0.$$

Для квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0)$ , имеющего корни  $x_{1,2}$  (случай  $D \geq 0$ ), выполняются формулы *теоремы Виета*:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

*Обратная теорема Виета*: если существуют действительные числа  $x_1$  и  $x_2$  такие, что  $x_1 + x_2 = -p$  и  $x_1 x_2 = q$ , то эти числа  $x_1$  и  $x_2$  являются корнями квадратного уравнения  $x^2 + px + q = 0$ .

Наиболее распространенный тип задач, связанный с квадратным трехчленом, – это определение корней квадратного уравнения, коэффициенты которого зависят от параметра. Следует помнить, что если коэффициент при  $x^2$  равен нулю, то уравнение сводится к линейному.

Чаще всего на квадратные уравнения и неравенства встречаются задачи на количество их решения, использование теоремы Виета, расположение корней относительно числа или промежутка [2, 15].

В следующем примере на корни уравнения задано дополнительное условие, которое может вызвать трудности при решении задачи, и здесь ее решить поможет теорема Виета.

*Пример 4.* Найдите значения параметра  $l$  и корни уравнения

$$x^2 - (l + 1)x + (2l^2 - 9l - 12) = 0,$$

если произведение его корней равно  $-21$ .

*Решение.* Применим теорему Виета. Чтобы она выполнялась, важно, чтобы коэффициент при старшем члене не был равен нулю (выполнено) и дискриминант был больше либо равен нулю (условие двух корней для уравнения):

$$\begin{aligned} \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{-(l+1)}{1}, \\ x_1 x_2 = \frac{2l^2 - 9l - 12}{1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = l + 1, \\ x_1 x_2 = 2l^2 - 9l - 12, \end{cases} \\ &2l^2 - 9l - 12 = -21 \Leftrightarrow 2l^2 - 9l + 9 = 0 \\ &, D = 81 - 72 = 9, \\ &l_1 = \frac{9-3}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2} = 1,5, \quad l_2 = \frac{9+3}{2 \cdot 2} = 3 \end{aligned}$$

Подставим поочередно каждое значение параметра в систему уравнений и найдем значения  $x$ :

Если  $l_1 = 1,5$ , то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1,5 + 1, \\ x_1 x_2 = 2 \cdot (1,5)^2 - 9 \cdot 1,5 - 12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2,5 - x_2, \\ x_1 x_2 = -21. \end{cases}$$

Подставим  $x_1$  во второе уравнение, получим

$$(2,5 - x_2)x_2 = -21 \Leftrightarrow -x_2^2 + 2,5x_2 + 21 = 0,$$

умножим уравнение на  $-2$ :  $2x_2^2 - 5x_2 - 42 = 0$ , запишем  $-5$  в виде разности и разложим выражение на множители:

$$\begin{aligned} 2x_2^2 + 7x_2 - 12x_2 - 42 = 0 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x_2(2x_2 + 7) - 6(2x_2 + 7) = 0 &\Leftrightarrow (2x_2 + 7)(x_2 - 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{7}{2}, \\ x_2 = 6. \end{cases} \end{aligned}$$

Проверим, является ли данная пара чисел решением системы:

$$\begin{cases} -3,5 + 6 = 2,5, \\ (-3,5) \cdot 6 = -21, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2,5 = 2,5, \\ -21 = -21, \end{cases}$$

– да, является, значит, при  $l_1 = 1,5$ ,  $x_1 = -3,5$ ,  $x_2 = 6$ .

Теперь проверим, какие корни получаются, если  $l_2 = 3$ :

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 + 1, \\ x_1 x_2 = 2 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 - 12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 - x_2, \\ x_1 x_2 = -21, \end{cases} \\
& (4 - x_2)x_2 = -21 \Leftrightarrow x_2^2 - 4x_2 - 21 = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow x_2^2 + 3x_2 - 7x_2 - 21 = 0 \Leftrightarrow x_2(x_2 + 3) - 7(x_2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow (x_2 + 3)(x_2 - 7) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -3, \\ x_2 = 7. \end{cases}
\end{aligned}$$

Проверим, является ли данная пара чисел решением системы:

$$\begin{cases} -3 + 7 = 4, \\ (-3) \cdot 7 = -21, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 4, \\ -21 = -21, \end{cases}$$

Да, является, значит, при  $l_2 = 3x_1 = -3, x_2 = 7$  .

*Ответ.* При  $l = 1, 5x_1 = -3, 5, x_2 = 6$ ; при  $l = 3, x_1 = -3, x_2 = 7$ .

## 1.6 Уравнения, содержащие модуль и параметр

Уравнение вида  $|f(x, a)| = g(x, a)$  можно решить через два вида систем:

1) Через определение модуля:

$$|f(x, a)| = g(x, a) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x, a) = g(x, a), \\ f(x, a) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x, a) = g(x, a), \\ f(x, a) < 0, \end{cases} \end{cases}$$

2) И через неотрицательность абсолютной величины:

$$|f(x, a)| = g(x, a) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} f(x, a) = g(x, a), \\ g(x, a) \geq 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -f(x, a) = g(x, a), \\ g(x, a) \geq 0. \end{cases} \end{cases}$$

Рассмотрим, как выполняется переход к равносильной системе, на примере задания из ОГЭ.

*Пример 5.* Определите, при каких значениях параметра  $n$  уравнение

$$\frac{1}{2} \left( \left| \frac{x}{3,5} - \frac{3,5}{x} \right| + \frac{x}{3,5} + \frac{3,5}{x} \right) = n$$

имеет ровно одно решение.

*Решение.* Будем решать задачу графически. Сначала обозначим через  $y$  правую и левую части уравнения.

Раскроем модуль

1) Пусть  $\frac{x}{3,5} - \frac{3,5}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 49}{14x} < 0$ , решив, получим, что  $x \in (-\infty; -3,5) \cup (0; 3,5)$ .

Тогда выражение, находящееся под знаком модуля, меняет знак при снятии с него модуля:

$$y = \frac{1}{2} \left( \left| \frac{x}{3,5} - \frac{3,5}{x} \right| + \frac{x}{3,5} + \frac{3,5}{x} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{x}{3,5} + \frac{3,5}{x} + \frac{x}{3,5} + \frac{3,5}{x} \right) = \frac{3,5}{x}.$$

Получили функцию, графиком которой является гипербола.

2) Пусть

$$\frac{x}{3,5} - \frac{3,5}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2 - 49}{14x} \geq 0,$$

получим, что

$$x \in [-3,5; 0) \cup [3,5; +\infty).$$

Тогда выражение, находящееся под знаком модуля, не меняется при снятии с него модуля:

$$y = \frac{1}{2} \left( \left| \frac{x}{3,5} - \frac{3,5}{x} \right| + \frac{x}{3,5} + \frac{3,5}{x} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{3,5} - \frac{3,5}{x} + \frac{x}{3,5} + \frac{3,5}{x} \right) = \frac{x}{3,5},$$

это линейная функция.

Получим:

$$y = \begin{cases} \frac{3,5}{x}, & \text{при } x \in (-\infty; -3,5) \cup (0; 3,5), \\ \frac{x}{3,5}, & \text{при } x \in [-3,5; 0) \cup [3,5; +\infty). \end{cases}$$

Построим график (рисунок 2).

