

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических и
естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки 44.03.01 Педагогическое образование

Профиль «Математика»

Форма обучения: очная

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

бакалаврская работа на тему:

«Содержательные особенности ЕГЭ по математике базового уровня»

Студент

С.И.С. 20.05.24
(подпись, дата)

Согласова Татьяна Александровна
(ФИО полностью)

Руководитель

М.О.С. 20.05.24
(подпись, дата)

Монахова О. А.
(фамилия, инициалы)

Нормоконтролёр

Н.И. 15.06.24
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 24.05.24 № 11)

Заведующий кафедрой

24.05.24 П.И.С.
(подпись, дата)

Паньженский В.И.
(фамилия, инициалы)

Работа защищена с оценкой отлично (протокол заседания ГЭК от 20.06.24 № 6)

Секретарь ГЭК

Н.И. 20.06.24
(подпись, дата)

Журавлева Е.Г.
(фамилия, инициалы)

Пенза 2024

Оглавление

Введение	3
Глава 1. Анализ структуры ЕГЭ по математике базового уровня.....	5
1.1 Документы, определяющие структуру и содержание контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена.....	5
1.2 Содержательный раздел: числа и вычисления.....	9
1.3 Содержательный раздел: геометрия.....	13
1.4 Содержательный раздел: уравнения и неравенства.....	17
1.5 Содержательный раздел: вероятность и статистика.....	21
1.6 Содержательный раздел: начала математического анализа.....	23
1.7 Содержательный раздел: функции и графики.....	25
1.8 Содержательный раздел: множества и логика.....	26
Глава 2. Факультативный курс «Задачи повышенной сложности» для учеников 11 класса.....	28
2.1 Разработка факультативного курса.....	28
2.2 Задание №8. «Анализ утверждений».....	31
2.3 Задание №11. «Прикладная стереометрия».....	50
2.4 Задание №19. «Числа и их свойства».....	57
2.5 Задание №21. «Задачи на смекалку».....	67
Заключение.....	76
Список использованных источников.....	78

Введение

Единый государственный экзамен — это форма государственной итоговой аттестации по программам среднего общего образования. Подготовка к экзамену является основной и значимой задачей каждого школьника, поскольку от результатов экзамена зависит поступление выпускника в престижный ВУЗ.

Первоначальной целью ЕГЭ было уничтожение коррупции в школах и ВУЗах и обеспечение эффективной проверки знаний выпускников, а также уравнивание шансов молодёжи, в том числе из регионов. Начиная с 2015 года, ЕГЭ по математике претерпело ряд изменений, одним из важных которых является разделение экзамена на два уровня — базовый и профильный. ЕГЭ на базовом уровне предназначен для тех, кто не планирует в дальнейшем связывать свою жизнь и профессиональную деятельность с математикой [1].

При поступлении в ВУЗ результат за экзамен по базовой математике не учитывается, но среди сдающих есть те ученики, которым получить высший балл необходимо для подтверждения аттестата с отличием. ЕГЭ по базовой математике состоит из 21 задания, каждое из них оценивается 1 баллом. Для получения оценки «отлично» выпускнику необходимо набрать 17 баллов и выше, но учитывая стрессовую ситуацию, невнимательность сдающего, нельзя с уверенностью сказать, что решив всего 17 заданий, ученик сдаст экзамен на «отлично». Поэтому необходимо подготовить выпускника к умению решать каждую задачу ЕГЭ базового уровня.

Проанализировав учебные программы курса математики, выяснилось, что 4 задания из 21 в школе либо слабо освещаются, либо вовсе не изучаются. К таким заданиям относятся задания №8 — «Анализ утверждений», №11 — «Прикладная стереометрия», №19 — «Числа и их свойства», №21 — «Задачи на смекалку».

На основе анализа школьной программы и структуры ЕГЭ по базовой математике разработан факультативный курс по задачам повышенной сложности, направленный на изучение и систематизацию математических знаний, а также применение их на практике и в обыденной жизни.

Целью представленной выпускной квалификационной работы является изучение содержательных особенностей ЕГЭ по математике базового уровня и разработка факультативного курса «Задачи повышенной сложности».

В соответствии с поставленной целью были определены следующие задачи:

1. Провести анализ структуры ЕГЭ по математике базового уровня;
2. Выявить основные содержательные особенности ЕГЭ по математике базового уровня;
3. Разработать тематическое планирование факультативного курса «Задачи повышенной сложности»;
4. Подобрать теоретический материал к каждому разделу факультативного курса;
5. Составить задачный материал к каждому разделу факультативного курса.

Для решения поставленных задач были использованы следующие методы исследования: анализ учебно-методической литературы, интернет ресурсов, создание факультативного курса.

Практическая значимость исследования заключается в том, что разработанный факультативный курс может быть использован учителем при подготовке к ЕГЭ базового уровня.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников (16 наименований). Основной объём работы составляет 79 страниц.

ГЛАВА 1. АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ ЕГЭ ПО МАТЕМАТИКЕ БАЗОВОГО УРОВНЯ

1.1 Документы, определяющие структуру и содержание контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена

Единый государственный экзамен (ЕГЭ) представляет собой форму государственной итоговой аттестации, проводимой в целях определения соответствия результатов освоения обучающимися образовательных программ среднего общего образования соответствующим требованиям федерального государственного образовательного стандарта. Для вышесказанных целей используются контрольно измерительные материалы (КИМ), представляющие собой комплексы заданий.

КИМ ЕГЭ базового уровня на момент 2024 года состоит из 21 задания базового уровня сложности с кратким ответом, проверяющих освоение базовых знаний и умений применения математических знаний на практике. Содержание и структура экзамена позволяют проверить и оценить совокупность знаний и умений выпускника по предмету, а именно: базовые логические и вычислительные умения; умение анализировать информацию, представленную на диаграммах, графиках и таблицах; использовать вероятнейшие и статистические модели в повседневной жизни; анализировать и проектировать простейшие геометрические конфигурации.

Содержание и результаты выполнения заданий ЕГЭ связаны в том числе с достижением личностных результатов освоения основной образовательной программы в части физического, трудового, экологического воспитания, а также принятия ценности научного познания [4].

На данный момент для подготовки к ЕГЭ как учителю, так и ученику могут помочь не только демонстрационные версии экзамена и значительное количество решённых вариантов, но также будет полезно ознакомление с

документами, определяющих структуру и содержание контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена: спецификация и кодификатор. Указанные документы, по своей сущности, являются «инструкциями» к экзамену. Подробно остановимся на каждом из них.

Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2024 году единого государственного экзамена по математике (спецификация) — это документ, раскрывающий структуру контрольно измерительных материалов и объясняющий особенности единого государственного экзамена по математике. В спецификации представлена информация о продолжительности экзамена в целом и сколько времени в среднем можно уделить на каждое задание. Например, составители ЕГЭ ожидают, что ученик, решая задание на смекалку, будет тратить около 20 минут. Поэтому при подготовке к ЕГЭ важно учитывать этот фактор.

Также в документе подробно расписано каждое задание: темы, которым оно посвящено, временные отрезки, и навыки и умения выпускника (проверяемые требования), которые необходимо продемонстрировать (рис. 1).

Номер задания	Проверяемые предметные результаты освоения основной образовательной программы	Коды проверяемых требований к уровню подготовки (по кодификатору)	Коды проверяемых элементов содержания (по кодификатору)	Уровень сложности задания	Максимальный балл за выполнение задания	Примерное время выполнения задания выпускником, изучавшим математику на базовом уровне (в мин.)
1	Выполнять вычисление значений и преобразования выражений	2	1	Б	1	7
2	Умение решать текстовые задачи разных типов, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов, умение оценивать размеры объектов окружающего мира	6, 9	1	Б	1	5
3	Умение извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках	7	3, 6	Б	1	5
4	Умение выполнять вычисление значений и преобразования выражений, умение решать текстовые задачи разных типов	2, 6	1, 2	Б	1	4
5	Умение вычислять в простейших случаях вероятности событий	8	6	Б	1	10
6	Умение извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках	7	1	Б	1	11
7	Умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, определять значение функции по значению аргумента; описывать по графику поведение и свойства функции	4, 5	3, 4	Б	1	7
8	Умение проводить доказательные рассуждения	1	5	Б	1	8
9	Умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира	9	7	Б	1	6

Рисунок 1 — Обобщённый план варианта КИМ ЕГЭ 2024 года по МАТЕМАТИКЕ (базовый уровень)

Важным пунктом в документе так же стоит отметить «Изменения в КИМ ЕГЭ 2024 года в сравнении с КИМ 2023 года». Исходя из названия, в данном разделе прописаны изменения, которым подвергся экзамен по сравнению с прошлым годом. Так, по сравнению с 2023 годом КИМ ЕГЭ 2024 года не подвергся изменениям ни в содержании, ни в структуре.

Чтобы в полной мере пользоваться спецификацией, требуется так же изучить и такой документ как кодификатор проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования и элементов содержания для проведения единого государственного экзамена по математике (кодификатор). Кодификатор содержит перечень тем и навыков, которыми должен обладать выпускник. Из этого следует разделение документа на два раздела: раздел 1. «Перечень проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования по математике» и раздел 2. «Перечень элементов содержания, проверяемых на едином государственном экзамене по математике». Так же в кодификатор 2024 года был добавлен раздел 3. «Отражение в содержании контрольных измерительных материалов личностных результатов освоения основной образовательной программы среднего общего образования» [4].

Наиболее важным, с практической точки зрения, является раздел 2. С его помощью можно составить план подготовки к ЕГЭ как учителем, так и учеником, не задумываясь над тем, с какой темы начать, какие темы упущены, а какие темы требуют усиленного внимания.

Рассмотрим на примере 5 задания, как пользоваться спецификацией и кодификатором в совокупности. Обратимся к рисунку 1. В столбце «Коды проверяемых требований к уровню подготовки» указан код 8. В кодификаторе он расшифровывается следующим образом в разделе 1, таблица 2:

— умение оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события;

— умение вычислять вероятность с использованием графических методов;

— применять формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, формулу Бернулли, комбинаторные факты и формулы;

— умение оперировать понятиями: случайная величина, распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение случайной величины, функции распределения и плотности равномерного, показательного и нормального распределений;

— умение оперировать понятиями: сочетание, перестановка, число сочетаний, число перестановок;

— умение применять комбинаторные факты и рассуждения для решения задач;

— оценивать вероятности реальных событий и составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат [4].

Таким образом, вышеуказанные пункты показывают, какие навыки и умения должен применить ученик для успешного решения задания 5.

Далее рассмотрим столбец с названием «Коды проверяемых элементов содержания». Расшифровка кода 6 также находится в кодификаторе уже в разделе 2:

6. Вероятность и статистика:

6.1 Описательная статистика;

6.2 Вероятность;

6.3 Комбинаторика.

Таким образом, данные коды показывают, какие знания должен усвоить, а затем применить ученик для решения задания 5.

Таким способом рассматривается каждое задание из контрольно измерительного материала, и легко можно составить план для подготовки, поскольку это списки того, что может встретиться на экзамене.

1.2 Содержательный раздел: числа и вычисления

В контрольно измерительных материалах к разделу числа и вычисления относятся 8 заданий: задание №1, задание №2, задание №6, задание №14, задание №15, задание №16, задание №19, задание №21. Ссылаясь на спецификацию по математике базового уровня, можно обобщенно указать проверяемые предметные результаты освоения основной образовательной программы: выполнять вычисление значений и преобразования выражений, уметь решать текстовые задачи разных типов, умение выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов [16].

Задание №1. «Простейшие текстовые задачи». Данное задание проверяет у учеников, во-первых, их арифметические навыки, которые у них начинают формироваться ещё в начальной школе, такие как сложение, вычитание, умножение и деление. Если ребёнок не научился этому ранее, то курс математики за 5 класс предоставляет ему возможность заново изучить и освоить вышеуказанные операции, естественно, с помощью учителя-предметника, который своевременно должен обнаружить данные пробелы и устранить их с помощью систематических упражнений.

Возвращаясь к проверяемым навыкам, то второе, что должен в совершенстве выполнять выпускник — это округлять числа как с избытком, так и с недостатком. Данный материал также осваивается учениками в 5 классе, и далее часто используется при решении задач на вероятность, при округлении полученного результата.

Помимо математических знаний, ученик должен правильно выстраивать математическую модель, в крайнем случае для удобства «переносить» условие задачи на себя, поскольку все задачи, встречающиеся в данном задании, имеют прикладной характер. Ученику нужно не только посчитать, но и логически подумать, в какую сторону округлить ответ.

Задание №2. «Размеры и единицы измерения». Задание представляет собой практическую задачу на проверку сформированности у выпускника представление о величине. Образовательный портал для подготовки к экзаменам содержит задачи на единицы измерения времени, длины, массы, объёма и площади [15]. О каждой из данных величин ученик узнает по мере усложнения материала курса математики, но в основном, уже ученик 5 класса сможет самостоятельно рассказать, что из себя представляет каждая величина. Успех выполнения данного задания зависит в основном от владения учеником читательской грамотностью и элементарными жизненными представлениями о величине.

Задание №6. «Выбор оптимального варианта». В данном задании представлены текстовые задачи с практическим содержанием. Помимо умения правильно прочитать условие задачи, выпускник при решении данного вида задания должен так же применить умение работать с таблицами. Такого рода задачи ученикам встречаются и на всероссийских проверочных работах.

Суть задания состоит в том, что ученику необходимо рассчитать несколько вариантов стоимости товара или услуги и выбрать выгодный вариант. Встречаются также задачи, в которых требуется собрать самый дешёвый перечень услуг или товаров, принимая во внимание, что должны быть выполнены все необходимые пункты, описываемые в условии задачи.

Задание №14. «Вычисления». Задание проверяет базовые навыки счета, которым учат в 5-6 классах. Это умение работать с обыкновенными дробями: сложение и вычитание дробей с одинаковым знаменателем, сложение и вычитание дробей с разным знаменателем, умножение и деление дробей; умение работать с десятичными дробями [8]. На начальных этапах изучения данных тем у многих учеников возникают сложности в понимании как работать с дробями и не редко отличники по математике начинают получать оценки «удовлетворительно» лишь из-за одной этой темы. Поэтому на

данный материал отводится много часов, чтобы ученики в достаточной мере смогли усвоить что такое дроби и как с ними работать, поскольку дроби будут сопровождать ученика на протяжении всего курса математики.

Задание №15. «Простейшие текстовые задачи». В данном задании составители экзамена проверяют выпускника на умение работать с процентами и соотношениями. Формат задачи представляет собой текстовую задачу с практическим содержанием. Встречаются всего 4 вида данного задания [15]:

— нахождение части от числа

«Только 94% из 27 500 выпускников города решили задачу В1. Сколько человек правильно решили задачу В1?»

— нахождение целого по его части

«В школе французский язык изучают 162 учащихся, что составляет 18% от числа всех учащихся школы. Сколько учащихся в школе?»

— нахождение процентной части от целого

«Мобильный телефон стоил 3500 рублей. Через некоторое время цену на эту модель снизили до 2800 рублей. На сколько процентов была снижена цена?»

— задачи на соотношение

«Число хвойных деревьев в парке относится к числу лиственных как 9:16. Других деревьев в парке нет. Сколько процентов деревьев в парке составляют лиственные?»

Чтобы ученик смог верно решить задачу каждого типа, он должен помнить основные правила: чтобы найти часть от числа, надо эту часть умножить на целое; чтобы найти целое, надо часть разделить на дробь; чтобы найти, какую долю часть составляет от целого, надо часть разделить на целое. Если же ученик забыл данные правила, то всегда есть пропорция, которая подходит в качестве решения для любого типа задания №15.

Задание №16. «Вычисления и преобразования». Данное задание проверяет у выпускников первостепенно знание теории, а лишь затем вычислительные навыки. Наибольшее количество заданий отведено действиям со степенями и в равном количестве преобразованиям числовых иррациональных выражений, преобразованиям числовых логарифмических выражений, вычислениям значений тригонометрических выражений и преобразованиям числовых тригонометрических выражений. Для успешного решения задания ученику необходимо знать, соответственно, свойства степеней, корней, логарифмов и формулы тригонометрии.

Задание №19. «Числа и их свойства». Данное задание проверяет выпускников на знание теории чисел, в частности, на знание признаков делимости чисел. По своей структуре это задание в некоторой степени можно отнести к олимпиадным задачам, поскольку задание творческое, конструктивное, требующее тщательного системного подбора. Выпускнику следует лишь выполнить организованный перебор вариантов и следом осуществить проверку выполнения всех условий к выбранным вариантам чисел.

Признаки делимости чисел изучаются учениками в 5 классе, но в малом количестве — один час отводится на изучение и закрепление признаков делимости на 2, на 5 и на 10, и аналогично один час отводится на изучение и закрепление признаков делимости на 3 и на 9 [8]. Чтобы решить задание №19, этих знаний будет недостаточно, поскольку, кроме перечисленных признаков, в ЕГЭ встречаются признаки делимости и на другие числа.

Задание №21. «Задачи на смекалку». Данное задание проверяет у учеников в основном понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений. Эти задания вызывают интерес у учащихся, поскольку содержание задачи, на первый взгляд, кажется простым, так как относится к жизненным ситуациям, но само решение требует от сдающих серьёзных математических рассуждений.

Во многих статьях и очерках данные задачи объединяются под общим условным названием «математические развлечения». Задачи данной категории конкретны и требуют не шаблонного решения, поэтому аналогично заданию №19, задание №21 так же можно отнести к разряду олимпиадных задач.

Чтобы ученик смог решить задачи данного типа, ему необходимо уметь строить математические модели и следом — верные логические выводы.

