

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**
Политехнический институт

Факультет вычислительной техники
Кафедра «Математика и суперкомпьютерное моделирование»

ОТЧЕТ

Учебная практика (научно-исследовательская работа)
(получение первичных навыков научно-исследовательской работы)

Вариант № 2

Направление подготовки 01.03.01 «Математика»

Профиль подготовки «Вычислительная математика и компьютерные науки»

Выполнил: студент группы 19ВМ1

Яковлева А. Д.

Работа защищена с оценкой _____

Дата защиты _____

Пенза, 2020

Задание 1. Вычислить определитель.

1	2	0	4
2	3	4	1
3	4	0	2
4	1	2	3

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 8 - 12 - 48 - 2(32 + 6 - 8) + 72 - 4(16 + 12 - 64 - 18) = -44 - 64 - 12 + 16 + 72 - 64 - 48 + 256 + 72 = -232 + 416 = 184$$

Ответ: 184

Задание 2. Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 5x_1 + x_2 + x_4 = 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 & 4 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(-3) \cdot \uparrow + \\ (-1) \cdot \downarrow + \\ (-2) \cdot \downarrow +}} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & -4 & 5 & 6 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1) \cdot \downarrow} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & -6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & -6 & -2 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = -x_2 + x_3 + x_4 \\ x_2 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{4}x_3 + \frac{3}{2}x_4 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{array}$$

Ответ: $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = -\frac{1}{2}, x_3 = 0, x_4 = 0.$

Задание 3. Решить систему методом Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 5x_1 + 2x_2 + 13x_3 = 2 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 5 & 2 & 13 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 20 - 39 - 25 - 30 + 26 + 25 = -23$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 13 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 40 - 20 + 52 + 10 = 92$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 13 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 20 + 156 - 30 - 100 = 46$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -6 - 20 - 24 + 4 = -46$$

$$x_1 = -\frac{92}{-23} = 4$$

$$x_2 = -\frac{46}{-23} = 2$$

$$x_3 = \frac{46}{-23} = -2$$

$$\text{Ответ: } x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = -2.$$

Задание 4. Решить систему матричным методом.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$$

N4

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1}B$$

$$1. \det A = 15 - 18 + 8 - 9 - 12 + 20 = 4$$

$$2. A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 12 = 3 \quad A_{21} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -(10 + 4) = -14$$

$$A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -(-10 + 9) = 1 \quad A_{22} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 3 = 2$$

$$A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 9 = -1 \quad A_{23} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -(-4 - 6) = 10$$

$$A_{31} = (-1)^4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -6 - 3 = -9$$

$$A_{32} = (-1)^5 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -(-3 + 2) = 1$$

$$A_{33} = (-1)^6 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 4 = 7$$

$$3. A^* = \begin{pmatrix} 3 & -14 & -9 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$4. A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -14 & -9 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & -14 & -9 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 10 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 24 - 70 - 90 \\ 8 - 10 + 10 \\ -8 - 50 + 70 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -36 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -9 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x_1 = -9, x_2 = 2, x_3 = 3.$$

Задание 5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - (1-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)((2-\lambda)(2-\lambda) - 1) = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \text{ или } 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$D = 16 - 12 = 4$$

$$\lambda_2 = 3$$

$$\lambda_3 = 1 \Rightarrow \lambda_3 = \lambda_1 = 1.$$

$$\lambda_1 = 1: \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2 — з. перем.

x_3 — своб. перем.

$$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ \vec{c}_1 & 1 & 1 & 0 \\ \vec{c}_2 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

$$x_1 = x_2.$$

$$\lambda_2 = 3: \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_1, x_2 — з. перем.

x_3 — своб. перем.

Т $x_3 = 1$, тогда:

$$x_1 = -x_2 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$x_2 = -x_3 \Rightarrow x_2 = -1$$

$$\vec{c}_3 (1, -1, 1)$$

Ответ: $\vec{c}_1 (1, 1, 0)$; $\vec{c}_2 (0, 0, 1)$; $\vec{c}_3 (1, -1, 1)$.

Задание 1. Найти косинус угла между векторами c_1 и c_2 , построенных по векторам a и b . $\bar{a} = \{1; 0; 1\}$, $\bar{b} = \{-2; 3; 5\}$, $\bar{c}_1 = \bar{a} + 2\bar{b}$, $\bar{c}_2 = 3\bar{a} - \bar{b}$.

