МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

Факультет — вычислительной техники (наименование)

Кафедра — Высшая и прикладная математика (наименование)

Направление подготовки 01.03.04 «Прикладная математика» (код и наименование)

Профиль Математическое моделирование в экономике и технике (код и наименование)

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

на тему

МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ ИНТЕГРАЛОВ НА ПОЛУОСИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Студент 17ВВ1 (группа) — 17.06.21 (подпись, дата) — Мельникова А. М. (фамилия, инициалы)

Руководитель к.ф.-м.н., доцент — 17.06.21 (подпись, дата) — Тында А. Н. (фамилия, инициалы)

Нормоконтролер к.т.н., доцент — 17.06.21 (подпись, дата) — Тарасов Д. В. (фамилия, инициалы)

Работа допущена к защите (протокол заседания кафедры от 04.06.2021 № 10)

Заведующий кафедрой д.ф.-м.н., проф. — 18.06.21 (подпись, дата) — Бойков И. В. (фамилия, инициалы)

Работа защищена с отметкой отл. (протокол заседания ГЭК от 22.06.21 № 2)

Секретарь ГЭК к.пед.н., доцент — 22.06.21 (подпись, дата) — Зверовщикова Н. В. (фамилия, инициалы)

Пенза 2021

МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное

образовательное учреждение высшего образования

«ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Политехнический институт

Факультет

Вычислительной техники
(наименование)

Кафедра

Высшая и прикладная математика
(наименование)

«УТВЕРЖДАЮ»

Заведующий кафедрой

И. В. Бойков
(подпись, инициалы, фамилия)

« 30 » ноября 2020 г.

ЗАДАНИЕ

на бакалаврскую работу

1. Студент Мельникова Анастасия Михайловна гр. 17ВБ1
(фамилия, имя, отчество)

факультета вычислительной техники

2. Тема работы Методы аппроксимации интегралов на полуоси и их применение к решению интегральным уравнениям

Тема утверждена приказом по ПГУ № 0903_о от « 30 » ноября 2020 г.

3. Руководитель работы к.ф.-м.н. Тында А. Н.

4. Задание на работу (назначение разработки, исходные данные и т.п.)

1 Рассмотреть теорию асимптотических последовательностей и разложений

2 Изучить квадратурную формулу, позволяющую аппроксимировать интеграл на полуоси

3 Рассмотреть типы интегральных преобразований

4 Изучить виды интегральных уравнений с бесконечными пределами

5 Построить алгоритмы численного решения интегральных уравнений

6 Разработать программу для реализации выбранных методов на ЭВМ

5. Перечень подлежащих разработке вопросов

1 Аппроксимация интегралов

1.1 Асимптотические разложения

1.1.1 Асимптотические последовательности

1.1.2 Определение Пуанкаре асимптотического разложения

1.1.3 Асимптотические степенные ряды

1.1.4 Действия над асимптотическими степенными рядами

1.1.5 Интегрирование по частям

1.1.6 Метод Лапласа

1.2 Квадратурная формула Гаусса-Лагерра

1.3 Интегральные преобразования Фурье, Лапласа, Меллина

1.4 Функция Бесселя и ее интегральные представления

2 Решение интегральных уравнений

2.1 Интегральные уравнения типа свертки первого рода

2.2 Интегральные уравнения типа свертки второго рода

2.3 Уравнение с ядром $K(x,t) = t^{-1}Q(x/t)$ на полуоси

2.4 Уравнение с ядром $K(x,t) = t^{\beta}Q(xt)$ на полуоси

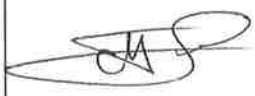
2.5 Метод Карлемана для уравнения Винера-Хопфа второго рода

2.6 Прямой квадратурный метод

2.7 Итерационный метод

6. Календарный график по выполнению проекта

Наименование этапов работы	Объем работы	Срок выполнения	Подпись руководителя
1. Постановка задач аппроксимации интегралов на полуоси. Обзор литературы	20 %	28.05.2021	
2. Исследование методов решения интегральных уравнений	25 %	02.06.2021	

3. Разработка численных алгоритмов решения	20 %	07.06.2021	
4. Разработка программы	25 %	10.06.2021	
5. Оформление пояснительной записки	10 %	14.06.2021	

Дата выдачи задания «_30_» ноября 2020 г.