1.3 Содержательный раздел: геометрия

В контрольно измерительных материалах к разделу геометрии относятся 5 заданий: задание №9, задание №10, задание №11, задание №12 и задание №13. Согласно кодификатору, они позволяют проверить такие умения учеников как: решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей); решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объёмов); использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы; моделировать реальные ситуации на языке геометрии, исследовать построенные модели с использованием геометрических понятий и теорем, аппарата алгебры; решать практические задачи, связанные с нахождением геометрических величин [4].

Задание №9. «Задачи на квадратной решётке». В данном задании собраны задачи на вычисление площадей треугольников, четырёхугольников, произвольных четырёхугольников. Тема «площади четырёхугольников» изучается учениками в 8 классе, что позволяет обойтись без дополнительной подготовки для успешного решения задания [11]. В отличие от задач в учебнике геометрии, где площади фигур требуется найти по заданным величинам, в контрольно измерительных материалах ученикам следует самостоятельно узнать величины сторон фигуры, подсчитывая количество

клеток, на которых изображены фигуры. Для произвольных же четырёхугольников выпускникам требуется сделать вспомогательные построения, которые позволят им решить задачу.

Помимо нахождения площадей треугольников и четырёхугольников, ученикам предлагается задача на примерную оценку площади озера, которое также изображено на квадратной решётке (рис. 2).



Рисунок 2 —Пример задачи №9 ЕГЭ по математике базового уровня

Согласно спецификации данный вид задачи проверяет у выпускников умение оценивать размеры объектов окружающего мира. Похожие задачи изучаются в 4 классе на уроках математики, на которых ученикам предлагается измерить площадь фигуры с помощью палетки, прозрачной плёнки, которая может быть разбита на квадратные дециметры, квадратные сантиметры, квадратные миллиметры. Но в силу возрастных особенностей учеников 11 класса и правил сдачи экзамена, данный вид решения задачи не является верным. Поэтому чтобы ученик смог получить балл за выполнение задания, ему следует применить своё пространственное мышление.

Таким образом, задание №9 не должно вызвать затруднений у ученика при его решении, при условии, что ученик помнит формулы нахождения площадей различных фигур.

Задание №10. «Прикладная геометрия». Данное задание включает в себя задачи связанные с квадратом — нахождение площади; окружностью — нахождение градусной меры угла; трапецией — нахождение неизвестной величины; треугольником — применение теоремы Пифагора; прямоугольником — нахождение периметра и площади с дополнительными условиями [15]. Задание показывает ученикам, что изученные за годы обучения факты и теоремы планиметрии можно применять в реальной жизни. Материал, необходимый для решения задания, изучается на протяжении всего школьного курса геометрии. Поэтому данное задание, как и задание №9, так же не нуждается в дополнительной подготовке.

Задание №11. «Прикладная стереометрия». В этом задании ученикам предлагается решить простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин, а именно — объёма, площади поверхности многогранника, сечение многогранника [15]. Как и задание №10, данное задание так же показывает ученикам значимость не только в обучении, но и в реальной жизни, изученных ими ранее фактов и теорем стереометрии.

Особенностью данного задания являются задачи на тему «площадь поверхности составного многогранника» и «объём составного многогранника». В учебнике по геометрии 10-11 класса Атанасяна Л. С. так называемые «составные многогранники» называются невыпуклыми. На уроках данный вид многогранника не изучается, а только лишь упоминается в одном предложении параграфа [4].

Чтобы решить задачи на нахождение объёма составного многогранника, ученикам можно провести аналогию из планиметрии, где требуется найти площадь фигуры, у которой «вырезана» какая-либо часть. Чтобы решить такую задачу, следует произвести три действия: найти площадь всей фигуры, найти площадь вырезанной фигуры, вычесть из площади всей фигуры площадь вырезанной фигуры. Такого рода задачи ученики решают начиная с 6 класса, так же они встречаются в 8 классе, когда ученики изучают

четырёхугольники, а также такое задание встречается на ОГЭ по математике. Относительно ЕГЭ работают те же три шага, только слово «площадь» следует заменить на «объём».

Что же касается задач на нахождение площади поверхности составного многогранника, то здесь все немного сложнее. У большого числа учеников слабо развито пространственное мышление, что в разы могло бы облегчить им решение задания. Поэтому для устранения данного недостатка учителю необходимо использовать дополнительные ресурсы, для лучшей наглядности — цифровые технологии, показывая детям, насколько легко можно получить балл, всего лишь взглянув на многогранник под другим углом.

Задание №12. «Планиметрия». Решая следующее задание, ученикам предстоит применить приобретённые факты и теоремы планиметрии. Наибольшее количество задач приходится на тему «треугольники и их элементы», например, нахождение $\cos$ и $\sin$ углов по известным величинам или нахождение площади треугольника, а так же «окружность», например, нахождение меры центральных и вписанных углов или нахождение площади круга [15]. Данный материал ученики изучают в 8-9 классах на уроках геометрии, поэтому сложности в выполнении данного задания у учеников возникнуть не должно. Так же в контрольно измерительных материалах могут встретиться задачи на четырёхугольники и отыскание их элементов, а так же на многоугольники, но их достаточно мало.

Задание №13. «Задачи по стереометрии». Данное задание включает в себя задачи на проверку знаний учащихся, которые они изучали на протяжении 10 и 11 классов, а именно — нахождение объёма, площади поверхности, площади боковой поверхности. Общее количество задач, предлагаемые образовательным порталом для подготовки к экзаменам, примерно одинаково распределено между такими темами, как «параллелепипед», «призма», «пирамида», «цилиндр», «конус» и «шар» [15]. Как показывает статистика, с данным заданием справляется менее половины участников

экзамена. По мнению методистов, существующий курс стереометрии требует существенной перестройки, поскольку половины школьников не готовы к его освоению [12].

1.4 Содержательный раздел: уравнения и неравенства

В контрольно измерительных материалах к разделу уравнения и неравенства относят 4 задания: задание №4, задание №17, задание №18, задание №20. Согласно кодификатору, данные задания проверяют следующие требования к предметным результатам освоения основной образовательной программы: умение оперировать понятиями — рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы; решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приёмов; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни [4].

Задание №4. «Преобразования выражений». Это задание всегда представляет собой некоторую техническую задачу с формулировками различной степени сложности. Задача выпускника — правильно прочесть задачу, понять что дано и что нужно найти, решив соответствующее уравнение.

Образовательный портал для подготовки к экзаменам предлагает три уровня сложности задания: формулы с большим числом переменных — 4 шт., формулы с одной и двумя переменными — 27 шт., формулы с тремя переменными — 26 шт. [15].

Самое сложное, что здесь может быть для сдающих — это правильно выразить искомую величину. Для этого следует знать порядок выполнения арифметических операций, свойства умножения, правила переноса слагаемых в противоположную часть равенства. Все эти действия ученики

изучают, а далее и совершенствуют практически на протяжении всего математического курса. По статистике сдачи ЕГЭ, данное задание выполняет три четверти участников экзамена базового уровня, что говорит о высокой степени решения данного задания [12].

Задание №17. «Простейшие уравнения». Данное задание требует от учеников умение решать различные типы уравнений: линейные, квадратные, кубические, иррациональные, показательные и логарифмические [15]. Для выполнения данного задания необходимо сформировать у учеников умение решать уравнения первой и второй степени, поскольку решение других видов уравнений сводится к ним.

Квадратные уравнения ученики начинают изучать в 8 классе на уроках алгебры и решают их вплоть до окончания школы. На экзамене им могут встретиться различные типы квадратных уравнений: полные, неполные, приведённые. Каждое из них можно решить, применяя различные способы решения: начиная от разложения на множители и заканчивая применением теоремы Виета и формулы дискриминанта, последняя из которых присутствует в справочных материалах [10].

С простейшими иррациональными уравнениями ученики знакомятся в 8 классе на уроках алгебры, а затем продолжают изучение более сложных уже в 10 классе. Поскольку в базовой математике встречаются лишь простейшие уравнения, то ученикам для решения достаточно лишь возвести обе части уравнения в квадрат, и далее решение сводится к линейному уравнению, при этом необходимо оценить подкоренное выражение.

О показательных и логарифмических уравнениях ученики узнают на уроках алгебры в 10 или 11 классе, в зависимости от учебной программы. Для решения данных видов уравнений ученикам следует знать лишь формулы свойств степеней и формулы свойств логарифмов, с помощью которых они так же перейдут к решению линейных уравнений [7].

В силу формата сдачи ЕГЭ, в бланк ответов вносятся ответы, которые выражаются целым числом или конечной десятичной дробью, поэтому плюсом данного задания является, что ученик всегда может проверить правильность решения уравнения подстановкой найденного значения «х» в исходное уравнение. И что так же не мало важно — необходимо внимательно читать условие задания, поскольку встречаются такие формулировки, где из двух и более найденных корней, в ответ следует записать либо больший, либо меньший из них.

Задание №18. «Неравенства». Данное задание проверяет знания учеников, применяемые в решении неравенств различных типов, а именно — линейных, рациональных, квадратных, показательных и логарифмических. Наряду с изучением разных типов уравнений следом за ними идёт изучение и неравенств соответствующих типов.

Образовательный портал для подготовки к экзаменам предлагает два типа данного задания: решение неравенств и числовые промежутки [15]. Первый тип подразумевает под собой непосредственно решение неравенств различных видов и дальнейшее сопоставление решений неравенств с областью на прямой. Во втором типе необходимо сравнить числовые или буквенные выражения, используя координатную прямую. Ученикам достаточно сделать оценку значений буквенных выражений и аккуратно внести ответы в бланк.

Задание №20. «Текстовые задачи». Данное задание проверяет у учеников не только умение переводить текст задачи на математический язык и соответствующие математические модели, а также умение самостоятельно составлять уравнение и поиск его решений. С данной задачей ученики знакомятся в 8 классе на уроке алгебры практически сразу после изучения темы «квадратные уравнения». Это обусловлено тем, что решение такого рода задач сводится к решению квадратного уравнения [10].

При решении любого типа задания 20 следует научить учеников составлять схемы, таблицы, рисунки для упорядочивания данных. Это позволит ученикам уйти от сплошного текста задания и сконцентрироваться на том, что дано и что нужно найти. Немало важно отложить в головах учеников, что их ответ должен быть: целым числом или десятичной дробью; отвечать на поставленный вопрос; соответствовать реальности (человек не может идти со скоростью 20 км/ч).

Все типы задания 20 можно разделить на две большие группы: задания на проценты и задания на темп (скорость и производительность) [15].

Задания на проценты:

— про смеси и сплавы

«Первый сплав содержит 10% меди, второй — 40% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 3 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 30% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.»

— про процентные доли

«Митя, Антон, Гоша и Борис учредили компанию с уставным капиталом 200 000 рублей. Митя внёс 14% уставного капитала, Антон — 42 000 рублей, Гоша — 12% уставного капитала, а оставшуюся часть капитала внёс Борис. Учредители договорились делить ежегодную прибыль пропорционально внесённому в уставной капитал вкладу. Какая сумма от прибыли 1 000 000 рублей причитается Борису? Ответ дайте в рублях.»

— про процентное изменение

«В 2008 году в городском квартале проживало 40 000 человек. В 2009 году, в результате строительства новых домов, число жителей выросло на 8%, а в 2010 году на 9% по сравнению с 2009 годом. Сколько человек стало проживать в квартале в 2010 году?»

Задания на темп:

— про работу

«Заказ на 156 деталей первый рабочий выполняет на 1 час быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий, если известно, что он за час делает на 1 деталь больше?»

— про прохождение некоторого расстояния

«Из пункта А в пункт В, расстояние между которыми 75 км, одновременно выехали автомобилист и велосипедист. Известно, что за час автомобилист проезжает на 40 км больше, чем велосипедист. Определите скорость велосипедиста, если известно, что он прибыл в пункт В на 6 часов позже автомобилиста. Ответ дайте в км/ч.»

или

«Часы со стрелками показывают 8 часов 00 минут. Через сколько минут минутная стрелка в четвёртый раз поравняется с часовой?»

или

«Расстояние между пристанями А и В равно 120 км. Из А в В по течению реки отправился плот, а через час вслед за ним отправилась яхта, которая, прибыв в пункт В, тотчас повернула обратно и возвратилась в А. К этому времени плот прошёл 24 км. Найдите скорость яхты в неподвижной воде, если скорость течения реки равна 2 км/ч. Ответ дайте в км/ч.»

Хоть данные типы заданий присутствуют и в основном государственном экзамене (ОГЭ), но как показывает практика, треть выпускников даже не приступает к решению задачи; это показывает, что развитию умений верно прочитывать и понимать условие текстовой задачи, составить математическую модель, решить полученную задачу и проверить ответ, к сожалению, в школе уделяется недостаточно внимания.

1.5 Содержательный раздел: вероятность и статистика

В контрольно измерительных материалах к разделу вероятности и статистики относят одно задание — задание №5. В спецификации в качестве

проверяемого результата обучения применительно к заданию 5 указывается «умение вычислять в простейших случаях вероятности событий». Обращаясь к кодификатору, чтобы успешно решить данное задание и получить 1 балл, ученикам следует знать достаточно большой объем материала, в который входят понятия случайный опыт и случайное событие; формулы сложения и умножения вероятностей, формула полной вероятности; понятия сочетание, перестановка, число сочетаний, число перестановок и т.д. [4]. Поскольку кодификатор прописывает проверяемые требования как для профильной математики, так и для базовой, то для выпускников, сдающих базовую математику, достаточно знать лишь минимум из перечня проверяемых требований.

Задание №5. «Начала теории вероятностей». Обращаясь к образовательному portalу для подготовки к экзаменам, объем задач данного задания разделены на два блока: классическое определение вероятности — 41 шт. и теоремы о вероятностях событий — 33 шт [15]. Особенность этих заданий состоит в том, что их формулировка иногда может быть достаточно запутанной, и прочитав условие, не сразу понятно, что требуется от ученика. Помимо подводных камней, в данном задании так же встречаются и «подсказки». Например, фраза «округлите до сотых» наталкивает учеников на мысль, что правильный ответ будет иметь более двух знаков после запятой.

Рассмотрим на примере задачи вышеуказанные особенности. «Фабрика выпускает сумки. В среднем на 100 качественных сумок приходится восемь сумок со скрытыми дефектами. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется качественной. Результат округлите до сотых» [15].

Формулировка «на 100 качественных сумок приходится 8 с дефектами», означает, что всего сумок — 108, из них 100 — качественные, а 8 — с дефектами. Тогда вероятность того, что купленная сумка окажется

качественной, найдётся из отношения «благоприятные события» и «все события», то есть $100/108 = 0,925925\dots$

Ловушка кроется здесь в формулировке, хочется из 100 вычесть 8, а затем найти отношение $92/100$ и получить «красивый» ответ. Но здесь есть и подсказка, а именно фраза «результат округлите до сотых». Она ученику и помогает понять, что данное решение будет не верным, и нужно найти другое.

До 2023 года с понятием вероятности и задачами, посвящённых её классическому определению, ученики знакомились в 9 классе на уроках алгебры, а на знакомство с теоремами о вероятностях событий отводилось время на уроках алгебры 11 класса.

Сейчас же, когда предмет «вероятность и статистика» в школьной программе стал обязательным, ученики могут более полно и глубже изучить его, и без дополнительной подготовки решить задание №5.

1.6 Содержательный раздел: начала математического анализа

В контрольно измерительных материалах к разделу начала математического анализа относят одно задание — задание №7. Обращаясь к спецификации контрольно измерительных материалов для проведения в 2024 году единого государственного экзамена по математике, задание №7 проверяет следующие предметные результаты освоения основной образовательной программы — умение оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, определять значение функции по значению аргумента; описывать по графику поведение и свойства функции [16].

Задание №7. «Анализ графиков и диаграмм». Исходя из названия задания не трудно определить, что все задачи распределены на 2 группы: анализ

графиков функций и анализ диаграмм, а именно — скорость изменения величин, которая представлена также в виде графика.

Рассматривая детально первую группу, её также можно разделить на подгруппы: чаще всего встречаются задания на соотнесение точки с значением производной в ней — 50%; 30% — задания на соответствий графиков функций и знаков коэффициентов, в частности, график линейной функции и знаки коэффициентов k и b , так же график параболы и знаки коэффициентов a и c ; 20% — соответствие графиков функций и характеристик этих функций на заданном отрезке [15]. Выполнение данных видов заданий не должно вызывать сложностей у школьников, поскольку, кроме как знания теории от них больше ничего не требуется, даже вычислений.

Что же касается второй группы заданий, если одно из них встретится ученику на экзамене, то можно считать, что балл у него уже имеется. Чтобы решить его, не нужно знать глубокой математической теории, кроме той, в каких случаях функция возрастает/убывает и доходит до своего максимума/минимума. Чем ещё примечательна данная группа — она носит прикладной характер. Наиболее часто встречающиеся — это задачи про изменение скорости автомобиля, изменение температуры за сутки или месяцы, изменение курса евро и многие другие.

Если в целом говорить о задании №7, то большинство ошибок выпускники допускают даже не из-за нехватки теории, а из-за неправильно прочитанного условия и более часто — из-за невнимательности при перенесении ответа в бланк. Поскольку обе группы являются заданиями на соотнесение, 4 буквы и 4 цифры, то существует большая доля вероятности, что ученик может попросту перепутать порядок и не проверить за собой, и в результате задание будет оцениваться в ноль баллов.

1.7 Содержательный раздел: функции и графики

В контрольно измерительных материалах к разделу функции и графики относят одно задание: задание №3. Обращаясь к кодификатору, данное задание проверяет следующие обобщённые требования к предметным результатам: описывать с помощью функций различные реальные зависимости между величинами и интерпретировать их графики; извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках [4].