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \{1; 0; 1\}, \vec{b} = \{-2; 3; 5\}; \vec{c}_1 = \vec{a} + 2\vec{b}; \vec{c}_2 = 3\vec{a} - \vec{b} \\ \vec{c}_1 &= \{-3; 6; 11\}; \vec{c}_2 = \{5; -3; -2\} \\ \cos(\vec{c}_1, \vec{c}_2) &= \frac{-15 - 18 - 22}{\sqrt{9 + 36 + 121} \cdot \sqrt{25 + 9 + 4}} = -\frac{55}{2\sqrt{1577}} = -\frac{55\sqrt{1577}}{3154} \approx -0,69.\end{aligned}$$

Задание 2. Написать разложение вектора x по векторам p, q, r .

$$\bar{x} = \{-9; 5; 5\}, \bar{p} = \{4; 1; 1\}, \bar{q} = \{2; 0; -3\}, \bar{r} = \{-1; 2; 1\}.$$

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \{-9; 5; 5\}; \vec{p} = \{4; 1; 1\}; \vec{q} = \{2; 0; -3\}; \vec{r} = \{-1; 2; 1\} \\ \vec{x} &= x_1\vec{p} + x_2\vec{q} + x_3\vec{r} \\ \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -9 \\ x_1 + 2x_3 = 5 \\ x_3 + x_1 - 3x_2 = 5 \end{cases} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \Delta &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 4 + 3 + 24 - 2 = 29 \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -9 & 2 & -1 \\ 5 & 0 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 20 + 15 - 54 - 10 = -29 \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 4 & -9 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 20 - 18 - 5 + 5 - 40 + = -29 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 4 & 2 & -9 \\ 1 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 27 + 60 - 10 = 87 \\ x_1 &= -1, x_2 = -1, x_3 = 3 \\ \vec{x} &= -\vec{p} - \vec{q} + 3\vec{r} \\ \text{Ответ: } \vec{x} &= -\vec{p} - \vec{q} + 3\vec{r}\end{aligned}$$

Задание 3. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах a и b .

$$\bar{a} = 3\bar{p} + \bar{q}, \bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}, \text{ если } |\bar{p}| = 4, |\bar{q}| = 1, \varphi = \left(\hat{\bar{p}, \bar{q}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\vec{a} = 3\vec{p} + \vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, \text{ если } |\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 1, \varphi = (\vec{p}, \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = (3\vec{p} + \vec{q}) \times (\vec{p} - 2\vec{q}) = 3\vec{p} \times \vec{p} - 3\vec{p} \times 2\vec{q} + \vec{q} \times \vec{p} - \vec{q} \times 2\vec{q} = \vec{q} \times \vec{p} - 3\vec{p} \times 2\vec{q} =$$

$$= 7(\vec{q} \times \vec{p})$$

$$S_D = |7|\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cdot \sin(\widehat{\vec{p}\vec{q}})| = |7 \cdot 4^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}| = 14\sqrt{2} \quad \text{Ответ: } 14\sqrt{2}.$$

Задание 4. а) Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$; б) Найти смешанное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. $\vec{a} = \{1, 5, 2\}$, $\vec{b} = \{-1, 1, -1\}$, $\vec{c} = \{1, 1, 1\}$.

$$\begin{aligned} & \vec{a} = \{1, 5, 2\}, \vec{b} = \{-1, 1, -1\}; \vec{c} = \{1, 1, 1\}. \\ \text{а) } \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = (-7, -1, 6) \\ \text{б) } \vec{a} \vec{b} \vec{c} &= \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 5 - 2 - 2 + 1 + 5 = -2. \\ \text{Ответ: а) } &(-7, -1, 6); \text{ б) } -2. \end{aligned}$$

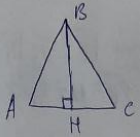
Задание 5. Вычислить объем тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$ и площадь треугольника $A_1A_2A_3$.

$$A_1(7; 2; 4), A_2(7; -1; -2), A_3(3; 3; 1), A_4(-4; 2; 1).$$

$$\begin{aligned} & \vec{a} = \vec{A_1A_2} = \{0, -3, -6\}, \vec{b} = \vec{A_1A_3} = \{-4, 1, -3\}, \vec{c} = \vec{A_1A_4} = \{-11, 0, -3\} \\ V_{A_1A_2A_3A_4} &= \frac{1}{6} |\vec{a} \cdot \vec{b} \cdot \vec{c}| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 0 & -3 & -6 \\ -4 & 1 & -3 \\ -11 & 0 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-99 - 66 + 36| = \frac{1}{6} \cdot 129 = 21,5 \text{ (куб. ед.)} \\ S_{A_1A_2A_3} &= \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| \\ \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-3) - 6 \cdot (-4) \\ 0 \cdot (-3) - 6 \cdot (-4) \\ 0 \cdot 1 - (-4) \cdot (-3) \end{pmatrix} = (15, 24, -12) \\ |\vec{a} \times \vec{b}| &= \sqrt{225 + 576 + 144} = 3\sqrt{105} \\ S_{A_1A_2A_3} &= \frac{3\sqrt{105}}{2} \text{ (кв. ед.)} \\ \text{Ответ: } V_{A_1A_2A_3A_4} &= 21,5 \text{ (куб. ед.)}; S_{A_1A_2A_3} = \frac{3\sqrt{105}}{2} \approx 15,4 \text{ (кв. ед.)}. \end{aligned}$$