Руководитель бакалаврской работы А. Н. Тында
(подпись, инициалы, фамилия)

Задание к исполнению принял студент А. М. Мельникова
(подпись, инициалы, фамилия)

Работу к защите допустить
Декан факультета Л. Р. Фионова
(подпись, инициалы, фамилия)

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 4
1. АППРОКСИМАЦИЯ ИНТЕГРАЛОВ 6
1.1. Асимптотические разложения 6
1.1.1. Асимптотические последовательности 6
1.1.2. Определение Пуанкаре асимптотического разложения 7
1.1.3. Асимптотические степенные ряды. 8
1.1.4. Действия над асимптотическими степенными рядами. 9
1.1.5. Интегрирование по частям 11
1.1.6. Метод Лапласа 13
1.2. Квадратурная формула Гаусса – Лагерра. 14
1.3. Интегральные преобразования. 16
1.3.1. Интегральное преобразование Фурье. 16
1.3.2. Интегральное преобразование Лапласа 19
1.3.3. Интегральное преобразование Меллина 23
1.3.4. Функция Бесселя и ее интегральные представления 24
2. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 28
2.1. Интегральные уравнения типа свертки первого рода 28
2.2. Интегральные уравнение типа свертки второго рода 29
2.3. Уравнение с ядром $K(x,t)=t^{-1}Q(x/t)$ на полуоси. 31
2.4. Уравнение с ядром $K(x,t)=t^{\beta}Q(xt)$ на полуоси 32
2.5. Метод Карлемана для уравнения Винера-Хопфа второго рода 33
2.6. Прямой квадратурный метод 35
2.7. Итерационный метод. 36
3. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ 39
3.1. Аппроксимация интеграла 39
3.2. Решение интегрального уравнения с помощью квадратурного метода 39

3.3. Решение интегрального уравнения с помощью
итерационного метода. 40
ЗАКЛЮЧЕНИЕ 42
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ..... 43
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Листинг решения интеграла на полуоси..... 45
ПРИЛОЖЕНИЕ Б. Листинг решения интегрального уравнения
с помощью квадратурного метода..... 46
ПРИЛОЖЕНИЕ В. Листинг решения интегрального уравнения
с помощью итерационного метода..... 49
ПРИЛОЖЕНИЕ Г. Узлы и веса квадратурной формулы Гаусса 54

ВВЕДЕНИЕ

Одним из важнейших условий прогресса в области решения разнообразных исследовательских, инженерных и проектных задач является исследование и внедрение в практику прикладных разделов современной математики. К этим разделам, в первую очередь, относятся приближенные и численные методы решения интегральных уравнений, применение которых позволяет получить эффективные математические модели многих задач, как традиционных, так и новых. Аппарат интегральных уравнений твердо вошел в физику, материаловедение, механику, астрономию и другие области знаний.

Непрерывное расширение области приложения интегральных уравнений дало стимул к интенсивной разработке их теории и в особенности приближенных методов решения. Появилось множество разработок по исследованию важнейших свойств различных видов интегральных уравнений, а вместе с тем возможностей методов решения.

В определенных областях знаний возникают интегралы, требующие особого внимания, так как их невозможно решить не только аналитически, но и с помощью обычных квадратурных формул, таких как метод трапеций, Симпсона и т.д. Например, в динамической теории кристаллических решеток возникают задачи, которые описываются интегралами вида [1]

$$\int_0^{\infty} f(x)dx. \tag{1}$$

А также реологическая модель наследственной ползучести представляется интегральным уравнением, которое связывает напряжение и деформацию [2, 3]:

$$\sigma(t) + \int_{-\infty}^{t} K(t,s)\sigma(s)ds = E\varepsilon(t) \tag{2}$$

где $\sigma(t)$ – полное напряжение, $\varepsilon(t)$ – деформация, E – мгновенный модуль упругости, $K(t,s)$ – ядро получести.