Задание №3. «Чтение графиков и диаграмм». В данном задании, аналогично заданию №7, так же исходя из названия все типы задач разделяются на две группы: определение величины по графику и определение величины по диаграмме, в частности столбчатой.

Чтобы получить балл за выполнение данного задания, выпускнику не обязательно владеть сложными формулами или длинными формулировками теорем — достаточно лишь владеть чтением графиком и диаграмм, применяемых в реальной жизни.

На диаграмме показана среднемесячная температура воздуха в Симферополе за каждый месяц 1988 года. По горизонтали указываются месяцы, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Определите по диаграмме, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура превышала 20 градусов Цельсия.

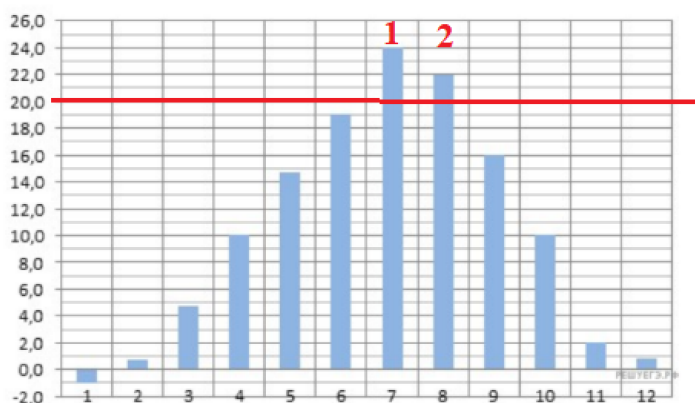


Рисунок 3 — Пример решения задания №3 ЕГЭ по математике базового уровня

На примере (рис. 3) рассматривается решение одного из вида задания. Вопрос задачи состоит в том, чтобы посчитать, сколько было месяцев, когда среднемесячная температура превышала 20 градусов Цельсия. Ярко отметив

на диаграмме величину градуса, равной 20, перед учеником уже высвечивается ответ, который остаётся лишь посчитать и занести в бланк ответов. На экзамене ученик может проделать со своей диаграммой то же самое, используя ручку или карандаш.

Что же касается задачи на определение величины по графику, то здесь работает принцип нахождения второй координаты точки, зная первую, которая уже дана в условии задачи (рис. 4). Единственное, чем может быть усложнено данное задание, это умение находить цену деления, чему учат не только на уроках математики, но и на уроках физики.

На графике изображена зависимость атмосферного давления (в миллиметрах ртутного столба) от высоты над уровнем моря (в километрах). Найдите, чему равно атмосферное давление на высоте 6 км. Ответ дайте в миллиметрах ртутного столба.

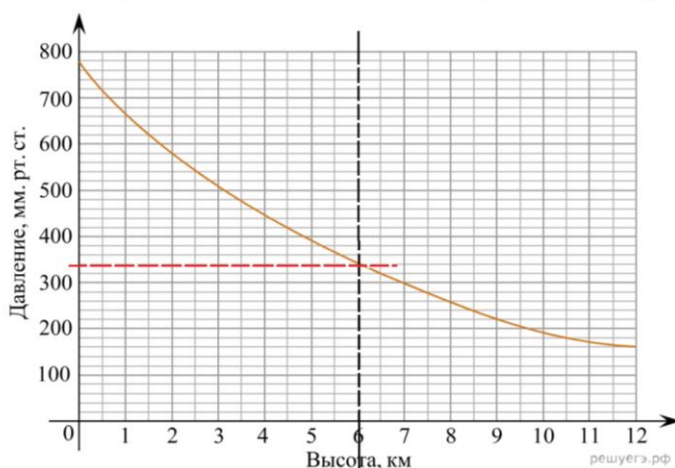


Рисунок 4 — Пример решения задания №3 ЕГЭ по математике базового уровня

1.8 Содержательный раздел: множества и логика

В контрольно измерительных материалах к разделу множества и логика относят одно задание: задание №8. Согласно кодификатору, данное задание проверяет следующие требования к предметным результатам освоения основной образовательной программы: владение методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать обратное и противоположное утверждение, приводить пример и контрпримеры [4].

Задание №8. «Анализ утверждений». Обращаясь к образовательному portalу для подготовки к экзаменам, данное задание может встретиться выпускнику на экзамене в следующих вариациях: выбрать утверждения, которые следуют из данных; выбрать утверждения, которые верны при данных условиях; выбрать утверждения, равносильные данному [15]. Все эти виды заданий проверяют у ученика способность выстраивать правильные логические цепочки.

Алгоритм решения вышеуказанных задач один и тот же: в исходном утверждении выделяются элементарные высказывания, следом устанавливается их истинность, анализируется структура и делается вывод о его истинности. Но иногда могут встретиться такие условия задачи, когда ученик сможет получить балл, проверяя истинность утверждений через построения математической модели, в частности, кругов Эйлера.

Данное задание может быть подвержено усложнению, которое выражается в формулировке начальных условий или наборе утверждений. В высказываниях и самих утверждениях встречаются такие слова, как «каждый», «обязательно», «любой». Также в задачах встречаются конструкции «некоторый», «ни один», «ни какой не» и другие похожие [1]. Указанные конструкции значительно влияют на смысл утверждения и поэтому, чтобы определить истинность высказываний, ученику необходимо верно понимать их смысл.

Помимо обычных высказываний, которые ученики привыкли видеть, в экзамене могут встретиться сложные утверждения, полученные при помощи логических связок «и», «или», «если, то» и прочие. В них выпускник также должен разбираться в совершенстве.

ГЛАВА 2. ФАКУЛЬТАТИВНЫЙ КУРС «ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ СЛОЖНОСТИ» ДЛЯ УЧЕНИКОВ 11 КЛАССА

2.1 Разработка факультативного курса

Во время подготовки к ЕГЭ по математике ученику, прежде всего, стоит думать о том, ради какой цели он сдаёт экзамен. Если выпускник предпочитает базовую математику профильной, то это свидетельствует о том, что в дальнейшей своей профессиональной деятельности он не собирается связывать себя с математической наукой.

Большая часть выпускников ЕГЭ базового уровня, в отличие от профильного, сдают лишь для того, чтобы получить аттестат и благополучно выйти за стены школы. Но так же не стоит забывать, что есть единицы выпускников, те самые медалисты, оценка за экзамен у которых влияет на их аттестат и в дальнейшем получение золотой медали, которая при поступлении даёт 10 баллов. Поэтому факультативный курс для учеников, сдающих базовую математику, так же необходим как факультативный курс для учеников, сдающих профильную математику.

Разработанный в данной работе факультативный курс «Задачи повышенной сложности» направлен на подготовку к экзамену обучающихся 11 класса с разным уровнем математического мышления и рассчитан на 18 часов. Данный курс основан и опирается на основные материалы в курсах алгебры и геометрии. Материалы курса дают возможность актуализировать, систематизировать и применять полученные знания при подготовке к ЕГЭ по базовой математике.

Целями курса являются:

— оказание практической помощи выпускникам в подготовке к ЕГЭ по базовой математике через повторение, систематизацию, расширение и углубление математических знаний;

- формирование умений решать задачи, требующие креативного мышления;
- интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых человеку для жизни в социокультурном обществе.

Задачами данного курса являются:

1. Подготовить учеников к успешной сдаче ЕГЭ по базовой математике.
2. Расширить и углубить знания учеников в области математики.
3. Сформировать умения и навыки по решению задач: анализ содержания, поиск пути решения, составление и осуществление плана, самопроверка и анализ решения.
4. Обеспечить усвоение обучающимися нестандартных способов решения задач.

После изучения курса, ученики должны:

- знать и применять на практике основные приёмы решения задач повышенной сложности;
- уметь строить математические модели и логические цепочки;
- уметь анализировать и решать задачи повышенной сложности.

Тематическое планирование курса представлено в таблице 1.

Таблица 1 — Тематическое планирование курса

№ п/п	Тема занятия	Количество часов
	Задание №8. «Анализ утверждений»	4
1.	Высказывания и операции над ними.	1
2.	Использование кругов Эйлера при решении задач на логику.	1
3.	Решение задач.	1
4.	Самостоятельная работа.	1
	Задание №11. «Прикладная стереометрия»	3

5.	Призма. Параллелепипед. Площадь полной поверхности.	1
6.	Решение задач с использованием GeoGebra.	1
7.	Решение задач на готовых чертежах.	1
	Задание №19. «Числа и их свойства»	4
8.	Основные термины и теоремы теории чисел.	1
9.	Признаки делимости.	1
10.	Решение задач.	1
11.	Самостоятельная работа.	1
	Задание №21. «Задач на смекалку»	3
12.	Решение задач в одно действие.	1
13.	Решение задач с помощью алгоритма.	1
14.	Решение задач с помощью схем.	1
	«Задачи повышенной сложности из КИМ»	4
15-18.	Решение заданий №8, №11, №19, №21 из КИМ	4

Структура курса:

Задание №8. «Анализ утверждений». Проведение лекций на темы «Высказывания и операции над ними» и «Множества. Круги Эйлера», а также решение задач на данные темы. Решение задач, аналогичных заданиям с сайта «Решу ЕГЭ». Самостоятельная работа.

Задание №11. «Прикладная стереометрия». Проведение лекции на тему «Призма. Параллелепипед», а также решение задач на данную тему. Работа с программой «GeoGebra», решение задач с её использованием. Решение задач на нахождение полной поверхности многогранника на готовых чертежах.

Задание №19. «Числа и их свойства». Проведение лекций на темы «Основные термины и теоремы теории чисел» и «Признаки делимости», а также решение задач на данные темы. Самостоятельная работа.

Задание №21. Разбор и решение задач, решаемые в одно действие. Выделение алгоритмов для решения задач на смекалку. Составление схем для решения задач на смекалку.

2.2 Задание №8. «Анализ утверждений»

Занятие 1. «Высказывания и операции над ними».

Высказывание — повествовательное предложение, о котором объективно можно судить истинно оно или ложно.

Рассмотрим примеры предложений и определим, являются ли они высказываниями:

1) С Новым Годом! — не является высказыванием, поскольку данное предложение восклицательное.

2) Сегодня плохая погода, — не является высказыванием, поскольку предложение не объективно.

3) Окружностью называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек плоскости, расположенных на заданном расстоянии от данной точки, — определение не является высказыванием.

4) Луна есть спутник Марса — это высказывание, причём ложное.

По совокупности всех высказываний определяется функция истинности, принимающая значения в двухэлементном множестве $\{1;0\}$:

$$\lambda(P) = \begin{cases} 1, & \text{если высказывание } P \text{ истинно,} \\ 0, & \text{если высказывание } P \text{ ложно.} \end{cases}$$

Значение $\lambda(P)$ называется логическим значением или значением истинности высказывания P .

Задание 1. Какие из следующих предложений являются высказываниями? Определите их логическое значение:

а) Столица Франции — Париж;

б) Учитель географии и биологии школы №72;

- в) Яблоко есть ягода;
- г) $3-2 > 5$;
- д) Озон входит в состав воздуха;
- е) Тушёная капуста — очень вкусное блюдо;
- ж) Литература — скучный предмет;
- з) Золото дороже серебра;
- и) Да здравствует весна!;
- к) Если сегодня среда, то завтра будет четверг;
- л) В слове «ёж» 2 буквы и 3 звука;
- м) Треугольник называется равносторонним, если все его стороны равны;
- н) Река Нил протекает через Египет.

Ответы: а) высказывание, истинное; б) не высказывание, нельзя установить логическое значение; в) высказывание, ложное; г) высказывание, ложное; д) высказывание, истинное; е) не высказывание, т.к. необъективно; ж) не высказывание, т.к. необъективно; з) высказывание, истинное; и) не высказывание, т.к. необъективно; к) высказывание, истинное; л) высказывание, истинное; м) не высказывание, т.к. определение; н) высказывание, истинное.

Над высказываниями определяются основные операции (логические связки), которые позволяют из имеющихся высказываний строить новые.

1. Конъюнкцией высказываний А и В называется высказывание $(A \wedge B)$, $(A \text{ и } B)$, которое истинно тогда и только тогда, когда А и В одновременно истинны.

Например:

- а) « $5 < 4$ и 20 — составное число» — ложное высказывание;
- б) «Африканский слон имеет тёмно-серую окраску и весит более 6 тонн» — истинное высказывание.

2. Дизъюнкцией высказываний A и B называется высказывание $(A \vee B)$, (A или B), которое ложно тогда и только тогда, когда A и B одновременно ложные.

Например:

- а) « $7 > 5$ или $5 < 7$ » — истинное высказывание;
- б) « $7 > 5$ или $5 = 7$ » — истинное высказывание;
- в) « $7 < 5$ или $5 = 7$ » — ложное высказывание.

3. Импликацией высказываний A и B называется высказывание $(A \rightarrow B)$, (Из A следует B), (A влечёт B), (Если A , то B), A — посылка, B — заключение, которое ложно тогда и только тогда, когда посылка A — истинна, заключение B — ложно.

Например:

- а) «Если число делится на 9, то оно делится и на 3» — истинное высказывание, так как и посылка, и заключение — истинны;
- б) «Если $5 > 3$, то Венера — это звезда» — ложное высказывание, так как посылка — истинна, а заключение — ложное.

4. Эквиваленцией высказываний A и B называется высказывание $(A \leftrightarrow B)$, (A эквивалентно B), которое истинно тогда и только тогда, когда A и B имеют одинаковое логическое значение.

Например:

- а) « $4 : 2$ тогда и только тогда, когда $9 : 3$ » — истинное высказывание, так как обе части высказывания — истинны;
- б) «Корова ест траву тогда и только тогда, когда собака мяукает» — ложное высказывание, так как первая часть высказывания — истинна, а вторая — ложна;
- в) « $25 : 6$ тогда и только тогда, когда $16 : 4$ » — ложное высказывание, так как первая часть высказывания — ложна, а вторая — истинна;

г) « $8 < 3$ тогда и только тогда, когда 2 число нечётное» — истинное высказывание, так как обе части высказывания имеют одинаковое логическое значение — ложь.

5. Отрицание высказывания A называется высказывание $(\neg A)$, (не A), которое ложно тогда и только тогда, когда высказывание A — истинно.

Например:

а) « $8 = 9$ » ложное высказывание, т. к. « $8 \neq 9$ » истинное высказывание;

б) « $8 < 9$ » истинное высказывание, т. к. « $8 \geq 9$ » ложное высказывание.

Задание 2. Определите значения истинности следующих высказываний:

а) «Париж расположен на Сене и $8 - 4 = 4$ »;

б) «3 — простое число и 12 — простое число»;

в) «3 — простое число или 12 — простое число»;

г) «Тигр — хищное млекопитающее тогда и только тогда, когда $2 \cdot 3 = 10$ »;

д) «Если $5 - 5 = 0$, то панды любят есть бамбук».

Ответы: а) оба простых высказывания, к которым применяется операция конъюнкции, истинны, поэтому на основании определения этой операции и их конъюнкция есть истинное высказывание; б) к двум простым высказываниям, первое из которых истинное, а второе ложно, применяется операция конъюнкции, поэтому на основании определения этой операции их конъюнкция есть ложное высказывание; в) к двум простым высказываниям, первое из которых истинное, а второе ложно, применяется операция дизъюнкции, поэтому на основании определения этой операции их дизъюнкция есть высказывание истинное; г) к двум простым высказываниям, первое из которых истинное, а второе ложно, применяется операция эквиваленция, поэтому на основании определения этой операции их эквиваленция есть высказывание ложное; д) оба простых высказывания, к которым применяется операция импликации, истинны, поэтому на основании определения этой операции и их импликация есть высказывание истинное.

Занятие 2. «Использование кругов Эйлера при решении задач на логику».

Под множеством понимают объединение в единое целое определённых вполне различаемых предметов (объектов), которые при этом называются элементами образуемого ими множества.

Множества принято обозначать прописными буквами латинского алфавита: $A, B, C, \dots, Z$, а элементы множества — строчными буквами: $a, b, c, \dots, x, y, z$.

Утверждение: «элемент a принадлежит множеству A » символически записывается так: $a \in A$. $a \notin A$ — означает, что элемент a не принадлежит множеству A .

Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми множествами.

Для ряда числовых множеств в математике приняты стандартные обозначения: N — множество натуральных чисел, Z — множество целых чисел, Q — множество рациональных чисел, R — множество действительных чисел, C — множество комплексных чисел.

Множество считают заданным, если о любом объекте можно сказать, принадлежит он этому множеству или не принадлежит. Существует два способа задания множества:

1. Перечисление всех элементов. Множество можно задать, перечислив все его элементы. В таком случае названия всех элементов множества записывают в строку, отделяя запятыми, и заключают в фигурные скобки, например: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2. Указание характеристического свойства. Множество можно задать, сформулировав характеристическое свойство. Характеристическое свойство — это такое свойство, которым обладает каждый элемент, принадлежащий множеству, и не обладает ни один элемент, который ему не принадлежит. Например: $A = \{a \mid a \in N \text{ и } a < 5\}$ (множество натуральных чисел меньших 5).

Множества могут содержать как конечное, так и бесконечное число элементов. Множества, состоящие из конечного числа элементов,

называются конечными множествами, и множества, состоящие из бесконечного числа элементов, соответственно, называются бесконечными. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется пустым и обозначается символом $\emptyset$.

Любое множество можно изобразить графически, нарисовав замкнутый контур и представив себе, что элементы этого множества изображены точками, находящимися внутри этого контура. Такой способ изображения множеств носит название кругов Эйлера.

Операции над множествами:

1. Пересечением множеств A и B называется множество, которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат A и B одновременно.