Задание 1. Даны вершины треугольника ABC . Составить уравнения его сторон и высоты, опущенной из вершины B . $A(-2,1)$, $B(4,-1)$, $C(0,-2)$

$A(-2,1), B(4,-1), C(0,-2)$
 Уравнение AB : $\frac{x+2}{6} = \frac{y-1}{-2}$
 $6y-6 = -2x-4$
 $2x+6y-2=0$
 Уравнение BC : $\frac{x-4}{-4} = \frac{y+1}{-1}$
 $-4y-4 = -x+4$
 $x-4y-8=0$
 Уравнение AC : $\frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-3}$
 $2y-2 = -3x-6$
 $3x+2y+4=0$
 Уравнение BH : $A(x-x_0) + C(y-y_0) = 0$
 $\vec{AC} = (2, -3)$
 $2(x-4) - 3(y+1) = 0$
 $2x-8-3y-3=0$
 $2x-3y-11=0$



Задание 2. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через три точки M_1, M_2, M_3 . $M_1(-3,-1,1)$, $M_2(-9,1,-2)$, $M_3(3,-5,4)$, $M_0(-7,0,-1)$.

$M_1(-3,-1,1), M_2(-9,1,-2), M_3(3,-5,4), M_0(-7,0,-1)$
 $\begin{vmatrix} x+3 & y+1 & z-1 \\ -6 & 2 & -3 \\ 6 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0$
 $6(x+3) - 18(y+1) + 24(z-1) - 12(z-1) - 12(x+3) + 18(y+1) = 0$
 $-6(x+3) + 12(z-1) = 0$
 $-6x + 12z - 30 = 0$
 $-x + 2z - 5 = 0$
 $Ax + By + Cz + D = 0$
 $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-7 - 2 - 5|}{\sqrt{5}} = 0$
 Ответ: $d = 0$.

Задание 3. Найти угол между двумя плоскостями α_1 и α_2 .

$\alpha_1: x - 3y + z - 1 = 0; \alpha_2: x + z - 1 = 0.$

$\alpha_1: x - 3y + z - 1 = 0; \alpha_2: x + z - 1 = 0$
 $\cos \alpha = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$
 $\cos \alpha = \frac{|1+1|}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{22}} = \frac{2\sqrt{22}}{22} = \frac{\sqrt{22}}{11} \approx 0,43 \Rightarrow \alpha \approx 65^\circ$
 Ответ: $\alpha = 65^\circ$.

Задание 4. Найти точку пересечения прямой L и плоскости P .

$L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5};$

$P: x + 2y - 5z + 20 = 0.$

$$L: \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5}$$

$$P: x+2y-5z+20=0$$

$$\begin{cases} \frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5} \\ x+2y-5z+20=0 \end{cases}$$

$$x+2y-5z+20=0$$

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{5} = t$$

$$x = 3t - 1$$

$$y = -4t + 3$$

$$z = 5t - 1$$

$$3t - 1 + 2(-4t + 3) - 5(5t - 1) + 20 = 0$$

$$3t - 1 - 8t + 6 - 25t + 5 + 20 = 0$$

$$-30t = -30$$

$$t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow M(2, -1, 4)$$

$$\text{Ответ: } M(2, -1, 4)$$

Задание 5. Составить канонические уравнения прямой.

$$\begin{cases} x + 3y + 2z + 2 = 0 \\ x + 3y + z + 14 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y + 2z + 2 = 0 \\ x + 3y + z + 14 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0 \\ x + 3y + z + 14 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0 \\ x + 3y + z + 14 = 0 \end{cases}$$

$$\vec{n}_1 = \{1, -3, 2\}, \vec{n}_2 = \{1, 3, 1\}$$

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k} + 3\vec{k} - 6\vec{i} - \vec{j} = -9\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k} = \{-9, 1, 6\}$$

$$z = 0: \begin{cases} x - 3y = -2 \\ x + 3y = -14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 3y = -2 \\ x = -14 - 3y \end{cases}$$

$$-14 - 3y - 3y = -2$$

$$-6y = 12$$

$$y = -2 \Rightarrow x = -14 + 6 = -8$$

$$M_0(-8, -2, 0)$$

$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = \frac{z - z_0}{r}$$

$$-\frac{x+8}{9} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{6}$$

Задание 1. Найти следующие пределы, не пользуясь правилом Лопиталя.