Целью работы является изучение математических моделей, которые описаны интегральными уравнениями различного типа с бесконечными пределами интегрирования, рассмотрение методов аппроксимации интегралов на полуоси, а так же методов решения интегральных уравнений типа (2). Необходимо построить эффективные численные алгоритмы решения таких уравнений, разработать программы для реализации методов на ЭВМ и сделать выводы о применимости данных методов.

1. АППРОКСИМАЦИЯ ИНТЕГРАЛОВ

1.1. Асимптотические разложения

Часто бывает так, что для вычисления определенной величины (в данном случае интеграла на полуоси) можно пользоваться бесконечным рядом, к тому же сама величина в некотором смысле является суммой этого ряда. Классическая ситуация: некая функция разлагается в функциональный ряд, причем, чем ближе независимая переменная к предельному значению (чаще всего ∞), тем лучше приближение, которое дают первые несколько членов разложения.

Теория асимптотических рядов берет свое начало от Стилтьеса (1886) и Пуанкаре (1886). Эта теория разбивается на два раздела. В первом изучаются такие вопросы как суммы асимптотических рядов, асимптотические пределы, асимптотическая сходимость. Во втором разделе рассматриваются темы, связанные с теорией асимптотических разложений. Центральным вопросом здесь является построение и изучение рядов, асимптотически представляющих данные функции (интегральные представления или степенные ряды) [4,5].

1.1.1. Асимптотические последовательности

Пусть функции $f(z)$ и $\varphi(z)$ определены на комплексном множестве R и пусть z_0 является предельной точкой R. Поэтому, например, R может являться углом

$$0 < |z| < \infty,\ \alpha < \arg z < \beta,$$

а z_0 – точкой в бесконечности или вершиной угла. Окрестностью точки z_0 может быть открытый круг $|z - z_0| < \delta,$ в случае, если z_0 – конечная, и область $|z| > \delta$, если z_0 – бесконечно удаленная точка.

Справедливо $f = O(\varphi),$ если существует такая константа M, что $|f| \le M|\varphi|$ для любой z. Также имеем $f = O(\varphi)$ при условии что $z \to z_0$, если существуют константа M и окрестность V точки z_0, такие что $|f| \le M|\varphi|$ для

любой z из пересечения V и R; пишем $f = o(\varphi)$ при $z \to z_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая окрестность V, что $|f| \le \varepsilon|\varphi|$ для всех z из пересечения V и R. Иначе говоря, если $\varphi \ne 0$ на R, то $f = O(\varphi)$ обозначает, что отношение f / φ является ограниченным, а равенство $f = o(\varphi)$ – что f / φ стремится к нулю при $z \to z_0$.

Асимптотической последовательностью называется такая последовательность функций $\{\varphi_n(z)\}$ при $z \to z_0$, если найдется такая окрестность точки z_0, в которой ни одна функция не обращается в нуль и если для любой n $\varphi_{n+1} = o(\varphi_n)$ при $z \to z_0$.

1.1.2. Определение Пуанкаре асимптотического разложения

Пусть формальный ряд

$$\sum_0^\infty a_n \varphi_n(z)$$

не обязательно сходящийся, является асимптотическим разложением в смысле Пуанкаре функции $f(z)$ по асимптотической последовательности $\{\varphi_n(z)\}$, если для каждого m

$$f(z) - \sum_0^m a_n \varphi_n(z) = \mathrm{o}(\varphi_m(z))$$

при $z \to z_0$. Поскольку

$$f(z) - \sum_0^{m-1} a_n \varphi_n(z) = a_m \varphi_m(z) + \mathrm{o}(\varphi_m(z))$$

то частичные суммы $\sum_0^{m-1} a_n \varphi_n(z)$ являются приближенными значениями функции с погрешностью $\mathrm{o}(\varphi_m(z))$ при $z \to z_0$. Если такое асимптотическое разложение существует, то оно единственно и коэффициенты определяются по формуле:

$$a_m = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - \sum_0^{m-1} a_n \varphi_n(z)}{\varphi_m(z)}$$

В таком случае примем обозначение

$$f(z) \sim \sum_0^{\infty} a_n \varphi_n(z)$$

Частичные суммы такого ряда часто называют асимптотическими приближениями функции $f(z)$. Главным членом называется первый член и обозначается $f(z) \sim a_0 \varphi_0(z)$.

