

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

*Факультет*

*Кафедра*

вычислительной техники

(наименование)

Высшая и прикладная математика

(наименование)

Направление подготовки

01.03.04 «Прикладная математика»

(код и наименование)

Профиль

Математическое моделирование в экономике и технике

(код и наименование)

**БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА**

на тему

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ

БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Студент 17ВБ1

(группа)

Сурикова А. В.  
(подпись, дата)

(фамилия, инициалы)

Руководитель к.ф.-м.н., доцент

Тында А. Н.  
(подпись, дата)

(фамилия, инициалы)

Нормоконтролер к.т.н., доцент

Тарасов Д. В.  
(подпись, дата)

(фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 04.06.21 № 10 )

Заведующий кафедрой д.ф.-м.н., проф.

Бойков И. В.  
(подпись, дата)

(фамилия, инициалы)

Работа защищена с отметкой отмет. (протокол заседания ГЭК от 22.06.21 № 7 )

Секретарь ГЭК к.пед.н., доцент

Зверовщикова Н. В.  
(подпись, дата)

(фамилия, инициалы)

Пенза 2021

МИНОБРНАУКИ РОССИИ  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Политехнический институт

*Факультет*

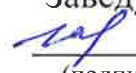
Вычислительной техники  
(наименование)

*Кафедра*

Высшая и прикладная математика  
(наименование)

«УТВЕРЖДАЮ»

Заведующий кафедрой

 И. В. Бойков  
(подпись, инициалы, фамилия)

«30» ноября 2020 г.

**ЗАДАНИЕ**

**на бакалаврскую работу**

1. Студент Сурикова Александра Вячеславовна гр. 17ВБ1  
(фамилия, имя, отчество)  
факультета вычислительной техники

2. Тема работы Асимптотические методы интегрирования  
быстроосциллирующих функций

Тема утверждена приказом по ПГУ № 0903 от « 30 » ноября 2020 г.

3. Руководитель работы к.ф.-м.н. Тында А. Н.

4. Задание на работу (назначение разработки, исходные данные и т.п.)

1. Рассмотреть задачу вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций

2. Изучить применение классических квадратурных методов и обосновать их непригодность для вычисления осциллирующих интегралов

3. Рассмотреть применение квадратурного метода Филона для частного случая интегралов Фурье

4. Разработать асимптотические методы для тригонометрических интегралов

5. Исследовать общий случай построения асимптотического разложения для интегралов Фурье

6. Изучить асимптотическое поведение интегралов со стационарными точками с помощью метода стационарной фазы

7. Исследовать асимптотику интегралов Лапласа

8. С использованием разработанных программ провести анализ эффективности описанных методов на модельных задачах

5. Перечень подлежащих разработке вопросов

1. Квадратурные методы

1.1. Не осциллирующие квадратурные методы

1.2. Квадратурная формула Филона

2. Асимптотические разложения

2.1. Разложения некоторых тригонометрических интегралов.

2.2. Разложение интегралов Фурье

3. Метод стационарной фазы

3.1. Асимптотика интегралов при отсутствии стационарных точек

3.2. Вычисления при одной и нескольких стационарных точках

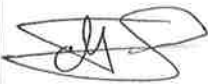
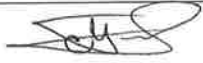
4. Метод Лапласа

4.1. Асимптотика интеграла при наличии экстремума на границе

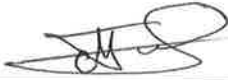
4.2. Асимптотика интеграла при наличии экстремума во внутренней точке

6. Календарный график по выполнению проекта

| Наименование этапов работы                                                                  | Объем работы | Срок выполнения | Подпись руководителя                                                                  |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. Постановка задачи решения интегралов от быстроосциллирующих функций.<br>Обзор литературы | 20 %         | 28.05.2021      |  |

|                                                                                         |      |            |                                                                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|------|------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| 2. Исследование квадратурных и асимптотических методов решения осциллирующих интегралов | 25 % | 02.06.2021 |  |
| 3. Разработка численных алгоритмов решения                                              | 20 % | 07.06.2021 |  |
| 4. Разработка программы                                                                 | 25 % | 10.06.2021 |  |
| 5. Оформление пояснительной записки                                                     | 10 % | 14.06.2021 |  |

Дата выдачи задания «30» ноября 2020 г.

Руководитель бакалаврской работы  А. Н. Тында  
(подпись, инициалы, фамилия)

Задание к исполнению принял студент  А. В. Сурикова  
(подпись, инициалы, фамилия)

Работу к защите допустить  
Декан факультета  Л. Р. Фионова  
(подпись, инициалы, фамилия)

## СОДЕРЖАНИЕ

|                                                                     |    |
|---------------------------------------------------------------------|----|
| <b>ВВЕДЕНИЕ</b> . . . . .                                           | 4  |
| <b>1. КВАДРАТУРНЫЕ МЕТОДЫ</b> . . . . .                             | 7  |
| 1.1. Классические квадратные формулы . . . . .                      | 7  |
| 1.2. Квадратурная формула Филона . . . . .                          | 10 |
| <b>2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ</b> . . . . .                      | 13 |
| 2.1. Примеры разложения тригонометрических функций . . . . .        | 13 |
| 2.1.1. Асимптотический метод для функций вида $\sin x^k$ . . . . .  | 13 |
| 2.1.2. Асимптотический метод для функций вида $\cos x^k$ . . . . .  | 15 |
| 2.2. Основное асимптотическое разложение . . . . .                  | 17 |
| <b>3. МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ</b> . . . . .                         | 20 |
| 3.1. Вычисления при отсутствии стационарных точек . . . . .         | 20 |
| 3.2. Вклад невырожденной стационарной точки . . . . .               | 22 |
| 3.3. Асимптотика интеграла в общем случае . . . . .                 | 25 |
| 3.4. Асимптотика функций Эйри и Бесселя . . . . .                   | 28 |
| <b>4. МЕТОД ЛАПЛАСА</b> . . . . .                                   | 32 |
| 4.1. Предварительные исследования . . . . .                         | 32 |
| 4.2. Обоснование асимптотики интеграла . . . . .                    | 33 |
| 4.2.1. Достижение максимума на границе . . . . .                    | 33 |
| 4.2.2. Достижение максимума во внутренней точке . . . . .           | 35 |
| 4.3. Асимптотика гамма-функции Эйлера . . . . .                     | 39 |
| <b>5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ</b> . . . . .                            | 43 |
| 5.1. Сравнение квадратурных методов . . . . .                       | 43 |
| 5.2. Сравнение асимптотических и квадратурных методов . . . . .     | 44 |
| 5.3. Сравнение асимптотики при наличии стационарных точек . . . . . | 46 |
| <b>ЗАКЛЮЧЕНИЕ</b> . . . . .                                         | 50 |
| <b>СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ</b> . . . . .                   | 52 |

|                                                                                                                                   |           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ А. Листинг программы для вычисления интегралов по формуле Симпсона . . . . .</b>                                    | <b>54</b> |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Листинг программы для вычисления интегралов по формуле Филона . . . . .</b>                                      | <b>55</b> |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ В. Листинг программы для асимптотического разложения интегралов от функций вида <math>\sin x^k</math> . . . . .</b> | <b>57</b> |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ Г. Листинг программы для асимптотического разложения интегралов от функций вида <math>\cos x^k</math> . . . . .</b> | <b>58</b> |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ Д. Листинг программы для асимптотического разложения интегралов Фурье . . . . .</b>                                 | <b>59</b> |
| <b>ПРИЛОЖЕНИЕ Е. Листинг программы для вычисления интегралов методом стационарной фазы . . . . .</b>                              | <b>60</b> |

## ВВЕДЕНИЕ

Вычисление осциллирующих интегралов является одной из важных задач в оптике, электродинамике, квантовой механике и многих других областях. Например, в области акустики – метод граничных элементов требует оценки сильно колебательных интегралов для решения интегральных уравнений с колебательными ядрами. Модифицированные ряды Фурье используют интегралы от быстроосциллирующих функций для получения аппроксимационной схемы функции, которая сходится быстрее, чем стандартный ряд Фурье. Другие приложения включают в себя гидродинамику, анализ изображения и много другое.

Вычисление интегралов от осциллирующих функций не всегда осуществимо с помощью готовых процедур предлагаемых распространенными вычислительными пакетами типа Maple, Mathcad и т.п., поэтому возникает необходимость в разработке и исследовании методов надежно работающих для интегрирования широкого класса быстроосциллирующих функций.

В данной работе объектом исследования являются интегралы Фурье, которые имеют вид

$$\int_a^b f(x) e^{i w g(x)} dx \quad (1)$$

где  $g(x)$  – есть вещественная функция, называемая фазовой функцией,  $f(x)$  – функция амплитуды, а  $w$  – частота колебаний. Взяв действительную и мнимую части этого интеграла, мы получим интегралы с тригонометрическими ядрами:

$$\Re(I(f)) = \int_a^b f(x) \cos w g(x) dx$$

и

$$\Im(I(f)) = \int_a^b f(x) \sin w g(x) dx.$$

Еще одним типом интегралов, исследуемых в данной работе являются интегралы Лапласа, которые имеют вид

$$I(f) = \int_a^b f(x)e^{wg(x)}dx \quad (2)$$

где  $g(x)$  – есть вещественная функцией, а функция  $f(x)$  может принимать и комплексные значения. При этом, также как и в интегралах Фурье,  $g(x)$  также является фазовой функцией,  $f(x)$  – функцией амплитуды, а  $w$  – частотой колебаний.

Аппроксимация таких интегралов требует особого внимания: традиционные квадратурные формулы не являются точными для быстроосциллирующих функций, поэтому основная целью данной работы является изучение асимптотической теории решения интегралов представленного вида.

Здесь, ключевое различие между квадратурными и асимптотическими методологиями заключается в том, что асимптотика связана с тем, как ведут себя интегралы при увеличении частоты колебаний, в то время как квадратурные методы имеют более практический взгляд и исследуют сходящиеся аппроксимации при фиксированной частоте.

Чтобы понять, почему для осциллирующих интегралов требуются специальные методы, в соответствии с поставленной целью можно выделить следующие задачи:

1. Рассмотреть классические квадратурные методы и обосновать непригодность их применения к быстроосциллирующим функциям;
2. Исследовать квадратурные методы, которые сохраняют свойства асимптотического разложения, обеспечивая при этом сколь угодно высокую точность для фиксированной частоты;
3. Изучить альтернативу квадратурным методам в виде асимптотических разложений;

4. Определить вклад стационарной точки в асимптотике осциллирующих интегралов, а также рассмотреть способы вычисления интегралов без, с одной и несколькими стационарными точками с помощью метода стационарной фазы;
5. Исследовать асимптотику интегралов Лапласа.

# 1. КВАДРАТУРНЫЕ МЕТОДЫ

## 1.1. Классические квадратурные формулы

Для того, чтобы понять необходимость использования специальных методов для аппроксимации осциллирующих интегралов, необходимо для начала изучить где традиционные квадратурные методы терпят неудачу. Большинство неосциллирующих квадратурных методов аппроксимируют интеграл путем взвешенной суммой выборки подынтегрального выражения в  $n$  дискретных точках  $\{x_1, \dots, x_n\}$  и усреднением выборок с подходящими весами  $\{w_1, \dots, w_n\}$ :

$$\int_a^b w(x)f(x)dx \approx \sum_{k=1}^n w_k f(x_k), \quad (1.1)$$

где  $w$  – некоторая неотрицательная весовая функция. Рассмотрим определение интеграла в виде суммы Римана

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}(b-a) + a\right).$$

Таким образом, если  $n$  будет достаточно большим, то сумма будет приближаться к значению интеграла и попадет в рамки (1.1). Это эквивалентно делению интервала интегрирования на части размером  $\frac{1}{n}$  и аппроксимации интеграла в каждой такой части, и хотя это и работает как аппроксимационная схема, скорость ее сходимости очень медленная, и она оказывается бесполезной [2].

Далее рассмотрим пример формулы Ньютона-Котеса. Такие формулы состоят из аппроксимации подынтегрального выражения  $f$  в  $n$  равномерно расположенных точках. При этом, если конечные точки интервала включены в интервал, то мы имеем замкнутую формулу Ньютона-Котеса, а иначе – открытую. Методы Ньютона-Котеса не обязательно сходятся, когда  $n$  уходит в бесконечность [10], в частности, сходимости не удастся достичь для класси-

ческого примера Рунге

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{25x^2 + 1} dx.$$

Таким образом, необходимо использовать составное правило, в котором интервал интегрирования делится на равномерно расположенные подинтервалы, где в каждом используется метод Ньютона–Котеса.

Рассмотрим составную формулу Ньютона–Котеса, где функция  $f$  аппроксимируется трапецией внутри каждого подинтервала. Это эквивалентно взвешенной сумме, для  $h = \frac{b-a}{n}$ :

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} f(a) + h \sum_{k=1}^{n-1} f(x + kh) + \frac{h}{2} f(b).$$

Использование квадратичной функции приводит к правилу Симпсона:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left[ f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right].$$

Это особенно важно для истории исследования осциллирующих функций, поскольку оригинальный метод Филона, который будет рассмотрен далее, основан на составном правиле Симпсона.