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - x^3 + 1}{2 + 2x^3 + 5x^4}$ б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{2 + x - x^2}$ в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 1}$

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - x^3 + 1}{2 + 2x^3 + 5x^4} = \frac{2}{5}$
 б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{2 + x - x^2} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x+5)}{-(x-2)(x-2)} = -3$
 в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x-2} - 1} \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x+1} - 2)(\sqrt{x+1} + 2)}{(\sqrt{x-2} - 1)(\sqrt{x+1} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(\sqrt{x-2}-1)(\sqrt{x+1}+2)} \left[\frac{0}{0} \right]$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(\sqrt{x-2}+1)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{2}$
 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 2x} = \frac{x - x + 2 \sin^2 2x}{x - x + 2 \sin^2 x} = \begin{cases} \sin 2x \sim 2x \\ x \rightarrow 0 \\ \sin x \sim x \end{cases} = \frac{2 \cdot 4x^2}{2x^2} = 4$

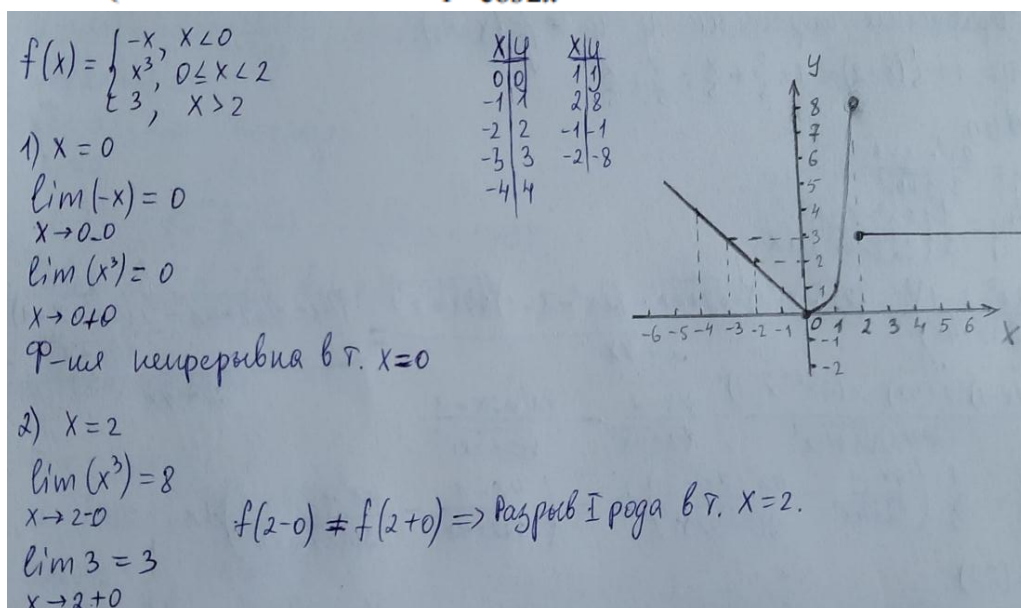
Задание 2. Найти следующие пределы, используя 2-й замечательный предел.

а) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}}$ б) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{\frac{2x}{x^2 - 4}}$

а) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 2x)^{\frac{3}{x}} = e^6$
 б) $\lim_{x \rightarrow 2} (3x - 5)^{\frac{2x}{x^2 - 4}} = \left| t = \frac{1}{x-2}; x = \frac{1}{t} + 2 \right| = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{t} \right)^{\frac{\frac{2}{t} + 4}{\frac{1}{t^2} + \frac{4}{t}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{t} \right)^{\frac{t(\frac{2}{t} + 4)}{\frac{1}{t} + 4}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{t} \right)^{\frac{t(2+4t)}{1+4t}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{t} \right)^{\frac{6+12t}{1+4t}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{12t+6}{4t+1}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{12t+6}{4t+1}} = e^3$

Задание 3. Найти точки разрыва, если они существуют, и сделать чертеж.

$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0; \\ x^3, & 0 \leq x < 2; \\ 3, & x \geq 2. \end{cases}$ г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{1 - \cos 2x}$



Задание 4. Установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной в точках x_1, x_2 . В случае разрыва функции найти ее пределы в

точке разрыва слева и справа.

$$f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}}, \quad x_1 = 1, x_2 = 3$$

$f(x) = 4^{\frac{1}{3-x}}, \quad x_1 = 1, x_2 = 3$
Данная ф-ия определена для всех x , за исключением $x = 3$, т.е.
 $x_2 = 3$ — точка разрыва ф-ии.
 $\lim_{x \rightarrow 3-0} 4^{\frac{1}{3-x}} = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 3+0} 4^{\frac{1}{3-x}} = 0$

Задание 1. Составить уравнение нормали и уравнение касательной к данной кривой в точке с абсциссой x_0 . $y = 2x^2 + 3x - 1$, $x_0 = -2$.

$$y = 2x^2 + 3x - 1, \quad x_0 = -2$$

$$y' = 4x + 3$$

$$y_0 = 8 - 6 - 1 = 1$$

$$y'_0 = -8 + 3 = -5$$

Уравнение касательной: $y = y_0 + y'_0(x - x_0)$

$$y = 1 - 5(x + 2) = 1 - 5x - 10 = -9 - 5x$$

Уравнение нормали: $y = y_0 + \frac{1}{y'_0}(x - x_0)$

$$y = 1 + \frac{1}{-5}(x + 2) = 1 - \frac{x}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} - \frac{x}{5}$$