Вид асимптотического разложения зависит от выбора асимптотической последовательности. Также бывают случаи, когда две функции имеют одинаковые разложения. Например, функции

$$\frac{1}{z+1}, \quad \frac{1}{z+1} + e^{-z}$$

при $z \to \infty$ имеют одно и то же асимптотическое разложение

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n}$$

так как $z^n e^{-z} \to 0$ при $z \to \infty$ при любом значении n.

1.1.3. Асимптотические степенные ряды

Последовательность функций $\left\{ z^{-n} \right\}$ является мультипликативной асимптотической последовательностью при $z \to \infty$ в любой области комплексной плоскости.

Асимптотическое разложение

$$f(z) \sim \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

при $z \to \infty$ называется асимптотическим степенным рядом.

1.1.4. Действия над асимптотическими степенными рядами

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ имеют асимптотические разложения

$$f(x) \sim \sum_0^\infty \frac{a_n}{x^n}, \quad g(x) \sim \sum_0^\infty \frac{b_n}{x^n}$$

при $x \to \infty$.

I. Если A – постоянная, то

$$Af(x) \sim \sum_0^\infty \frac{Aa_n}{x^n}.$$

II. Сумма асимптотических разложений

$$f(x) + g(x) = \sum_0^\infty \frac{a_n + b_n}{x^n}.$$

III. Произведение разложений

$$f(x)g(x) = \sum_0^\infty \frac{c_n}{x^n},$$

где $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$, так как

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_N}{x^N} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right)$$

$$g(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \ldots + \frac{b_N}{x^N} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right)$$

поэтому

$$f(x)g(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \ldots + \frac{c_N}{x^N} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right).$$

Следовательно, любая положительная степень функции $f(x)$ раскладывается в асимптотический степенной ряд и это справедливо для любого полинома.

IV. Если $a_0 \neq 0$, то

$$\frac{1}{f(x)} \sim \frac{1}{a_0} + \sum_1^\infty \frac{d_n}{x^n}$$

при $x \to \infty$.

Любая рациональная функция от $f(x)$ имеет разложение в асимптотический степенной ряд, если только знаменатель не стремится к нулю при $x \to +\infty$.

V. Если $f(x)$ непрерывна при $x > a > 0$, то при $x > a$ функция

$$F(x) = \int_x^{\infty} \left\{ f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right\} dt$$

разлагается в степенной ряд, который имеет вид:

$$F(x) \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \ldots + \frac{a_{n+1}}{nx^n} + \ldots$$

при $x \to +\infty$.

Ввиду того, что подынтегральное выражение непрерывно при $t > a$, когда $t \to +\infty$, то интеграл $F(x)$ существует при $x > a$.

VI. Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную, которая разлагается в степенной ряд при $x \to +\infty$, то это разложение будет иметь вид:

$$f'(x) \sim \sum_2^{\infty} \frac{(n-1)a_{n-1}}{x^n}.$$

Иными словами, асимптотические разложения допускают формальное почленное дифференцирование.

VII. Если $f(z)$ – функция аналитическая и регулярная в области R и если

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots$$

равномерно по аргументу z при $|z| \to \infty$ в любом замкнутом угле, содержащимся в R, то

$$f'(z) \sim -\frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \frac{3a_3}{z^4} - \ldots$$

равномерно по аргументу z при $|z| \to \infty$ в любом замкнутом угле, содержащимся в R.

Разложение аналитической функции в асимптотический степенной ряд обычно имеет место в угле. Одна и та же функция может иметь различные разложения в разных углах – такая ситуация называется явлением Стокса.

VIII. Если $f(z)$ – однозначная и регулярная в области $|z| \geq a$ функция, и если

$$f(z) \sim \sum_{0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

при $z \to \infty$ для всех значений аргумента z, то асимптотический степенной ряд будет сходиться будет сходиться к сумме $f(z)$ для больших значений $|z|$.