Подобно Ньютону–Котесу, большинство других квадратурных схем состоят из выбора весов таким образом, чтобы (1.1) было точным, когда  $f$  является полиномом определенной степени, хотя и не обязательно выбирать равномерно расположенные узлы. Идея заключается в том, что, если  $f$  можно хорошо аппроксимировать полиномом, то квадратурная ошибка должна быть небольшой. Таким образом, можно сделать формулу точной для многочленов степени  $n - 1$ , если зафиксировать узлы  $x_k$  и определить веса  $w_k$ , решив систему

$$\int_a^b w(x) dx = \sum_{k=1}^n w_k \dots \int_a^b w(x) x^{n-1} dx = \sum_{k=1}^n w_k x_k^{n-1}. \quad (1.2)$$

Наиболее часто используемыми методами являются квадратурные формулы Гаусса, идея которых состоит в том чтобы выбрать узлы и веса таким образом, чтобы максимизировать степень многочленов, для которых (1.1) является точным.

Формула (1.1) имеет  $2n$  неизвестных, следовательно, можно выбрать значения для этих неизвестных таким образом, чтобы полиномы до степени  $2n - 1$  были точно хорошо интегрируемы. Известно, что для достижения данной цели точки выборки должны быть помещены в нули соответствующих ортогональных полиномов, и тогда все веса могут быть определены с помощью формулы (1.2), которая представляет собой линейную систему уравнений.

За исключением, когда подынтегральное выражение имеет специальные формы, весовая функция обычно равна  $w(x) \equiv 1$ , а ортогональные многочлены относительно постоянной весовой функции являются хорошо известными многочленами Лежандра, что приводит к формуле Гаусса-Лежандра. В таком случае, первые несколько из этих многочленов имеют вид:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \dots$$

При этом, многочлены более высокого порядка могут быть вычислены с помощью следующего рекуррентного соотношения:

$$(n + 1)P_{n+1} = (2n + 1)xP_n - nP_{n-1}.$$

Точки выборки  $\{x_1, \dots, x_n\}$  для  $n$  точек квадратурной формулы Гаусса-Лежандра являются нулями полинома  $P_n$ , т.е.:

$$0 = P_n(x_1) = \dots = P_n(x_n).$$

Здесь, весовые коэффициенты определяются по формуле:

$$w_i = \frac{2(1 - x_i^2)}{[nP_{n-1}(x_i)]^2}.$$

Независимо от конкретного используемого метода, (1.1) не работает как квадратурная схема для высокочастотных колебаний, когда  $w(x) \equiv 1$ , если только  $n$  не растет с  $w$ .

Простое применение интегрирования по частям, которое будет исследовано далее в следующем разделе, показывает, что сам интеграл распадается подобно  $O(w^{-1})$ . Таким образом, ошибка любой взвешенной суммы равна  $O(1)$ , что сопоставимо с ошибкой порядка  $O(w^{-1})$ , если мы просто аппроксимируем интеграл нулем. Следовательно, можно сделать вывод, что численный метод, который менее точен, чем приравнивание интеграла к нулю, имеет мало практической пользы [10].

С другой стороны, если позволить  $n$  быть пропорциональным частоте, это может привести к значительным вычислительным затратам. Таким образом, данные методы не подходят для решения интегралов от быстроосциллирующих функций и необходимо искать альтернативные методы аппроксимации.

## 1.2. Квадратурная формула Филона

Первая известная численная квадратурная схема для интегралов от быстроосциллирующих функций была разработана в 1928 году Луи-Наполеоном Джорджем Филоном [11].

Филон представил метод для эффективного вычисления частного случая интегралов Фурье

$$\int_a^b f(x)e^{iwx} dx$$

где  $w(b-a) \gg 1$ ,  $f(x)$  — гладкая функция.

Так как функция  $f(x)e^{iwx}$  имеет на интегрируемом отрезке  $\frac{w(b-a)}{\pi}$  нулей, то лишь при  $n \gg \frac{w(b-a)}{\pi}$  она может быть приближена многочленом степени  $n$ , что потребует применение квадратурных методов, точных для многочленов высокой степени.

Альтернативным вариантом является путь рассмотрения функции  $e^{iwx}$  как весовой [2]. Для этого, зададим узлы интерполирования

$$x_j = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}d_j, j = \overline{1, n}$$

и заменим исходный интеграл на

$$\int_a^b L_n(x)e^{iwx}dx,$$

где  $L_n(x)$ —интерполяционный многочлен Лагранжа с узлами  $x_j$ . Получившийся интеграл может быть вычислен в виде:

$$\int_a^b L_n(x)e^{iwx}dx = S_n^w(f) = \frac{b-a}{2}e^{iwb\frac{b+a}{2}} \sum_{j=1}^n D_j\left(w\frac{b-a}{2}\right)f(x_j),$$

где

$$D_j(p) = \int_{-1}^1 \left( \prod_{k \neq j} \frac{\xi - d_k}{d_j - d_k} \right) e^{ip\xi} d\xi \quad (1.3)$$

Таким образом, исходный интеграл можно вычислить с помощью квадратурной формулы:

$$\int_a^b f(x)e^{iwx}dx \approx S_n^w(f) \quad (1.4)$$

с остаточным членом

$$R_n(f) \leq \int_a^b |f(x) - L_n(x)|dx \leq D(d_1, \dots, d_n) \left( \max_{[a,b]} |f^{(n)}(x)| \right) \left( \frac{b-a}{2} \right)^{(n+1)}$$

Колебательные квадратурные методы не получили такого внимания, как асимптотическая теория исследования интегралов от быстроосциллирующих функций. В течении двадцатого века было проведено мало работ по методу Филона, в основном состоящих из исследования конкретных ядер, сходных по форме с осциллятором Фурье.

Данный метод зависит от использования стандартного осциллятора Фурье  $e^{iwx}$ , поэтому его общность ограничена. При этом, исследование общего случая интегралов Фурье

$$\int_a^b f(x)e^{iwg(x)}$$

было рассмотрено, например в работе [15], а метод Филона для больших интервалов представлен в [12].

## 2. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Альтернативой стандартным квадратурным схемам выступают асимптотические разложения, которые улучшаются по мере увеличения частоты. Кроме того, количество операций, необходимых для создания такого разложения, не зависит от частоты и чрезвычайно мало. К тому же, все это получается, требуя только знания функции в конечных точках интервала, а также ее производные в конечных точках, если требуются более высокие асимптотические оценки [4], [6].

Однако критическим фактором, который не позволяет использовать асимптотические разложения вместо квадратурных формул является их плохая сходимость при фиксированной частоте, и в связи с этим, ограниченность их точности.

### 2.1. Примеры разложения тригонометрических функций

#### 2.1.1. Асимптотический метод для функций вида $\sin x^k$

Пусть требуется отыскать значение интеграла следующего вида:

$$I = \int_a^b \sin x^k dx \quad (2.1)$$

Сделаем замену:

$$y = x^k, x = y^{\frac{1}{k}}, dx = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1} dy$$

После которой исходный интеграл принимает вид:

$$\frac{1}{k} \int_{a^k}^{b^k} y^{\frac{1}{k}-1} \sin y dy,$$

здесь, подынтегральная функция уже не оказывается быстроосциллирующей, но вместе с этим возникает новая проблема – очень большой промежуток интегрирования.

Для решения получившейся задачи можно применить следующий асимптотический подход. Обозначим:

$$Z(t, \alpha) = \int_t^{\infty} y^{-\alpha} \sin y dy. \quad (2.2)$$

Данный интеграл сходится при  $t > 0$  и  $\alpha \geq 0$ , а интеграл (2.1) может быть вычислен в виде

$$I = \frac{1}{k} \left[ Z\left(a^k; 1 - \frac{1}{k}\right) - Z\left(b^k; 1 - \frac{1}{k}\right) \right] \quad (2.3)$$

При больших значениях  $t$  интеграл  $Z(t, \alpha)$  можно вычислить с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} Z(t, \alpha) &= \int_t^{\infty} y^{-\alpha} \sin y dy = -y^{-\alpha} \cos y \Big|_t^{\infty} - \alpha \int_t^{\infty} y^{-\alpha-1} \cos y dy \\ &= t^{-\alpha} \cos t - \alpha \left[ y^{-\alpha-1} \sin y \Big|_t^{\infty} + (\alpha + 1) \int_t^{\infty} y^{-\alpha-2} \sin y dy \right] \\ &= t^{-\alpha} \cos t + \alpha t^{-\alpha-1} \sin t - \alpha(\alpha + 1) \int_t^{\infty} y^{-\alpha-2} \sin y dy. \end{aligned}$$

Интегрируя еще несколько раз, получаем следующее асимптотическое разложение:

$$Z(t, \alpha) = \frac{\cos t}{t^{\alpha}} + \frac{\sin t}{t^{\alpha+1}} \alpha - \frac{\cos t}{t^{\alpha+2}} \alpha(\alpha + 1) - \frac{\sin t}{t^{\alpha+3}} \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) + R(t, \alpha), \quad (2.4)$$

где  $R(t, \alpha)$  – остаточный член, равный:

$$R(t, \alpha) = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3) \int_t^{\infty} \frac{\sin y}{y^{\alpha+4}} dy,$$

получим также оценку по абсолютной величине:

$$|R(t, \alpha)| = \left| \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3) \int_t^{\infty} \frac{\sin y}{y^{\alpha+4}} dy \right|$$

$$\leq \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) \int_t^\infty y^{-\alpha-4} dy = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)t^{-\alpha-3}.$$

Рассмотрим далее интегралы вида:

$$I = \int_a^b x^m \sin x^k dx. \quad (2.5)$$

Как и в прошлый раз, сделаем замену переменных

$$y = x^k, x = y^{\frac{1}{k}}, dx = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1} dy,$$

в таком случае, интеграл  $I$  будет иметь следующий вид:

$$\int_{a^k}^{b^k} y^{\frac{m}{k}} \sin y \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1} dy = \frac{1}{k} \int_{a^k}^{b^k} y^{\frac{m+1-k}{k}} \sin y dy.$$

Примем, для общности обозначений примем:  $-\frac{m+1-k}{k} = \alpha$ . В таком случае, для выполнения сходимости данного интеграла, необходимо соблюдения условия

$$\alpha \geq 0 \Rightarrow k - m - 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq m + 1.$$

Таким образом, интеграл (2.5), с помощью аналогичного преобразования к виду (2.2) может быть вычислен следующим образом

$$\frac{1}{k} \left[ Z\left(a^k; -\frac{m+1-k}{k}\right) - Z\left(b^k; -\frac{m+1-k}{k}\right) \right], \quad (2.6)$$

где к интегралу  $Z(t, \alpha)$  может быть применено разложение (2.4).

### 2.1.2. Асимптотический метод для функций вида $\cos x^k$

Пусть требуется найти значение интеграла следующего вида:

$$I = \int_a^b \cos x^k dx \quad (2.7)$$

Сделаем замену переменных

$$y = x^k, x = y^{\frac{1}{k}}, dx = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1} dy,$$

в результате которой получим интеграл:

$$\frac{1}{k} \int_{a^k}^{b^k} y^{\frac{1}{k}-1} \cos y dy.$$

Аналогично рассуждениям, приводимым в предыдущем пункте, введем обозначение

$$Z(t, \alpha) = \int_t^{\infty} y^{-\alpha} \cos y dy. \quad (2.8)$$

Таким образом, исходный интеграл может быть вычислен с помощью следующего выражения:

$$I = \frac{1}{k} \left[ Z\left(a^k; 1 - \frac{1}{k}\right) - Z\left(b^k; 1 - \frac{1}{k}\right) \right] \quad (2.9)$$

Для получения разложения интеграла  $Z(t, \alpha)$ , как и в прошлый раз воспользуемся интегрированием по частям

$$\begin{aligned} Z(t, \alpha) &= \int_t^{\infty} y^{-\alpha} \cos y dy = y^{-\alpha} \sin y \Big|_t^{\infty} - \int_t^{\infty} -\alpha y^{-\alpha-1} \sin y dy \\ &= -t^{-\alpha} \sin t - \left[ \alpha y^{-\alpha-1} \cos y \Big|_t^{\infty} - \int_t^{\infty} (-\alpha - 1) \alpha y^{-\alpha-2} \cos y dy \right] \\ &= -\frac{\sin t}{t^{\alpha}} + \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} \alpha - \int_t^{\infty} (-\alpha - 1) \alpha y^{-\alpha-2} \cos y dy. \end{aligned}$$

Интегрируя далее, получим следующую формулу

$$Z(t, \alpha) = -\frac{\sin t}{t^{\alpha}} + \frac{\cos t}{t^{\alpha+1}} \alpha + \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}} \alpha(\alpha+1) - \frac{\cos t}{t^{\alpha+3}} \alpha(\alpha+1)(\alpha+2) + R(t, \alpha), \quad (2.10)$$

где  $R(t, \alpha)$  – остаточный член, равный:

$$R(t, \alpha) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3) \int_t^{\infty} \frac{\cos y}{y^{\alpha+4}} dy.$$

Исследуем также асимптотику для интегралов

$$I = \int_a^b x^m \cos x^k dx \quad (2.11)$$

С помощью аналогичной замены

$$y = x^k, x = y^{\frac{1}{k}}, dx = \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1} dy,$$

перейдем к рассмотрению интегралов вида

$$\int_{a^k}^{b^k} y^{\frac{m}{k}} \cos y \frac{1}{k} y^{\frac{1}{k}-1} dy = \frac{1}{k} \int_{a^k}^{b^k} y^{\frac{m+1-k}{k}} \cos y dy.$$

Как и в прошлый раз, введем обозначение:  $-\frac{m+1-k}{k} = \alpha$ . В таком случае, для выполнения сходимости данного интеграла, необходимо соблюдения условия

$$\alpha \geq 0 \Rightarrow k - m - 1 \geq 0 \Rightarrow k \geq m + 1.$$

В результате, интеграл (2.11), с помощью аналогичного преобразования к виду (2.8) может быть вычислен следующим образом

$$\frac{1}{k} \left[ Z\left(a^k; -\frac{m+1-k}{k}\right) - Z\left(b^k; -\frac{m+1-k}{k}\right) \right], \quad (2.12)$$

где к интегралу  $Z(t, \alpha)$  может быть применено разложение (2.10).