Задание 2. Найти дифференциал dy . $y = \frac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2 + 4x}}$

$$y = \frac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2 + 4x}}$$

$$dy = \frac{1}{3} \left(\frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{2 + 4x}} \right)' dx$$

$$\left(\frac{2x^2 - x - 1}{\sqrt{2 + 4x}} \right)' = \frac{(2x^2 - x - 1)' \cdot \sqrt{2 + 4x} - (2x^2 - x - 1) \cdot (\sqrt{2 + 4x})'}{2 + 4x} = \frac{(4x - 1)\sqrt{2 + 4x} - 2(2x^2 - x - 1)}{(2 + 4x)\sqrt{2 + 4x}} = \frac{4x - 1}{\sqrt{2 + 4x}} - \frac{4x^2 + 2x - 2}{\sqrt{(2 + 4x)^3}}$$

$$dy = \frac{1}{3} \left(\frac{4x - 1}{\sqrt{2 + 4x}} - \frac{4x^2 + 2x - 2}{\sqrt{(2 + 4x)^3}} \right) dx = \left(\frac{4x - 1}{3\sqrt{2 + 4x}} - \frac{4x^2 + 2x - 2}{3\sqrt{(2 + 4x)^3}} \right) dx$$

Задание 3. Найти производную функций dy/dx . а) $y = \arctg \sqrt{2x} - \sqrt[3]{x}$

б) $y = (\sin 2x)^{\ln x}$

в) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t \\ y = \frac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$

а) $y = \arctg \sqrt{2x} - \sqrt[3]{x}$

$$y' = \frac{1}{1 + 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{2x}(1 + 2x)} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{x}(1 + 2x)} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

б) $y = (\sin 2x)^{\ln x} = 2 \ln x (\sin 2x)^{\ln x - 1} \cdot \cos 2x + \frac{\ln(\sin 2x)(\sin 2x)^{\ln x}}{x}$

в) $\begin{cases} x = \operatorname{ctg} t \\ y = \frac{1}{\cos^2 t} \end{cases}$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{2 \sin t}{\cos^3 t} \cdot \frac{1}{-\operatorname{ctg}^2 t + 1} = -\frac{2 \sin t}{\frac{\cos^5 t}{\sin^2 t} + \cos^3 t} = -\frac{2 \sin^3 t}{\cos^5 t + \cos^3 t \sin^2 t} = -\frac{2 \sin^3 t}{\cos^3 t (\cos^2 t + \sin^2 t)} = -2 \operatorname{tg}^3 t$$

Задание 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функций в указанных промежутках.

$$y = x \sqrt{\frac{x}{x+1}}, \quad [-4, -1,25]$$

$$\begin{aligned}
 y &= x \sqrt{\frac{x}{x+1}} \quad [-4, -1,25]. \\
 y' &= \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{x}{2\sqrt{\frac{x}{x+1}}(x+1)^2} = \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \frac{x\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \frac{2x \cdot \sqrt{(x+1)^3} + x\sqrt{x+1}}{2\sqrt{x}(x+1)^2} = \\
 &= \frac{x\sqrt{x+1}(2(x+1)+1)}{2\sqrt{x}(x+1)^{3/2}} = \frac{\sqrt{x}(2x+3)}{2\sqrt{(x+1)^3}} \\
 y(-4) &= -4\sqrt{\frac{-4}{-3}} = -4\sqrt{\frac{4}{3}} = -\frac{8}{\sqrt{3}} \approx -4,618 \\
 y(-1,25) &= -1,25\sqrt{\frac{-1,25}{-0,25}} = -1,25 \cdot \sqrt{5} \approx -2,995 \\
 \sqrt{x}(2x+3) &= 0 \\
 \sqrt{x} &= 0 \quad \text{или} \quad 2x+3=0 \\
 x_1 &= 0 \quad x_2 = -\frac{3}{2} \\
 y(-\frac{3}{2}) &= -\frac{3}{2}\sqrt{-\frac{3}{2} \cdot (-2)} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2,598. \\
 \text{Ответ: } f_{\min} &= -\frac{8}{\sqrt{3}}, \quad f_{\max} = -\frac{3\sqrt{3}}{2}
 \end{aligned}$$

Задание 5. Исследовать функцию и построить ее график.

a) $y = \frac{x^4}{(x-2)^3}$ б) $y = (2x+1) \cdot e^{-x}$

$$a) y = \frac{x^4}{(x-2)^3}$$

$$1) D(y): x-2 \neq 0 \\ x \neq 2$$

$$x \in (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$$

$$2) y(-x) = \frac{x^4}{(-x-2)^3} \neq y(x) - \text{общего вида}$$

$$3) y=0$$

$$x=0 \Rightarrow y=0$$

$$\frac{x^4}{(x-2)^3} = 0 \Rightarrow x=0$$

4) Верт. асимптоты:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{x^4}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{16}{(-0)^3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{x^4}{(x-2)^3} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{16}{(+0)^3} = +\infty$$

$x=2$ - верт. асимптота.