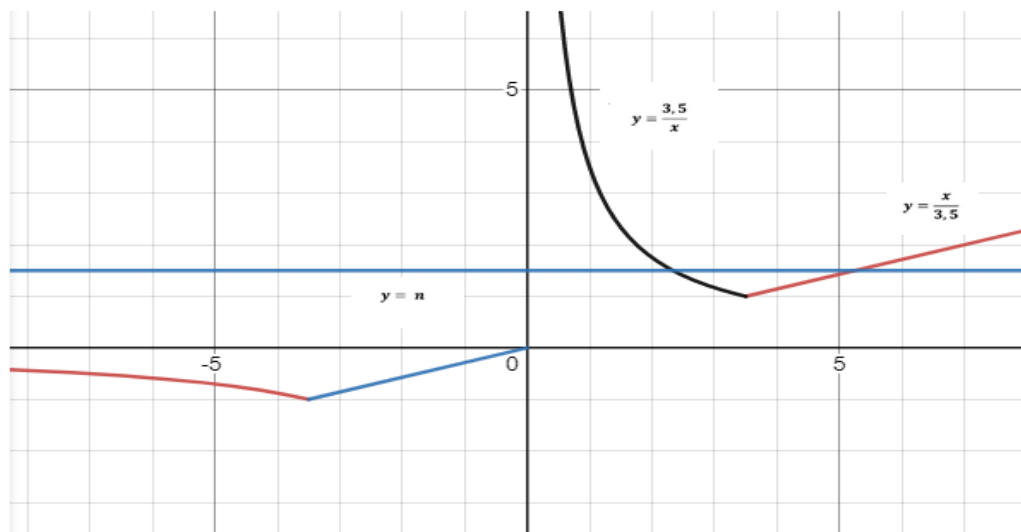


Рисунок 2 - График функции к примеру 6

Проанализируем взаимное расположение графика  $y = \frac{3,5}{x}$  и полученного графика функции: при  $n \in (-\infty; -1)$  прямая  $y = n$  не имеет с графиком функции общих точек; при  $n = -1$  прямая имеет с графиком 1 общую точку; при  $n \in (-1; 0)$  – 2 точки пересечения; при  $n \in (0; 1)$  – графики не

пересекаются; при  $n = 1$  – 1 общая точка; при  $n \in (1; +\infty)$  – 2 точки пересечения.

Таким образом, получим, что графики имеют 1 общую точку при  $n = -1$  и  $n = 1$ .

*Ответ.*  $-1; 1$ .

Учащиеся, решая позже, в 10-11 классах показательные, логарифмические или тригонометрические уравнения, зачастую будут сводить их линейным, квадратным или дробно-рациональным, со способами решения которых они уже будут знакомы.

Основным принципом решения уравнений с параметром является следующее: необходимо разбить область допустимых значений параметра на такие участки, в каждом из которых для уравнения (неравенства) существует одинаковый способ его решения. Каждый такой промежуток анализируется с целью поиска решений, зависящих от значения параметра. Ответ к заданию записывается списком участков изменения параметра с указанием для каждого из них всех решений этого уравнения.

## **Глава 2. Методические аспекты изучения уравнений с параметром в 7-9 классах**

### **2.1 Программа и содержание элективного курса по теме: «Решение уравнений с параметром»**

Многие учащиеся образовательных организаций задумываются о возможностях, которые им дают хорошие результаты олимпиад и выпускных экзаменов – это конкурентоспособность и поступление в хороший университет. Кроме того, класс задач повышенной сложности (или нестандартные задачи) воспитывают в нас такие качества, как критичность мышления, анализ, поиск нестандартных (или непривычных) способов решения. Причины начать изучать данный класс задач становятся очевидными.

Однако школьники, олимпиадники, выпускники не всегда имеют возможность успешно решить их, так как не обладают необходимыми навыками и умениями. В школьной программе, как показал анализ популярных учебников 7-9 классов, задания с параметром найти можно, но книга не объясняет, что такое этот «параметр», как рассматривать такие задачи, зачем они вообще нужны, и почему они встречаются на экзаменах в 9 и 11 классах, и за ответом заинтересованные ученики начинают обращаться в другие источники – образовательную литературу по соответствующей теме или сеть Интернет.

В ходе изучения дидактических материалов мною была начата разработка элективного курса, в который помещался теоретический материал по соответствующим видам уравнений и неравенств с параметром, а также подбирался практический материал простого и среднего уровня сложности. Предполагается, что обучающиеся при прохождении курса уже владеют знаниями и умениями базового уровня по программе школьного курса математики и способны без затруднения решать простейшие уравнения.

Элективный курс предусмотрен для обучающихся 8-9 классов и адаптирован для начального уровня подготовки в области задач с параметрами.

Рассчитан он на 16 недель (по одному занятию в неделю, каждое из которых длится 40 минут, последнее занятие, заключительное, проводится в формате дополнительного занятия).

Цель курса: систематизировать и углубить знания о базовых уравнениях и неравенствах с параметром и способах их решения.

Задачи курса:

1. Актуализировать и систематизировать знания о свойствах уравнений и соответствующих функциях;
2. Сформировать понимание того, что представляет «задача с параметром»;
3. Изучить аналитический и графический методы решения уравнений, и неравенств с параметром;
4. Получить представление об этапах решения уравнения с параметром; неравенства с параметром;
5. Развить навыки рассуждения, анализа, логического мышления, поиска нестандартных подходов к решению задачи, повысить математическую грамотность;
6. Устранить у обучающихся страх решения задач с параметром путем решения базовых задач с постепенно повышающимся уровнем сложности.

Элективный курс включает в себя 16 занятий, 6 из которых лекционных, 10 – практических (один из которых дополнительный). К изучению обучающимся предлагаются линейные, дробно-рациональные, квадратные уравнения и неравенства с параметром, а также уравнения и неравенства с параметром и модулем.

Лекционные занятия содержат необходимый теоретический материал по теме занятия, а также разборы примеров с применением соответствующих знаний. Практические занятия включают в себя набор заданий для отработки и закрепления полученных знаний и ответы, а также комментарии и решения к некоторым из них. После проведения занятия учащимся задается домашняя работа. Учитель имеет возможность сам выбирать задания для разбора на

занятии, а также для домашнего исследования. В конце курса им будет предложена контрольная работа по программе элективного курса.

На мой взгляд, важное место в курсе должны занимать именно задания с линейными и квадратными уравнениями, и неравенствами и свойствами, которыми можно при их решении воспользоваться. Уравнения с параметром не выше второй степени являются самыми распространенными в практике олимпиадных, конкурсных и итоговых экзаменационных заданий (ОГЭ и ЕГЭ).

Также нередко можно встретить задачи, в которых корни уравнения проще (или в целом возможно только) найти не путем вычисления дискриминанта, а используя теорему Виета и теорему, обратную ей. В большинстве случаев применение теоремы Виета упростит и ускорит решение задачи, следовательно, необходимо выделить время и на ее изучение.

Кроме перечисленных ранее уравнений и неравенств с параметром, также в курсе будут рассматриваться задачи из ОГЭ, они будут включены в программу заданий каждого практического занятия.

Что представляет из себя дополнительное занятие, будет указано в пояснительной записке к нему в следующем пункте этой главы.

Контроль знаний и уровня достижений учащимися поставленной цели и задач будет измеряться на основе активной работы у доски и в тетрадях во время занятий, выполнения домашних заданий, обращения с уточняющими и дополнительными вопросами, участия в дополнительном занятии курса, а также контрольной работы. К концу курса обучающиеся должны предоставить учителю решенные домашние работы (не менее 50% заданий каждой из них решены верно) и контрольную работу (не менее 70% верных решений).

Учащиеся должны сдать контрольную работу на проверку учителю на последнем практическом занятии, чтобы иметь возможность на дополнительном занятии познакомиться со своими результатами и обсудить задания, вызвавшие трудности.

Тематическое планирование элективного курса представлено в таблице 1.

Таблица 1 – Тематическое планирование

| №<br>п/п | Тема раздела                                  | Количество<br>часов |       | Общее коли-<br>чество часов |
|----------|-----------------------------------------------|---------------------|-------|-----------------------------|
|          |                                               | Л. З.               | П. З. |                             |
| 1        | Линейные уравнения с параметром.              | 2                   | 3     | 5                           |
| 2        | Дробно-рациональные уравнения с параметром.   | 1                   | 1     | 2                           |
| 3        | Квадратные уравнения с параметром.            | 2                   | 3     | 5                           |
| 5        | Уравнения, содержащие модуль и параметр.      | 1                   | 1     | 2                           |
| 6        | Контрольная работа.                           | 0                   | 1     | 1                           |
| 7        | Дополнительное занятие по вопросам тем курса. | 0                   | 1     | 1                           |
| 8        | Итого                                         | 6                   | 10    | 16                          |

### Содержание разделов элективного курса

**1. Линейные уравнения и неравенства с параметром.** Понятие параметра, задачи с параметром, решения задачи с параметром. Методы решения задач с параметром. Линейная функция, ее график и свойства. Влияние параметризации свободного члена и углового коэффициента на решение задачи. Взаимное расположение прямых на плоскости. Понятие линейного уравнения и линейного уравнения с параметром. Алгоритм решения линейных уравнений и неравенств с параметром. Примеры. Решение линейных уравнений с параметром.