## 2.2. Основное асимптотическое разложение

В более общем случае, для интегралов вида (1) когда  $g$  не имеет стационарных точек, т.е.  $g'(x) \neq 0$  в интервале интегрирования – мы можем получить асимптотическое разложения многократно интегрируя по частям, при этом первый член разложения определяется следующим образом [13], [7]:

$$I(f) = \int_a^b f(x) e^{i w g(x)} dx = \frac{1}{i w} \int_a^b \frac{f(x)}{g'(x)} dx$$

$$= \frac{1}{iw} \left[ \frac{f(b)}{g'(b)} e^{iwg(b)} - \frac{f(a)}{g'(a)} e^{iwg(a)} \right] - \frac{1}{iw} \int_a^b \frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g'(x)} \right] e^{iwg(x)} dx.$$

Следовательно выражение

$$\frac{1}{iw} \left[ \frac{f(b)}{g'(b)} e^{iwg(b)} - \frac{f(a)}{g'(a)} e^{iwg(a)} \right] \quad (2.13)$$

аппроксимирует интеграл  $I(f)$  с погрешностью

$$-\frac{1}{iw} I \left[ \frac{d}{dx} \left[ \frac{f(x)}{g'(x)} \right] \right] = O(w^{-2}).$$

Таким образом, чем больше частота колебаний, тем точнее (2.13) может аппроксимировать интеграл. Более того, остаточный член сам является колебательным интегралом, поэтому мы можем снова интегрироваться по частям, для получения большей точности.

**Теорема 2.1.** *Предположим, что  $g' \neq 0$  на  $[a, b]$ . Тогда*

$$I(f) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(-iw)^k} [\sigma_k(b) e^{iwg(b)} - \sigma_k(a) e^{iwg(a)}],$$

где

$$\sigma_1 = \frac{f}{g'}, \sigma_{k+1} = \frac{\sigma'_k}{g'}, k \geq 1.$$

Мы можем найти погрешность аппроксимируя интеграл  $I(f)$  первыми  $s$  членами разложения:

$$\begin{aligned} I(f) &= - \sum_{k=1}^s \frac{1}{(iw)^k} [\sigma_k(b) e^{iwg(b)} - \sigma_k(a) e^{iwg(a)}] + \frac{1}{(iw)^s} I(\sigma'_s) \\ &= - \sum_{k=1}^s \frac{1}{(-iw)^k} [\sigma_k(b) e^{iwg(b)} - \sigma_k(a) e^{iwg(a)}] + \frac{1}{(iw)^s} I(\sigma_s + g'). \end{aligned}$$

В данном асимптотическом разложении стоит отметить, что по мере увеличения частоты поведение интеграла все больше определяется поведением

подынтегрального выражения в конечных точках интервала. Фактически, поведение внутри интервала не имеет значения, поскольку  $w \rightarrow \infty$ , и все интегралы с одинаковыми граничными данными начинают вести себя одинаково по мере увеличения частоты. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-1}^1 \cos wx dx,$$

подынтегральное выражение которого имеет экстремумы в точках:

$$0, \pm \frac{\pi}{w} \pm \frac{2\pi}{w} \pm \frac{3\pi}{w}, \dots$$

Кроме того, интеграл между соседними экстремума равен нулю, из этого следует, что если  $k$  выбрано как наибольшее положительное целое число, такое что  $\frac{k\pi}{w} \leq 1$ , то

$$\int_{-1}^1 \cos wx dx = \int_{-1}^{-\frac{k\pi}{w}} \cos wx dx + \int_{-\frac{k\pi}{w}}^1 \cos wx dx$$

По мере того как возрастает частота колебаний, интервалы интегрирования уменьшаются, а значение подынтегрального выражения на границе становится более значимым.

С другой стороны, везде где осциллятор  $g$  имеет стационарную точку — точку  $x_0$ , для которой  $g'(x_0) = 0$ , подынтегральное выражение становится неосциллирующим в небольшой окрестности этой точки. Таким образом, асимптотика интегралов (1) зависит также от поведения в стационарных точках, в дополнение к поведению в конечных точках интервала.

### 3. МЕТОД СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ

Исходя из теории предыдущего раздела, можно сказать, что при определенных условиях вклад в интегралы вида (1) может вносить окрестность некоторой точки  $x_0$ , где  $x_0 \in [a, b]$  является стационарной точкой фазовой функции.

**Определение 3.1.** Точка  $x_0 \in [a, b]$  является стационарной точкой фазовой функции  $g(x)$ , если производная функции в данной точке равна нулю, т.е.  $g'(x_0) = 0$ .

**Определение 3.2.** Точка  $x_0 \in [a, b]$  называется невырожденной стационарной точкой фазовой функции, если первая производная функции в данной точке равна нулю, а вторая отлична:  $g'(x_0) = 0$ ,  $g''(x_0) \neq 0$ .

В данной главе рассмотрим интегралы Фурье при  $w \rightarrow \infty$ . Качественным результатом для преобразования Фурье:

$$I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}dx,$$

которое является частным случаем интегралов вида (1), является классическая лемма Римана-Лебега.

**Лемма 3.1.** Если  $f \in L_1(\infty, \infty)$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iwx}dx \rightarrow 0,$$

при  $w \rightarrow +\infty$ .

При данных условиях, более точной информации о скорости убывания интеграла получить нельзя.[1]

Таким образом, перейдем к рассмотрению метода стационарной фазы для решения осциллирующих интегралов без стационарных точек, с одной стационарной точкой и несколькими [5], [3].

### 3.1. Вычисления при отсутствии стационарных точек

**Теорема 3.1.** Пусть

$$I(f) = \int_a^b f(x) e^{i w g(x)} dx, \quad f, f' \in C^\infty[a, b], \quad (3.1)$$

где  $g(x)$  вещественная и  $g'(x) \neq 0$ . В таком случае интеграл может быть найден с помощью:

$$I(f) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{A_k}{w^k} e^{i w g(b)} + \frac{B_k}{w^k} e^{i w g(a)} \right], \quad w \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Здесь, коэффициенты  $A_k$  и  $B_k$  есть линейные комбинации значений функции  $f(x)$  и ее производных порядка  $k - 1$  в соответствующих точках  $a$  и  $b$ .

**Доказательство:** Проинтегрируем исходный интеграл по частям:

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b \frac{f(x)}{i w g'(x)} d e^{i w g(x)} = \frac{f(x)}{i w g'(x)} e^{i w g(x)} \Big|_a^b - \int_a^b \left( \frac{f(x)}{i w g'(x)} \right)' e^{i w g(x)} dx \\ &= \frac{f(b)}{i w g'(b)} e^{i w g(b)} - \frac{f(a)}{i w g'(a)} e^{i w g(a)} + \frac{1}{i w} \int_a^b f_1(x) e^{i w g(x)} dx, \end{aligned}$$

Интегрируя далее по частям последние интегралы в каждом новом равенстве, получим формулу:

$$I(f) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{f_{k-1}(b)}{(i w)^k g'(b)} e^{i w g(b)} - \frac{f_{k-1}(a)}{(i w)^k g'(a)} e^{i w g(a)} \right] + R_n(t),$$

где

$$R_n(t) = \frac{1}{(i w)^n} \int_a^b f_{n+1}(x) e^{i w g(x)} dx,$$

$$f_0(x) = f(x), \quad f_{k+1}(x) = -\frac{d}{dx} \left( \frac{f_k(x)}{g'(x)} \right).$$

Следовательно из неравенства

$$|R_n(x)| \leq \frac{1}{w^n} \int_a^b \left| f_{n+1}(x) e^{i w g(x)} \right| dx \leq \frac{M_n}{w^n}$$

получается формула (3.2)

ч.т.д.

### 3.2. Вклад невырожденной стационарной точки

**Теорема 3.2.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  бесконечно дифференцируемы на интегрируемом отрезке, при этом фазовая функция имеет единственную стационарную точку  $x_0 \in [a, b]$  и  $g''(x) > 0$ . Тогда, при  $w \rightarrow \infty$  исходный интеграл может быть оценен, в виде:

$$I(f) = \int_a^b f(x) e^{i w g(x)} dx = e^{i \frac{\pi}{4}} e^{i w g(x_0)} f(x_0) \sqrt{\frac{2\pi}{w g''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{w}\right) \quad (3.3)$$

**Доказательство:** С учетом того, что  $g'(x_0)$  из формулы Тейлора следует следующее соотношение

$$g(x) - g(x_0) = \frac{1}{2} g''(x_0) (x - x_0)^2 + o((x - x_0)^2) = \frac{1}{2} g''(x_0) (x - x_0)^2 h(x),$$

где функция  $h(x)$  также является бесконечно дифференцируемой на интервале интегрирования, а в стационарной точке принимает значение равное единице,  $h(x_0) = 1$ .

В окрестности точки  $x_0$  рассмотрим определенную, строго монотонно возрастающую функцию  $q(x)$ :

$$q(x) = (x - x_0) \sqrt{h(x)}.$$

Обозначим  $\phi(y) = q^{-1}(y)$ , здесь  $\phi(y)$  — обратная функция, определенная на промежутке  $[-\epsilon, \epsilon]$ , при  $\epsilon > 0$ . Тогда

$$x_1 = \phi(-\epsilon), x_2 = \phi(\epsilon), \sigma = \frac{1}{2} g''(x_0),$$

из этого следует, что

$$g(x) - g(x_0) = \sigma \cdot (q(x))^2$$

при  $x \in [x_1, x_2]$ , тогда исходный интеграл можно представить в виде

$$I(f) = e^{i\omega g(x_0)} \int_{x_1}^{x_2} f(x) e^{i\omega \sigma (q(x))^2} dx + I_1(f) + I_2(f), \quad (3.4)$$

где

$$I_1(f) = \int_a^{x_1} f(x) e^{i\omega g(x)} dx, \quad I_2(f) = \int_{x_2}^b f(x) e^{i\omega g(x)} dx.$$

Так как  $\phi(0) = x_0, \phi'(0) = 1$ , то

$$f(\phi(y)) - f(x_0) = f'(x_0)y + o(y) = y\psi_1(y),$$

здесь, функция  $\psi_1(y)$  определена и непрерывно дифференцируема на отрезке  $[-\epsilon, \epsilon]$ . Получим аналогичное представление

$$\phi'(y) - 1 = y\psi_2(y).$$

Используя эти представления, с помощью замены  $x = \phi(y)$  в первом интеграле (3.4) произведем следующие преобразования

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} f(x) e^{i\omega \sigma (q(x))^2} dx &= \int_{-\epsilon}^{\epsilon} f(\phi(y)) \phi'(y) e^{i\omega \sigma y^2} dy \\ &= f(x_0) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \phi'(y) e^{i\omega \sigma y^2} dy + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} y\psi_1(y) \phi'(y) e^{i\omega \sigma y^2} dy \\ &= f(x_0) \int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{i\omega \sigma y^2} dy + \int_{-\epsilon}^{\epsilon} y \left[ f(x_0)\psi_2(y) + \phi'(y)\psi_1(y) \right] e^{i\omega \sigma y^2} dy. \end{aligned}$$

Так как

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{i\omega \sigma y^2} dy = 2 \int_0^{\epsilon} e^{i\omega \sigma y^2} dy$$

$$= 2 \int_0^{\infty} e^{i w \sigma y^2} dy - 2 \int_{\epsilon}^{\infty} e^{i w \sigma y^2} dy = \frac{2}{\sqrt{w \sigma}} \int_0^{\infty} e^{i t^2} dt - 2 \int_{\epsilon}^{\infty} e^{i w \sigma y^2} dy,$$

то при использовании интеграла Френеля

$$\int_0^{\infty} e^{i t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{i \frac{\pi}{4}},$$

получаем равенство

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{i w \sigma y^2} dy = e^{i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{w \sigma}} - 2 \int_{\epsilon}^{\infty} e^{i w \sigma y^2} dy.$$

Отмечая также, что

$$\begin{aligned} \left| 2 \int_{\epsilon}^{\infty} e^{i w \sigma y^2} dy \right| &= \left| \frac{1}{i w \sigma} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{1}{y} \frac{d}{dy} (e^{i w \sigma y^2}) dy \right| \\ &= \left| \frac{e^{i w \sigma y^2}}{i w \sigma y} \Big|_{y=\epsilon}^{y=\infty} + \frac{1}{i w \sigma} \int_{\epsilon}^{\infty} e^{i w \sigma y^2} \frac{dy}{y^2} \right| \leq \frac{1}{w \sigma \epsilon} + \frac{1}{w \sigma} \int_{\epsilon}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{2}{w \sigma \epsilon}, \end{aligned}$$