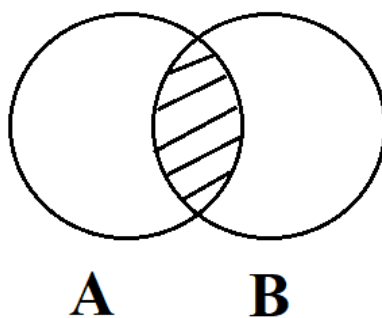
Записывают это так: $A \cap B = \{b \mid b \in A \text{ и } b \in B\}$.

Например:

A — множество однозначных натуральных чисел, кратных 5.

$B = \{1, 5, 8, 9, 10, 12, 15\}$.

$A \cap B = \{5, 10, 15\}$.



2. Объединением множеств A и B называется множество, которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат или A , или B .

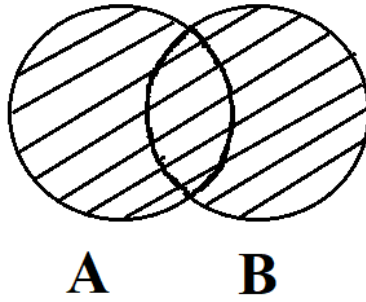
Записывается это так: $A \cup B = \{a \in A \text{ или } b \in B\}$.

Например:

A — множество однозначных натуральных чисел, кратных 3.

$B = \{1, 3, 5, 9, 11\}$.

$A \cup B = \{1, 3, 5, 6, 9, 11\}$



3. Разностью множеств A и B называется множество, которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A , но не принадлежат множеству B .

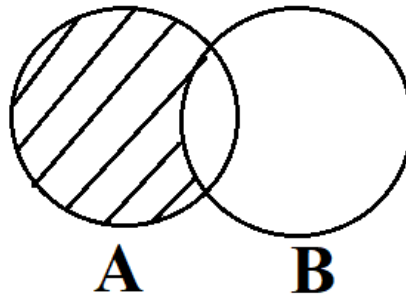
Записывается это так: $A/B = \{c \mid c \in A \text{ и } c \notin B\}$.

Например:

$$A = \{1, 2, 3\}.$$

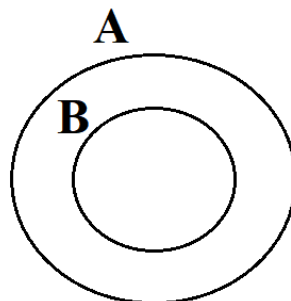
$$B = \{3, 4, 5\}.$$

$$A/B = \{1, 2\} \text{ или } B/A = \{4, 5\}.$$



Множество B называется подмножеством множества A , если каждый элемент множества B является элементом множества A .

Записывается это так: $B \subset A$.



Например:

A — множество двузначных чисел.

B — множество двузначных чисел, кратных 3.

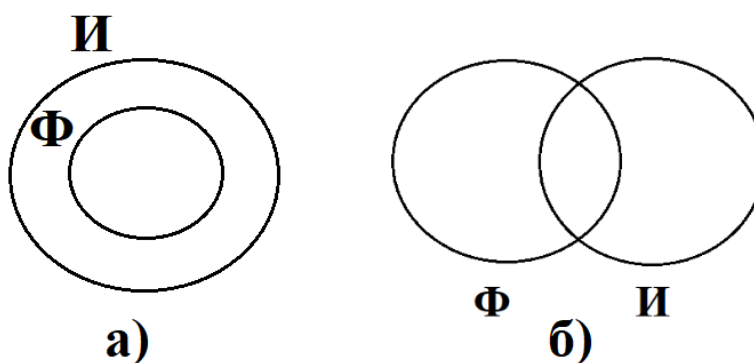
Задача 1. В книжном издательстве работает 42 переводчика, из них 29 человек знают французский язык, а 19 человек — итальянский язык. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных:

- 1) Не найдётся 15 человек, которые знают оба языка;
- 2) Найдётся переводчик, который не знает ни французского, ни итальянского языка;
- 3) Нет ни одного человека, который не знал бы оба языка;
- 4) Найдутся хотя бы 4 переводчика издательства, которые знают и французский, и итальянский языки.

Решение:

В задачах данного типа следует объяснить учащимся, что указанное количество объектов — не фиксированное. Для данной задачи это можно объяснить следующим образом: указано, что 29 человек знают французский язык и 19 человек знают итальянский язык, но эти же 19 человек могут войти и в число переводчиков, которые знают французский язык. Поэтому может оказаться, что переводчиков, знающих оба языка будет 19, а не 6, как если бы мы нашли из равенства: $29 + 19 - 42 = 6$.

Основываясь на этом факте, иллюстрация задачи в виде кругов Эйлера может выглядеть следующим образом:



Теперь по схемам анализируем утверждения: 1) по схеме а) выясняем, что утверждение ложно, поскольку все сотрудники, знающие итальянский, в то же время могут знать и французский язык, поэтому максимум может найтись 19 человек; 2) утверждение ложно, т. к. эти переводчики могут как и найтись

так и нет, основываясь на обеих схемах; 3) утверждение ложно по предыдущему анализу; 4) утверждение истинно, поскольку обе схемы этому не противоречат.

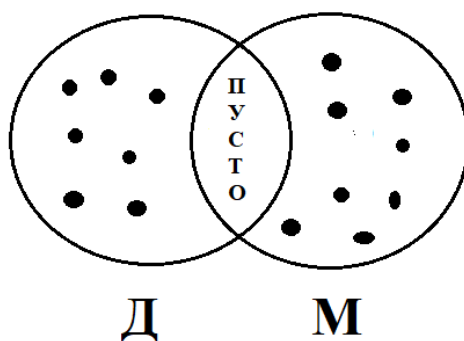
Ответ: 4.

Задача 2. Некоторые ученики 8 «Б» класса на летних каникулах отдыхали на море, а некоторые — в деревне. Все ученики, которые не отдыхали на море, отдыхали в деревне. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях:

- 1) Каждый ученик 8 «Б» класса отдыхал летом на море;
- 2) Нет ни одного ученика 8 «Б» класса, который летом отдыхал и на море, и в деревне;
- 3) Если ученик 8 «Б» класса летом отдыхал на море, то он отдыхал и в деревне;
- 4) Среди учеников 8 «Б» класса, которые не отдыхали в деревне, есть хотя бы один, который отдыхал на море.

Решение.

1. Рисуем круги Эйлера, обращая внимания на то, что ученик, отдыхающий в деревне, не отдыхал на море. Это значит, что в пересечении кругов будет пусто.



2. По сделанной схеме анализируем утверждения: сразу можно отметить, что утверждения 1) и 3) будут ложными, а 2) и 4) — истинными.

Задача 3. Среди жителей посёлка «Яблочное» есть те, кто ездит на работу на машине, и есть те, кто ездит на работу на велосипеде. А также есть те, кто ходит пешком. Некоторые жители посёлка «Яблочное», которые ездят на

работу на машине, могут ездить и на велосипеде. Выберите утверждения, которые верны при данных условиях:

- 1) Хотя бы один из жителей посёлка «Яблочное», кто ездит на работу на машине, ездит на работу на велосипеде;
- 2) Все жители посёлка «Яблочное» ездят на работу на машине;
- 3) Среди жителей посёлка «Яблочное» нет тех, кто ходит пешком;
- 4) Хотя бы один из жителей посёлка «Яблочное» ездит на работу на машине.

Ответ: 14.

Задача 4. Среди абитуриентов педагогического института некоторые подали заявление на математическое направление, а некоторые — на физическое. Все те абитуриенты, которые подали заявление на математическое направление, не подавали заявление на физическое направление. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных:

- 1) Среди тех абитуриентов, которые подавали заявление на математическое направление, есть хотя бы один абитуриент, который подал заявление на физическое направление;
- 2) Абитуриент, который подал заявление на математическое направление, не подавал заявление на физическое направление;
- 3) Нет ни одного абитуриента, который подавал заявление и на математическое направление, и на физическое;
- 4) Все абитуриенты подавали заявление либо на математическое направление, либо на физическое направление.

Ответ: 23.

Задача 5. Часть учащихся пятых классов школы в январе ходили в кино на мультфильм «Маша и Медведь». В марте некоторые пятиклассники школы пойдут в кино на мультфильм «Ну, погоди!», причём среди них не будет тех,

кто ходил в кино в январе. Выберите утверждения, которые будут верны при указанных условиях:

1) Среди учащихся пятых классов этой школы, найдётся хотя бы один ученик, который не ходил на мультфильм «Маша и Медведь», но пойдёт на мультфильм «Ну, погоди!»;

2) Каждый пятиклассник этой школы, который не ходил на мультфильм «Маша и Медведь», пойдёт на мультфильм «Ну, погоди!»;

3) Найдётся пятиклассник, который не ходил на мультфильм «Маша и Медведь» и не пойдёт на мультфильм «Ну, погоди!»;

4) Нет ни одного пятиклассника, который ходил на мультфильм «Маша и Медведь» и пойдёт на мультфильм «Ну, погоди!».

Ответ: 14.

Задача 6. В классе учится 28 человек, из них 20 человек читают жанр «детектив», а 16 — читают жанр «фантастика». Выберите утверждения, которые верны при заданных условиях:

1) Найдётся 8 человек из этого класса, которые читают оба жанра;

2) Если ученик из этого класса читает жанр «детектив», то он обязательно читает и жанр «фантастика»;

3) Найдётся хотя бы пять человек из этого класса, которые читают оба жанра;

4) Каждый ученик из этого класса читает и жанр «детектив», и жанр «фантастика».

Ответ: 13.

Задача 7. В школьной столовой испекли 38 булочек, из них 16 штук посыпаны сахаром, а 12 штук посыпаны корицей. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях:

1) Если булочка посыпана сахаром, то она посыпана и корицей;

2) Найдётся 10 булочек, которые ничем не посыпаны;

3) Не может оказаться больше 16 булочек, посыпанных и сахаром, и корицей;

4) Хотя бы 17 булочек посыпаны и сахаром, и корицей.

Ответ: 23.

Занятие 3. «Решение задач».

Все задачи на анализ утверждений можно разделить на несколько блоков:

1. Задачи, решаемые с помощью кругов Эйлера.

2. Задачи, решаемые с помощью координатной прямой.

3. Задачи, решаемые с помощью разбиения условия на элементарные высказывания.

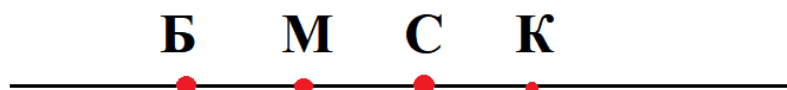
Задачи, решаемые с помощью координатной прямой. К данному типу относятся задания, где описывается, что один объект выше или ниже другого, длиннее или короче, дороже или дешевле и т. д. Такие задачи легче всего решать, применяя координатную прямую.

Пример:

Мама купила сыр, колбасу, молоко и батон. Известно, что колбаса дороже сыра, а батон дешевле сыра и дешевле молока. Выберите утверждения, которые верны при данных условиях.

- 1) Сыр дешевле батона;
- 2) Колбаса дороже батона;
- 3) Батон самый дешёвый из купленных продуктов;
- 4) Колбаса и батон стоят одинаково.

Решение:



Для ученика стоит отметить, что в данной задаче необходимо выбрать один объект, относительно которого будут анализироваться утверждения. В данной задаче логичнее выбрать главным объектом батон, поскольку про

него говорится в каждом утверждении. Обозначим каждый объект буквой, с какой он начинается, и расставим их на координатной прямой.

Поскольку про один объект, в данном случае молоко, неизвестно точных данных, он может стоять в любом месте на координатной прямой, удовлетворяя условию.

Используя данный рисунок, можно с лёгкостью определить логические значения утверждений: 1) ложно, поскольку на прямой сыр лежит правее батона, а значит, сыр дороже; 2) истинно, т. к. колбаса лежит правее батона; 3) истинно, т. к. батон лежит левее всех; 4) ложно, исходя из пункта 2).

Ответ: 23.

Задача 1. При подсчёте баллов за олимпиаду по математике выяснилось, что Катя набрала больше баллов, чем Ирина, а Денис набрал меньше баллов, чем Ирина и Петя. Выберите утверждения, которые верны при данных условиях:

- 1) Ирина набрала меньше баллов, чем Денис;
- 2) Катя и Денис набрали одинаковое количество баллов;
- 3) Денис набрал меньше всех баллов;
- 4) Катя набрала больше баллов, чем Денис.

Ответ: 34.

Задача 2. В сквере растут деревья четырёх видов: берёза, рябина, дуб, тополь. Известно, что дуб выше тополя, а рябина ниже тополя и ниже берёзы. Выберите утверждения, которые верны при данных условиях:

- 1) Рябина — самое низкое дерево в сквере;
- 2) Рябина и тополь одинаковые по высоте;
- 3) Берёза выше рябины;
- 4) Дуб ниже рябины.

Ответ: 13.

Задача 3. Саша старше Лёши, но младше Влада. Миша не старше Саши. Выберите утверждения, которые верны при указанных условиях:

- 1) Влад — самый старший из друзей;
- 2) Миша старше Влада;
- 3) Влад и Саша — одноклассники;
- 4) Леша младше Влада.

Ответ: 14.

Задачи, решаемые с помощью разбиения условия на элементарные высказывания. К данной группе относятся задачи, в которых условия составлены с помощью логических связок: «и», «или», «если, то» и т.д. Здесь необходимо видеть, из каких простых высказываний состоит сложное высказывание, и анализировать их.

Самое главное правило, которое необходимо помнить при решении задач такого типа — не всякое высказывание, читаемое в одну сторону, будет верным, если его прочесть в другую сторону. Что это значит, например: если на улице идёт дождь, то Катя берёт с собой зонт. Это верно, поскольку если мы видим из окна, что идёт дождь, то берём зонт. Поменяем теперь посылку и заключение местами: если Катя берёт с собой зонт, то на улице идёт дождь. Чтобы опровергнуть данное высказывание, достаточно привести контраргумент: в прогнозе погоды вы слышали, что сегодня будет дождь и не хотите промокнуть, поэтому берёте с собой зонт, но дождя ведь нет на улице. Поэтому в обратную сторону данное высказывание ложное.

Что ещё не менее важно, как мы убедились на прошлом примере, уметь приводить контрпримеры. Если для утверждения можно привести один и более контраргументов, то оно сразу будет заведомо ложным; если же таких контрпримеров привести невозможно, значит, утверждение истинно.

Пример 1:

В офисе фирмы компьютеры работают только от сетевого электропитания. Если компьютеры работают, то электричество в офисе есть. Выберите утверждения, которые непосредственно следуют из этих данных:

- 1) Если в офисе нет электричества, то компьютеры не работают;

- 2) Если в офисе есть электричество, то компьютеры работают;
- 3) Если компьютеры не работают, значит, в офисе нет электричества;
- 4) Если в офисе нет электричества, то не работает компьютер директора.

Решение:

Первым шагом следует разобрать условие: «если компьютеры работают» — это посылка, а «электричество в офисе есть» — заключение. Поменяем посылку и заключение местами: «если электричество в офисе есть, то компьютеры работают». Может быть такое, что сотруднику не нужно работать на компьютере, но в офисе электричество есть, поэтому высказывание будет ложным.

Второй шаг — анализ утверждений. 1) в условии написано, что компьютеры работают только от сетевого электропитания, а если его нет, то и компьютеры работать не будут, значит, утверждение истинное; 2) утверждение ложно, т. к. посылку и заключение поменяли местами, а мы выяснили, что такое высказывание будет ложным; 3) утверждение так же будет ложным исходя из перестановки местами посылки и заключения; 4) утверждение истинно, т. к. в условии не сказано, какие именно компьютеры работают от сетевого электропитания, значит, компьютер директора не является исключением, поэтому он так же не будет работать без электричества, как и другие компьютеры.

Ответ: 14.

Пример 2:

Известно, что все щуки — рыбы, также известно, что все рыбы плавают в воде. Тюлень тоже плавает в воде. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных:

- 1) Все тюлени — рыбы;
- 2) Если животное не плавает, то это не тюлень;
- 3) Все щуки плавают в воде;
- 4) Если животное плавает в воде, то оно либо рыба, либо тюлень.

Решение:

В данной задаче присутствуют 3 элементарных высказывания: «все щуки рыбы», «все рыбы плавают в воде» и «тюлень тоже плавает в воде». Из первых двух можно сделать вывод, что, если все щуки — рыбы, а все рыбы плавают в воде, значит, все щуки также плавают в воде.

Анализируем утверждения: 1) в условии не сказано, что тюлени — это рыбы, поэтому высказывание ложно; 2) в условии указано, что тюлень плавает в воде, а если животное в воде не плавает, значит, тюленем оно быть не может, утверждение истинно; 3) утверждение истинно из ранее сделанных выводов; 4) не всякое животное, которое плавает в воде рыба или тюлень, значит, утверждение ложно.

Ответ: 23.

Задача 1. Светлана Юрьевна часто ходит на работу в платье. Она не ходит в платье в те дни, когда на улице идёт дождь или дует сильный ветер, а так же по пятницам, когда надевает брюки. Выберите утверждения, которые верны при данных условиях:

1) Если Светлана Юрьевна пришла на работу в платье, значит, сегодня нет дождя;

2) Каждый раз, когда в течение дня будет ясно, Светлана Юрьевна придёт на работу в платье;

3) Если Светлана Юрьевна пришла на работу в брюках, значит, сегодня пятница;

4) Если на улице дует сильный ветер, Светлана Юрьевна придёт на работу в платье.

Ответ: 13.

Задача 2. Каждый раз, когда в квартиру кто-то стучится, собака обязательно начинает лаять. Выберите утверждения, которые верны при приведённых данных:

1) Если в дверь стучит мужчина, то собака будет лаять;

- 2) Если собака не лает, значит, в дверь кто-то стучит;
- 3) Если в дверь стучит почтальон, то собака не лает;
- 4) Если собака молчит, значит, в дверь никто не стучит.

Ответ: 14.