Решение линейных неравенств с параметром.

**2. Дробно-рациональные уравнения и неравенства с параметром.** Дробно-рациональная функция, ее график и свойства. Понятие дробнорационального уравнения и дробно-рационального уравнения с параметром. Алгоритм решения дробно-рациональных уравнений с параметром. Примеры.

Решение дробно-рациональных уравнений с параметром.

3. Квадратные уравнения и неравенства с параметром. Квадратичная функция, ее график и свойства. Задачи на вычисление коэффициентов квадратичной функции. Графический метод решения задач. Понятие квадратного уравнения и квадратного уравнения с параметром. Решение квадратных уравнений с параметром через дискриминант. Теорема Виета. Решение задач с помощью теоремы Виета и теоремы, обратной теореме Виета. Решение квадратных неравенств с параметром.

4. Уравнения и неравенства с модулем и параметром. Понятие модуля и уравнения, содержащего параметр и модуль. Алгоритм решения уравнений с параметром и модулем. Аналитическое решение уравнений с параметром и модулем. Примеры. Решение неравенств с параметром и модулем. Функция, содержащая знак модуля. Графическое решение уравнений с параметром и модулем. Примеры.

5. Контрольная работа. Задания, подобные тем, что разбирались в курсе, задания из ОГЭ.

6. Дополнительное занятие по вопросам тем курса. Ответы на вопросы обучающихся по темам курса. Подробный разбор задач, вызвавших затруднения при их решении. Разбор дополнительных заданий учащихся. Оглашение результатов итоговой работы по курсу (контрольной работы). Рекомендации по дальнейшему обучению по теме «Решение задач с параметром».

Возможно, некоторые темы, включенные в элективный курс, уже будут знакомы обучающимся. Если учитель это замечает, важно в таком случае, построить подачу материала в формате беседы (чаще задавать вопросы и слушать примерные ответы обучающихся), таким образом активизировать их к работе и дать возможность показать свои знания. Если материала для выдачи оказывается много, то учитель вправе выбирать тот материал и те задания, которые считает нужными.

При разработке элективного курса использовались школьные учебники (часть задач курса взята из учебников, разбор которых был проведен в прошлой главе), дополнительная учебная и учебно-методическая литература.

## 2.2 Фрагменты конспектов лекционных и практических занятий элективного курса

### Введение в элективный курс

Ознакомление с программой элективного курса «Решение задач с параметром». Раскрытие цели, задач курса, планируемых результатов, а также требований к обучающимся на протяжении работы по курсу и объявление критериев к итоговой аттестации.

### Параметр, решение задачи с параметром

Что такое «параметр»? Если в уравнении (неравенстве и их системах) некоторые коэффициенты заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами (*a, b, c, ...*), то они называются *параметрами*, а само уравнение (неравенство и их системы) называется *уравнением (неравенством и их системами) с параметром*. То есть параметр – это неизвестная нам величина, которая подлежит оценке, так как в одних условиях она принимает одни значения, а в других – меняет их. Рассматривая все эти случаи, находят разные решения задачи.

Что значит «*решить уравнение или неравенство с параметром*»? Это значит, что необходимо указать для каждого значения параметра значения *x*, удовлетворяющие условию (и важно не забыть указать такие значения параметра, при которых исходная задача решения не имеет).

Чаще всего задания с параметром разделяют на следующие типы (классификация В. И. Голубева и А. М. Гольдмана) [1]:

1. Задачи, где требуется найти количество решений в зависимости от значения параметра.
2. Задачи, которые необходимо решить для всех значений параметра или для значений параметра из заданного промежутка.
3. Задачи, где необходимо найти значения параметра, при которых задача имеет заданное количество решений.
4. Задачи, в которых необходимо найти значения параметра, при которых множество решений удовлетворяет заданным условиям.

Как же решать такие задачи? Существует достаточно много методов решения задач с параметрами, но мы остановимся на двух основных – аналитическом и графическом. Они являются наиболее употребительными и часто используемыми.

*Аналитический метод* – не только самостоятельный метод, но и обязательная составная часть всех остальных существующих методов. В основном аналитический метод характеризуется применимостью равносильных или эквивалентных преобразований. При этом исходное условие после таких действий приходит к совокупности простейших логических утверждений.

При решении задач таким методом чаще всего условие задачи делится на совокупность простых условий. Так, например, условие задачи, содержащей выражение с модулем, обычно разделяют на совокупность более простых условий, не содержащих модуль.

Любая задача с параметрами содержит, как минимум, две переменные – аргумент и параметр. Они могут рассматриваться, как координаты точки некоторой координатной плоскости. *Графический метод* представляет решения задач в виде геометрического места точек, где в качестве одной координаты выступает параметр, другой – искомая переменная. Решением задачи является значение координаты, соответствующей искомой переменной, принадлежащей линии или области, задаваемой условием [13].

## Лекция «Линейная функция, задачи с параметром на использование свойств линейной функции»

Графиком функции  $y = f(x)$ ,  $x \in D_f$  называется множество всех точек координатной плоскости  $Oxy$  вида  $(x; f(x))$ .

В зависимости от того, какая роль отводится параметру в задаче (иногда в задачах переменная и параметр меняются ролями), выделяют два основных графических приема: строят графики на координатной плоскости  $Oxy$  или на координатной плоскости  $Oxa$ .

«Графическое представление уравнения или системы уравнений с параметром обладает несколькими несомненными преимуществами: во-первых, построив график (графики), можно определить, как влияет на них и, соответственно, на решение уравнения изменение параметра; во-вторых, иногда график дает возможность сформулировать аналитически необходимые и достаточные условия для решения поставленной задачи и, в-третьих, ряд теорем позволяет на основании графической информации делать вполне строгие и обоснованные заключения о количестве корней уравнения, об их границах и т.д.» [2].

Чтобы понимать, как из графика функции  $y = f(x)$  может получиться график функции  $y = A \cdot f(ax + b) + B$  вспомним некоторые геометрические преобразования. Обратимся к Приложению А.

Линейная функция – это функция, которую можно задать формулой  $y = kx + c$ , где  $x$  – независимая переменная,  $k$  и  $c$  – некоторые числа,  $x$  – независимая переменная (или аргумент),  $y$  – зависимая переменная (или функция).

Графиком линейной функции  $y = kx + c$  является *прямая*. Чтобы построить график данной функции, достаточно координат двух точек, принадлежащих графику функции [15].

Например,  $y = -\frac{1}{2}x + 1$ .

При  $x = 2$  получим  $y = 0$ ; при  $x = 4$  получим  $y = -1$ . Построим график функции (рисунок 3).

Как видно по графику (рисунок 3), прямая *неограничена* ни сверху, ни снизу, а значит, никогда не достигает максимального и минимального своего значения. Однако, если условием задано, что  $x$  принадлежит какому-то промежутку, то максимум и минимум может существовать.

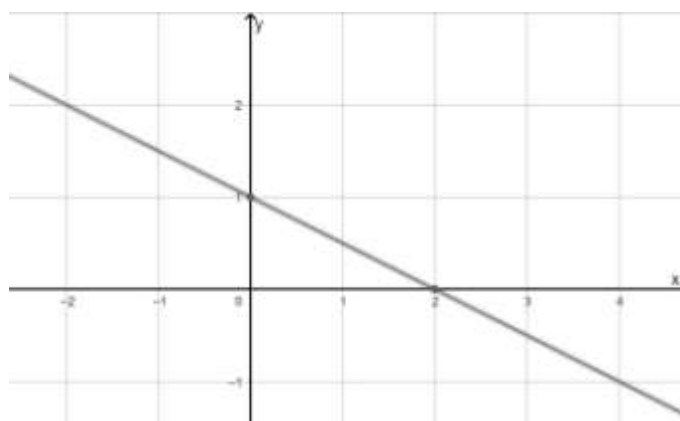


Рисунок 3 - График функции  $y = -\frac{1}{2}x + 1$

Другими словами, *область определения* линейной функции – множество всех действительных чисел. *Множество значений* функции – тоже  $\mathbb{R}$ . Функция не имеет ни *наибольшего*, ни *наименьшего* значения.