получим равенство

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{i w \sigma y^2} dy = e^{i \frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma w}} + O\left(\frac{1}{w}\right).$$

Далее, так как функция

$$\Phi(y) = f(x_0) \psi_2(y) + \phi'(y) \psi_1(y)$$

на отрезке  $[-\epsilon, \epsilon]$  является непрерывно дифференцируемой, то исходя из соотношения

$$\begin{aligned} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} y \Phi(y) e^{i w \sigma y^2} dy &= \frac{1}{i 2 w \sigma} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \Phi(y) \frac{d}{dy} (e^{i w \sigma y^2}) dy \\ &= \frac{1}{i 2 w \sigma} \left[ \Phi(y) e^{i w \sigma y^2} \Big|_{y=-\epsilon}^{y=\epsilon} - \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \Phi'(y) e^{i w \sigma y^2} dy \right] = O\left(\frac{1}{w}\right) \end{aligned}$$

можно сделать следующий вывод

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) e^{i w \sigma (q(x))^2} dx = e^{i \frac{\pi}{4}} f(x_0) \sqrt{\frac{\pi}{w \sigma}} + O\left(\frac{1}{w}\right).$$

Далее, исследуем асимптотику интегралов  $I_1(f)$  и  $I_2(f)$ . Так как на интегрируемом отрезке  $[a, b]$  существует единственная точка  $x_0$  в которой  $g'(x) = 0$ , то

$$\min\{|g'(x)| : x \in [a, x_1] \cup [x_2, b]\} = \mu > 0$$

В таком случае

$$\begin{aligned} I_1(f) &= \int_a^{x_1} f(x) e^{i w g(x)} dx = \frac{1}{i w} \int_a^{x_1} \frac{f(x)}{g'(x)} \frac{d}{dx} (e^{i w g(x)}) dx \\ &= \frac{1}{i w} \left[ \frac{f(x)}{g'(x)} e^{i w g(x)} \Big|_{x=a}^{x=x_1} - \int_a^{x_1} e^{i w g(x)} \frac{d}{dx} \left( \frac{f(x)}{g'(x)} \right) dx \right] = O\left(\frac{1}{w}\right). \end{aligned}$$

С помощью аналогичных подсчетов также можно получить, что  $I_2(f) = O\left(\frac{1}{w}\right)$ .

Таким образом, применив обратную замену  $\sigma = \frac{g''(x_0)}{2}$  из выражения (3.4) следует, что

$$I(f) = e^{i \frac{\pi}{4}} f(x_0) e^{i w g(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{w g''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{w}\right)$$

Ч.Т.Д.

**Замечание 3.1.** При выполнении в стационарной точке  $x_0$  неравенства  $g''(x) < 0$  замена  $g(x)$  на  $-g(x)$  в условиях теоремы приводит к соотношению

$$\overline{I(f)} = e^{i \frac{\pi}{4}} f(x_0) e^{-i w g(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-w g''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{w}\right).$$

Следовательно, при  $w \rightarrow \infty$ , в случае когда  $g''(x_0) < 0$  имеет место асимптотическое равенство вида

$$I(f) = e^{i \frac{\pi}{4}} f(x_0) e^{i w g(x_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{-w g''(x_0)}} + O\left(\frac{1}{w}\right). \quad (3.5)$$

### 3.3. Асимптотика интеграла в общем случае

Рассмотрим общий случай интеграла (3.1)

$$I(f) = \int_a^b \phi(t) e^{i w g(x)} dx.$$

Пусть функция  $g(x)$  бесконечно дифференцируема на интегрируемом отрезке  $[a, b]$  и имеет на нем конечное число стационарных точек  $\overline{c_1, c_m}$ , т.е. таких точек, в которых  $g'(c_k) = 0$ . При этом, на концах отрезка функция  $g'(x) \neq 0$  и  $g''(c_k) \neq 0$ .

Для получения асимптотики с точностью до любой степени  $w$ , применим метод разбиения единицы, который заключается в представлении функции, тождественно равной единице в виде суммы бесконечно дифференцируемых функций специального вида. Для этого положим  $c_0 = a, c_{m+1} = b$ , через  $\sigma_k$  обозначим достаточно малые окрестности стационарных точек, а через  $\beta_k$  — окрестности меньшего радиуса:

$$\sigma_k = \{x : |x - c_k| < 2\delta\}, \beta_k = \{x : |x - c_k| < \delta\},$$

при этом примем что радиус  $\delta$  настолько мал, что окрестности  $\sigma_k$  не пересекаются.

Пусть  $z_k(x) \geq 0$  — бесконечно дифференцируемые функции, такие что  $z_k(x) \equiv 0$  при  $|x - c_k| \geq 2\delta$  и  $z_k(x) \equiv 1$  при  $|x - c_k| \geq \delta$ .

**Замечание 3.2.** Функции  $z_k(x)$  могут быть построены различными способами. Например, пусть  $q(k)$  функция, принадлежащая  $C^\infty(R^1)$ , такая что  $q(k) \geq 0$ ,  $q(k) = 0$  при  $k \leq 0$  и  $q(k) = 1$  при  $k \geq 1$ .

Положим

$$q(k) = \begin{cases} 1 \frac{1}{2} \left( 1 + \operatorname{th} \left( \frac{2k-1}{k(1-k)} \right) \right), & \text{при } 0 < k < 1 \\ 0, & \text{при } k \leq 0 \text{ или } k \geq 1. \end{cases}$$

Далее, пусть  $h(k) = q(k+2)q(2-k)$ . Очевидно, что  $h(k) \equiv 0$  при  $|k| \geq 2$  и  $h(k) \equiv 1$  при  $|k| \leq 1$ .

В таком случае, искомые функции будут вычислены, как

$$z_k(x) = h\left(\frac{x - c_k}{\delta}\right).$$

На отрезке  $[a, c_1]$  положим  $v_0(x) \equiv 1 - z_0(x) - z_1(x)$ , на отрезке  $[c_1, c_2]$  положим  $v_1(x) \equiv 1 - z_1(x) - z_2(x)$  и т.д., на отрезке  $[c_m, b]$  положим  $v_m(x) \equiv 1 - z_m(x) - z_{m+1}(x)$ . Из данного построения следует, что

$$\sum_{k=0}^{m+1} z_k(x) + \sum_{k=0}^m v_k(x) \equiv 1$$

и функции  $v_k(x)$  – бесконечно дифференцируемы и при  $1 \leq k \leq m$  тождественно равны нулю вне отрезка  $[c_k + \delta, c_{k+1} - \delta]$ .

В результате, интеграл (3.1) можно представить в виде суммы нескольких интегралов, асимптотика которых была исследована в предыдущих пунктах:

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_a^b f(x) e^{i w g(x)} dx = \int_a^b f(x) \left( \sum_{k=0}^{m+1} z_k(x) + \sum_{k=0}^m v_k(x) \right) e^{i w g(x)} dx \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \int_a^b f(x) z_k(x) e^{i w g(x)} dx + \sum_{k=0}^m \int_a^b f(x) v_k(x) e^{i w g(x)} dx. \end{aligned}$$

Так как радиус  $\delta$  окрестностей стационарных точек настолько мал, что  $g''(x)$  не меняет знак там, где  $z_k(x) \neq 0$ , то для каждого интеграла

$$\int_a^b f(x) z_k(x) e^{i w g(x)} dx$$

при  $1 \leq k \leq m - 1$  в зависимости от знака  $g''(c_k)$  справедлива асимптотика (3.3) или (3.5).

Для интегралов

$$\int_a^b f(x) v_k(x) e^{i w g(x)} dx$$

можно применять формулу (3.2), поскольку они стремятся к нулю быстрее любой степени  $\frac{1}{w}$ , так как на множестве, где гладкая функция  $f(x)v_k(x)$  не равна нулю, производная  $g'(x) \neq 0$ . При этом все  $A_k$  и  $B_k$  равны нулю.

К интегралам

$$\int_a^b f(x)z_0(x)e^{i wg(x)} dx$$

и

$$\int_a^b f(x)z_{m+1}(x)e^{i wg(x)} dx$$

также можно применить формулу (3.2), так как у функций  $f(x)z_0(x)$   $f(x)z_{m+1}(x)$  производная  $g'(x) \neq 0$ . При этом, поскольку на одном из концов отрезка амплитуда и все ее производные равны нулю, то в формуле асимптотики первого интеграла будут присутствовать лишь значения амплитуды и ее производных в точке  $x = a$ , а для второго интеграла в точке  $x = b$ .

В результате, построенная асимптотика интеграла определяется с точностью до любой степени  $\frac{1}{w}$ . При этом, если ограничиться асимптотикой с точностью до  $O\left(w^{-\frac{3}{2}}\right)$ , то получим следующую формулу:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)e^{i wg(x)} dx &= \sum_{k=1}^m \sqrt{\frac{2\pi}{w}} e^{i \frac{\pi}{4} \text{sign}(g''(c_k))} \frac{f(c_k)}{\sqrt{|g''(c_k)|}} e^{i wg(c_k)} \\ &+ \frac{f(b)}{i w g'(b)} e^{i wg(b)} - \frac{f(a)}{i w g'(a)} e^{i wg(a)} + O\left(w^{-\frac{3}{2}}\right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

### 3.4. Асимптотика функций Эйри и Бесселя

С помощью теоремы (3.2) можно получить асимптотику функции Эйри  $A_i(s)$  при  $s \rightarrow -\infty$

$$A_i(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{t^3}{3+st}} dt.$$

Для этого в интеграле выполним замену переменных

$$t = u^{\frac{1}{2}}x, u = -s$$

и получим

$$A_i(s) = A_i(-u) = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{-\infty}^{inf ty} e^{iu^{\frac{3}{2}}(\frac{x^3}{3}-x)} dx.$$

Далее обозначим

$$g(x) = \frac{x^3}{3} - x \text{ и } w = u^{\frac{3}{2}}.$$

Тогда получим

$$A_i(-u) = \frac{u^{\frac{1}{2}}}{2\pi} I(f),$$

где  $I(f)$  имеет вид (1). В этом случае фазовая функция  $g(x) = \frac{x^3}{3} - x$  имеет две невырожденные стационарные точки  $x = \pm 1$ , так как

$$g(1) = -\frac{2}{3}, g''(1) = 2, g(-1) = \frac{2}{3}, g''(-1) = -2.$$

Для получения асимптотики интеграла  $I(f)$  при  $w \rightarrow \infty$  необходимо разбить промежуток интегрирования  $(-\infty, \infty)$  на интервалы  $(-\infty, -2), (-2, 0), (0, 2), (2, \infty)$ . В таком случае, для представления  $I(f)$  получим следующее выражение:

$$I(f) = \int_{-\infty}^{-2} e^{iwg(x)} + \int_{-2}^0 e^{iwg(x)} + \int_0^2 e^{iwg(x)} + \int_2^{\infty} e^{iwg(x)} = I_1(f) + I_2(f) + I_3(f) + I_4(f).$$

Асимптотические свойства интегралов  $I_1(f)$  и  $I_4(f)$  можно получить с помощью интегрирования по частям: так как  $g'(x) = x^2 - 1$ , то

$$I_1(f) = \int_{-\infty}^{-2} e^{iwg(x)} dx = \frac{1}{iw} \left[ \frac{e^{iwg(x)}}{x^2 - 1} \Big|_{-\infty}^{-2} + 2 \int_{-\infty}^{-2} \frac{xe^{iwg(x)}}{(x^2 - 1)^2} dx \right],$$

следовательно  $I_1(f) = O\left(\frac{1}{w}\right)$  при  $w \rightarrow \infty$ . С помощью аналогичных вычислений можно получить, что и  $I_4(f) = O\left(\frac{1}{w}\right)$  при  $w \rightarrow \infty$ .

Далее, опираясь на теорему (3.2) можно получить, что

$$I_3(f) = e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i2\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\pi}{w}} + O\left(\frac{1}{w}\right).$$

Аналогично, опираясь на замечание (3.1) для  $I_2(f)$  получаем

$$I_2(f) = e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i2\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{\pi}{w}} + O\left(\frac{1}{w}\right).$$

Суммируя результаты получаем следующее равенство

$$I_2(f) + I_3(f) = 2\sqrt{\frac{\pi}{w}} \cos\left(\frac{2w}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{w}\right).$$

В результате,

$$A_i(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|s|^{\frac{1}{4}}} \cos\left(\frac{2}{3}|s|^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(\frac{1}{|s|^{\frac{3}{2}}}\right) \quad (3.7)$$

при  $s \rightarrow -\infty$ .

Далее, рассмотрим применение метода стационарной фазы к функции Бесселя первого рода порядка  $n$ :

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin t - int} dt, n \in N.$$

Для этого построим асимптотику интеграла

$$u(x) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \sin t - int} dt,$$

при  $x \rightarrow \infty$ .