Накл. асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{x(x-2)^3} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^4}{(x-2)^3} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 - x^4 + 6x^3 - 12x^2 + 8x}{(x-2)^3} = 6$$

$y = x+6$ - накл. асимптота.

5) Тестирование:

$$y' = \frac{4x^3(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - x^4(3x^2 - 12x + 12)}{(x-2)^6} = \frac{4x^6 - 24x^5 + 48x^4 - 32x^3 - 3x^6 + 12x^5 - 12x^4}{(x-2)^6} = \frac{x^3(x^3 + 12x^2 - 36x + 32)}{(x-2)^6} = \frac{x^3(x-8)(x-2)^2}{(x-2)^6} = \frac{x^3(x-8)}{(x-2)^4}$$

$$x^3(x-8) = 0$$

$$x^3 = 0 \text{ или } x_2 = 8$$

$$x_1 = 0$$

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	$(2; 8)$	8	$(8; +\infty)$
y'	+	0	-	-	0	+
y	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\searrow$	18,96	$\nearrow$

6) Точка перегиба:

$$y'' = \left(\frac{x^3 - 8x^2}{(x-2)^4} \right)' = \frac{4x^3 - 24x^2}{(x-2)^5} = \frac{4x^2(x-6)}{(x-2)^5}$$

$$4x^2(x-6) = 0$$

$$x_1 = 0 \text{ или } x_2 = 6$$

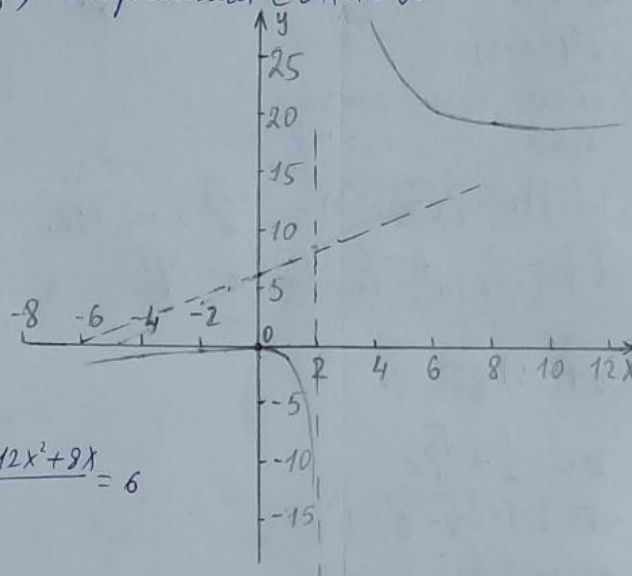
x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 2)$	$(2; 6)$	6	$(6; +\infty)$
y''	-	0	-	-	0	+
y	$\cap$	0	$\cap$	$\cap$	20,25	$\cup$

$$y = x+6$$

x	y
0	6
1	7
2	8
-1	5
-2	4

$$y = \frac{x^4}{(x-2)^3}$$

y	x
-1	1
-0,25	-2
-1,2	-4
-2,5	-6
-19,5	10
-20,7	12



8) $y = (2x+1)e^{-x}$

1) $D(y) = \mathbb{R}$

2) $y'(x) = (-2x+1)e^{-x} \neq -y(x)$ - одиференциально не связано

3) Точки пересечения с Ox и Oy :

$y=0$:

$(2x+1)e^{-x} = 0$

$e^{-x} = 0$ - реш-ий нет или $2x+1=0$
 $x = -\frac{1}{2}$

$x=0$:

$y=1$

$(-\frac{1}{2}, 0)$ - т. пересечения с Ox

$(0, 1)$ - т. пересечения с Oy

4) Верт. асимптоты отсутствуют.

Наклон. асимптоты:

$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+1)e^{-x}}{x} = 0$

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+1)e^{-x} = 0$

$y=0$ - гориз. асимптота.