Например, дано задание: построить график линейной функции и определить по нему наибольшее и наименьшее значение функции на заданном отрезке:

$$y = \frac{1}{3}x + 1, x \in [-6; 3].$$

Построим прямую по точкам  $(-3; 0)$  и  $(0; 1)$  (рисунок 4).

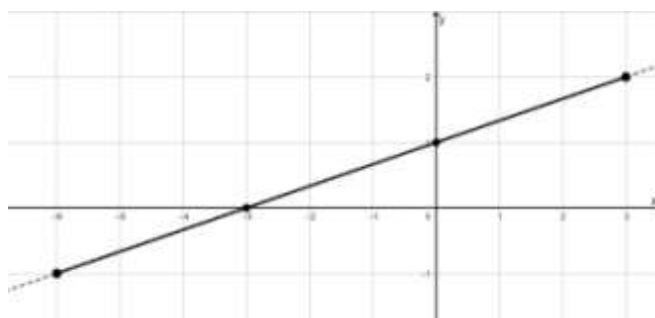


Рисунок 4 -График функции  $y = \frac{1}{3}x + 1$   $y_{\text{наиб}} = 2$  и  $y_{\text{наим}} = -1$ .

Если бы  $x \in (-6; 3)$ , то концы отрезка не рассматривались, поэтому наибольшего и наименьшего значений бы не было.

Постройте графики функций  $y = 2x + 1$  и  $y = -2x + 1$ .

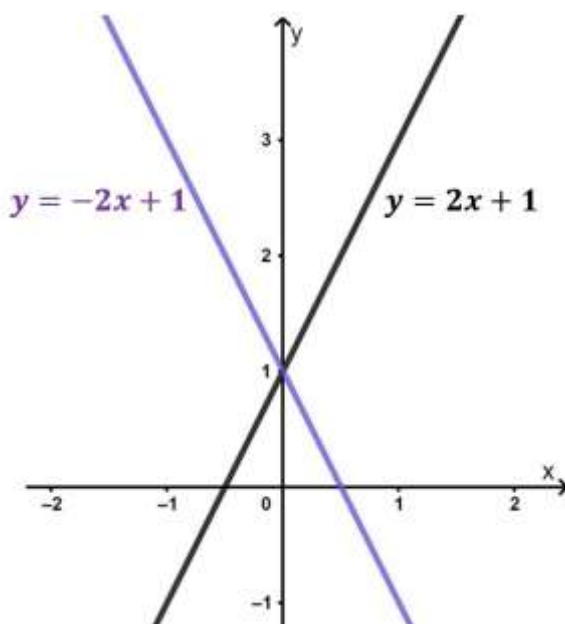


Рисунок 5- Графики функций  $y = 2x + 1$  и  $y = -2x + 1$

Коэффициенты функций, стоящие перед  $x$ , являются противоположными числами. Заметим, что когда коэффициент отрицательный, линейная функция убывает, а когда положительный, то возрастает (рисунок 5):

Если  $k > 0$ , то  $y = kx + c$  монотонно *возрастает*;

если  $k < 0$ , то  $y = kx + c$  монотонно *убывает*.

*Четной* называется функция, «область определения которой симметрична относительно нуля и которая обладает свойством:  $y(-x) = y(x)$ . График четной функции симметричен относительно оси  $Y$ » [6]. *Нечетной* называется функция, «имеющая область определения, симметричную относительно нуля, для которой справедливо равенство  $y(-x) = -y(x)$ . График нечетной функции имеет центр симметрии – начало координат» [6]. Если функция не является ни четной, ни нечетной, то ее называют *функцией общего вида*.

Четность и нечетность функции зависит от коэффициентов  $y = kx + c$ :

1. если  $k = 0, c \neq 0$ , то  $y = c$  – четная;
2. если  $k \neq 0, c = 0$ , то  $y = kx$  – нечетная;
3. если  $k \neq 0, c \neq 0$ , то  $y = kx + c$  – функция общего вида;

4. если  $k = 0, c = 0$ , то  $y = 0$  — и четная, и нечетная.

График функции  $y = kx + c$  пересекает ось  $Ox$  в точке с координатами  $(-\frac{c}{k}; 0)$ , ось  $Oy$  в  $(0; b)$ .

Рассматривая линейную функцию вида  $y = kx + c$ , особо выделяют случай, когда  $c = 0$ . Тогда линейная функция принимает вид  $y = kx$  и называется *прямой пропорциональностью*.

Графиком функции  $y = kx$  является *прямая*, проходящая через начало координат.

Важно научиться переходить от аналитической модели  $y = kx$  к геометрической и, наоборот.

Например, рассмотрим изображенную прямую (рисунок 6 (слева)).

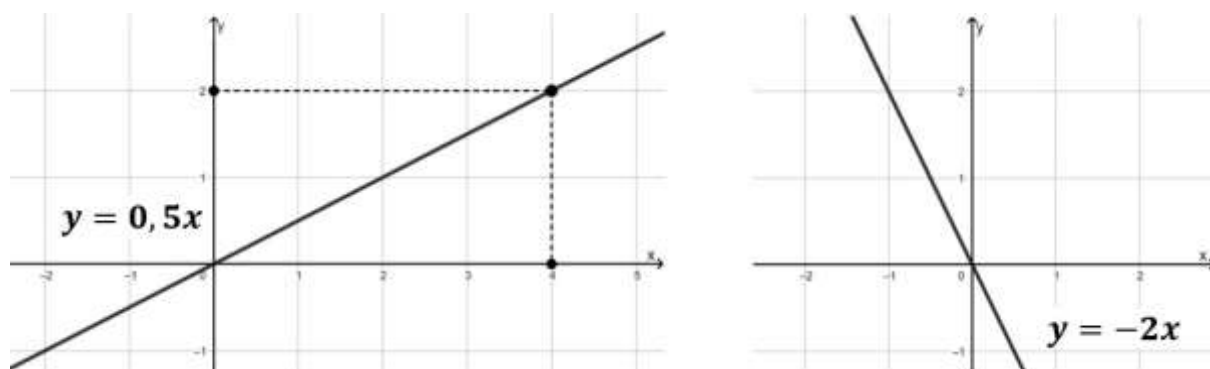


Рисунок 6 -Графики функций – слева  $y = 0,5x$ , справа –  $y = -2x$

Эта прямая является графиком линейной функции  $y = kx$ , так как проходит через начало координат. Нужно определить значение коэффициента  $k$ . Из формулы получим, что  $k = \frac{y}{x}$ . Значит, нужно выбрать любую точку, лежащую на прямой и вычислить коэффициент.

Прямая проходит через точку  $A(4; 2)$ , получим, что  $\frac{2}{4} = 0,5$ , то есть  $k = 0,5$ , и данная прямая является графиком функции  $y = 0,5x$ .

Если  $x = 1$ , то  $y = k$ . Это значит, что график функции проходит через точку  $(1; k)$ , и его можно построить по двум точкам:  $(0; 0)$  и  $(1; k)$ .

Коэффициент  $k$  определяет угол между прямой и положительным направлением оси  $Ox$ , поэтому его называют *угловым коэффициентом*: 1.если  $k > 0$ , то этот угол острый (рисунок 6 (слева));

2.если  $k < 0$ , то этот угол тупой (рисунок 6 (справа)).

Прямая, являющаяся графиком линейной функции  $y = kx + c$ , *параллельна* прямой, являющейся графиком линейной функции  $y = kx$ .