Здесь  $f(x) = e^{-int}$ ,  $g(x) = \sin t$ , а на отрезке интегрирования  $[-\pi, \pi]$  имеются две стационарные точки  $x_0 = \pm\frac{\pi}{2}$ , причем  $g''(-\frac{\pi}{2}) = 1 > 0$ , а  $g''(\frac{\pi}{2}) = -1 < 0$ . Тогда, опираясь на формулу (3.6), получим

$$\begin{aligned} u(x) &= \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{i\frac{\pi}{4}} f(c_1) e^{ixg(c_1)} + \sqrt{\frac{2\pi}{x}} e^{-i\frac{\pi}{4}} f(c_2) e^{ixg(c_2)} + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \left( e^{i\frac{\pi}{4} + in\frac{\pi}{2} - ix} + e^{-i\frac{\pi}{4} - in\frac{\pi}{2} + ix} \right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right) \end{aligned}$$

$$= 2\sqrt{\frac{2\pi}{x}} \cos\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right).$$

Так как подынтегральная функция периодична с периодом  $2\pi$ , то члены соответствующие вкладу концов отрезка после интегрирования по частям взаимно сокращаются. Таким образом асимптотика функции Бесселя первого порядка определяется в виде

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2\pi}{x}} \cos\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O\left(x^{-\frac{3}{2}}\right), \quad (3.8)$$

при  $x \rightarrow \infty$ .

## 4. МЕТОД ЛАПЛАСА

### 4.1. Предварительные исследования

В данной главе будут исследованы интегралы Лапласа, а именно интегралы вида

$$I(f) = \int_a^b f(x)e^{wg(x)}dx, f, g \in C^\infty[a, b], w \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

где  $g(x)$  – является вещественной функцией, а функция  $f(x)$  может принимать и комплексные значения.

В данном интеграле для функции  $e^{wg(x)}$  бесконечность является существенно особой точкой, и ни сама функция, ни интеграл не разлагаются в ряд по степеням  $w^{-1}$  при  $w \rightarrow \infty$ . Следовательно задача состоит в исследовании поведения интеграла (4.1) при больших значениях  $w$ .

Грубая оценка интеграла имеет следующий вид:

$$|I(f)| \leq (b-a) \max_{[a,b]} |f(x)| e^{w \max_{[a,b]} g(x)} = M e^{w \max_{[a,b]} g(x)},$$

и оказывается достаточно точной при  $w \rightarrow \infty$ . В самом деле, пусть функция  $g(x)$  достигает свой максимум в некоторой точке  $c$ . В таком случае, основной вклад в интеграл дают лишь значения подынтегральной функции в окрестности данной точки  $c$ . Действительно, если максимум изолированный, то вне этой окрестности, т.е. при  $|x - c| > \delta$  будет справедливо следующее неравенство:  $g(x) < g(c) - \delta, \delta > 0$ . Таким образом значение подынтегральной функции при  $|x - c| > \delta$  к значению функции в точке максимума будет экспоненциально мало при  $w \rightarrow \infty$ :

$$\left| \frac{f(x)}{f(c)} \right| e^{wg(x)-wg(c)} \leq M e^{-w\delta}$$

В таком случае мы можем оценить значение интеграла  $I(f)$ , он приближенно равен интегралу по малой окрестности точки максимума, в которой функция  $f(x) \approx f(c)$ , а функция  $g(x) \approx g(c)$ . При этом, диаметр данной окрестности

приближенно равен некоторому  $\beta$ , который зависит от  $w$ . В результате получаем соотношение

$$I(f) \approx \beta(w)f(c)e^{wg(c)}.$$

Далее необходимо найти диаметр окрестности точки максимума, т.е.  $\beta(w)$ . Данная величина существенно зависит от поведения функции  $g(x)$  в окрестности точки  $c$ , если максимум лежит на границе и  $g'(c) \neq 0$ , то отношение

$$\frac{e^{wg(x)}}{e^{wg(c)}} = e^{w(g(x)-g(c))}$$

ограничено положительными константами сверху и снизу, что означает равенство  $w(g(x) - g(c)) \approx wg'(c)(x - c) = O(1)$  или  $(x - c) = O(\frac{1}{wg'(c)})$  и  $\beta(w) \approx |g'(c)w|^{-1}$ . Итак,

$$I(f) \approx \frac{B_1}{|g'(c)w|} f(c)e^{wg(c)}. \quad (4.2)$$

Если точка максимума является внутренней точкой,  $g'(c) = 0$  и  $g''(c) \neq 0$ , то в такой окрестности

$$|wg(x) - wg(c)| \approx w \frac{|g''(c)|}{2} |x - c|^2.$$

По аналогии с прошлым случаем, получаем  $[\beta(w)]^2 \approx 2|g''(c)w|^{-1}$  и

$$I(f) \approx \frac{B_2}{\sqrt{|g''(c)w|}} f(c)e^{wg(c)}. \quad (4.3)$$

## 4.2. Обоснование асимптотики интеграла

В данном разделе получим численные значения констант  $B_1$  и  $B_2$  и получим обоснованное представление соответствующих формул (4.2) и (4.3), а также построим асимптотические приближения интеграла  $I(f)$  с точностью до любой степени  $w^{-1}$ .

#### 4.2.1. Достижение максимума на границе

Исследуем случай, когда функция  $g(x)$  достигает своего максимума в точке  $a$ , при этом вычисления для точки  $b$  будут совершенно аналогичными. Предположим выполнение следующих условий:

1.  $g^a < 0$ ;
2. точка  $a$  является единственной точкой максимума функции  $g(x)$ .

Опираясь на рассуждения предыдущего параграфа интеграл  $I(f)$  разобьем на два интеграла:  $I(f) = I_1(f) + I_2(f)$ , где

$$I_1(f) = \int_a^{a+\delta} f(x)e^{wg(x)}dx, \quad I_2(f) = \int_{a+\delta}^b f(x)e^{wg(x)}dx.$$

Исходя из первого условия,  $\delta$  необходимо выбрать настолько малым, чтобы  $g(x) < 0$  при  $x \in [a, a + \delta]$ , а исходя из второго условия, можно сделать вывод, что при достаточно малом  $\delta$  для некоторого  $\gamma > 0$  на отрезке  $[a + \delta, b]$  будет выполнено неравенство  $g(x) < g(a) - \gamma$ .

Таким образом,

$$|I_2(f)| \leq M e^{wg(a)} e^{-\gamma w}.$$

Для получения асимптотики первого интеграла при фиксированном  $w$ , данный интеграл можно просто проинтегрировать по частям:

$$\begin{aligned} I_1(f) &= \frac{1}{w} \int_a^{a+\delta} \frac{f(x)}{g'(x)} de^{wg(x)} = \frac{1}{w} \frac{f(x)}{g'(x)} e^{wg(x)} \Big|_a^{a+\delta} - \frac{1}{w} \int_a^{a+\delta} \frac{d}{dt} \left( \frac{f(x)}{g'(x)} \right) e^{wg(x)} dt \\ &= -\frac{1}{w} \frac{f(a)}{g'(a)} e^{wg(a)} + \frac{1}{w^2} \int_a^{a+\delta} \frac{f_1(x)}{g'(x)} d(e^{wg(x)}) + O(e^{wg(a)}) e^{-\gamma w}, \end{aligned}$$

где

$$f_1(x) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{f(x)}{g'(x)} \right).$$

Интегрируя еще несколько раз, получаем равенство

$$I_1(f) = -e^{wg(a)} \sum_{k=1}^n \frac{1}{w^k} \frac{f_{k-1}(a)}{g'(a)} + \frac{1}{w^n} \int_a^{a+\delta} f_n(x) e^{wg(x)} dx + O(e^{wg(a)}) e^{-\gamma w},$$

где

$$f_0(x) = f(x), f_{k+1}(x) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{f_k(x)}{g'(x)} \right) \in C^\infty[a, a + \delta].$$

Далее, поскольку

$$\left| \int_a^{a+\delta} f_n(x) e^{wg(x)} dx \right| \leq M_n e^{wg(a)},$$

то из оценок для интегралов  $I_1(f)$  и  $I_2(f)$  получается асимптотическое разложение исходного интеграла:

$$I(f) \approx -e^{wg(a)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{w^k} \frac{f_{k-1}(a)}{g'(a)}, \quad w \rightarrow \infty, \quad (4.4)$$

где

$$f_0(x) = f(x), f_{k+1}(x) = -\frac{d}{dt} \left( \frac{f_k(x)}{g'(x)} \right) \in C^\infty[a, a + \delta].$$

Главный член данного разложения имеет вид:

$$I(f) = e^{wg(a)} \left[ \frac{1}{w} \frac{f(a)}{|g'(a)|} + O(w^{-2}) \right].$$

Следовательно, в случае достижения функции  $g(x)$  максимума на границе, в точке  $a$  было проведено обоснование формулы (4.2), в результате которого оказалось, что постоянная  $B_1 = 1$ .

#### 4.2.2. Достижение максимума во внутренней точке

Далее, по аналогии с предыдущим пунктом, исследуем случай, когда функция  $g(x)$  имеет единственный максимум во внутренней точке  $c \in (a, b)$ . В таком случае, ясно что  $g'(c) = 0, g''(c) \leq 0$ .

Как и в предыдущем случае, предположим выполнение следующих двух условий:

1.  $g''(c) < 0$ ;

2. точка  $c$  является единственной точкой максимума функции  $g(x)$ .

Представим интеграл  $I(f)$  в виде суммы трех интегралов  $I(f) = I_1(f) + I_2(f) + I_3(f)$ , где

$$I_1(f) = \int_a^{c-\delta} f(x)e^{wg(x)}dx, \quad I_2(f) = \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)e^{wg(x)}dx,$$

$$I_3(f) = \int_{c+\delta}^b f(x)e^{wg(x)}dx$$

где  $\delta$  – бесконечно малое положительно число, такое что  $g''(x) < 0$  и  $g(x) < g(c) - \gamma$  при  $x \notin [c - \delta, c + \delta]$ ,  $\gamma > 0$ .

Далее, дадим асимптотическую оценку интегралов  $I_1(f)$  и  $I_3(f)$ , которые в случае, когда функция  $f(x)$  или хотя бы одна из ее производных не равны нулю в точке  $c$ , экспоненциально малы по отношению к интегралу  $I_2(f)$ :

$$\begin{aligned} & |I_1(f)| + |I_3(f)| \\ &= e^{wg(c)} \left( \left| \int_a^{c-\delta} f(x)e^{w(g(x)-g(c))}dx \right| + \left| \int_{c+\delta}^b f(x)e^{w(g(x)-g(c))}dx \right| \right) \leq M e^{wg(c)} e^{-w\gamma}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Для отыскания асимптотики второго интеграла, обозначим  $I_2(f) = e^{wg(c)}G(w)$  и проведем изучение асимптотики для интеграла

$$G(w) = \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)e^{w(g(x)-g(c))}dx,$$

который после замены переменных  $x = t + c$  принимает вид

$$G(w) = \int_{-\delta}^{\delta} f(t+c)e^{w(g(t+c)-g(c))}dt.$$

Далее введем бесконечно дифференцируемую на отрезке  $[-\delta, \delta]$  функцию

$$z(t) = t \sqrt{2 \frac{g(c) - g(t+c)}{t^2}}.$$

Пусть  $t(z)$  – функция, обратная к функции  $z(t)$ . В таком случае интеграл  $G(w)$  приобретает вид

$$G(w) = \int_{-\delta_1}^{\delta_2} f(t(z) + c) e^{-w \frac{z^2}{2}} \frac{dt}{dz} dz,$$

где  $\delta_1$  и  $\delta_2$  – некоторые положительные числа. В таком случае, если учесть оценки (4.5) окончательная формула приобретает вид

$$\int_a^b f(x) e^{-wg(x)} dx \approx e^{wg(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{w}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{w^k} \frac{\psi^{(2k)}(0)}{2^k k!}, \quad w \rightarrow \infty, \quad (4.6)$$

где

$$\psi(z) = f(t(z) + c) \frac{dt}{dz}(z)$$

Найдем также главный член асимптотики интеграла. Поскольку

$$\psi(0) = f(0) \frac{dt}{dz}(0), \text{ а } \frac{dt}{dz}(0) = \left( \frac{dz}{dt}(0) \right)^{-1} = |g''(c)|^{-\frac{1}{2}},$$

то

$$\int_a^b f(x) e^{-wg(x)} dx \approx f(c) e^{wg(c)} \sqrt{\frac{2\pi}{w|g''(c)|}} \left[ 1 + O(w^{-1}) \right]. \quad (4.7)$$

В результате, для случая, когда функции  $g(x)$  достигает своего максимума во внутренней точке также была обосновано доказана оценка (4.3), причем  $B_2 = \sqrt{2\pi}$ .

**Замечание 4.1.** Асимптотику интеграла  $G(w)$  можно получить еще одним способом. Для этого необходимо представить показатель в виде суммы главного члена  $w \frac{g''(c)}{2} t^2$  и остаточных членов ряда Тейлора функции  $w(g(t+c) - g(c))$ :

$$w(g(x+c) - g(c)) = w \frac{g''(c)}{2} t^2 + wr(t),$$

$$r(t) = \sum_{k=3}^n a_k t^k + O(t^{n+1}).$$

Здесь, множитель  $e^{w \frac{g''(c)}{2} t^2}$  является ведущим и при  $t \gg w^{-\frac{1}{2}}$  обеспечивает малость подынтегральной функции, а функцию  $e^{wr(t)}$  при этом следует разложить в ряд [3].