Задача 3. В жилых домах, в которых больше 12 этажей, установлены электрические плиты вместо газовых. Выберите утверждения, которые верны при данных условиях:

- 1) Если в доме установлены газовые плиты, то в этом доме больше 14 этажей;
- 2) Если в доме установлены газовые плиты, то в этом доме меньше 13 этажей;
- 3) Если в доме установлены электрические плиты, то в этом доме больше 17 этажей;
- 4) Если в доме установлены электрические плиты, то в этом доме не больше 10 этажей.

Ответ: 23.

Задача 4. Известно, что все воробьи — птицы, также известно, что все птицы летают. Комар тоже летает. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных:

- 1) Все комары — птицы;
- 2) Если животное летает, то оно либо птица, либо комар;
- 3) Если животное не летает, то это не комар;
- 4) Все воробьи летают.

Ответ: 34.

Задача 5. Известно, что рябины — деревья, также известно, что все деревья выделяют кислород. Крапива тоже выделяет кислород. Выберите утверждения, которые следуют из приведённых данных:

- 1) Все рябины выделяют кислород;
- 2) Если растение не выделяет кислород, то оно не крапива;

3) Все крапивы являются рябинами;

4) Некоторые растения, выделяющие кислород, являются рябинами.

Ответ: 124.

Задача 6. Какое из приведённых ниже утверждений равносильно утверждению «Если Вы — повар, значит, Вы умеете готовить всё»?

1) Если Вы умеете готовить всё, значит, Вы повар;

2) Если Вы — не повар, значит, Вы не умеете ничего готовить;

3) Если Вы что-то не умеете готовить, значит, Вы — не повар;

4) Если Вы — не повар, значит, Вы что-то не умеете готовить.

Ответ: 3.

Занятие 4. «Самостоятельная работа».

Задание 1. Какие из следующих предложений являются высказываниями? Определите их логическое значение. Если предложение не является высказыванием, объясните почему:

а) Сегодня прекрасная погода;

б) Все тигры относятся к семейству кошачьих;

в) Столица Австралии — Канберра;

г) Да будет свет!;

д) Корова есть хищное животное;

е) Самый сложный предмет — химия;

ж) $3 + 5 > 15$;

з) Число 123456789 — чётное;

и) Чему равно расстояние от Земли до Марса?;

к) Дважды два — четыре.

Ответы: а) не является высказыванием, т.к. необъективно; б) высказывание, истинное; в) высказывание, истинное; г) не является высказыванием, т.к. не повествовательное; д) высказывание, ложное; е) не высказывание, т.к. необъективно; ж) высказывание, ложное; з) высказывание,

ложное; и) не является высказывание, т.к. не повествовательное; к) высказывание, истинное.

Задание 2. Определите значения истинности следующих высказываний:

- а) «Если Солнце — звезда, то число 25 кратно 5»;
- б) « $2+3 > 7$ и москвичи есть жители Москвы»;
- в) « $0 \cdot 5 = 2$ или $7-3 = 6$ »;
- г) « $27:2$ тогда и только тогда, когда страусы умеют летать».

Ответы: а) истинное высказывание; б) ложное высказывание; в) ложное высказывание; г) истинное высказывание.

Задание 3. В группе 26 студентов, из них 18 человек сдали экзамен по психологии, 14 человек сдали экзамен по экологии. Выберите утверждения, которые верны при заданных условиях:

- 1) Каждый студент из этой группы сдал оба экзамена;
- 2) Если студент из этой группы сдал экзамен по психологии, то он обязательно сдал экзамен по экологии;
- 3) Найдётся хотя бы четыре человека, которые сдали оба экзамена;
- 4) Найдётся 13 человек, которые сдали экзамен и по психологии, и по экологии.

Ответ: 34.

Задание 4. Ученики 10 «А» класса проходили медицинский осмотр и оказалось, что Юра выше Оли, но ниже Марины. Федя не ниже Марины. Выберите утверждения, которые верны при следующих условиях:

- 1) Юра — не самый низкий в 10 «А» классе;
- 2) Федя и Юра одного роста;
- 3) Марина ниже Юры;
- 4) Оля ниже Юры.

Ответ: 14.

Задание 5. Футболист Стас на соревнования обувает свои бутсы. Также Стас обувает бутсы, когда играет в футбол с друзьями во дворе. Выберите утверждения, которые при заданных условиях:

- 1) Каждый раз, когда Стас обувает бутсы, значит, он идёт играть в футбол во дворе;
- 2) Если в пятницу Стас будет играть на соревнованиях, значит, в пятницу он будет в бутсах;
- 3) Если Стас не в бутсах, значит, он не на соревнованиях;
- 4) В любое время, когда Стас не играет во дворе в футбол, он не в бутсах.

Ответ: 23.

2.3 Задание №11. «Прикладная стереометрия»

Занятие 5. «Призма. Параллелепипед. Площадь полной поверхности»

Многогранник — это поверхность, составленная из многоугольников и ограничивающая некоторое геометрическое тело. Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются гранями. Стороны граней называются рёбрами, а концы рёбер — вершинами многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется диагональю многогранника.

Многогранники бывают выпуклые и невыпуклые. Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

Многогранник называется невыпуклым, если у него найдётся по мере одна грань такая, что плоскость, проведённая через эту грань, делит данный многогранник на две или более частей.

Многогранник, составленный из двух равных многоугольников, расположенных в параллельных плоскостях, и n параллелограммов, называется призмой.

Два равных многоугольника называются основаниями, а параллелограммы — боковыми гранями призмы. Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой призмы.

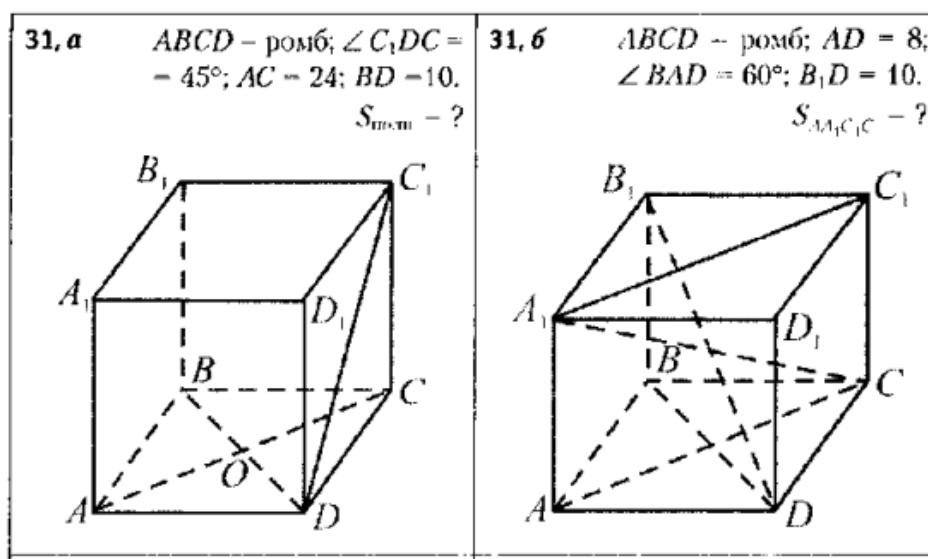
Если боковые рёбра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется прямой, в противном случае — наклонной. Высота прямой призмы равна её боковому ребру.

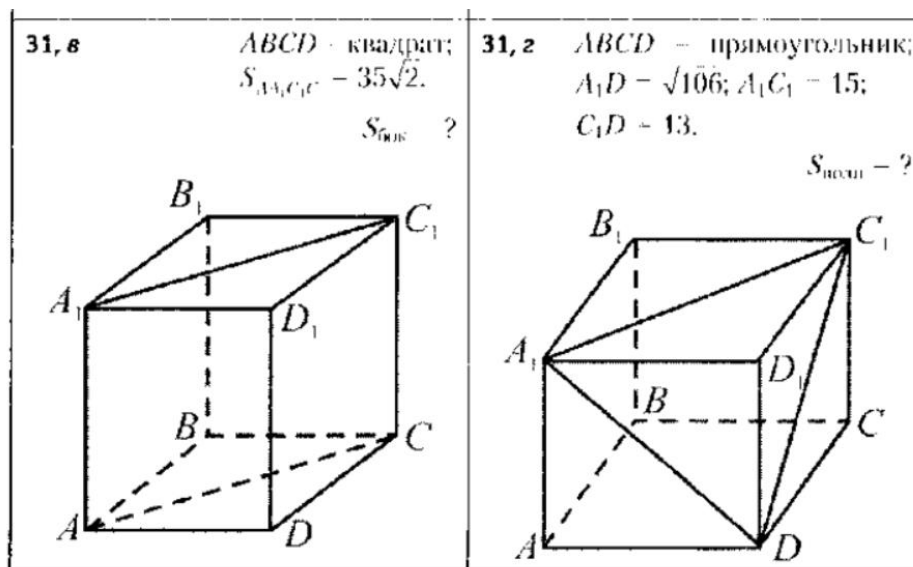
Параллелепипед — один из видов призмы. Это поверхность, составленная из двух равных параллелограммов и четырёх параллелограммов.

Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются гранями, их стороны — рёбрами, а вершины параллелограммов — вершинами параллелепипеда. Параллелепипед имеет шесть граней, двенадцать рёбер и восемь вершин. Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются смежными, а не имеющих общих рёбер — противоположными.

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех её граней. Она выражается через площадь боковой поверхности и площадь основания призмы через формулу: $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$. В нашем случае применимы площади прямоугольника и квадрата: $S_{\text{прям}} = a \cdot b$, $S_{\text{кв}} = a^2$.

Задание. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.



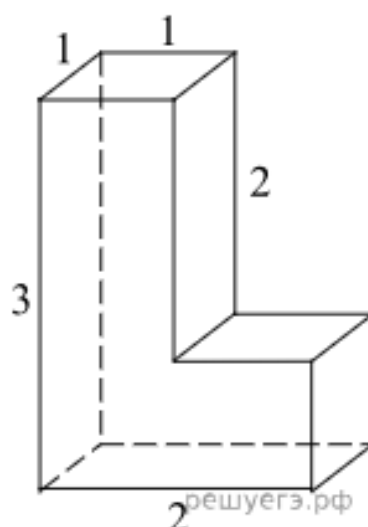


Ответ: а) 916; б) $48\sqrt{3}$; в) 140; г) 426.

Занятие 6. «Решение задач с использованием GeoGebra».

У большого числа учеников слабо развито пространственное мышление, что в разы могло бы облегчить им решение задания на нахождение площади полной поверхности составного многогранника. Для решения этой проблемы и помогает программа «GeoGebra». Это интерактивный математический программный комплекс для изучения и преподавания математики и не только. Конструкции можно создавать с помощью точек, отрезков, линий, многоугольников и т.д., которые впоследствии можно динамически редактировать.

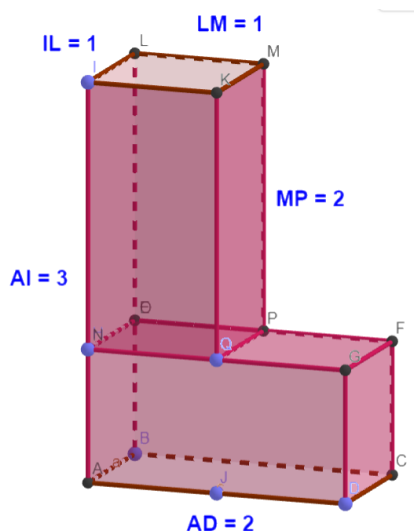
Пример 1. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



Такое задание ученикам предлагает образовательный портал для подготовки к экзаменам. Чтобы найти площадь поверхности выпуклого многогранника, необходимо найти площади всех боковых сторон и оснований многогранника, а затем найти их сумму. Невыпуклый же многогранник отличается тем, что он визуально состоит из нескольких выпуклых многогранников. Но даже большинство учеников не может разбить многогранник на несколько прямоугольных параллелепипедов. GeoGebra позволяет этих шагов не выполнять.

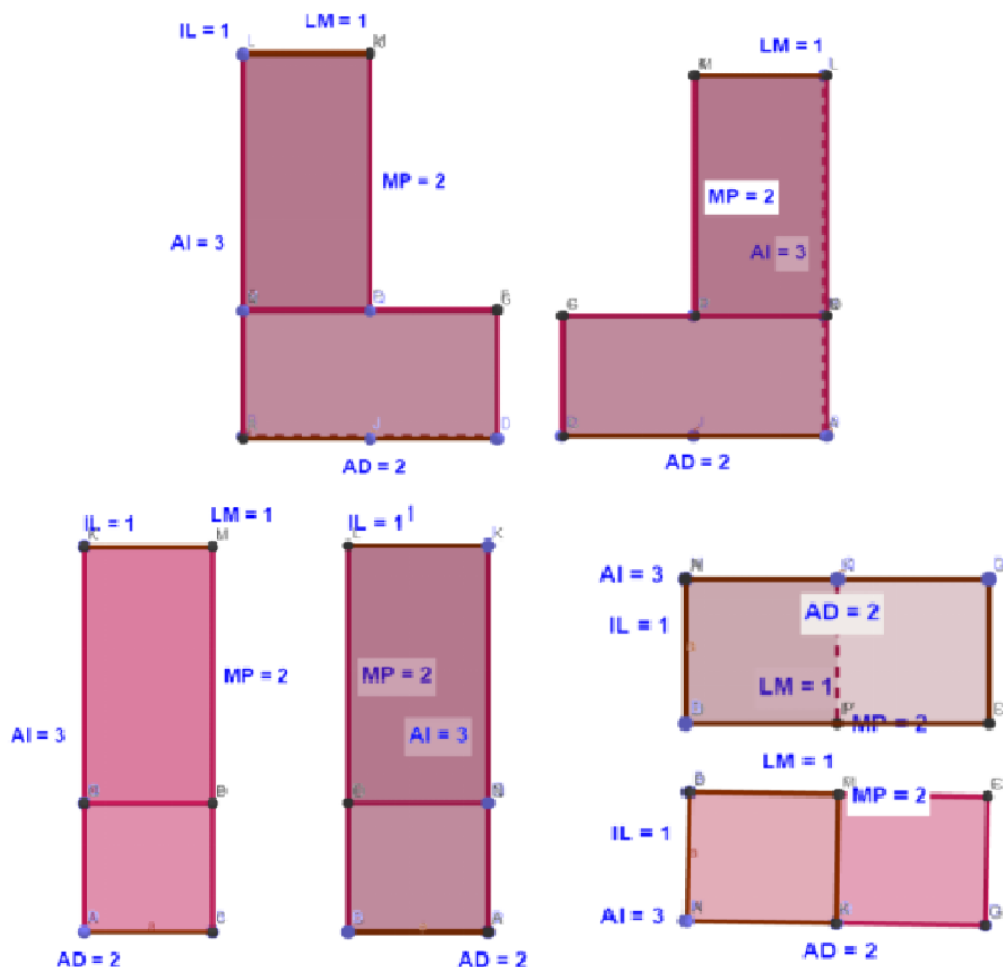
Как работать с GeoGebra:

1. Строим многогранник в полотно 3D. Удобнее всего это сделать строя его с помощью нескольких прямоугольных параллелепипедов. Следует строить точно такой же многогранник, чтобы у учеников не возникало вопросов.



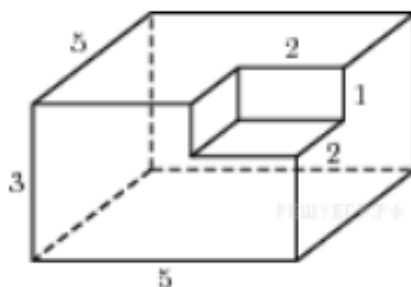
2. Далее следует показать ученикам многогранник со всех сторон, чтобы их взгляд был направлен строго перпендикулярно к каждой грани.

3. При рассмотрении оснований, левой и правой боковых граней мы заметим, что их площади будут искажаться через формулу прямоугольника, как если бы такую же площадь искали в прямоугольном параллелепипеде. При рассмотрении передней и задней боковых граней мы видим, что они представлены в виде прямоугольников, у которых «вырезаны» прямоугольники меньшей площади.



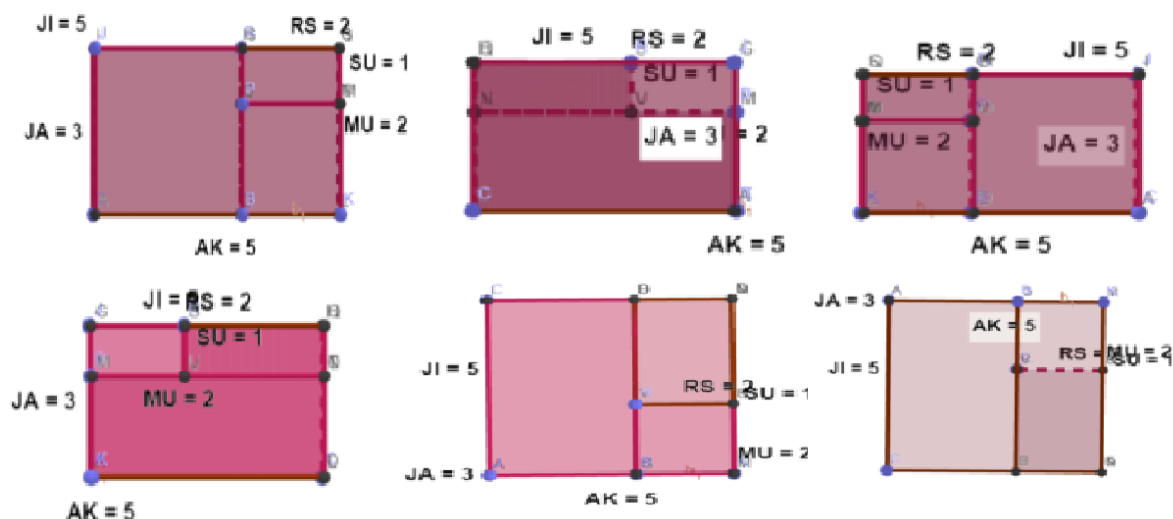
4. Чтобы найти площадь представленного многогранника, нужно найти площадь многогранника, если бы он был выпуклым, а далее вычислить площади «вырезанных» прямоугольников: $1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot 2 = 18$.