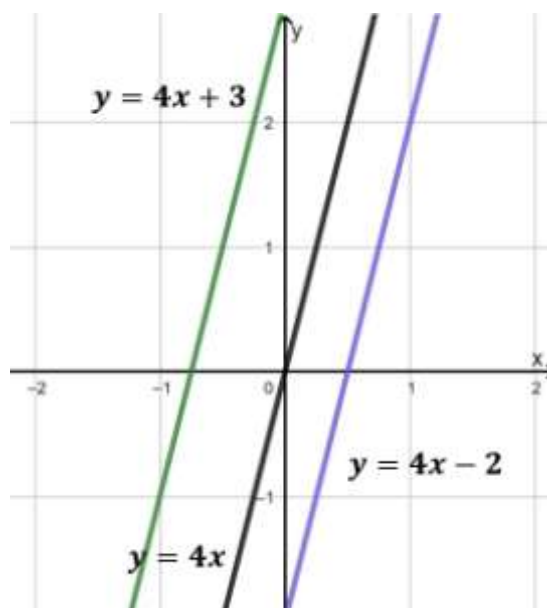


Рисунок 7. Графики функций  $y = 4x + 3$ ,  $y = 4x$ ,  $y = 4x - 2$

При изменении коэффициента  $c$  изменяет положение прямой на координатной плоскости: при  $c = 0$  прямая проходит через точку с  $(0; 0)$ , при  $c \neq 0$  – через точку  $(0; c)$ . Если  $c > 0$ , то график функции поднимается вверх на  $c$  единиц, если  $c < 0$  – опускается на  $c$  единиц (рисунок 7).

Пусть даны две функции  $y_1 = k_1x + c_1$  и  $y_2 = k_2x + c_2$  .

Графики этих функций (прямые) могут:

1. быть *параллельными*, если  $k_1 = k_2$  и  $c_1 \neq c_2$  ;
2. *совпадать*, если  $k_1 = k_2$  и  $c_1 = c_2$  ;
3. *пересекаться*, если  $k_1 \neq k_2$ .

*Пример 1.* Дана линейная функция  $y = kx + 4$ . При каком значении  $k$  график этой функции:

- а) параллелен графику прямой пропорциональности  $y = -x$ ;
- б) не пересекает ось абсцисс;
- в) пересекает ось абсцисс в точке с абсциссой 3;
- г) проходит через точку пересечения графиков функций  $y = 12 - x$  и  $y = x + 4$  [1].

*Решение.* а) прямые параллельны, если их коэффициенты при  $x$  равны, а свободные члены при этом – нет. Значит, графики функций параллельны при  $k = -1$ .

б) Ось абсцисс – это ось  $Ox$ , прямая никогда ее не пересечет, если будет параллельна ей и располагаться выше или ниже ее. В данном случае, график функции не пересекает ось абсцисс при  $k = 0$ .

в) График прямой пересекает ось  $Ox$  при  $x = 3$ , значит, в ней  $y = 0$ . Подставим эти значения в формулу функции и вычислим, при каком значении  $k$  это возможно:

$$0 = 3k + 4 \Leftrightarrow 3k = -4 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}.$$

г) Чтобы найти точку пересечения графиков функций можно изобразить их, решить систему уравнений или приравнять их правые части, так как левые по условию равны:

$$12 - x = x + 4 \Leftrightarrow 2x = 8 \Leftrightarrow x = 4,$$

тогда  $y = 4 + 4 = 8$ . Подставим эти значения в формулу функции и найдем значение переменной  $k$ :

$$8 = 4k + 4 \Leftrightarrow 2 = k + 1 \Leftrightarrow k = 1.$$

*Ответ.* а)  $k = -1$ ; б)  $k = 0$ ; в)  $k = -\frac{3}{4}$ ; г)  $k = 1$ .

*Пример 2.* Первая прямая проходит через точки  $(0; 4,5)$  и  $(3; 6)$ . Вторая прямая проходит через точки  $(1; 2)$  и  $(-4; 7)$ . Найдите координаты общей точки этих двух прямых.

*Решение.* Линейная функция задается формулой  $y = kx + c$ .

Подставим координаты первых точек в систему:

$$\begin{cases} 4,5 = k \cdot 0 + c, \\ 6 = 3k + c, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4,5, \\ 3k = 6 - c, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4,5, \\ 3k = 1,5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 4,5, \\ k = 0,5. \end{cases}$$

Получили функцию  $y = 0,5x + 4,5$ .

Подставим координаты вторых точек в систему:

$$\begin{cases} 2 = k + c, \\ 7 = -4k + c, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 - c, \\ c = 7 + 4k, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 - c, \\ 5c = 15, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 - c, \\ c = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -1, \\ c = 3. \end{cases}$$

Получили функцию  $y = -x + 3$ .

Необходимо найти координату общей точки функций. Так как  $y$  равны, то и правые части функций также равны:

$$0,5x + 4,5 = -x + 3 \Leftrightarrow 1,5x = -1,5 \Leftrightarrow x = -1.$$

Подставим это значение в любую из функций и получим значение координаты  $y$ :  $y = -(-1) + 3 = 4$ .

Координата общей точки двух прямых равна  $(-1; 4)$ .

*Ответ.*  $(-1; 4)$ .

### Лекция «Линейные уравнения с параметром»

Если в равенстве есть одна переменная, то это равенство называется *уравнением* с одной переменной.

Например, равенство  $5 + (4 - 2) = 7$  – не уравнение, а равенство  $5 + (4 - x) = 7$  – уравнение, корень которого равен 2.

*Корнем уравнения* называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство. Корень уравнения принадлежит области допустимых значений.

*Линейным уравнением* называется уравнение вида  $ax + b = 0$ , в котором  $a$  и  $b$  – действительные числа, причем  $a \neq 0$ .

Линейное уравнение решается следующим образом:

1) в левой части уравнения оставляем все слагаемые, содержащие переменную, в правую часть переносим оставшиеся слагаемые:

$$ax = -b;$$

2) затем выражаем  $x$ :

$$x = -\frac{b}{a}.$$

Например,  $4x - 84 = 0 \Leftrightarrow 4x = 84 \Leftrightarrow x = \frac{84}{4} \Leftrightarrow x = 21$ .

Если в уравнении (неравенстве и их системах) некоторые коэффициенты заданы не конкретными числовыми значениями, а обозначены буквами ( $a, b, c, \dots$ ), то они называются параметрами, а само уравнение (неравенство и их системы) называется уравнением (неравенством) с параметром. То есть параметр – это неизвестная нам величина, которая подлежит оценке, так как в одних условиях она принимает одни значения (внутри задачи), а в других – меняет их.

Решение линейного уравнения в зависимости от параметра:

- 1) выполняют шаг 1 предыдущего алгоритма;
- 2) оценивают возможные решения уравнения в зависимости от параметра:

*1 случай:* если  $a \neq 0$ ,  $b$  – любое, то уравнение имеет один корень, находящийся по формуле  $x = -\frac{b}{a}$ . Например,  $ax - 4 = 0 \Leftrightarrow ax = 4$ , если  $a \neq 0$ , то  $x = \frac{4}{a}$ .

*2 случай:* если  $a = 0$ ,  $b \neq 0$ , то уравнение не имеет корней. Например,  $ax - 4 = 0 \Leftrightarrow ax = 4$ , если  $a = 0$ , получим  $0 \cdot x = 4$  – нет такого значения  $x$ , при умножении которого на 0 можно получить 4.

*3 случай:* если  $a = 0$ ,  $b = 0$ , то корень уравнения – любое число. Например,  $0 \cdot x = 0$  – верно для любого  $x$ .

Важным при решении задач с параметром является определение *области допустимых значений* переменной и параметра. При решении линейного уравнения этот шаг можно пропустить. Об этом мы поговорим на следующем занятии.

*Пример 1.* Решите уравнение  $bx = 6$  [8].

*Решение.* Дано простейшее линейное уравнение с параметром  $b$  относительно переменной  $x$ . Решить его – значит указать, при каких

допустимых значениях параметра уравнение имеет решения и найти их, и при каких – не имеет.

Согласно алгоритму анализа задачи с параметром (линейного уравнения с параметром), получим:

1. если  $b \neq 0$ , то уравнение имеет единственное решение  $x = \frac{6}{b}$ .
2. если  $b = 0$ , то уравнение приобретает вид  $0 \cdot x = 6$ , это равенство невозможно, а значит, уравнение не имеет решений.

Получили, что при  $b \neq 0$  решением уравнения является число  $\frac{6}{b}$ . При  $b = 0$  решений уравнение не имеет. В ответ запишем оба случая.

*Ответ следует записать согласно каждому случаю в порядке возрастания принимаемых параметром  $a$  значений. Его можно оформить как «если параметр равен ..., то уравнение ...» или «при этом значении параметра корень равен ...».*

*Ответ.* При  $b \neq 0$   $x = \frac{6}{b}$ ; при  $b = 0$  уравнение решений не имеет.