Следовательно, пусть

$$\frac{g''(c)}{2} = -\mu^2,$$

в таком случае

$$\begin{aligned} G(w) &= \int_{-\delta}^{\delta} f(t+c) e^{w(g(t+c)-g(c))} dt = \int_{-\delta}^{\delta} f(t+c) e^{-w\mu^2 t^2} e^{wr(t)} dt \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} \left[ \sum_{i=0}^{3n+2} f_i t^i + O(t^{3n+3}) \right] e^{-w\mu^2 t^2} \left[ 1 + \sum_{j=1}^n \frac{w(r(t))^j}{j!} + O((wt^3)^{n+1}) \right] dt \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} \left[ \sum_{0 \leq 3j \leq i \leq 3n} \widetilde{f}_{i,j} t^i w^j + O(w^{n+1} t^{3n+3}) \right] e^{-w\mu^2 t^2} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{0 \leq 3j \leq i \leq 3n} \widetilde{f}_{i,j} t^i w^j + O(w^{n+1} t^{3n+3}) \right] e^{-w\mu^2 t^2} dt + O(e^{-w\delta^2 \mu^2}). \end{aligned}$$

Здесь  $f_i$  – коэффициенты разложения функции  $f(t+c)$  в ряд Тейлора в точке  $t=0$ , а  $\widetilde{f}_{i,j}$  получаются из  $f_i$  и  $a_k$  путем возведения в степень

$$\left( \sum_{k=3}^n a_k t^k + O(t^{n+1}) \right)^j,$$

перемножения соответствующих сумм и приведения подобных членов, т.е.

$$\widetilde{f}_{0,0} = f_0, \widetilde{f}_{3,1} = f_3 + f_0 a_3$$

и т.д..

Далее, делая замену  $t = \frac{\tau}{\mu\sqrt{w}}$  получим следующее асимптотическое разложение

$$\begin{aligned}
G(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{0 \leq 3j \leq i \leq 3n} \widetilde{f}_{i,j} t^i w^j + O(w^{n+1} t^{3n+3}) \right] e^{-w\mu^2 t^2} dt + O\left(e^{-w\delta^2 \mu^2 t^2}\right) \\
&= w^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \sum_{0 \leq 3j \leq i \leq 3n} \widetilde{f}_{i,j} \frac{\tau^2 w^j}{\mu^i w^{\frac{i}{2}}} + O\left(w^{n+1} \frac{\tau^{3n+3}}{\mu^{3n+3} w^{\frac{3n+3}{2}}}\right) \right] e^{-\tau^2} d\tau + O\left(e^{-w\delta^2 \frac{\mu^2}{2}}\right) \\
&= w^{-\frac{1}{2}} \sum_{0 \leq 3j \leq i \leq 3n} w^{j-\frac{i}{2}} \widetilde{f}_{i,j} \frac{1}{\mu^i w^{\frac{i}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \tau^i e^{-\tau^2} d\tau + O\left(w^{-\frac{n-2}{2}}\right).
\end{aligned}$$

В конечном итоге, учитывая, что  $\int_{-\infty}^{\infty} \tau^i e^{-\tau^2} d\tau = 0$  получим формулу

$$G(w) \approx w^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^{-k}, \quad w \rightarrow \infty,$$

которая после умножения на  $e^{wg(c)}$  дает асимптотическое разложение для интеграла

$$\int_a^b f(x) e^{-wg(x)},$$

при чем полученное выражение, в силу единственности асимптотического разложения совпадает с формулой (4.6).

### 4.3. Асимптотика гамма-функции Эйлера

Проведем исследование асимптотики интеграла на примере гамма-функции Эйлера

$$\Gamma(w) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{w-1} dt. \quad (4.8)$$

Данный интеграл является несобственным и сходится на бесконечности при любом комплексном значении  $w$ , при этом для выполнения условия сходимости в нуле, необходимо чтобы  $\Re(w) > 0$ . В данном разделе рассмотрим

асимптотику  $\Gamma(w)$  при действительном  $w \rightarrow \infty$

$$\Gamma(w+1) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^w dt.$$

Для того, чтобы применить метод Лапласа, представим интеграл в виде

$$\Gamma(w+1) = \int_0^{\infty} e^{-t+w \ln t} dt,$$

где величина  $-t + w \ln t$  имеет максимум при  $t = w$ . Сделаем замену переменных  $t = w(1+s)$  и получим

$$\begin{aligned} \Gamma(w+1) &= w \int_{-1}^{\infty} e^{-w(1+s)+w \ln w + w \ln(1+s)} ds \\ &= w e^{w \ln w} \int_{-1}^{\infty} e^{-w(1+s)+w \ln(1+s)} ds = w^{w+1} e^{-w} \int_{-1}^{\infty} e^{wg(s)} ds, \end{aligned}$$

где  $g(s) = -s + \ln(1+s)$ . Таким образом,

$$\Gamma(w+1) = w^{w+1} e^{-w} F(w),$$

где к интегралу  $F(w) = \int_{-1}^{\infty} e^{wg(s)} ds$  применим метод Лапласа, так как функция  $g(s)$  имеет единственный максимум в нуле.

Интеграл  $F(w)$  по прежнему остался несобственным, как при  $s = -1$ , так и на бесконечности, но теперь это не является проблемой, так как интегралы по областям вне окрестности нуля экспоненциально малы и сходятся. Для доказательства данного утверждения, учтем для начала, что функция  $g(s)$  является монотонно возрастающей при  $s < 0$  и монотонно убывающей при  $s > 0$ .

Так как

$$g'(s) = -1 + \frac{1}{1+s}, g''(s) = -\frac{1}{(1+s)^2} < 0,$$

то

$$\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^{wg(s)} ds < \frac{1}{2} e^{wg(-\frac{1}{2})} = M e^{-\gamma w}, \quad \gamma > 0$$

Действительно, при  $s \geq 1$  функция  $g(s)$  не превосходит функции  $g(1) + (s - 1)g'(1)$ , поэтому

$$\int_1^\infty e^{wg(s)} ds < \int_1^\infty e^{w(h(1)+(s-1)g'(1))} ds = e^{wg(1)} \frac{1}{w|g'(1)|} = M_1 e^{-\gamma_1 w}, \quad \gamma_1 > 0.$$

Для интеграла  $\int_{-\frac{1}{2}}^1$  асимптотика уже была получена в предыдущем параграфе. Здесь  $f(x) \equiv 1, c = 0, g(0) = 0$ , и поскольку

$$\left| \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} e^{wg(s)} ds \right| + \left| \int_1^\infty e^{wg(s)} ds \right| = O(w^{-N}) \quad \forall N,$$

то по опираясь на формулу (4.6) получаем следующее равенство

$$F(w) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{w}} \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{w^k} \frac{\psi^{(2k)}(0)}{2^k k!}, \quad w \rightarrow \infty,$$

где

$$\psi(z) = \frac{ds}{dz}(z),$$

а функция  $s(z)$  является обратной функции

$$z(s) = s \sqrt{-2 \frac{g(s)}{s^2}}.$$

В результате получаем следующее разложение

$$\begin{aligned} \Gamma(w+1) &= w^{w+1} e^{-w} F(w) = w^{w+1} e^{-w} \sqrt{\frac{2\pi}{w}} \left( 1 + \frac{1}{12w} + O(w^{-2}) \right) \\ &= \left( \frac{w}{e} \right)^w \sqrt{2\pi n} \left( 1 + \frac{1}{12w} + O(w^{-2}) \right), \quad w \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Поскольку для натуральных  $n$  справедливо равенство

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

то, в частности получаем, что

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + O(n^{-2})\right), \quad n \rightarrow \infty.$$

Таким образом, было получено уточнение формулы Стирлинга, при больших  $n$ :

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

## 5. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной главе применим вышеизложенные классические квадратурные методы и проверим их непригодность для вычисления осциллирующих интегралов. Реализуем также квадратурный метод Филона и сравним его результаты на модельных задачах с асимптотическими разложениями, а также результатами, полученными с помощью метода стационарной фазы.

### 5.1. Сравнение квадратурных методов

**Модельная задача 1.** *Рассмотрим интеграл*

$$\int_2^5 x^4 e^{iwx} dx$$

*с точным значением:*

$$-\frac{(ix^2w^2 - 2wx - 2i)e^{iwx}}{w^3}$$

Для данного интеграла применим квадратурные методы Симпсона и Филона и сравним их эффективность (таблица 1).

Таблица 1 – Сравнение квадратурных методов

| Частота колебаний, $w$ | Метод Симпсона( $n = 500$ ) |                  | Метод Филона( $n = 5$ )  |                  |
|------------------------|-----------------------------|------------------|--------------------------|------------------|
|                        | Погрешность                 | Время выполнения | Погрешность              | Время выполнения |
| 1                      | $3,32127 \cdot 10^{-10}$    | 1,49 с           | $4,47213 \cdot 10^{-48}$ | 720 мс           |
| 10                     | $1,73585 \cdot 10^{-7}$     | 1,41 с           | $3,21012 \cdot 10^{-50}$ | 525 мс           |
| 100                    | $0,19052 \cdot 10^{-3}$     | 1,32 с           | $2,19317 \cdot 10^{-50}$ | 510 мс           |
| 1000                   | 0,64179                     | 1,52 с           | 0                        | 483 мс           |
| 10000                  | 0,92176                     | 1,56 с           | 0                        | 440 мс           |

**Пояснение 1.** Далее, для всех методов, погрешность будет определяться как модуль разницы между точным и приближенным решением, при условии, что для комплексных чисел  $z = x + iy$ , модуль выражается в виде:  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Модельная задача 2.** Рассмотрим интеграл

$$\int_2^5 \sin x e^{iwx} dx,$$

с точным значением:

$$\frac{iwe^{iwx} \sin x}{-w^2 + 1} - \frac{e^{iwx} \cos x}{-w^2 + 1}$$

Для данного интеграла также применим квадратурные методы и сравним их результаты (таблица 2).

Таблица 2 – Сравнение квадратурных методов

| Частота колебаний, $w$ | Метод Симпсона при $n = 1000$ |                  | Метод Филона при $n = 9$ |                  |
|------------------------|-------------------------------|------------------|--------------------------|------------------|
|                        | Погрешность                   | Время выполнения | Погрешность              | Время выполнения |
| 1                      | $5,08034 \cdot 10^{-13}$      | 3,71 с           | $6,53520 \cdot 10^{-7}$  | 1,80 с           |
| 10                     | $6,48747 \cdot 10^{-10}$      | 3,31 с           | $4,33003 \cdot 10^{-7}$  | 1,43 с           |
| 100                    | $5,93174 \cdot 10^{-7}$       | 3,71 с           | $4,65928 \cdot 10^{-9}$  | 1,20 с           |
| 1000                   | $0,13266 \cdot 10^{-2}$       | 3,14 с           | $7,63673 \cdot 10^{-11}$ | 1,33 с           |
| 10000                  | $0,19158 \cdot 10^{-2}$       | 3,41 с           | $6,85233 \cdot 10^{-13}$ | 1,50 с           |

## 5.2. Сравнение асимптотических и квадратурных методов

**Пояснение 2.** В пункте 2.1 данной работы были исследованы разложения для подынтегральных функций имеющих вид:  $x^m \sin x^k$  и  $x^m \cos x^k$ . К

подобным интегралам, могут быть также применены методы, описанные для интегралов Фурье, поскольку:  $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ , то

$$\int_a^b f(x) \cos g(x) dx = \Re \int_a^b f(x) e^{ig(x)},$$

$$\int_a^b f(x) \sin g(x) dx = \Im \int_a^b f(x) e^{ig(x)},$$

**Модельная задача 3.** Рассмотрим интеграл

$$\int_2^5 \sin x^{10} dx.$$

Исследуя результаты полученные с помощью разложения (2.13) и методом стационарной фазы, получим их равенство, таким образом решение, вычисленное с помощью (2.13) примем за точное и сравним с ним остальные методы (таблица 3).

Таблица 3 – Сравнение методов аппроксимации интеграла с решением (2.13)

| Метод                           | Отклонение от (2.13)         | Время выполнения |
|---------------------------------|------------------------------|------------------|
| Метод стационарной фазы         | 0                            | 92,00 мс         |
| Разложение (2.4)                | $2,7528399863 \cdot 10^{-8}$ | 1,07 с           |
| Метод Симпсона ( $n = 500000$ ) | $0,7437527743 \cdot 10^{-4}$ | 5,95 м           |

**Модельная задача 4.** Рассмотрим интеграл

$$\int_2^5 \cos x^{10} dx.$$

Здесь, как в предыдущем случае получаем, что разложение для интегралов Фурье (2.13) и метод стационарной фазы в случае отсутствия стационарных точек дают одинаковый результат, таким образом можем принять значение, вычисленное по данным методам, за точное и сравнить с ним результаты вычислений других методов (таблица 4).

Таблица 4 – Сравнение методов аппроксимации интеграла с решением (2.13)

| Метод                           | Отклонение от (2.13)         | Время выполнения |
|---------------------------------|------------------------------|------------------|
| Метод стационарной фазы         | 0                            | 82.00 мс         |
| Разложение (2.10)               | $1,6943910089 \cdot 10^{-7}$ | 1,24 с           |
| Метод Симпсона ( $n = 500000$ ) | $0,5761223060 \cdot 10^{-3}$ | 4,81 м           |

**Модельная задача 5.** *Рассмотрим интеграл*

$$\int_2^5 x^2 \sin wx^3 dx,$$

*с точным значением:*

$$-\frac{1}{3} \cos x^3.$$

Исследуем эффективность квадратурных и асимптотических методов для данного интеграла (таблица 5).