1.1.5. Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям является одним из простейших для получения асимптотического разложения функции, заданной определенным интегралом. С помощью повторного применения данной операции поочередно находятся члены асимптотического ряда, характер и вид ряда определяется исследованием достаточного члена, который имеет вид определенного интеграла.

Рассмотрим функцию

$$F(z) = \int_{0}^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t+z} \quad ,$$

к которой Стилтьес в своей работе применил метод интегрирования по частям.

Поскольку этот интеграл равномерно сходится в области

$$|z| \geq \varepsilon > 0, \quad |\arg z| \leq \pi - \delta < \pi,$$

то функция $F(z)$ является аналитической, регулярной в комплексной плоскости.

Проинтегрировав функцию по частям n раз, получим

$$F(z) = \sum_{r=1}^{n} \frac{(-1)^{r-1}(r-1)!}{z^r} + (-1)^n n! \int_{0}^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{(t+z)^{n+1}}.$$

Расходящийся ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}(r-1)!}{z^r}$$

является аналитическим степенным разложением при $|z|\to\infty$ для функции $F(z)$.

Для абсолютного значения остаточного члена $R_n(z)$ представим оценку

$$|R_n(z)|=\left|(-1)^n n!\int_0^{\infty}e^{-t}\frac{dt}{(t+z)^{n+1}}\right|\le\frac{n!}{|z|^{n+1}sin^{n+1}\delta}\int_0^{\infty}e^{-t}dt=\frac{n!}{|z|^{n+1}sin^{n+1}\delta}$$

то есть модуль остаточного члена при $|z|\to\infty$ является величиной того же порядка, что и $(n+1)$-й член. Тогда

$$F(z)\sim\sum_{r=1}^{\infty}\frac{(-1)^{r-1}(r-1)!}{z^r}.$$

Когда $z=x>0$, то

$$0<(-1)^n R_n(x)=n!\int_0^{\infty}e^{-t}\frac{dt}{(t+z)^{n+1}}<\frac{n!}{x^{n+1}},$$

поэтому остаточные члены с номерами n и $(n+1)$ имеют один и тот же знак, и -й член является меньшим по абсолютной величине. Такое асимптотическое разложение называется знакопеременным рядом, обвертывающим в терминах Лапласа, то есть его частичные суммы попеременно больше или меньше значения $F(z)$. Наилучшее приближение частичными суммами можно получить, если остановиться перед наименьшим членом. Однако Стилтьес отметил, что можно также получить более точный результат, прибавив половину наименьшего члена.

Пусть $x=N+\eta$, где $0\le\eta<1$, а целое число $N>0$ должно быть выбрано так, чтобы $(N+1)$-й член являлся наименьшим. Тогда остаточный член с номером N равен

$$R_N(N+\eta)=(-1)^N N!\int_0^{\infty}e^{-t}\frac{dt}{(t+N+\eta)^{N+1}}=\frac{(-1)^N N!}{(N+\eta)^{N+1}}\int_0^{\infty}e^{-t}\left(1+\frac{t}{N+\eta}\right)^{-N-1}dt.$$

Подынтегральная функция мажорируется функцией e^{-t}. Тогда по признаку Вейерштрасса

$$\frac{R_N(N+\eta)}{(-1)^N N!(N+\eta)^{-(N+1)}} = \int_0^\infty e^{-t}\left(1+\frac{t}{N+\eta}\right)^{-N-1} dt \to \int_0^\infty e^{-2t}dt = \frac{1}{2}$$

при $N \to \infty$. Поэтому, если $x = N+\eta$, где N – большое целое число, $0 \le \eta < 1$, то остаточный член с номером N равен примерно половине $(N+1)$-го члена, то есть половине наименьшего члена.

1.1.6. Метод Лапласа

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^\infty e^{tg(x)}dx,$$

где $g(x)$ – действительная и непрерывная функция, которая достигает своего максимума при $x = 0, g'(0)$ существует и меньше нуля. Также предположим, что $g(x) < g(0)(x > 0)$, $g(x) \to -\infty$ при $x \to \infty$ и что интеграл $\int_0^\infty e^{tg(x)}dx$ является сходящимся.