*Пример 2.* Решите уравнение  $(1 - p^2)x = 1 + p$ .

*Решение.* Данное линейное уравнение записано в удобном для его анализа виде: все слагаемые с переменной в левой части уравнения, остальные – в правой. Обратим внимание, что параметр содержится и в левой, и в правой частях уравнения, но это нас пугать не должно. Данное уравнение также имеет вид  $ax = b$ , где  $a = 1 - p^2$ , а  $b = 1 + p$ .

В этой задаче мы будем рассматривать ситуации, где  $1 - p^2 = 0$  и  $1 - p^2 \neq 0$ , то есть 3 случая, где  $p = 1$ ,  $p = -1$  и  $p \neq \pm 1$ .

Оценим возможные решения уравнения.

1. Если  $p = 1$ , тогда  $0 \cdot x = 2$  – нет такого значения  $x$ , при умножении которого на 0 можно получить 2. Уравнение не имеет решений.

2. Если  $p = -1$ , тогда  $0 \cdot x = 0$  – верно для любого значения  $x$ .
3. Если  $p \neq \pm 1$ , то уравнение имеет единственное решение

$$x = \frac{1+p}{1-p^2} = \frac{1+p}{(1-p)(1+p)} = \frac{1}{1-p}.$$

Исходя из условия задачи, в ответ будут записаны все указанные случаи.

*Ответ.* При  $p = 1$ , уравнение не имеет решений; при  $p = -1, x \in R$ ; при  $p \neq \pm 1$  уравнение имеет единственное решение  $x = \frac{1}{1-p}$ .

*Пример 3.* При каких значениях параметра  $n$  не имеет решений уравнение

$$(n-1)(n-5)x - 2(n+6) = 5x - 12?$$

*Решение.* Выполним преобразования:

$$\begin{aligned} (n-1)(n-5)x - 2 \\ (n-1)(n-5)x - 5x &= 2(n+6) - 12, \\ (n^2 - 6n + 5)x - 5x &= 2n + 12 - 12, \\ (n^2 - 6n)x &= 2n. \end{aligned}$$

Действуем по алгоритму:

1. Если

$$n^2 - 6n \neq 0 \Leftrightarrow n(n-6) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n \neq 0 \\ n \neq 6, \end{cases} \text{ тогда}$$

$$x = \frac{2n}{n(n-6)} = \frac{2}{n-6};$$

2. Если

$$n^2 - 6n = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 0, \\ n = 6. \end{cases}$$

Рассмотрим эти случаи отдельно.

3. Если  $n = 0$ , тогда  $0 \cdot x = 0$  – верно для любого значения  $x$ ;
4. Если  $n = 6$ , тогда  $0 \cdot x = 12$  и уравнение не имеет решений.

Мы рассмотрели все возможные случаи, теперь вернемся к условию задачи: необходимо было выяснить, при каких значениях параметра  $n$  уравнение не имеет решения. В ответ запишем случай  $n = 6$ .

*Ответ.*  $n = 6$ .

## Практическое занятие: «Линейные уравнения с параметром»

### Задания на отработку полученных знаний

Задание 1. Решите уравнение для всех значений параметра:

а)  $nx + n^2 = 9 - 3x$ ;                      б)  $px - p^2 = 4 - 2x$ .

Ответ. а) при  $n = -3$  уравнение верно для всех  $x$ ; при  $n \neq -3x = 3 - n$ ;  
б) при  $p = -2$  верно для всех  $x$ ; при  $p \neq -2x = 2 + p$ .

Решение. а) выполним преобразования:

$$nx + n^2 = 9 - 3x \Leftrightarrow nx + 3x = 9 - n^2 \Leftrightarrow (n + 3)x = 9 - n^2$$

1. Если  $n + 3 = 0 \Leftrightarrow n = -3$ , то  $0 \cdot x = 0$ , верно для всех  $x$ .

2. Если  $n + 3 \neq 0 \Leftrightarrow n \neq -3$ , то  $x = \frac{9-n^2}{n+3} = 3 - n$ .

б) выполним преобразования:  $x(p + 2) = 4 + p^2$

1)  $p + 2 = 0 \Leftrightarrow p = -2$ ,  $x \cdot 0 = 0$ , верно для всех  $x$ ;

2)  $p + 2 \neq 0 \Leftrightarrow p \neq -2$ ,  $x = \frac{4+p^2}{p+2} = 2 + p$ .

Задание 2. При каком значении параметра  $a$  имеет одно решение уравнение  $a^2(x - 1) + x = (5x - 2)a$ ? В ответе укажите его (решение).

Ответ. При  $a \neq 2$  уравнение имеет одно решение  $x = \frac{a}{a-3}$ .

Решение.  $(a - 2)(a - 3)x = a(a - 2)$

1.  $a - 2 = 0$ , то  $0 \cdot x = 0$  для всех  $x$ ;

2.  $a - 3 = 0$ , то  $0 \cdot x = 3$  нет решений;

3.  $a \neq 2$ , то  $x = \frac{a(a-2)}{(a-2)(a-3)} = \frac{a}{a-3}$ .

Задание 3. При каком значении параметра  $b$  уравнение  $9x + b^2 - (2 - \sqrt{3})b - 2\sqrt{3} = b^4x - b^2(b + \sqrt{3})$  не имеет корней?

Ответ.  $b = \sqrt{3}$ .

Решение. Преобразуем уравнение

$$(b^4 - 9)x = b^3 + b^2\sqrt{3} + b^2 - 2b + b\sqrt{3} - 2\sqrt{3}.$$

$$(b^4 - 9)x = b^3 + (1 + \sqrt{3})b^2 - (2 - \sqrt{3})b - 2\sqrt{3}$$

$$b^4 - 9 = 0 \Leftrightarrow b^4 = 9 \Leftrightarrow b^2 = 3 \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{3}.$$

При  $b = -\sqrt{3}$  уравнение имеет решения при любом  $x$ ,  $b = \sqrt{3}$  не имеет решений.

**Задание 4.** Найдите такие значения параметров  $k$  и  $b$ , при которых график линейной функции  $y = kx + b$  проходит через точку  $A(2; 3)$  и параллелен графику функции  $y = 1,5x - 3$ . Постройте ее график.

**Решение.** Так как прямые параллельны, то  $k = 1,5$ . Найдём значение  $b$ , подставив координаты точки  $A(2; 3)$ :

$$3 = 1,5 \cdot 2 + b \Leftrightarrow b = 0.$$

Получили функцию  $y = 1,5x$  (рисунок 8)

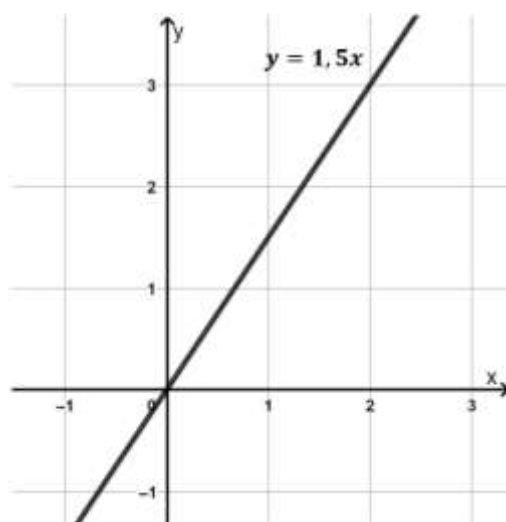


Рисунок 8. График функции к заданию 4

#### Домашние задания

**Задание 5.** Для каждого значения параметра  $a$  решите уравнение:

а)  $(a - 3)x = 1$ ;

б)  $3ax = a^2x - 3 + a$ .

**Ответ. а)** При  $a = 3$  уравнение не имеет решений; при  $a \neq 3$   $x = \frac{1}{a-3}$ ;

**б)** при  $a = 0$  уравнение не имеет решений; при  $a = 3x \in R$ ; при  $a \neq 0$  и  $a \neq 3$  уравнение имеет единственное решение  $x = -\frac{1}{a}$ .