**Модельная задача 6.** *Рассмотрим интеграл*

$$\int_2^5 x^9 \cos wx^{10} dx,$$

*с точным значением:*

$$\frac{1}{10} \sin x^{10}.$$

Для данного интеграла также оценим эффективность квадратурных и асимптотических методов (таблица 6).

Таблица 5 – Сравнение методов аппроксимация интеграла

| Частота<br>колебаний,<br>w | Разложение<br>(2.4) |       | Разложение<br>(2.13) |       | Метод<br>стац. фазы |       | Метод Симпсона<br>$n = 5000$ |         |
|----------------------------|---------------------|-------|----------------------|-------|---------------------|-------|------------------------------|---------|
|                            | error               | Время | error                | Время | error               | Время | error                        | Время   |
| 1                          | 0                   | 50 мс | 0                    | 67 мс | 0                   | 55 мс | $1,93 \cdot 10^{-8}$         | 10,85 с |
| 100                        | -                   | -     | 0                    | 43 мс | 0                   | 52 мс | 0,89237                      | 13,64 с |
| 10000                      | -                   | -     | 0                    | 41 мс | 0                   | 49 мс | 2,93619                      | 14,21 с |

Таблица 6 – Сравнение методов аппроксимация интеграла

| Частота<br>колебаний,<br>w | Разложение<br>(2.4) |       | Разложение<br>(2.13) |       | Метод<br>стац. фазы |       | Метод Симпсона<br>$n = 5000$ |         |
|----------------------------|---------------------|-------|----------------------|-------|---------------------|-------|------------------------------|---------|
|                            | error               | Время | error                | Время | error               | Время | error                        | Время   |
| 1                          | 0                   | 43 мс | 0                    | 58 мс | 0                   | 49 мс | $7,92 \cdot 10^{-7}$         | 12,24 с |
| 100                        | -                   | -     | 0                    | 51 мс | 0                   | 46 мс | $2,24 \cdot 10^{-1}$         | 13,39 с |
| 10000                      | -                   | -     | 0                    | 44 мс | 0                   | 47 мс | 1,93761                      | 16,15 с |

### 5.3. Сравнение асимптотики при наличии стационарных точек

**Модельная задача 7.** Рассмотрим интеграл

$$\int_1^3 2x - 4e^{iw(x^2-4x)} dx,$$

с точным значением:

$$\frac{-ie^{iewx(x-4)}}{w}.$$

Здесь  $g'(x) = 2x$  имеет невырожденную стационарную точку  $x_0 = 2$ .

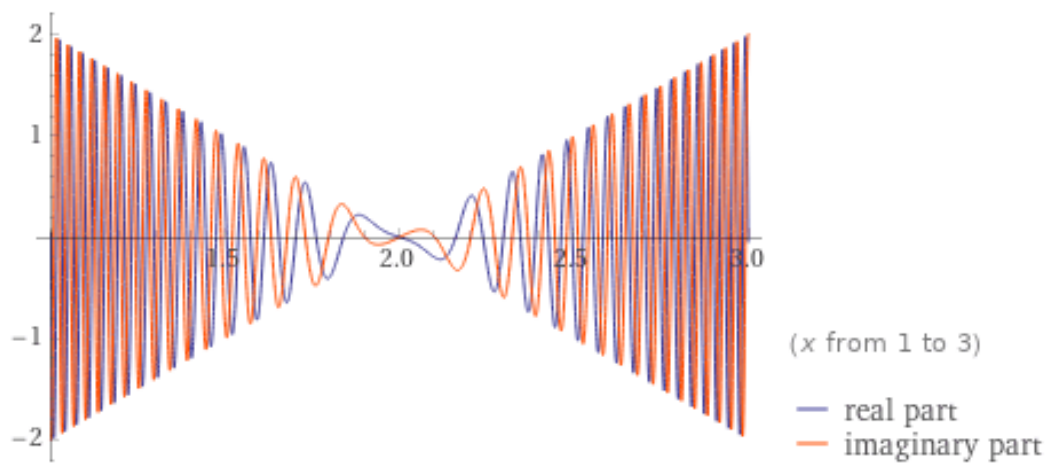


Рисунок 1 – График функции, при  $w = 100$

Таблица 7 – Сравнение методов аппроксимация интеграла с 1 стационарной точкой

| Частота колебаний,<br>w | Метод стационарной фазы  |       | Метод Симпсона $n = 7000$ |         |
|-------------------------|--------------------------|-------|---------------------------|---------|
|                         | Погрешность              | Время | Погрешность               | Время   |
| 1                       | $4,79487 \cdot 10^{-50}$ | 28 мс | $2,52263 \cdot 10^{-13}$  | 10,66 с |
| 100                     | $2,25674 \cdot 10^{-52}$ | 40 мс | $3,91542 \cdot 10^{-7}$   | 15,84 с |
| 10000                   | $6,95875 \cdot 10^{-53}$ | 51 мс | $0,36243 \cdot 10^{-1}$   | 15,93 с |
| 1000000                 | $1,23018 \cdot 10^{-53}$ | 55 мс | 0,14952                   | 16,48 с |

**Модельная задача 8.** Рассмотрим интеграл

$$\int_{-2}^3 3(x^2 - 1)e^{iw(x^3 - 3x)} dx,$$

с точным значением:

$$\frac{-ie^{iw(x^3 - 3x)}}{w}.$$

Здесь  $g'(x) = 3(x^2 - 1)$  на интегрируемом отрезке имеет две невырожденные стационарные точки  $x_0 = -1$  и  $x_1 = 1$ .

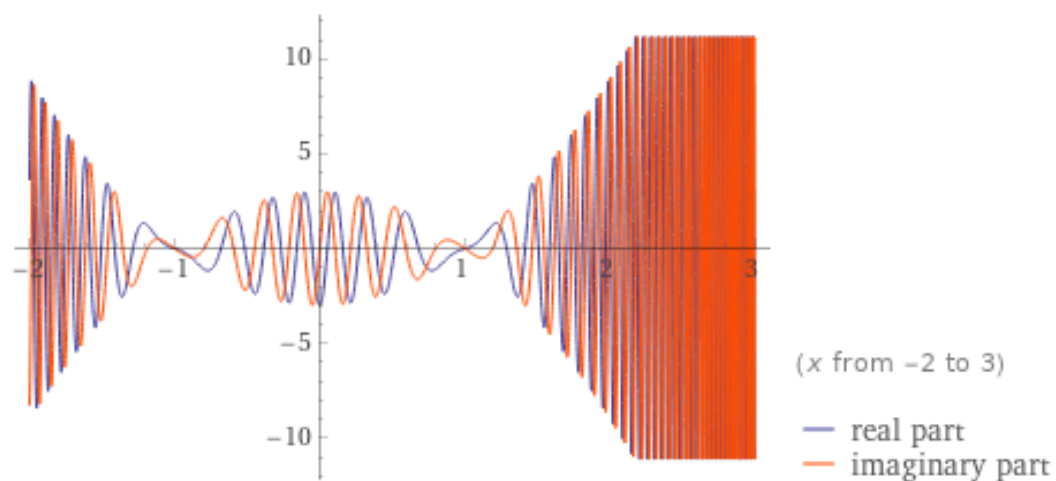


Рисунок 2 – График функции, при  $w = 10$

Таблица 8 – Сравнение методов аппроксимация интеграла с несколькими стационарными точками

| Частота колебаний,<br>w | Метод стационарной фазы  |        | Метод Симпсона $n = 7000$ |         |
|-------------------------|--------------------------|--------|---------------------------|---------|
|                         | Погрешность              | Время  | Погрешность               | Время   |
| 1                       | $1 \cdot 10^{-50}$       | 125 мс | $4,74179 \cdot 10^{-10}$  | 18,12 с |
| 100                     | $2 \cdot 10^{-52}$       | 152 мс | $0,72523 \cdot 10^{-3}$   | 16,21 с |
| 10000                   | $5,09901 \cdot 10^{-55}$ | 130 мс | 0,60891                   | 16,42 с |
| 1000000                 | $1,41421 \cdot 10^{-56}$ | 128 мс | 0,29182                   | 16,72 с |

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данной выпускной квалификационной работы являлось изучение асимптотических методов интегрирования быстроосциллирующих функций. В соответствии с поставленной целью в первой главе были рассмотрены классические квадратурные методы, построены формулы аппроксимации для тригонометрических интегралов, и рассмотрена общая схема построения асимптотического разложения для интегралов Фурье. К тому же, с помощью метода стационарной фазы был определен вклад в асимптотику интегралов Фурье одной и нескольких стационарных точек. Также в 4 разделе были исследованы интегралы Лапласа, а в 5 разделе приведены численные результаты для различных модельных задач, включая интегралы с одной и несколькими стационарными точками.

Для исследования применения квадратурных методов к интегралам от быстроосциллирующих функций, из классических квадратурных методов, описанных в пункте 1.1 данной работы, был выбран метод Симпсона, который в будущем послужил основой для квадратурного метода, специализирующегося на осциллирующих функциях – метода Филона.

Таким образом, опираясь на данные полученные из таблиц (1) и (2) можно сделать вывод, что стандартные квадратурные методы и в частности метод Симпсона дают хорошую погрешность только при малой частоте колебаний и большом количестве узлов. В то время, как метод Филона уже при пяти узлах дает достаточно точное решение, которое становится только точнее, при увеличении частоты колебаний.

При сравнении квадратурных методов и асимптотических разложений, исходя из полученных результатов, а именно опираясь на таблицы (3 – 6), можно сделать вывод, что асимптотические методы, при сравнении с точным значением, полученным аналитически, совпадают с ним, в то время, как метод Симпсона при 5000 узлах дает погрешность только в 8 знаке, при этом затра-

чивая в 100 и более раз больше времени на проделанные вычисления. К тому же, при сравнение приближенных значений рассматриваемых методов друг с другом, асимптотические разложения либо совсем не отличаются друг от друга, либо отличаются, на относительно метода Симпсона – малое значение, при этом, опять же затрачивая значительно меньшее время на счет.

Рассматривая интегралы Фурье с одной и нескольким стационарными точками, и сравнивая метод стационарной фазы с методом Симпсона (таблицы 7 – 8), можно сделать вывод, аналогичный предыдущим: метод стационарной фазы обеспечивает достаточно точные значения при любой частоте колебаний за несколько миллисекунд, а в то время, как метод Симпсона не допускает погрешность выше 13 знаков и ухудшается с возрастанием колебаний, при этом затрачивая в более чем 100 раз больше времени.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Арнольд, В. И. Замечания о методе стационарной фазы и числах Кокстера / В. И. Арнольд // Успехи математических наук. – 1973. – № 5 (173). – с. 17–44.
2. Бахвалов, Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – 6-е изд. – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2008. – 636 с.
3. Горяйнов, В. В. Лекции по теории функций комплексного переменного / В. В. Горяйнов, Е. С. Половинкин. – М: МФТИ, 2017. – 174 с.
4. Де Брёйн, Н. Г. Асимптотические методы в анализе / Н. Г. Де Брёйн – М : Издательство иностранной литературы, 1961. – 247 с.
5. Ильин, А. М. Асимптотические методы в анализе / А. М. Ильин, А. Р. Данилин. – М : Физматлит, 2009. – 248 с.
6. Копсон, Э. Т. Асимптотические разложения / Э. Т. Копсон ; пер. с англ. Г. М. Мордасовой ; под ред. М. А. Евграфова. – М : Мир, 1966. – 159 с.
7. Маслов, В. П. Асимптотические методы и теория возмущений / В. П. Маслов. – М. : Наука, 1988. – 308 с.
8. Олвер, Ф. Асимптотика и специальные функции / Ф. Олвер ; пер. с англ. Ю. А. Брычкова ; под ред. А. П. Прудникова. – М. : Наука, 1990. – 528 с.
9. Bakhvalov, N.S. Evaluation of the integrals of oscillating functions by interpolation at nodes of Gaussian quadratures / N. S. Bakhvalov, L. G. Vasil'eva // Vychisl. Mat. Mat. Fiz. – 1968. – № 1. – p. 175–181.
10. Davis, P. J. Methods of Numerical Integration / P. J. Davis, P. Rabinowitz. – Orlando : Academic Press, 1984. – 626 p.
11. Filon, L. N. G. On a quadrature formula for trigonometric integrals / L. N. G. Filon. // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1928. – № 49. – p. 38–47.