Пример 2. Найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).



1. Строим многогранник в полотно 3D. Строим тем же методом, что и в первом примере.

2. Показываем ученикам многогранник со всех сторон, чтобы их взгляд был направлен строго перпендикулярно к каждой грани.

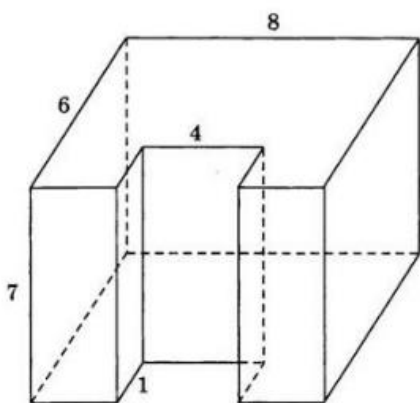
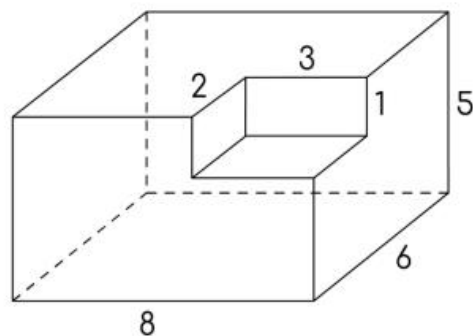


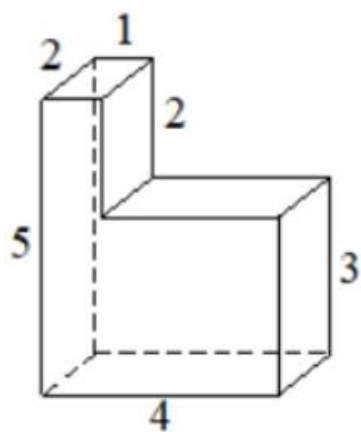
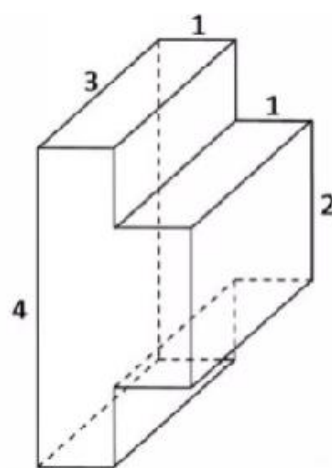
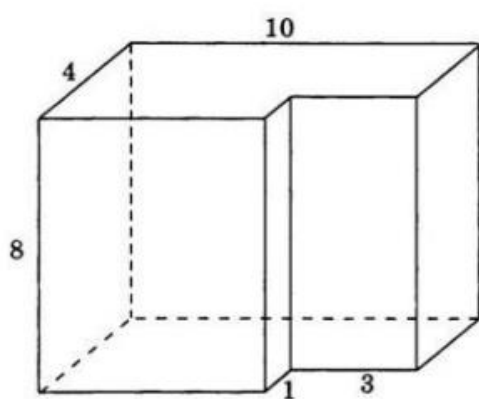
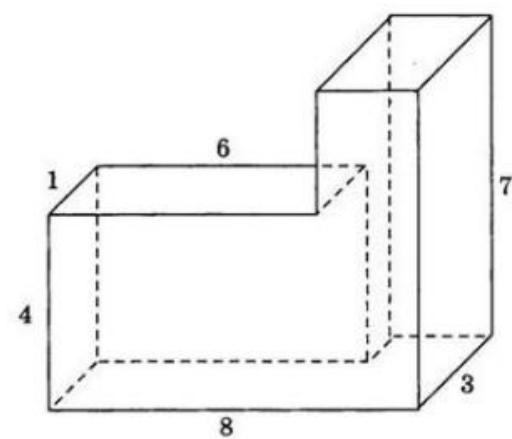
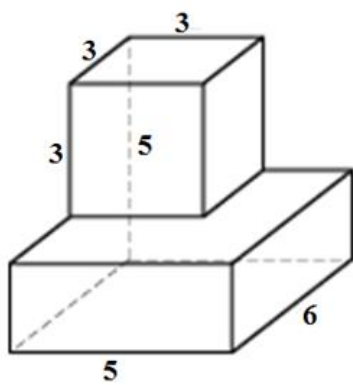
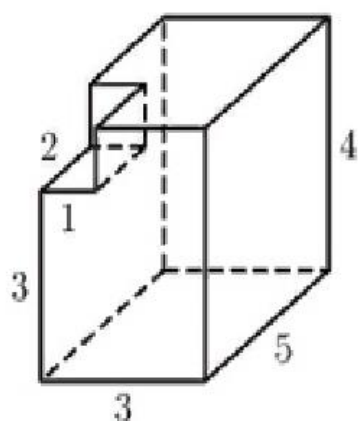
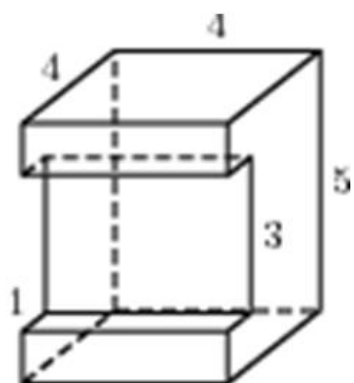
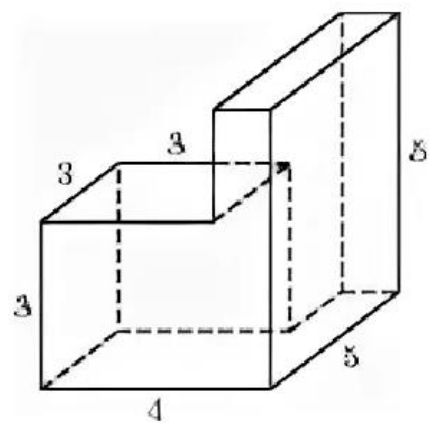
3. Заметим, что на какую грань бы не посмотрели, они все представлены в виде прямоугольников. Это означает, что «вырезанная» часть многогранника никак не влияет на площадь полной поверхности многогранника.

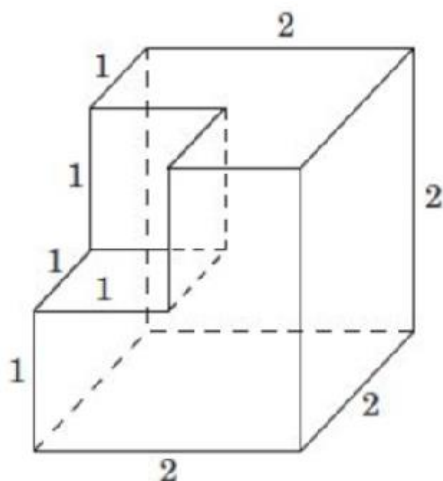
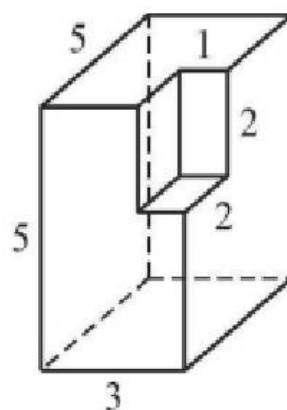
4. Поэтому, чтобы найти площадь данного многогранника, нужно найти площадь обычного выпуклого многогранника, т.е. найти площади всех граней и сложить их: $5 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 3 \cdot 2 + 5 \cdot 5 \cdot 2 = 110$.

Используя GeoGebra, важно научить ученика самостоятельно в голове поворачивать фигуру. Поэтому после нескольких примеров с поворотами, GeoGebra можно использовать в качестве проверки.

Занятие 7. «Решение задач на готовых чертежах». Задание: найдите площадь поверхности многогранника, изображённого на рисунке (все двугранные углы прямые).







Ответ: 1) 64; 2) 64; 3) 298; 4) 166; 5) 284; 6) 236; 7) 140; 8) 94; 9) 106; 10) 118; 11) 24; 12) 110.

2.4 Задание №19. «Числа и их свойства»

Занятие 8. «Основные термины и теоремы теории чисел».

Цифра — это знак, обозначающий число или входящий в состав числа.

Цифр всего 10: от 0 до 9.

Говорят, что целое число a делится на целое число b (или a кратно b , или b делитель a), если найдётся целое число c такое, что $b = a \cdot c$. Число a называют делителем числа b . Обозначение: $a:b$.

Положительное, целое число $p \neq 1$ называется простым, если оно имеет только два различных делителя: само себя и единицу. Число, отличное от единицы и не являющееся простым, называют составным.

Пример:

2, 3, 5, 7, 11, 13, ... — простые числа; их бесконечное количество.

6, 4, -2, 8, 9, 12, -15, 28, 30, ... — составные числа.

Задание 1. В верхней строке даны условия, в первом столбце то, что нужно проверить. Заполните пустые клетки по следующему принципу: «+», если при данном условии делимость выполняется; «-», если при данном

условии делимость не выполняется; «?», если недостаточно условий. Ответ обоснуйте.

	$a : m$ и $b : m$	$a : m$ и $b : m$	$a : m$ и $b : m$
$(a + b) : m$			
$(a - b) : m$			
$(a \cdot b) : m$			

Основная теорема арифметики: любое целое число ($n > 1$) может быть представлено в виде произведения простых чисел и при том единственным образом с точностью до порядка сомножителей.

Пример: найдите каноническое разложение числа $n=7920$.

Решение: $n = 7920 = 2 \cdot 3960 = 2 \cdot 2 \cdot 1980 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 990 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 495 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 165 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 55 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11$

Задание 2. Найдите каноническое разложение чисел: 12, 28, 40, 54, 90, 120, 140, 324, 490, 735, 924, 1320, 1782, 2156, 3388, 4050, 6655, 7007, 7280, 9317.

Ответ: $12 = 2^2 \cdot 3$; $28 = 2^2 \cdot 7$; $40 = 2^3 \cdot 5$; $54 = 2 \cdot 3^3$; $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$; $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$; $140 = 2^2 \cdot 5 \cdot 7$; $324 = 2^2 \cdot 3^4$; $490 = 2 \cdot 5 \cdot 7^2$; $735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$; $924 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11$; $1320 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$; $1782 = 2 \cdot 3^4 \cdot 11$; $2156 = 2^2 \cdot 7^2 \cdot 11$; $3388 = 2^2 \cdot 7 \cdot 11^2$; $4050 = 2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$; $6655 = 5 \cdot 11^3$; $7007 = 7^2 \cdot 11 \cdot 13$; $7280 = 2^4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$; $9317 = 7 \cdot 11^3$.

Деление целых чисел не всегда бывает выполнимым. Поэтому целесообразно рассматривать и другое действие, наиболее общее, которое всегда выполняется. Таким действием является деление с остатком.

Теорема. Для данного целого числа отличного от нуля числа b , всякое целое число a единственным образом представимо в виде $a = b \cdot q + r$, где $0 \leq r < |b|$. Число q называют неполным частным, а число r — остатком от деления a на b . Очевидно, что $r = 0$ тогда и только тогда, когда a делится на b без остатка.

Пример:

а) Найдите остаток от деления 8 на 3. В данном случае $a = 8$, $b = 3$, тогда число a запишется в виде: $8 = 3 \cdot 2 + 2$, $q = 2$, $r = 2$;

б) Найдите остаток от деления (-8) на 3 . В данном случае $a = (-8)$, $b = 3$, тогда число a запишется в виде: $(-8) = 3 \cdot (-3) + 1$, $q = (-3)$, $r = 1$;

в) Найдите остаток от деления (-8) на (-3) . В данном случае $a = (-8)$, $b = (-3)$, тогда число a запишется в виде: $(-8) = (-3) \cdot 3 + 1$, $q = 3$, $r = 1$;

г) Найдите остаток от деления 8 на (-3) . В данном случае $a = 8$, $b = (-3)$, тогда число a запишется в виде $8 = (-3) \cdot (-2) + 2$, $q = (-2)$, $r = 2$.

Задание 3. Найдите остаток от деления: а) 9 на 2 , (-9) на 2 , 9 на (-2) , (-9) на (-2) ; б) 7 на 3 , (-7) на 3 , 7 на (-3) , (-7) на (-3) ; в) 16 на 7 , (-16) на 7 , 16 на (-7) , (-16) на (-7) ; г) 25 на 4 , (-25) на 4 , 25 на (-4) , (-25) на (-4) .

Занятие 9. «Признаки делимости».

Признаки делимости чисел — это условия, правила, с помощью которых можно определить, делится ли число без остатка на данное значение, не прибегая к действию «деление».

Все признаки делимости можно разделить по группам:

Группа 1. Делимость чисел определяется по последним цифрам числа. Это признаки делимости на 2 , 4 , 5 , 8 , 20 , 25 , 50 , а также на 10 , 100 , 1000 и т.д.

Группа 2. Делимость чисел определяется по сумме цифр числа. Это признаки делимости на 3 , 9 .

Группа 3. Делимость чисел определяется после выполнения математических действий с цифрами этого числа. Это признаки делимости на 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 29 , 33 .

4 группа. Признаки делимости на составные числа.

Группа 1:

На 2 делятся только числа, оканчивающиеся на чётные цифры, включая 0 , например: число 546 делится на 2 , т.к. оно оканчивается на чётное число 6 ; число 239 не делится на 2 , т.к. оно оканчивается на нечётное число 9 .

На 4 делятся только те числа, две последние цифры которых делятся на 4 или две последние цифры — нули, например: число 244 делится на 4 , т.к. число 44 делится на 4 ; число 671 не делится на 4 , т.к. 71 не делится на 4 .

На 5 делятся только те числа, которые оканчиваются на цифры 5 или 0, например: число 245 делится на 5, т.к. оно оканчивается на 5; число 768 не делится на 5, т.к. оно не оканчивается на 5 или 0.

На 8 делятся только те числа, у которых три последние цифры, образующие целое число, делятся на 8, или три последние цифры являются нулями, например: число 6824 делится на 8, т.к. и цифра 8, и число 24 делятся на 8; число 5387 не делится на 8, потому что 3 и 7 не делятся на 8.

На 20 делятся только те числа, у которых две последние цифры делятся на 20 или равны нулю, например: число 2860 делится на 20, т.к. 60 делится на 20; число 587 не делится на 20, т.к. 87 не делится на 20.

На 25 делятся только те числа, у которых две последние цифры делятся на 25 или равны нулю, например: число 575 делится на 25, т.к. 75 делится на 25; число 9869 не делится на 25, т.к. 69 не делится на 25.

На 50 делятся только те числа, которые оканчиваются на 50 или 00, например: число 550 делится на 50, т.к. оно оканчивается на 50; число 2948 не делится на 50, т.к. не оканчивается на 50 или 00.

На 10, 100, 1000 и т.д. делятся только те числа, которые оканчиваются на такое же количество нулей, сколько и в делителе.

Группа 2:

На 3 делятся только те числа, сумма цифр которых делятся на 3 без остатка, например: число 174 делится на 3, т.к. сумма цифр этого числа $1+7+4 = 12$ — число, делящееся на 3 без остатка; число 563 не делится на 3, т.к. сумма цифр этого числа $5+6+3 = 14$ — число, которое не делится на 3 без остатка.

На 9 делятся только те числа, сумма цифр которых делятся на 9 без остатка, например: число 603 делится на 9, т.к. сумма цифр этого числа $6+0+3 = 9$ — число, делящееся на 9 без остатка; число 832 не делится на 9, т.к. сумма цифр этого числа $8+3+2 = 13$ — число, которое не делится на 9 без остатка.

Группа 3:

На 7 делятся только те числа, у которых результат вычитания удвоенного последней цифры из этого числа без последней цифры делится на 7, например: число 112 делится на 7, т.к. $11 - 2 \cdot 2 = 7$ — число, делящееся на 7; число 513 не делится на 7, т.к. $51 - 3 \cdot 2 = 45$ — число, которое не делится на 7 без остатка.

На 11 делятся только те числа, у которых разность суммы цифр, стоящих на нечётных местах, и суммы цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11 или если эти суммы равны, например: число 5863 делится на 11, т.к. суммы $5+6 = 11$ и $8+3 = 11$ равны; число 9482 делится на 11, т.к. $9+8 = 17$ и $4+2 = 6$, а $17-6 = 11$, значит, делится на 11.

На 13 делятся только те числа, у которых сумма числа десятков с учетверённым числом единиц делится на 13, например: число 351 делится на 13, т.к. $35 + 1 \cdot 4 = 39$ — число, делящееся на 13.

Группа 4:

Признаки делимости на составные числа строятся на признаках делимости простых чисел, на которые можно разложить любое составное число. Так, например, чтобы число делилось на 6, надо чтобы оно одновременно делилось и на 2, и на 3; чтобы число делилось на 15, надо чтобы оно одновременно делилось и на 3, и на 5. Такой алгоритм применим для других составных чисел.

Задание 1. Укажите все цифры, которыми можно заменить звёздочки в числе:

- а) $97*225$, чтобы полученное число делилось на 3; на 9;
- б) $67*4$, чтобы полученное число делилось на 11; на 4;
- в) $588*6$, чтобы полученное число делилось на 8; на 7.

Ответ: а) 2, 5, 8; 2; б) 5; 0, 2, 4, 6, 8; в) 1, 5, 9; 5.