5) Экстремумы:

$y' = 2e^{-x} - (2x+1)e^{-x} = e^{-x} - 2xe^{-x}$

$e^{-x} - 2xe^{-x} = 0$

$e^{-x}(1-2x) = 0$

$e^{-x} = 0$ - реш-ий нет или $1-2x=0$
 $x = \frac{1}{2}$

x	$(-\infty, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, +\infty)$
y'	+	0	-
y	↗	≈ 1,2 max	↘

6) Точки перегиба:

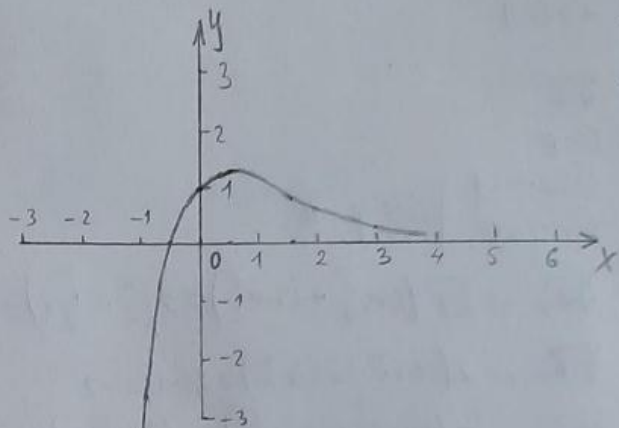
$y'' = -e^{-x} - (2e^{-x} - 2xe^{-x}) = -e^{-x} - 2e^{-x} + 2xe^{-x} = -3e^{-x} + 2xe^{-x}$

$-3e^{-x} + 2xe^{-x} = 0$

$e^{-x}(-3+2x) = 0$

$e^{-x} = 0$ - реш-ий нет или $-3+2x=0$
 $x = \frac{3}{2}$

x	y
2	≈ 0,67
3	≈ 0,35
-1	≈ -2,7
-2	≈ -22



x	$(-\infty, \frac{3}{2})$	$\frac{3}{2}$	$(\frac{3}{2}, +\infty)$
y''	-	0	+
y	∩	≈ 0,89	∪

Задание 1. Записать число в тригонометрической и показательной формах.

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

№1(25) 6 блок.

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\Gamma = |z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$$

$$\cos \varphi = -\frac{1}{2}, \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) - \text{тригонометрическая форма}$$

$$z = e^{i\frac{2\pi}{3}} - \text{показательная форма.}$$

Задание 2. Представить в алгебраической форме комплексное число.

$$\frac{(2+i)(3-i)}{4+3i}$$

$$\frac{(2+i)(3-i)}{4+3i} = \frac{6+3i-2i-i^2}{4+3i} = \frac{7+i}{4+3i} = \frac{(7+i)(4-3i)}{(4+3i)(4-3i)} = \frac{28+4i-21i-3i^2}{25} = \frac{31-17i}{25} = \frac{31}{25} - \frac{17i}{25}$$

Задание 3. Вычислить по формуле Муавра. $(1+i)^{15}$

$$(1+i)^{15} = (\sqrt{2})^{15} \left(\cos \frac{15\pi}{4} + i \sin \frac{15\pi}{4} \right)$$

$$\Gamma = \sqrt{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Задание 4. Извлечь корни n -й степени из комплексного числа. $\sqrt[3]{-8}$

$$\sqrt[3]{-8}$$

$$\Gamma = 8$$

$$\cos \varphi = -1, \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = \pi$$

$$\sqrt[3]{-8}_{k=0} = \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\sqrt[3]{-8}_{k=1} = 2 \left(\cos \pi + i \sin \pi \right) = 2(-1) = -2$$

$$\sqrt[3]{-8}_{k=2} = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 1 - \sqrt{3}i$$

Задание 5. Найти корни уравнения. $z^2 + 2z + 2 = 0$

$$z^2 + 2z + 2 = 0$$

$$\Delta = 4 - 8 = -4 = 4i^2$$

$$x_1 = \frac{-2 + 2i}{2} = -1 + i$$

$$x_2 = \frac{-2 - 2i}{2} = -1 - i$$

$$\text{oder: } x_1 = -1 + i, x_2 = -1 - i.$$

Задание 1. Найти неопределенный интеграл методом подведения некоторой функции под знак дифференциала. $\int e^{\frac{x}{2}+5} dx$

$$\int e^{\frac{x}{2}+5} dx = 2e^{\frac{x}{2}+5} + C$$

Задание 2. Найти неопределенный интеграл методом интегрирования по частям. $\int \frac{x dx}{\cos^2 2x}$

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\cos^2 2x} &= \int x \cdot \sec^2 2x dx = \left| \begin{array}{l} x = u; \quad dx = du; \\ du = \sec^2 2x dx; \quad u = \frac{1}{2} \tan 2x; \end{array} \right| = \frac{1}{2} x \cdot \tan 2x - \frac{1}{2} \int \tan 2x dx = \\ &= \frac{1}{2} x \tan 2x + \frac{1}{4} \ln |\cos 2x| + C = \frac{x \tan 2x}{2} + \frac{\ln |\cos 2x|}{4} + C \end{aligned}$$

Задание 3. Найти неопределенный интеграл методом замены переменной.