12. Flinn, E. A. A modification of Filon's method of numerical integration / E. A. Flinn // J. ACM. – 1960. – № 2. – p. 181–184.
13. Olver, S. Numerical Approximation of Highly Oscillatory Integrals / S. Olver. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 172 p.
14. Wong, R. Asymptotic Approximations of Integrals / R. Wong. – New York : Academic Press, 1989. – 556 p.
15. Xiang, S. Efficient Filon-type methods for  $\int_a^b f(x)e^{i\omega g(x)}$  / S. Xiang // Numer. Math. – 2007. – № 4. – p. 633–658.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### Листинг программы для вычисления интегралов по формуле Симпсона (обязательное)

В данном приложении представлен листинг для вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций. Программа была реализована в среде разработки Maple 2017, при этом было установлено 50 значащих цифр для чисел с плавающей точкой. Здесь, на вход процедуры подается отрезок интегрирования  $[a, b]$ , количество узлов квадратурной формулы  $n$  и частота колебаний  $w$ . Также необходимо указать значение подынтегральной функции. На выходе программа выводит на экран решение, полученное приближенно, точное значение интеграла и разность между ними по модулю, также в программу был добавлен пакет CodeTools для получения статистики использования времени и памяти.

```
> restart;
  Digits := 50 :
  with(CodeTools) :
=
> f:=proc(x, w)
  (2 x - 4) · exp(I · w · (x2 - 4 x)) :
  end proc:
=
> Simpson := proc(a, b, n, w)
  local i, xx, x, y, app, ex, err :
  for i from 0 to n do
    xx[i] := a +  $\frac{i \cdot (b - a)}{n}$ ;
    x := evalf(xx[i]);
    y[i] := evalf(f(x, w));
  od:
  i := 'i': x := 'x':
  app :=  $\frac{(b - a)}{3 \cdot n} \cdot \left( y[0] + y[n] + 2 \cdot \sum_{i=1}^{\frac{n-2}{2}} y[2 \cdot i] + 4 \cdot \sum_{i=0}^{\frac{n-2}{2}} y[2 \cdot i + 1] \right)$ ;
  ex := int(f(x, w), x = a .. b);
  err := evalf(|ex - app|);
  print(app);
  print(ex);
  print(err);
  end proc:
=
> Usage(Simpson(2, 5, 7000, 1000000));
```

## ПРИЛОЖЕНИЕ Б

### Листинг программы для вычисления интегралов по формуле Филона

(обязательное)

В данном приложении представлен листинг для вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций. Программа была реализована в среде разработки Maple 2017, с установкой 50 значащих цифр для чисел с плавающей точкой. Здесь, на вход подается отрезок интегрирования  $[a, b]$ , количество узлов квадратурной формулы  $n$  и частота колебаний  $w$ . Также необходимо задать значение функции амплитуды. На выходе программа выводит на экран приближенное решение, точное значение интеграла и разность между ними по модулю, также в программу был добавлен пакет CodeTools для получения статистики использования времени и памяти.

```
> restart;
  Digits := 50 :
  with(CodeTools) :
=
> f:=proc(x) :
  x2 :
  end proc:
=
> Filon := proc(a, b, n, w)
  local d, j, h, x, sum, integr, k, app, ex, err :
  d[1] := -1 :
  h :=  $\frac{2}{n-1}$  :
  for j from 2 to n do
    d[j] := d[j-1] + h :
  end do;

  for j from 1 to n do
    x[j] :=  $\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot d[j]$ ;
  end do;

  sum := 0 :
  integr := 1 :
  for j from 1 to n do
    for k from 1 to n do
      if k ≠ j then
        integr := integr ·  $\frac{\xi - d[k]}{d[j] - d[k]}$ ;
      fi;
    end do;
  end do;
```

```

sum := sum +  $\int_{-1}^1 \text{integr} \cdot e^{\left(\frac{I \cdot w \cdot (b-a) \cdot \xi}{2}\right)} d\xi \cdot f(x[j]);$ 
integr := 1;
end do;
app := evalf $\left(\frac{b-a}{2} \cdot e^{\left(\frac{I \cdot w \cdot (b+a)}{2}\right)} \cdot \text{sum}\right);$ 
ex := int(f(x) · exp(I · w · x), x = a .. b);
err := evalf(|ex - app|);
print(app);
print(ex);
print(err);
end proc;
=
> Usage(Filon(2, 5, 5, 1000));

```

## ПРИЛОЖЕНИЕ В

### Листинг программы для асимптотического разложения

интегралов от функций вида  $\sin x^k$

(обязательное)

В данном приложении представлен листинг для вычисления тригонометрических интегралов вида  $\int_a^b x^m \sin x^k$ . Программа была реализована в среде разработки Maple 2017, при этом было установлено 50 значащих цифр для чисел с плавающей точкой. Здесь, на вход подается отрезок интегрирования  $[a, b]$ , степени  $m$  и  $k$ , а на выходе программа выводит на экран решение, полученное приближенно, точное значение интеграла и разность между ними по модулю, также в программу был добавлен пакет CodeTools для получения статистики использования времени и памяти.

```
> restart;
  Digits := 50 :
  with(CodeTools) :
=
> approx := proc(a, b, m, k)
  local one, two, app, ex :
  one := part( $a^k, -\frac{m+1-k}{k}$ );
  two := part( $b^k, -\frac{m+1-k}{k}$ );
  app := evalf( $\frac{1}{k} \cdot (one - two)$ );
  ex := int( $x^m \cdot \sin(x^k), x = a..b$ );
  print(app);
  print(ex);
  print(evalf(|ex - app|));
  end proc;
=
> part := proc(t, k)
  local app, Rn :
  Rn :=  $k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot \text{int}\left(\frac{\sin(y)}{y^{k+4}}, y = t.. \infty\right)$ ;
  app :=  $\frac{\cos(t)}{t^k} + \frac{\sin(t)}{t^{k+1}} \cdot k - \frac{\cos(t)}{t^{k+2}} \cdot k \cdot (k+1) - \frac{\sin(t)}{t^{k+3}} \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2)$ ;
  end proc;
=
> Usage(approx(2, 5, 0, 10)) :
```

## ПРИЛОЖЕНИЕ Г

### Листинг программы для асимптотического разложения

интегралов от функций вида  $\cos x^k$

(обязательное)

В данном приложении представлен листинг для вычисления тригонометрических интегралов вида  $\int_a^b x^m \cos x^k$ . Программа была реализована в среде разработки Maple 2017, при этом было установлено 50 значащих цифр для чисел с плавающей точкой. Здесь, на вход подается отрезок интегрирования  $[a, b]$ , степени  $m$  и  $k$ , а на выходе программа выводит на экран решение, полученное приближенно, точное значение интеграла и разность между ними по модулю, также в программу был добавлен пакет CodeTools для получения статистики использования времени и памяти.

```
> restart;
  Digits := 50 :
  with(CodeTools) :
=
> approx := proc(a, b, m, k)
  local one, two, app, ex :
  one := part( $d^k, -\frac{m+1-k}{k}$ );
  two := part( $b^k, -\frac{m+1-k}{k}$ );
  app := evalf( $\frac{1}{k} \cdot (one - two)$ );
  ex := int( $x^m \cdot \sin(x^k), x = a..b$ );
  print(app);
  print(ex);
  print(evalf(|ex - app|));
  end proc:
=
> part := proc(t, k)
  local app, Rn :
  Rn :=  $k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot (k+3) \cdot \text{int}\left(\frac{\sin(y)}{y^{k+4}}, y = t.. \infty\right)$ ;
  app :=  $\frac{\cos(t)}{t^k} + \frac{\sin(t)}{t^{k+1}} \cdot k - \frac{\cos(t)}{t^{k+2}} \cdot k \cdot (k+1) - \frac{\sin(t)}{t^{k+3}} \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2)$ ;
  end proc:
=
> Usage(approx(2, 5, 0, 10)) :
```

## ПРИЛОЖЕНИЕ Д

### Листинг программы для асимптотического разложения

#### интегралов Фурье

(обязательное)

В данном приложении представлен листинг для вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций. Программа была реализована в среде разработки Maple 2017, с установкой 50 значащих цифр для чисел с плавающей точкой. Здесь, на вход подается отрезок интегрирования  $[a, b]$  и частота колебаний  $w$ . Также необходимо задать значение функции амплитуды и фазовой функции. На выходе программа выводит на экран приближенное решение, точное значение интеграла и разность между ними по модулю, также в программу был добавлен пакет CodeTools для получения статистики использования времени и памяти.

```
> restart;
  Digits := 50 :
  with(CodeTools) :
=
> f := proc(x)
  x2 :
  end proc:
=
> g := proc(x)
  x3 :
  end proc:
=
> AExpansion := proc(a, b, w)
  local app, ex, err :
  app := evalf $\left(\operatorname{Im}\left(\frac{1}{I \cdot w} \cdot \left(\frac{f(b)}{\operatorname{eval}(\operatorname{diff}(g(x), x), x = b)} \cdot \exp(I \cdot w \cdot g(b)) - \frac{f(a)}{\operatorname{eval}(\operatorname{diff}(g(x), x), x = a)} \cdot \exp(I \cdot w \cdot g(a))\right)\right)\right)$ ;
  ex := Im(int(f(x) · exp(I · w · g(x)), x = a .. b));
  err := evalf(|ex - app|);
  print(app)
  print(ex)
  print(err)
  end proc:
=
> Usage(AExpansion(2, 5, 1)) :
```

## ПРИЛОЖЕНИЕ Е

### Листинг программы для вычисления интегралов методом стационарной фазы (обязательное)

В данном приложении представлен листинг для вычисления осциллирующих интегралов. Программа была реализована в среде разработки Maple 2017, с установкой 50 значащих цифр для чисел с плавающей точкой. Здесь, на вход подается отрезок интегрирования  $[a, b]$  и частота колебаний  $w$  и в случае отсутствия стационарных точек – количество итераций  $n$ . Также необходимо задать значение функции амплитуды и фазовой функции. На выходе программа выводит на экран стационарные точки, при их наличии в программе, приближенное решение, точное значение интеграла и разность между ними по модулю, также в программу был добавлен пакет CodeTools для получения статистики использования времени и памяти.

```
> restart;
  Digits := 50 :
  with(CodeTools) :
> f := proc(x)
  2 x - 4 :
end proc:
> g := proc(x)
  x2 - 4 x :
end proc:
> SPhase := proc(a, b, w, n)
  local count, i, sPoint, sPoints, app, ex, err :

  count := 0 :
  for i from a to b by 0.1 do
  if eval(diff(g(x), x$1), x = i) = 0 then
  count := count + 1 :
  sPoints[count] := i;
  sPoint := i :
  fi:
  end do:

  if count = 1 and eval(diff(g(x), x$2), x = sPoint) > 0 then
  print("1 стационарная точка:", sPoint, "g'(x)>0");
  app := evalf( exp( ( I·Pi / 4 ) · exp( I·w·g(sPoint) ) ) · f(sPoint)
```

$$\sqrt{\frac{2 \cdot \text{Pi}}{w \cdot \text{eval}(\text{diff}(g(x), x\$2), x = sPoint)}});$$

**elif** *count* = 1 **and** *eval*(*diff*(*g*(*x*), *x*\$2), *x* = *sPoint*) < 0 **then**  
*print*("1 стационарная точка:", *sPoint*, "*g*'(*x*)<0");

$$\text{app} := \text{evalf}\left(\exp\left(\frac{I \cdot \text{Pi}}{4}\right) \cdot \exp(I \cdot w \cdot g(sPoint)) \cdot f(sPoint) \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot \text{Pi}}{-w \cdot \text{eval}(\text{diff}(g(x), x\$2), x = sPoint)}}\right);$$

**elif** *count* = 0 **then**

*print*("Стационарных точек нет);

$$\text{app} := \left( \text{evalf}\left(\sum_{k=1}^n \left( \frac{\text{eval}(\text{diff}(f(x), x\$ (k-1)), x = b)}{(I \cdot w)^k \cdot \text{eval}(\text{diff}(g(x), x), x = b)} \cdot \exp(w \cdot I \cdot g(b)) - \frac{\text{eval}(\text{diff}(f(x), x\$ (k-1)), x = a)}{(I \cdot w)^k \cdot \text{eval}(\text{diff}(g(x), x), x = a)} \cdot \exp(w \cdot I \cdot g(a)) \right) \right) \right)$$

**elif** *count* > 1 **then**

*print*("Стационарные точки:");

**for** *i* **from** 1 **to** *count* **do**

*print*(*sPoints*[*i*]);

**end do**;

$$\text{app} := \text{evalf}\left(\sum_{k=1}^{\text{count}} \left( \sqrt{\frac{2 \cdot \text{Pi}}{w}} \cdot \exp\left(\frac{i \cdot \text{Pi}}{4} \cdot \text{sign}(\text{eval}(\text{diff}(g(x), x\$2), x = sPoints[k]))\right) \cdot \left( \frac{f(sPoints[k])}{\sqrt{|\text{eval}(\text{diff}(g(x), x\$2), x = sPoints[k])|}} \cdot \exp(I \cdot w \cdot g(sPoints[k])) \right) + \frac{f(b)}{I \cdot w \cdot \text{eval}(\text{diff}(g(x), x), x = b)} \cdot \exp(w \cdot I \cdot g(b)) - \frac{f(a)}{I \cdot w \cdot \text{eval}(\text{diff}(g(x), x), x = a)} \cdot \exp(w \cdot I \cdot g(a)) \right) \right);$$

**fi**;

*ex* := *int*(*f*(*x*) · *exp*(*I* · *w* · *g*(*x*)), *x* = *a*..*b*);

*err* := *evalf*(*|ex* - *app*);

*print*(*app*);

*print*(*ex*);

*print*(*err*);

**end proc**;

> *Usage*(*SPhase*(1, 3, 1, 1000000));