**Решение. а)** Проанализируем уравнение:

если  $a = 3$ , то  $0 \cdot x = 1$  – не имеет решений; если  $a \neq 3$ , то  $x = \frac{1}{a-3}$ .

**б)** Перенесем переменную  $x$  в левую сторону:

$$3ax = a^2x - 3 + a \Leftrightarrow (3a - a^2)x = a - 3.$$

$$\text{Если } 3a - a^2 = 0 \Leftrightarrow a(3 - a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0, \\ a = 3. \end{cases}$$

$a = 0$ , то  $0 \cdot x = -3$  – не имеет решений;

$a = 3$ , то  $0 \cdot x = 0$  – верно при любом  $x$ ;

$$\text{Если } 3a - a^2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0, \\ a \neq 3. \end{cases} a \neq 0 \text{ и } a \neq 3, \text{ то } x = \frac{a-3}{3a-a^2} = \frac{-(3-a)}{a(3-a)} = -\frac{1}{a}.$$

*Задание 6.* Определите, при каком значении параметра  $s$  не имеет решения уравнение:

**а)**  $sx = x + 1$ ;

**б)**  $(s^2 + 6s + 5)x - 2(s + 6) = (s + 5)x - 4$ .

*Ответ.* **а)** При  $s = 1$ ; **б)** при  $s = 0$  и  $s = -5$ .

*Решение.* **а)** Перенесем переменную  $x$  в левую сторону. Получим  $x(s - 1) = 1$ . Так как слева стоит произведение двух чисел, а справа число, отличное от нуля, то если  $s - 1 = 0$ , то уравнение не будет иметь решений, значит, при  $s = 1$ .

**б)** Раскроем скобки и перенесем переменную  $x$  в левую сторону. Получим

$$x(s^2 + 5s) = 2s + 8.$$

$$\text{Если } s^2 + 5s = 0 \Leftrightarrow s(s + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s = 0, \\ s = -5. \end{cases}$$

$s = 0$ , то  $0 \cdot x = 8$  – не имеет решений;

$s = -5$ , то  $0 \cdot x = -2$  – не имеет решений;

$$\text{Если } s^2 + 5s \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} s \neq 0, \\ s \neq -5. \end{cases} s \neq 0 \text{ и } s \neq -5, \text{ то } x = \frac{2s+8}{s^2+5s} = \frac{2(s+4)}{s^2+5s}.$$

Уравнение не имеет решений, при  $s = 0$  и  $s = -5$ .

### «Контрольная работа»

Контрольная работа по курсу «Решение задач с параметром»

1. Решите уравнение:  $r^2(x-1) + 6x = (5x-2)r$ .
2. Решите уравнение:  $\frac{1}{x-5} = \frac{2}{x-a}$ .
3. Постройте график функции:  $y = \frac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x-3)(x+2)}$  и определите, при каких значениях параметра  $c$  прямая  $y = c$  имеет с графиком ровно одну общую точку.
4. Решите уравнение  $(b^2 - 9)x^2 - 2bx + 1 = 0$ .
5. Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых уравнение  $a|x-1| = x+2$  имеет ровно один корень, укажите этот корень [15].
6. Постройте график функции  $f(x)$  и с его помощью определите максимальное число корней уравнения  $f(x) = a, f(x) = |x-2|$

Ответы:

1. При  $r = 2, x \in R$ ; при  $r = 3$  уравнение не имеет решений; при  $r \neq 2$  уравнение имеет единственное решение  $x = \frac{r}{r-3}$ .
2. При  $c = \{-6,25; -4; 6\}$ .
3. При  $a = 5$  уравнение не имеет решений; при  $a \neq 5$   $x = 10 - a$ .
4. При  $b = -3$   $x = -\frac{1}{6}$ ; при  $b = 3$   $x = \frac{1}{6}$  ;  
 $b = \pm 3$   $x_1 = \frac{1}{b-3}$  и  $x_2 = \frac{1}{b+3}$ .при
5. При  $a \in [-1; 1)$  уравнение имеет ровно один корень  $x = \frac{a+2}{a-1}$ .
6. Максимальное число корней уравнения – два.

В разработанный элективный курс включены лекционные и практические занятия, на которых учащиеся углубляют и укрепляют знания о линейных, дробно-рациональных, квадратных уравнениях с параметром и свойствах соответствующих им функций, а также уравнениях с параметром, содержащих знак модуля.

Предполагается, что к моменту изучения данного курса, обучающиеся обладают необходимыми навыками и умениями решения базовых уравнений и неравенств.

Элективный курс включает в себя задачи с параметром легкого и среднего уровня сложности, а также задания с параметром из ОГЭ, и является системой знаний для первичного знакомства с задачами с параметром.

Предполагается, что по окончании курса учащиеся смогут свободно решать простейшие задачи с параметром, содержащие линейные, дробно-рациональные, квадратные уравнения и неравенства с параметром, применять свойства соответствующих им функций, а также уравнения и неравенства с параметром, содержащие знак модуля.

После прохождения программы курса обучающимся следует повышать уровень сложности задач по изученным темам, начать изучать задачи с двумя параметрами; после знакомства в 10-11 классах с тригонометрическими, показательными и логарифмическими функциями приступать к изучению задач с параметром, содержащих эти виды функций.

В данном направлении также можно рассмотреть другие виды уравнений с параметром: таких как логарифмические, показательные, тригонометрические, а также имеющие комбинированный вид. Кроме того, целесообразно рассмотреть системы уравнений с параметром.

Разработанный курс планирую применять в будущем, в своей работе учителя математики на уроках и элективных курсах.

## **Заключение**

В ходе выполнения выпускной квалификационной работы были выполнены следующие задачи:

1. Проведен анализ психолого-педагогической, методической литературы по теме исследования;
2. Раскрыты ключевые понятия темы «Уравнения с параметром»
3. Выделены виды уравнений с параметром и методы их решения;
4. Проанализированы учебники по алгебре по соответствующей теме за 7-9 классы;
5. Рассмотрены методы и алгоритмы решения линейных, квадратных, дробно-рациональных уравнений с параметром.
6. Разработан элективный курс на тему: "Решение уравнений с параметром".

Задачи выпускной квалификационной работы решены. Цель достигнута.

Перспектива дальнейшего применения материала выпускной квалификационной работы состоит в том, что она может быть использована в качестве дополнительного пособия при ознакомлении с рассмотренной темой.

Данная работа может быть рекомендована для практического использования студентам математических факультетов в период прохождения производственной практики и учителям математики.

## Список литературы

1. Голубев В., Гольдман А. О задачах с параметром. Первоначальные сведения // Математика. 2012. №23. С. 27-32.
2. Литвинова И. Н. Решение задач с параметрами как средство формирования исследовательских умений учащихся // Концепт. 2015. №6. С. 11–15.
3. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 7 класс : учеб. для учащихся общеобразовательных учреждений. Под ред. С. А. Теляковского. М. : Просвещение, 2013. 256 с.
4. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 8 класс : учеб. для учащихся общеобразовательных учреждений с прил. На электрон. носителе. Под ред. С. А. Теляковского. М. : Просвещение, 2013. 287 с.
5. Макарычев Ю. Н. Алгебра. 9 класс : учеб. для учащихся общеобразовательных учреждений. 4-е изд. Под ред. С. А. Теляковского. М. : Просвещение, 2017. 287 с.
6. Мантуров О.В. Толковый словарь математических терминов : учеб. пособие. М. : «Просвещение», 1965. 540 с.
7. Мещерякова Г. П. Задачи с параметрами, сводящиеся к квадратным уравнениям // Математика в школе. 2001. №5. С. 60-62.
8. Мирошин В. В. Решение задач с параметрами. Теория и практика : учеб. пособие. М. : «Экзамен», 2009. 286 с.
9. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 класс : в 2 ч. Ч. 1. Учеб. для учащихся общеобразовательных учреждений . 17-е изд., доп. М. : Мнемозина, 2013. 175 с.
10. Мордкович А. Г. Алгебра. 7 класс : в 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений. 17-е изд., доп. М. : Мнемозина, 2013. 271 с.