Задание 2. Записать 2 четырёхзначных числа, которые: а) делятся на 2; б) делятся на 3; в) делятся и на 2, и на 3; г) делятся на 2, но не делятся на 3; д) делятся на 3, но не делятся на 2; е) не делится ни на 2, ни на 3.

Задание 3. Запишите 2 четырёхзначных числа, которые: а) делятся на 5; б) делятся на 11; в) делятся и на 11, и на 5; г) делятся на 5, но не делятся на 11; д) делятся на 11, но не делятся на 5; е) не делятся ни на 11, ни на 5.

Занятие 10. «Решение задач».

Все задачи на цифровую запись числа можно разбить на несколько блоков:

- 1) Найти число по заданным цифрам;
- 2) Найти число, вычёркивая цифры в заданном;
- 3) Найти число, кратное заданному;
- 4) Найти число по его остаткам.

Группа 1: найти число по заданным цифрам. К этой группе относят задачи, в условии которых указано, из каких цифр должно быть записано число и чему оно должно быть также кратно. Для решения такого типа задания достаточно лишь помнить признаки делимости чисел.

Пример: найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 5 и делится на 45. В ответе укажите наибольшее такое число.

Решение: в данной задаче обращаем внимание на то, что искомое число должно делиться на 45. Признака делимости на 45 нет, но мы видим, что это составное число, которое можно разложить на произведение множителей 9 и 5. Таким образом, чтобы число делилось на 45, оно должно делиться на 9 и 5 одновременно.

Начнём с 5: число делится на 5 в том случае, когда на его конце стоит 0 или 5, но т.к. наше число состоит только из 1 и 5, значит, на конце точно стоит 5.

Чтобы число делилось на 9, нужно чтобы сумма его цифр также делилась на 9. Т.к. на конце уже стоит 5, надо подумать, в каком количестве надо взять

каждую цифру, чтобы полученная сумма делилась на 9. Нам нужно найти наибольшее число, значит, если взять максимальное количество пятёрок 5, то на единицу останется 1 место, и в сумме цифры дадут число 26, которое на 9 не делится, значит, надо взять ближайшее число, которое делится на 9 это 18. Его можно составить из трёх 5 и трёх 1. Последним действием их нужно расставить в таком порядке, чтобы число было наибольшим.

Ответ: 551115.

Задание 1. Найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 2 и 0 и делится на 24. В ответе укажите ровно одно такое число.

Ответ: 220200, 202200, 222000.

Задание 2. Найдите восьмизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 0 и 1 и делится на 30. В ответе укажите наименьшее такое число.

Ответ: 10000110.

Задание 3. Найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 5 и делится на 55. В ответе укажите ровно одно такое число.

Ответ: 115555, 155155, 511555, 515515, 551155, 555115, 111155, 115115, 511115.

Группа 2: найти число, вычёркивая цифры в заданном. К данной группе относят задачи, в условии которых дано число, в котором следует вычеркнуть необходимое количество цифр, чтобы получившееся число было кратно заданному числу. Для решения такого типа задания также достаточно помнить признаки делимости чисел.

Пример: вычеркните в числе 23462141 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 12. В ответе укажите какое-то одно такое число.

Решение: если число должно делиться на 12, то оно должно делиться на 3 и на 4 одновременно. Число делится на 4, если его 2 последние цифры делятся на 4, поэтому нетрудно заметить, что необходимо вычеркнуть две последние единицы. Число делится на 3, если сумма его цифр даёт число, делящееся на 3. Оставшиеся цифры в сумме дают $2 + 3 + 4 + 6 + 2 + 4 = 21$. Оно делится на 3, но в условии сказано, что нужно зачеркнуть 3 цифры, поэтому, следующие числа, которые делятся на 3 это 18, 15, 12 и т.д. Поэтому можно зачеркнуть либо цифру 3, либо цифру 6.

Ответ: 24624, 23424.

Задание 1. Вычеркните в числе 53164018 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 15. В ответе укажите какое-то одно такое число.

Ответ: 53160, 53640.

Задание 2. Вычеркните в числе 45036100026 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 24. В ответе укажите какое-то одно такое число.

Ответ: 50361000, 45036000.

Задание 3. Вычеркните в числе 9154832051 три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 90. В ответе укажите ровно одно такое число.

Ответ: 9148320.

Группа 3: найти число, кратное заданному. К данной группе относят задание, в которых помимо кратности, должно выполняться ещё одно или несколько условий. Удобнее начинать со второго условия, т.к. выбрав цифры для этого условия, для кратности выбрать цифры будет легче.

Пример: найдите четырёхзначное число, кратное 22, произведение цифр которого равно 24. В ответе укажите какое-то одно такое число.

Решение: в данном примере у нас есть три условия — чтобы число было кратным 22, произведение его цифр было равно 24, а также оно должно быть

четырёхзначным. Найдём сначала набор из четырёх чисел, которые в произведении дают 24: 6, 4, 1, 1 или 6, 2, 2, 1 или 8, 3, 1, 1 или 4, 2, 3, 1 или 3, 2, 2, 2. Далее нам нужно отобрать такие наборы, чтобы составленное число из этих цифр делилось на 22, а число делится на 22, если оно делится на 2 и 11 одновременно. Значит, на конце нашего числа стоит чётное число. Пока подходят все наборы. Число делится на 11, если разность суммы цифр, стоящих на нечётных местах, и суммы цифр, стоящих на чётных местах, делится на 11 или если эти суммы равны. Найдём сумму цифр каждого набора: 1) $6 + 4 + 1 + 1 = 12$, 2) $6 + 2 + 2 + 1 = 11$, 3) $8 + 3 + 1 + 1 = 13$, 4) $4 + 2 + 3 + 1 = 10$, 5) $3 + 2 + 2 + 2 = 9$. Видим, что для второго, третьего и пятого набора суммы цифр нечётные, значит, суммы цифр, стоящих на чётных и нечётных местах не могут быть равны и при перестановке цифр они также не дадут число кратное 11. Выбирая из двух наборов, видим, что нам подходит только четвёртый.

Ответ: 4312, 3124, 2134, 1342.

Задание 1. Найдите четырёхзначное число, кратное 12, произведение цифр которого равно 10. В ответе укажите какое-то одно такое число.

Ответ: 1152, 5112, 1512.

Задание 2. Найдите четырёхзначное число, которое больше 6000, кратно 12, произведение цифр которого больше 35, но меньше 43. В ответе укажите какое-то одно такое число.

Ответ: 6132, 7116.

Задание 3. Найдите четырёхзначное число, кратное 6, произведение цифр которого равно 42. В ответе укажите наименьшее такое число.

Ответ: 1176.

Группа 4: найти число по его остаткам. Исходя из названия понятно, что для решения такой группы задач необходимо знать теорему об остатке и какие остатки имеют каждые числа.

Пример: найдите трёхзначное натуральное число, больше 400, которое при делении на 6 и на 5 даёт равные ненулевые остатки и первая слева цифра которого является средним арифметическим двух других цифр. В ответе укажите какое-то одно такое число.

Решение: найдём для начала, какие остатки могут давать числа при делении на 5 — 1, 2, 3, 4 и на 6 — 1, 2, 3, 4, 5. Т.к. остатки равны, значит, нам подходят остатки 1-4. Если число делится на 5 и 6, следовательно, оно также делится на 30, тогда наше искомое число выглядит следующим образом: $30n + 1$, $30n + 2$, $30n + 3$, $30n + 4$. При $n = 1-13$ ни одно из чисел не будет больше 400. При $n = 14$: 421, 422, 423, 424. Первая слева цифра не является средним арифметическим двух других. При $n = 15$: 451, 452, 453, 454. Число 453 удовлетворяет всем условиям задачи. Если продолжить перебирать значения n , то также найдём числа 573 и 693.

Ответ: 453, 573, 693.

Задание 1. Найдите наименьшее трёхзначное натуральное число, которое при делении на 6 и на 11 даёт равные ненулевые остатки и у которого средняя цифра является средним арифметическим двух крайних цифр.

Ответ: 135.

Задание 2. Найдите трёхзначное натуральное число, большее 500, которое при делении на 4, на 5 и на 6 даёт в остатке 2, и в записи которого есть только две различные цифры. В ответе укажите какое-то одно такое число.

Ответ: 662, 722.

Задание 3. Найдите трёхзначное натуральное число, которое при делении на 4, на 6, на 15 даёт остаток 3 и цифры которого расположены в порядке возрастания слева направо.

Ответ: 123.

Занятие 11. «Самостоятельная работа».

Задание 1. Найдите каноническое разложение чисел: 45, 60, 150, 288, 330, 441, 594, 605, 750, 875, 945, 1089, 1188.

Ответ: $45 = 3^2 \cdot 5$; $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$; $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$; $288 = 2^5 \cdot 3^2$; $330 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11$; $441 = 3^2 \cdot 7^2$; $594 = 2 \cdot 3^3 \cdot 11$; $605 = 5 \cdot 11^2$; $750 = 2 \cdot 3 \cdot 5^3$; $875 = 5^3 \cdot 7$; $945 = 3^3 \cdot 5 \cdot 7$; $1089 = 3^2 \cdot 11^2$; $1188 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 11$.

Задание 2. Найдите остаток от деления: а) 11 на 5, (-11) на 5, 11 на (-5), (-11) на (-5); б) 13 на 10, (-13) на 10, 13 на (-10), (-13) на (-10); в) 7 на 2, (-7) на 2, 7 на (-2), (-7) на (-2).

Ответ: а) $11 = 5 \cdot 2 + 1$, $(-11) = 5 \cdot (-3) + 4$, $11 = (-5) \cdot (-2) + 1$, $(-11) = (-5) \cdot 3 + 4$; б) $13 = 10 \cdot 1 + 3$, $(-13) = 10 \cdot (-2) + 7$, $13 = (-10) \cdot (-1) + 3$, $(-13) = (-10) \cdot 2 + 7$; в) $7 = 2 \cdot 3 + 1$, $(-7) = 2 \cdot (-4) + 1$, $7 = (-2) \cdot (-3) + 1$, $(-7) = (-2) \cdot 4 + 1$.

Задание 3. Найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 0 и 4 и делится на 22. В ответе укажите одно какое-то такое число.

Ответ: 400400, 400004, 440000, 440440, 444400.

Задание 4. Найдите трёхзначное натуральное число, большее 500, но меньшее 900, которое при делении на 5 и на 7 даёт равные ненулевые остатки, и в записи которого цифры расположены в порядке убывания слева направо, а первая цифра равна произведению двух последних цифр.

Ответ: 632, 842.

2.5 Задание №21. «Задачи на смекалку»

Занятие 12. «Решение задач в одно действие».

Задача №1. На поверхности глобуса фломастером проведены 12 параллелей и 22 меридиана. На сколько частей проведённые линии разделили поверхность глобуса? Меридиан — это дуга окружности, соединяющая Северный и Южный полюсы. Параллель — это окружность, лежащая в плоскости, параллельной плоскости экватора.

Решение: данный тип задачи решается буквально в одно действие, но смекалка здесь нужна для того, чтобы понять, что меридиан это лишь дуга,

которая не сможет разделить глобус на части. В пример можно привести как разрезают арбуз: если сделать один надрез, то на арбузе будет просто разрез, если сделать разрез рядом в тех же точка, то получится одна большая часть арбуза и отрезанная. Т.е. получается, сколько провести меридиан, столько будет кусков. Что же касается параллели, то здесь аналогично задаче с палками кусков будет больше ровно на один, чем параллелей. Поэтому, чтобы решить задачу надо:

1. Прибавить единицу к количеству параллелей: $12 + 1 = 13$.

2. Перемножить количество меридиан и количество кусков из пункта 1: $13 \cdot 22 = 286$.

Задание 1. На поверхности глобуса фломастером проведены 15 параллелей и 20 меридиан. На сколько частей проведённые линии разделили поверхность глобуса?

Ответ: 320.

Задание 2. На поверхности глобуса фломастером проведены 19 параллелей и 17 меридиан. На сколько частей проведённые линии разделили поверхность глобуса?

Ответ: 340.

Задача №2. Десять столбов соединены между собой проводами так, что от каждого столба отходит ровно 4 провода. Сколько всего проводов протянуто между этими десятью столбами?

Решение: данная задача может решаться с помощью схемы, но это достаточно трудно и неудобно, т.к. можно легко ошибиться. Такого рода задачи относятся к задачам, решаемые с помощью графов. Но и здесь можно обойтись без графа, зная теорему: сумма степеней всех вершин графа число чётное и оно равно удвоенному числу рёбер. В данной задача число столбов — число вершин, число отходящих проводов — степень вершины и общее количество проводов — число рёбер. Поэтому, чтобы ответить на вопрос

задачи, надо найти сумму всех вершин и разделить на 2. $4 \cdot 10 : 2 = 20$ это и будет ответом к задаче.

Задание 1. Двенадцать городов соединены между собой дорогами так, что от каждого города отходит ровно 5 дорог. Сколько всего дорог между этими двенадцатью городами?

Ответ: 30.

Задание 2. Пятнадцать островов соединены между собой мостами так, что от каждого острова отходит ровно 6 мостов. Сколько всего мостов между этими пятнадцатью островами?

Ответ: 45.

Задача № 3. На ленте по разные стороны от середины отмечены две тонкие поперечные полосы: синяя и красная. Если разрезать ленту по красной полоске, то одна часть будет на 30 см длиннее другой. Если разрезать ленту по синей полоске, то одна часть будет на 50 см длиннее другой. Найдите расстояние (в сантиметрах) между красной и синей полосками.

Решение: данная задача своей формулировкой может показаться сложной, но все решается довольно просто. Если рассмотреть условие, то разрезая ленту по синей и красной полоске окажется, что один и тот же кусок ленты берут два раза, а в сумма этих отрезанных частей равна 80. Поэтому чтобы решить задачу, необходимо найти сумму и разделить на 2. $(50 + 30) : 2 = 40$.

Задание 1. На ленте по разные стороны от середины отмечены две тонкие поперечные полосы: жёлтая и зелёная. Если разрезать ленту по жёлтой полоске, то одна часть будет на 25 см длиннее другой. Если разрезать ленту по зелёной полоске, то одна часть будет на 35 см длиннее другой. Найдите расстояние (в сантиметрах) между жёлтой и зелёной полосками.

Ответ: 30.

Задание 2. На ленте по разные стороны от середины отмечены две тонкие поперечные полосы: оранжевая и голубая. Если разрезать ленту по

оранжевой полоске, то одна часть будет на 10 см длиннее другой. Если разрезать ленту по голубой полоске, то одна часть будет на 40 см длиннее другой. Найдите расстояние (в сантиметрах) между оранжевой и голубой полосками.

Ответ: 25.

Задача №4. Взяли несколько досок и распилили их (за один распил можно распилить только одну доску). Всего сделали 11 поперечных распилов, в итоге получилось 16 кусков. Сколько досок взяли?

Решение: начинается решение с понимания, что изначально было какое-то количество досок. Распилить можно только одну доску, а распилов сделали всего 11, значит, получили дополнительных 11 кусков, и чтобы найти, сколько досок было, надо вычесть количество распилов из количества полученных кусков. $16 - 11 = 5$.

Задание 1. Взяли несколько досок и распилили их (за один распил можно распилить только одну доску). Всего сделали 15 поперечных распилов, в итоге получилось 28 кусков. Сколько досок взяли?

Ответ: 13.

Задание 2. Взяли несколько досок и распилили их (за один распил можно распилить только одну доску). Всего сделали 20 поперечных распилов, в итоге получилось 27 кусков. Сколько досок взяли?

Ответ: 7.

Занятие 13. «Решение задач с помощью алгоритма».

Задача №1. На палке отмечены поперечные линии красного, жёлтого и зелёного цвета. Если распилить палку по красным линиям, то получится 15 кусков, если по жёлтым — 5 кусков, а если по зелёным — 7 кусков. Сколько кусков получится, если распилить палку по линиям всех трёх цветов?

Решение: чтобы выделить алгоритм решения данного типа задачи, следует начать от более частного случая, когда палку распиливают по 1 линии — получится 2 куска. Если палку распилить по 2 линиям, то получится 3 куска

и т.д. Можно заметить закономерность, что кусков будет ровно больше на 1, чем линий. Поэтому алгоритм данной задачи состоит в следующем:

1. Из каждого количества кусков вычесть по единице — узнаем количество линий каждого цвета. $15 - 1 = 14$, $5 - 1 = 4$, $7 - 1 = 6$.

2. Сложить количество линий из первого пункта узнаем общее количество линий. $14 + 4 + 6 = 24$.

3. Т.к. мы выяснили, что количество кусков на единицу больше, чем количество линий, то к количеству линий из пункта 2 прибавляем единицу и получаем ответ задачи. $24 + 1 = 25$.

Задание 1. На бревне отмечены поперечные линии синего, красного и чёрного цвета. Если распилить бревно по синим линиям, то получится 10 кусков, если по красным линиям — 8 кусков, а если по чёрным — 14 кусков. Сколько кусков получится, если распилить палку по линиям всех трёх цветов?

Ответ: 30.

Задание 2. На палке отмечены поперечные линии фиолетового, оранжевого и розового цвета. Если распилить палку по фиолетовым линиям, то получится 12 кусков, если по оранжевым — 18 кусков, а если по розовым — 4 куска? Сколько кусков получится, если распилить палку по линиям всех трёх цветов?

Ответ: 32.

Задача №2. Саша пригласил Петю в гости, сказав, что живёт в седьмом подъезде в квартире №462, а этаж сказать забыл. Подойдя к дому, Петя обнаружил, что дом семиэтажный. На каком этаже живёт Саша?