Для решения данного интеграла можно попытаться приблизить в окрестности параметра $t \to \infty$ функцию $g(x)$ какой-нибудь простой функцией, для которой интеграл вычисляется. Такая идея была предложена Лапласом. Ее преимущество состоит в том, приближение происходит только на сравнительно малом интервале.

Исходя из неравенства

$$\left|g(x) - g(0) - xg'(0)\right| \le \varepsilon x \quad (0 \le x \le \delta),$$

которое вытекает из того, что $x^{-1}\left(g(x) - g(0)\right) \to g'(0)$ при $x \to 0$, выберем значения δ для разложения интеграла на сумму

$$\int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\infty} .$$

Тогда интеграл будет вычисляться на интервале $[-\delta, \delta]$. Его значение будет отличаться от соответствующего интеграла на полуоси на величину $O\left(e^{-\alpha t}\right)$, где α – положительная константа, не зависящая от t.

Воспользуемся теперь формулой

$$\int_0^{\infty} e^{-tx} x^k dx = t^{-k-1} k!,$$

где $k = 0,1,2,\ldots$

В соответствии с вышеописанной формулой, получим оценку интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{tg(x)} dx \sim \left(-tg'(0)\right)^{-1} e^{tg(0)} \qquad (t \to \infty).$$

Данная оценка является верной не только для действительных t, но и для комплексных, если вместо $t \to \infty$ обозначать $Re\, t \to \infty$.

1.2. Квадратурная формула Гаусса – Лагерра

К методам аппроксимации интегралов на полуоси относят также квадратурную формулу Гаусса – Лагерра. Она аппроксимирует значения интегралов рядом [6]:

$$\int_0^{\infty} e^{-x} f(x) dx = \sum_{i=1}^{n} \omega_i f(x_i) + R_n, \tag{3}$$

где e^{-x} – весовая функция интеграла, а x_i – это i -й нуль полинома Лагерра, представленного формулой Родригеса

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} x^n e^{-x}. \tag{4}$$

Коэффициенты ω_i вычисляются по формуле

$$\omega_i = \frac{x_i}{(n+1)^2 \left[L_{n+1}(x_i) \right]^2}.$$

Остаточный член:

$$R_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \ (0 < \xi < \infty).$$

Для интеграла произвольной формы можно выполнить следующие преобразования:

$$\int_0^\infty f(x)dx = \int_0^\infty f(x)e^x e^{-x}dx = \int_0^\infty g(x)e^{-x}dx,$$

где $g(x) = f(x)e^x$. Далее можно применить квадратурную формулу Гаусса – Лагерра к новой функции $g(x)$.

Полином (4) является решением линейного дифференциального уравнения Лагерра второго порядка:

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0.$$

Это уравнение имеет решение, только если n является целым неотрицательным числом. Также существуют обобщенные многочлены Лагерра, которые являются решениями следующего уравнения

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0,$$

где n, так же как и прежде является целым неотрицательным числом.

В таблице 1 приведено несколько первых многочленов Лагерра.

Таблица 1 – Полиномы Лагерра до степени $n = 4$

n	$L_n(x)$
0	1
1	$-x+1$
2	$1/2\left(x^2 - 4x + 2\right)$
3	$1/6\left(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6\right)$
4	$1/24\left(x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24\right)$

Важным свойством полиномов Лагерра является ортогональность на полуоси $0 < x < \infty$ с весовой функцией $\rho(x) = e^{-x}$. Именно это свойство позволяет использовать полиномы для построения квадратурной формулы (3).

Также можно отметить, что функции $L_n(x)$ образуют на интервале $0 \le x < \infty$ ортогональную систему, причем

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x)\, dx = \begin{cases} 0 & при\ n \neq m \\ (n!)^2 & при\ n = m \end{cases}.$$

1.3. Интегральные преобразования

Следующий метод, который позволяет оценить значение интеграла на полуоси, представляет собой применение интегральных преобразований. В общем случае будет выглядеть следующим образом. Пусть функция $f(x)$, которая является оригиналом, такова, что существует интеграл:

$$g(s) = \int_S dx\, R(x,s)\, f(x), \tag{5}$$

где $R(x,s)$ – ядро интегрального преобразования. Тогда функция $g(s)$ называется образом функции $f(x)$. Работать с образами функций часто бывает гораздо удобнее, чем с оригиналами [7,8].