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-3x^3}}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-3x^3}} = \left| \begin{array}{l} 1-3x^3 = t \\ -9x^2 dx = dt \end{array} \right| = -\frac{1}{9} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{2\sqrt{t}}{9} + C = -\frac{2\sqrt{1-3x^3}}{9} + C$$

Задание 4. Разложить дробь на простейшие дроби и найти все неопределенные коэффициенты.

$$\frac{1}{x(x^2+16)}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{x(x^2+16)} &= \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+16} \\ x(Mx+N) + A(x^2+16) &= 1 \\ Mx^2 + Nx + Ax^2 + 16A &= 1 \\ Mx^2 + Nx + Ax^2 + 16A &= 1 \\ 16A &= 1 \\ N &= 0 \\ M + A &= 0 \\ A \quad M \quad N \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 16 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 16 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \cdot (-16) + \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \cdot \left(-\frac{1}{16} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \cdot (-1) + \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{16} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{16} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ A = \frac{1}{16} \quad M = -\frac{1}{16} \quad N = 0 &\Rightarrow \frac{1}{x(x^2+16)} = \frac{1}{16x} - \frac{x}{16(x^2+16)} \end{aligned}$$

Задание 5. Найти определенный интеграл методом интегрирования по частям.

$$\int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 (x^2 - 4) \cos 3x dx &= \int_{-2}^0 x^2 \cos 3x dx - 4 \int_{-2}^0 \cos 3x dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = u, \quad 2x dx = du, \\ \cos 3x dx = dv, \quad \frac{1}{3} \sin 3x = v \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{3} x^2 \sin 3x \Big|_{-2}^0 - \frac{2}{3} \int_{-2}^0 x \sin 3x dx = 4 \int_{-2}^0 \cos 3x dx = \frac{4 \sin 6}{3} + \frac{4 \cos 6}{9} - \frac{2}{9} \int_{-2}^0 \cos 3x dx - \\ &- 4 \int_{-2}^0 \cos 3x dx = \frac{4 \sin 6}{3} + \frac{4 \cos 6}{9} - \frac{38}{9} \int_{-2}^0 \cos 3x dx = \frac{4 \sin 6}{3} + \frac{4 \cos 6}{9} - \frac{38}{27} \sin 3x \Big|_{-2}^0 = \\ &= \frac{4 \sin 6}{3} + \frac{4 \cos 6}{9} - \frac{38 \sin 6}{27} = \frac{4 \cos 6}{9} - \frac{2 \sin 6}{27} \\ * \int_{-2}^0 x \sin 3x dx &= \left| \begin{array}{l} x = u, \quad dx = du \\ \sin 3x dx = dv, \quad -\frac{1}{3} \cos 3x = v \end{array} \right| = -\frac{1}{3} x \cos 3x \Big|_{-2}^0 + \frac{1}{3} \int_{-2}^0 \cos 3x dx = \\ &= -\frac{2 \cos 6}{3} + \frac{1}{3} \int_{-2}^0 \cos 3x dx. \end{aligned}$$

Задание 6. Найти определенный интеграл, сделав тригонометрическую замену переменной.

$$\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx &= \left| \begin{array}{l} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ t=0 \\ t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t \sqrt{1-\sin^2 t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cdot \cos^2 t dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - \cos^4 t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t)^2 dt = \frac{1}{2} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \\ &+ \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + 2 \cos 2t + \cos^2 2t) dt = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi - \frac{1}{4} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 4t) dt \\ &= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \sin \pi - \frac{1}{8} t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{32} \sin 4t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

Задание 7. Вычислить площадь фигур, ограниченных графиками функций.
 $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$

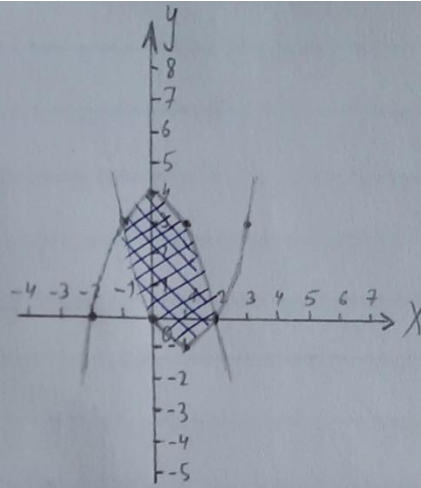
N 7 (36) 7 δλου.

$$y = 4 - x^2; y = x^2 - 2x$$

$$y = 4 - x^2; y = x^2 - 2x$$

x	y
0	4
1	3
2	0
-1	3
-2	0

x	y
0	0
1	-1
2	0
-1	3
3	3



$$S = \int_{-1}^2 (4 - x^2 - x^2 + 2x) dx = 4x \Big|_{-1}^2 - \frac{2x^3}{3} \Big|_{-1}^2 + x^2 \Big|_{-1}^2 = 8 + 4 - 6 + 4 - 1 = 9 \text{ (ab. eg.)}$$

-1 Απάντ: 9 ab. eg.