Алгоритм:

1. Узнать, сколько примерно квартир в одно подъезде — $462:7 = 66$;

2. Узнать, сколько точно квартир в подъезде: найти ближайшее число, которое не меньше примерного числа количества квартир и делится без остатка на количества этажей — $70 > 66$; сколько квартир на этаже $70:7 = 10$;

3. Узнать, сколько квартир в подъездах, не считая нужный — $70 \cdot 6 = 420$;

4. Узнать, на каком этаже нужная квартира — $(462 - 420):10 = 4,2$ — 4 полных этажа и 2 квартиры уходят на 5 этаж.

Ответ: 5.

Задание 1. Маша пригласила Катю в гости, сказав, что живёт в шестом подъезде в квартире №216, а этаж сказать забыла. Подойдя к дому, Катя обнаружила, что дом пятиэтажный. На каком этаже живёт Маша?

Ответ: 2.

Задание 2. Оля пригласила Влада к себе в гости, сказав, что живёт в девятом подъезде в квартире №387, а этаж сказать забыла. Подойдя к дому, Влад обнаружил, что дом девятиэтажный. На каком этаже живёт Оля?

Ответ: 6.

Задача №3. Петя меняет маленькие фишки на большие. За один обмен он получает 3 больших фишки, отдав 10 маленьких. До обменов у Пети было 100 фишек (среди них были и большие, и маленькие), а после стало 65. Сколько обменов он совершил?

Алгоритм:

1. Узнать, сколько фишек расходуется за один обмен — $10 - 3 = 7$;

2. Узнать, сколько фишек всего потратилось $100 - 65 = 35$;

3. Узнать, сколько произошло обменов — $35:7 = 5$.

Задание 1. Вася меняет маленькие фишки на большие. За один обмен он получает 2 больших фишки, отдав 7 маленьких. До обменов у Васи было 120 фишек, а после стало 80. Сколько обменов он совершил?

Ответ: 8.

Задание 2. Гоша меняет маленькие фишки на большие. За один обмен он получает 5 большие фишки, отдав 13 маленьких. До обменов у Гоши было 110 фишек, а стало 38. Сколько обменов он совершил?

Ответ: 9.

Занятие 14. «Решение задач с помощью схем».

Задача №1. В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

- 1) за 3 золотых монеты получить 4 серебряных и одну медную;
- 2) За 6 серебряных монет получить 4 золотых и одну медную.

У Николы были только серебряные монеты. После посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 35 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Николы?

Решение: обозначим первую операцию за x , вторую операцию за y и составим схему:

x операция			y операция	
	Прибавка	Трата	Прибавка	Трата
Сер.	$4x$	—	—	$6y$
Зол.	—	$3x$	$4y$	—
Медь	x	—	y	—

Т.к. золотых у Николы не появилось, значит, сколько золотых монет прибавилось, столько их и отдали, значит, из схемы получается равенство: $4y = 3x$.

Т.к. медные не тратились, а постоянно прибавлялись, значит, из схемы получается: $x + y = 35$.

На основе этих двух равенств получается система: $\begin{cases} 4y = 3x, \\ x + y = 35, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20, \\ y = 15. \end{cases}$

Тогда серебряных монет стало на $4x - 6y = 80 - 90 = -10$ больше, т.е. на 10 меньше.

Задание 1. В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

- 1) за 2 золотых монеты получить 3 серебряных и одну медную;
- 2) за 5 серебряных монет получить 3 золотые и одну медную.

У Андрея были только серебряные монеты. После посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 50 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Андрея?

Ответ: 10.

Задание 2. В обменном пункте можно совершить одну из двух операций:

- 1) за 5 золотых монет получить 7 серебряных и одну медную;
- 2) за 10 серебряных монет получить 7 золотых и одну медную.

У Антона были только серебряные монеты. После посещений обменного пункта серебряных монет у него стало меньше, золотых не появилось, зато появилось 60 медных. На сколько уменьшилось количество серебряных монет у Антона?

Ответ: 5.

Задача 2. Список заданий викторины состоял из 25 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 10 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 42 очка, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

Решение: обозначим правильные ответы за x , неправильные ответы за y , отсутствие ответа за z и составим схему:

Правильные	Неправильные	Отсутствие	Всего
x	y	z	25
7	-10	0	42

Т.к. ученик какое-то количество верных ответов, какое-то количество неправильных, и какое-то количество раз воздержался от ответа, а они составляют ответы на 25 вопросов, то получится равенство: $x + y + z = 25$.

Т.к. ученик получал разное количество очков за каждый правильный или неправильный ответ, а при отсутствии ответа его количество очков не менялось, то получится равенство: $7x - 10y + 0z = 42$.

На основе этих двух равенств получается система:
$$\begin{cases} x + y + z = 25, \\ 7x - 10y + 0z = 42. \end{cases}$$

Для начала отдельно решаем второе уравнение в системе: $7x - 10y = 42$.

Далее выражаем одну переменную через другую: $7(x - 6) = 10y$.

Т.к. $(x-6) : 7$, то и $10y : 7$. Пусть $y = 7$, тогда $x = 16$. Подставляем найденные значения в первое уравнение системы: $23 + z = 25$; $z = 2$. Данные значения не противоречат условию задачи.

Далее необходимо проверить, вдруг ученик дал больше правильных ответов. Следующее число, которое делится на 7 — это 14. Значит, подставляем во второе уравнение $y = 14$, тогда $x = 26$. Данные значения x и y противоречат условию задачи, т.к. вопросов всего было 25, а по нашим решениям мальчик дал 26 правильных ответов, чего быть не может.

Ответ: 16.

Задание 1. Список заданий викторины состоял из 25 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 7 очков, за неправильный ответ с него списывали 9 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 56 очков, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

Ответ: 17.

Задание 2. Список заданий викторины состоял из 36 вопросов. За каждый правильный ответ ученик получал 5 очков, за неправильный ответ с него списывали 12 очков, а при отсутствии ответа давали 0 очков. Сколько верных ответов дал ученик, набравший 65 очков, если известно, что по крайней мере один раз он ошибся?

Ответ: 25.

Заключение

В процессе выполнения данной выпускной квалификационной работы были решены все поставленные задачи и получены следующие результаты.

Проанализировав документы, определяющие структуру и содержание контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена, и рабочие программы по математике, были выявлены ключевые особенности ЕГЭ по математике базового уровня:

1. Ориентация на проверку базовых математических знаний и умений, необходимых для повседневной жизни и профессиональной деятельности;
2. Преобладание заданий, направленных на применение стандартных алгоритмов и математических методов;
3. Отсутствие заданий с развёрнутым ответом, что упрощает проверку и оценку результатов экзамена.

В ходе работы были проанализированы КИМы, а также демонстрационные варианты и открытые банки заданий. В результате анализа было выяснено, что ЕГЭ по математике базового уровня состоит из 21 одного задания, причём некоторый перечень заданий ученик сможет решить с помощью дополнительной подготовки. К таким заданиям относятся задания №8 — «Анализ утверждений», №11 — «Прикладная стереометрия», №19 — «Числа и их свойства», №21 — «Задачи на смекалку».

На основе вышеуказанных анализов была разработана программа факультативного курса «Задачи повышенной сложности», направленного на расширение математического кругозора учащихся и формирование навыков решения задач, требующих креативное, логическое и пространственное мышление. В рамках курса был подобран теоретический материал для каждого раздела, а также разработаны специальные задачи и самостоятельные работы на закрепление пройденного материала.

Факультативный курс может быть использован учителями математики при подготовке учащихся к сдаче ЕГЭ по математике базового уровня, а также при организации внеурочной деятельности по математике в общеобразовательных учреждениях.

Список использованных источников

1. Гиперматика. Цифровой адаптивный учебник по математике [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: <https://7.math.ru/> (дата обращения 15.12. 2023)
2. ГлавСправ. Образование. Информационно-справочный портал [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: <https://edu.glavsprav.ru/spb/> (дата обращения 23.01.2024)
3. Игошин В. И. Задачи и упражнения по математической логике и теории алгоритмов : учеб. пособие для студентов высш. учеб. Заведений. 3-е изд., стер. М. : Академия, 2007. 304 с.
4. Кодификатор проверяемых требований к результатам освоения основной образовательной программы среднего общего образования и элементов содержания для проведения единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ подготовлен Федеральным государственным научным учреждением ФИПИ [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: <https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/151883967-2> (дата обращения 15.11.2023)
5. Кулагина Т. В., Тихонова Н. Б. Элементы теории множеств : учебно-методическое пособие. Пенза : ПГУ, 2014. 32 с.
6. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10–11 классы : учеб. для общеобразоват. организаций : базовый и углубл. уровни / Л. С. Атанасян [и др.]. 7–е изд., перераб. и доп. М. : Просвещение, 2019. 287 с.
7. Математика : алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10–11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш. А. Алимов [и др.]. 11–е изд., стер. М. : Просвещение, 2023. 463 с.

8. Математика. 5 класс : базовый уровень : учебник : в 2 частях / Н. Я. Виленкин [и др.]. 4-е изд., стер. М. : Просвещение, 2023. 160 с.
9. Математика. Алгебра : 7 класс : базовый уровень : учебник / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. 15-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2023. 255 с.
10. Математика. Алгебра : 8 класс : базовый уровень : учебник / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. 16-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2023. 319 с.
11. Математика. Геометрия: 7–9 классы : базовый уровень : учебник / Л. С. Атанасян [и др.]. 14-е изд., перераб. М. : Просвещение, 2023. 416 с.
12. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2023 года по МАТЕМАТИКЕ [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: https://doc.fipi.ru/ege/analiticheskieimethodicheskimaterialy/2023/ma_mr_2023.pdf (дата обращения 18.02.2024)
13. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ обучающимся по организации самостоятельной подготовки к ЕГЭ 2024 года МАТЕМАТИКА [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: https://doc.fipi.ru/navigator-podgotovki/navigator-ege/MR_matematika_ege_2024.pdf (дата обращения 18.02.2024)
14. Сгибнев А. И. Делимость и простые числа. 3-е изд., испр. М : МЦНМО, 2015. 112 с.
15. СДАМ ГИА: РЕШУ ЕГЭ. Образовательный портал для подготовки к экзаменам. Математика базового уровня [Электронный ресурс]. Режим доступа: URL: <https://mathb-ege.sdamgia.ru/?redir=1> (дата обращения 23.03.2024)
16. Спецификация контрольных измерительных материалов для проведения в 2024 году единого государственного экзамена по МАТЕМАТИКЕ базовый уровень подготовлена Федеральным государственным научным

учреждением ФИПИ [Электронный ресурс]. Режим доступа:
[URL:https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/1518839672](https://fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory#!/tab/1518839672)
(дата обращения 15.11.2023)

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования

ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В.Г. БЕЛИНСКОГО

Факультет физико-математических
и естественных наук

Кафедра
«Математическое образование»

Направление подготовки
44.03.01 Педагогическое образование
Профиль подготовки «Математика»

Утверждаю: зав. кафедрой

«21» 09 2023 г.
Паньженский В.И.

Задание

По ВКР студента Согласовой Татьяны Александровны
(ФИО полностью)

Тема работы «Содержательные особенности ЕГЭ по математике базового уровня»

Утверждена приказом по Университету от «26.09» 2023 г. № 0971а/о

Срок сдачи студентом законченной работы «20» 05 2024 г.

КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН ВЫПОЛНЕНИЯ ВКР

№ п/п	Перечень подлежащих разработке вопросов	Сроки выполнения	Примечания
1.	Структура контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена по математике базового уровня	Сентябрь 2023 г.	выполнено
2.	Содержательные разделы контрольных измерительных материалов единого государственного экзамена по математике базового уровня	Октябрь 2023 г.	выполнено
3.	Структурная схема создания факультативного курса для подготовки к ЕГЭ по математике базового уровня	Ноябрь 2023 г.	выполнено
4.	Отбор теоретического материала для разработки факультативного курса	Декабрь 2023 г.	выполнено
5.	Составление задачного материала для разработки факультативного курса	Январь 2024 г.	выполнено
6.	Систематизация результатов проделанной работы	Февраль 2024 г.	выполнено
7.	Оформление списка использованных источников	Март-апрель 2024 г.	выполнено
8.	Подготовка текста выступления	Май 2024 г.	выполнено

Дата выдачи задания « 18 » 09 2023 г.

Руководитель Мо Монахова О.А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Задание принял к исполнению

ста Согласова Т. А.
(подпись) (Ф.И.О.)

Ректору Пензенского
государственного университета
А.Д. Гулякову
студентки 4 курса ФФМЕН
очной формы обучения
Согласовой Татьяны
Александровны

ЗАЯВЛЕНИЕ

Я, Согласова Татьяна Александровна, студентка 4 курса очной формы обучения направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование профиля подготовки «Математика» прошу провести проверку с использованием системы «Антиплагиат. ВУЗ» бакалаврской работы на тему «Содержательные особенности ЕГЭ по математике базового уровня», выполненной мной самостоятельно, на содержание элементов плагиата.

Все прямые заимствования из печатных и электронных источников, а также из защищенных ранее выпускных квалификационных работ, кандидатских и докторских диссертаций имеют соответствующие ссылки.

Я ознакомлен с действующим Стандартом университета «Выпускная квалификационная работа обучающихся по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета и программам магистратуры», согласно которому обнаружение плагиата является основанием для недопуска ВКР к защите и отчисления из университета.


ПОДПИСЬ
20.05.24
ДД ММ ГГГГ

ВКР представлена на проверку 20.05.24
ДД ММ ГГГГ

Руководитель ВКР 
ПОДПИСЬ
Монахова О. А.
Ф.И.О.

Протокол

проверки на оригинальность в системе «Антиплагиат.ВУЗ»
выпускной квалификационной работы на тему:
«Содержательные особенности ЕГЭ по математике базового уровня»
студентки 4 курса **Согласовой Татьяны Александровны**
направления подготовки 44.03.01 Педагогическое образование,
профиль подготовки «Математика»

Отчет о проверке

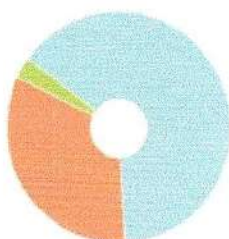
Автор: **Согласова Татьяна Александровна**

Проверяющий: **Монахова Оксана Александровна**

Название документа: **Содержательные особенности ЕГЭ по математике базового уровня**

Организация: **Пензенский государственный университет**

РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОВЕРКИ



Совпадения:
32,99%



Цитирования:
3,12%



Оригинальность:
63,89%



Самоцитирования:
0%



«Совпадения», «Цитирования», «Самоцитирования», «Оригинальность» являются отдельными показателями, отображаются в процентах и в сумме дают 100%, что соответствует проверенному тексту документа.

- **Совпадения** — фрагменты проверяемого текста, полностью или частично сходные с найденными источниками, за исключением фрагментов, которые система отнесла к цитированию или самоцитированию. Показатель «Совпадения» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к совпадениям, в общем объеме текста.
- **Самоцитирование** — фрагменты проверяемого текста, совпадающие или почти совпадающие с фрагментом текста источника, автором или соавтором которого является автор проверяемого документа. Показатель «Самоцитирование» — это доля фрагментов текста, отнесенных к самоцитированию, в общем объеме текста.
- **Цитирования** — фрагменты проверяемого текста, которые не являются авторскими, но которые система отнесла к корректно оформленным. К цитированиям относятся также шаблонные фразы: библиография, фрагменты текста, найденные модулем поиска «СПС Гарант нормативно-правовая документация». Показатель «Цитирования» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к цитированию, в общем объеме текста.
- **Текстовое пересечение** — фрагмент текста проверяемого документа, совпадающий или почти совпадающий с фрагментом текста источника.
- **Источник** — документ, проиндексированный в системе и содержащийся в модуле поиска, по которому производится проверка.
- **Оригинальный текст** — фрагменты проверяемого текста, не обнаруженные ни в одном источнике и не отнесенные ни одним из модулей поиска. Показатель «Оригинальность» — это доля фрагментов проверяемого текста, отнесенных к оригинальному тексту, в общем объеме текста.

Обращаем Ваше внимание, что система находит текстовые совпадения проверяемого документа с проиндексированными в системе источниками. При этом система является вспомогательным инструментом, определение корректности и правомерности совпадений или цитирований, а также авторства текстовых фрагментов проверяемого документа остается в компетенции проверяющего.

ИНФОРМАЦИЯ О ДОКУМЕНТЕ

Номер документа: 82

Количество страниц: 78

Тип документа: Выпускная квалификационная работа

Символов в тексте: 105876

Дата проверки: 20.05.2024 16:13:53

Слов в тексте: 13957

Дата корректировки: Нет

Число предложений: 750

Руководитель ВКР **Монахова О.А.**

20.05.2024

Монахова О.А.

ОТЗЫВ
РУКОВОДИТЕЛЯ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
на тему: «Содержательные особенности ЕГЭ по математике
базового уровня»
студентки Согласовой Татьяны Александровны
факультета физико-математических и естественных наук направления
подготовки 44.03.01 «Педагогическое образование»,
профиль подготовки «Математика», гр. 20ФПМ1

На основе анализа школьной программы и структуры ЕГЭ по базовой математике разработан факультативный курс по задачам повышенной сложности, направленный на систематизацию математических знаний и успешную сдачу ЕГЭ по базовой математике.

Целью представленной выпускной квалификационной работы является изучение содержательных особенностей ЕГЭ по математике базового уровня и разработка факультативного курса «Задачи повышенной сложности».

В ходе работы Согласовой Т.А. была составлена система задач по некоторым методам решения и видам нестандартных задач и задач повышенной сложности, включенных в банк базового ЕГЭ по математике. Разработаны рекомендации для учителя по работе с представленными заданиями.

Работа заслуживает оценки «отлично» и может быть использована в учебном процессе учителем при подготовке учащихся.

Руководитель ВКР:

Монахова Оксана Александровна,
кафедра «Математическое образование»

Педагогического института

им. В.Г. Белинского, ПГУ, доцент,

доцент, кандидат физико-математических наук