Рассмотрим несколько видов интегральных преобразований.

1.3.1. Интегральное преобразование Фурье

Если в формуле (5) определить $R(x,s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-isx}$, где $\infty < x < -\infty$, то мы получим одномерное преобразование Фурье

$$g(s) = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-isx} f(x). \tag{6}$$

Следовательно, обратное преобразование Фурье имеет следующий вид:

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{isx} g(s). \qquad (7)$$

Таким образом, функция $g(s)$ существует для всех значений x, если функция $f(x)$ интегрируема на $\infty < x < -\infty$. Для применимости интегрального преобразования Фурье достаточно, чтобы $f(x) \in L_1 \in (-\infty, +\infty)$. Фурье-образ ($g(s)$) и Фурье-оригинал ($f(x)$), связанные преобразованиями (6) и (7), иногда называет также парой Фурье-преобразований.

Для четной функции $f(x)$ удобно применять пару косинус-преобразований:

$$g_c(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} dx \cos(sx) f(x),$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} dx \cos(sx) g_c(s).$$

Аналогично, для нечетной функции приводится пара синус-преобразований:

$$g_s(s)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} dx \sin(sx) f(x),$$

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} dx \sin(sx) g_s(s).$$

Пусть $\overline{f}(s)$ и $\overline{h}(s)$ – фурье-образы функций $f(x)$ и $h(x)$. Функция оригинала произведения фурье-образов $\overline{f}(s)\overline{h}(s)$ называется сверткой

$$r(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ds e^{isx}\overline{f}(s)\overline{h}(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ds e^{isx}\overline{f}(s)\int_{-\infty}^{\infty} dx' e^{-isx'}h(x')=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} ds e^{isx}\overline{f}(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dy f(y)h(-y). \qquad (8)$$

Аналогично, для косинус-преобразования Фурье свертка будет выглядеть следующим образом:

$$r(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty ds\cos(sx)\,\bar{f}_c(s)\bar{h}_c(s)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty ds\cos(sx)\,\bar{h}_c(s)\int_0^\infty dx'\cos(sx')\,f(x')=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty dy f(y)\left[h(|x-y|)+h(x+y)\right].$$

Соответственно, синус-преобразование дает:

$$r(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty ds\sin(sx)\,\bar{f}_s(s)\bar{h}_s(s)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty ds\sin(sx)\,\bar{h}_s(s)\int_0^\infty dx'\sin(sx')\,f(x')=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty dy f(y)\left[h(|x-y|)+h(x+y)\right].$$

Используя соотношений (8), легко получить формулы Парсеваля, которые показывают унитарность преобразования Фурье, то есть интеграл квадрата функции равен интегралу квадрата преобразования:

$$\int_{-\infty}^\infty ds\left|\bar{f}(s)\right|^2=\int_{-\infty}^\infty dx\left|f(x)\right|^2.$$

Более общая и точная формула будет иметь вид:

$$\int_{-\infty}^\infty ds\,\bar{f}(s)\bar{h}(s)=\int_{-\infty}^\infty dx f(x)h(-x). \qquad (9)$$

В случае четных функций согласно формуле (9) будем иметь:

$$\int_{-\infty}^\infty ds\,\bar{f}_c(s)\bar{h}_c(s)=\int_{-\infty}^\infty dx f(x)h(x).$$

В случае нечетных функций соответственно получаем:

$$\int_{-\infty}^\infty ds\,\bar{f}_s(s)\bar{h}_s(s)=\int_{-\infty}^\infty dx f(x)h(x).$$

Формулы Парсеваля определяют связь между интегралами от оригиналов функций и их образов и дают возможность в некоторых случаях кардинально упростить вычисления.

Преобразование Фурье имеет большую значимость при решении широкого класса задач математической физики, к которым относится, например, интегральное уравнение типа свертки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy\varphi(x-y)u(y) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty .$$

1.3.2. Интегральное преобразование Лапласа

Кроме преобразования Фурье для аппроксимации интегралов также часто используется преобразование Лапласа. Для этого в формуле (5) примем $R(x,s) = e^{-sx}$, где $0 \le x < \infty$. В таком случае получим:

$$\overline{f}(s) = \int_{0}^{\infty} dx e^{-sx} f(x). \tag{10}$$

Связь между оригиналом и изображением записывают как $f(x) \doteqdot \overline{f}(s)$.