11. Мордкович А. Г., Николаев Н. П. Алгебра. 8 класс : в 2 ч. Ч. 1. учеб. для учащихся общеобразовательных учреждений. 10-е изд., доп. М. : Изд-во Мнемозина, 2013. 256 с.
12. Мордкович А. Г. Алгебра. 8 класс : в 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений. 11-е изд., испр. и доп. М. : Мнемозина, 2013. 344 с.
13. Мордкович А. Г., Семенов П. В. Алгебра. 9 класс : в 2 ч. Ч. 1. учеб. для учащихся общеобразовательных учреждений. 12-е изд., доп. М. : Изд-во Мнемозина, 2010. 224 с.
14. Мордкович А. Г. Алгебра. 9 класс : в 2 ч. Ч. 2. Задачник для учащихся общеобразовательных учреждений. 12-е изд., испр. и доп. М. : Мнемозина, 2010. 223 с.
15. Постникова С. Я. Уравнения с параметрами на факультативных занятиях // Математика в школе. 2002. № 8. С. 45-46.

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических  
и естественных наук

Кафедра «Математическое образование»

Направление подготовки  
44.03.01 Педагогическое образование  
Профиль подготовки «Математика»  
Форма обучения: заочная

Утверждаю: зав. кафедрой  
«20» 09 2022 г.  
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Митрофановой Анастасии Сергеевны  
(ФИО полностью)

Тема работы Методические особенности изучения уравнений с параметром в 7-9 классах

Утверждена приказом по Университету от «28.09» 2022 г. № 809/0

Срок сдачи студентом законченной работы «15» 06 2023 г.

# КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

| № п/п | Перечень подлежащих разработке вопросов                                                                               | Сроки выполнения    | Примечания |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------|------------|
| 1.    | Анализ научной и учебно-методической литературы по теме исследования.                                                 | Октябрь-ноябрь 2022 | выполнено  |
| 2.    | Проведение сравнительного анализа школьных учебников в соответствии с рассматриваемой темой.                          | Декабрь 2022        | выполнено  |
| 3.    | Формулирование основных методов решения уравнений с параметрами.                                                      | Январь-февраль 2023 | выполнено  |
| 4.    | Разработка рабочей программы элективного курса на тему: «Решение задач с параметром».                                 | Март-апрель 2023    | выполнено  |
| 5.    | Разработка конспектов лекционных и практических занятий элективного курса по теме: «Линейные уравнения с параметром». | Апрель 2023         | выполнено  |
| 6.    | Оформление текста работы.                                                                                             | Май-июнь 2023       | выполнено  |
| 7.    | Подготовка презентации и выступления.                                                                                 | Июнь 2023           | выполнено  |

Дата выдачи задания «20» 09 2022г.

Руководитель  Журавлева Е.Г.  
(подпись) (Ф И О)

Задание принял к исполнению  Митрофанова А.С.  
(подпись) (Ф И О)

Ректору Пензенского  
государственного университета  
А.Д. Гулякову  
Студентки 5 курса ФФМЕН  
заочной формы обучения  
Митрофановой Анастасии  
Сергеевны

### ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Митрофанова Анастасия Сергеевна, студентка 5 курса заочной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему *«Методические особенности изучения уравнений с параметром в 7-9 классах»*, выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен (на) с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.

  
подпись  
14.06.23  
ДД ММ ГГГГ

ВКР представлена на проверку 14.06.23  
ДД ММ ГГГГ

Руководитель ВКР   
подпись Екатерина Геннадьевна Журавлева  
И.О.Ф.

## ПРОТОКОЛ

проверки на оригинальность в системе "Антиплагиат.ВУЗ" выпускной квалификационной работы на тему «Методические особенности изучения уравнений с параметром в 7-9 классах»

студентки 5 курса Митрофановой Анастасии Сергеевны  
направления подготовки 44.03.01 "Педагогическое образование"  
профиль подготовки "Математика"

Руководитель ВКР Журавлева Е.Г.

**АНТИПЛАГИАТ**  
ОБНАРУЖЕНИЕ ЗАЙМСТВОВАНИЙ

### Отчет о проверке на заимствования №1

 Автор: Митрофанова А.С.  
Проверяющий: Журавлева Екатерина Геннадьевна  
Организация: Пензенский государственный университет  
Отчет предоставлен сервисом «Антиплагиат» - <http://www.antiplagiat.ru>

| ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | ИНФОРМАЦИЯ ОБ ОТЧЕТЕ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| № документа: 110<br>Начало загрузки: 14.06.2023 13:53:22<br>Длительность загрузки: 00:00:08<br>Имя исходного файла: Митрофанова.pdf<br>Название документа: Методические особенности изучения уравнений с параметром в 7-9 классах<br>Размер текста: 68 кБ<br>Тип документа: Выпускная квалификационная работа<br>Символов в тексте: 6908<br>Слов в тексте: 8843<br>Число предложений: 531 | Начало проверки: 14.06.2023 13:53:31<br>Длительность проверки: 00:08:36<br>Комментарий: не указано<br>Поиск с учетом редактирования: да<br>Проверенные разделы: титульный лист с. 1, содержание с. 2, основная часть с. 3-56, библиография с. 57-58, приложение с. 59<br>Модули поиска: ИПС Адвент, Библиография, Сводная коллекция 36С, Интернет Плюс*, Сводная коллекция РГБ, Цитирование, Переводные заимствования (RuEn), Переводные заимствования по eLIBRARY.RU (EnRu), Переводные заимствования по коллекции Гарант: аналитика, Переводные заимствования по коллекции Интернет в английском сегменте, Переводные заимствования по Интернету (EnRu), Переводные заимствования по коллекции Интернет в русском сегменте, Переводные заимствования издательства Wiley, eLIBRARY.RU, СПС ГАРАНТ: аналитика, СПС ГАРАНТ: нормативно-правовая документация, IEEE, Медицина, Диссертации НББ, Коллекция НББ, Перефразирование по eLIBRARY.RU, Перефразирование по СПС ГАРАНТ: аналитика, Перефразирование по Интернету, Перефразирование по Интернету (En), Перефразированные заимствования по коллекции Интернет в английском сегменте, Перефразированные заимствования по коллекции Интернет в русском сегменте, Перефразирование по коллекции издательства Wiley, Патенты СССР, РФ, СНГ, Модуль поиска "ПЕИ", СМИ России и СНГ, Шаблоны фразы: корпус вузов, Издательство Wiley, Переводные заимствования |

СОВПАДЕНИЯ  
38,61% 

САМОЦИТИРОВАНИЯ  
0% 

ЦИТИРОВАНИЕ  
7,36% 

ОРИГИНАЛЬНОСТЬ  
53,93% 



Руководитель ВКР

14.06.23



Е.Г. Журавлева

дата, подпись

**ОТЗЫВ**  
**РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ**  
**на тему: «Методические особенности изучения уравнений**  
**с параметром в 7-9 классах»**  
**студентки Митрофановой Анастасии Сергеевны**  
**факультета физико-математических и естественных наук**  
**направления подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»**  
**профиль «Математика», гр. 183ФПМ51**

Выпускная квалификационная работа Митрофановой Анастасии Сергеевны посвящена разработке элективного курса "Решение уравнений с параметром". Необходимость разработки такого элективного курса связана с тем, что на уроках в школьном курсе математики невозможно уделить достаточно времени задачам данного типа. Для выполнения этих заданий недостаточно прочного усвоения теоретического содержания школьного курса математики, необходимо также иметь развитое логическое мышление, умение ориентироваться в нестандартных ситуациях, определенные навыки исследовательской работы, достаточно высокий уровень общей математической культуры. Рассмотрение данной темы также необходимо в связи с тем, что задания, содержащие уравнения с параметром встречаются в материалах ОГЭ, ЕГЭ, олимпиадах.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка литературы.

В ходе выполнения работы были решены следующие задачи: проведен анализ психолого-педагогической, методической литературы по теме исследования; выделены основные методы решения уравнений с параметром; разработан элективный курс.

Работа является самостоятельным исследованием. Материал этой работы может быть использован в школе.

Выпускная квалификационная работа Митрофановой А.С. удовлетворяет требованиям, предъявляемым к выпускным работам и заслуживает оценки «хорошо».

Руководитель, к.п.н., доцент кафедры  
«Математическое образование»



Е.Г. Журавлева