Предполагается, что оригинал удовлетворяет трем условиям:

1) $f(x) \equiv 0$ для $x < 0$.

2) $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица-Гельдера всюду на $x > 0$ за исключением некоторых точек, где оригинал может иметь разрыв первого рода.

3) $f(x)$ возрастает не быстрее показательной функции, то есть существует $M > 0$ и $s_0 \ge 0$, такие что для любого $x > 0$

$$|f(x)| < Me^{s_0 x} . \tag{11}$$

Также, для дальнейших рассуждений необходимо привести важную теорему.

Теорема 1 (об области существования изображения). Для всякого оригинала $f(x)$ изображение по Лапласу $\overline{f}(s)$ определено в полуплоскости $Re\, s > s_0$ и является в этой плоскости аналитической функцией.

Доказательство. В первую очередь докажем сходимость интеграла (10) в области $Re\, s = s_1 > s_0$. В силу общего признака сравнения и условия (11) имеем:

$$\left|\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx\right| \le \int_0^\infty \left|f(x)\right|e^{-s_1 x}dx < M\int_0^\infty e^{-(s_1-s_0)x}dx.$$

Итак, для $s_1 > s_0$:

$$\left|\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx\right| < \frac{M}{s_1 - s_0}.$$

Для того, чтобы доказать существование производной несобственного интеграла (10) по параметру s, требуется проверить равномерную сходимость интеграла

$$J(s) = -\int_0^\infty x\, f(x)e^{-sx}dx$$

в области $Re\, s > s_0$. Выберем произвольное действительное число $p > 0$ из условия: $Re\, s \ge p > s_0$. Тогда, в соответствии с достаточным признаком Вейерштрасса равномерной сходимости получаем

$$\left|J(s)\right| \le \int_0^\infty x\left|f(x)\right|e^{-px}dx < M\int_0^\infty x\, e^{-(p-s_0)x}dx = \frac{M}{(p-s_0)^2} < \infty,$$

что и доказывает возможность дифференцирования по параметру s под знаком интеграла (10), то есть существование производной изображения

$$\bar{f}'(s) = \int_0^\infty (-x)e^{-sx}\, f(x)dx$$

в области $Re\, s \ge p > s_0$. В силу того, что число p было выбрано произвольно, аналитичность изображения в области определения $Re\, s > s_0$ доказана.

Обратное преобразование Лапласа определяется по формуле, которая имеет вид:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} ds\, \bar{f}(s)e^{sx}, \qquad (12)$$

где интегрирование ведется в комплексной плоскости по прямой $s = \sigma > \sigma_c, \sigma > 0$ (σ_c – абсцисса сходимости интеграла (10)). Вычисление инте-

грала в формуле (12) чаще всего производится посредством деформирования пути интегрирования; в этом случае часто бывает возможным использование лемм из теории функции комплексного переменного.

Рассмотрим свертку двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$:

$$g(x)=\int_0^x dy\, f_1(y)\, f_2(x-y).$$

Пусть существуют образы функций $f_1(x) \doteq \bar{f}_1(s)$ и $f_2(x) \doteq \bar{f}_2(s)$, тогда

$$\bar{g}(s)=\int_0^\infty dx\, e^{-sx}\int_0^x dy\, f_1(y)\, f_2(x-y)=\int_0^\infty dy f_1(y)\int_y^\infty dx\; e^{-sx}\, f_2(x-y)=$$

$$=\int_0^\infty dy f_1(y) e^{-sy}\int_0^\infty dx\, e^{-sx}\, f_2(x)=\bar{f}_1(s)\,\bar{f}_2(s)$$

Т.е. изображение по Лапласу свертки функций есть произведение их образов.

Преобразование Лапласа также имеет ряд полезных для вычислений свойств.

1. Свойство линейности.

Пусть для любых a_k, в том числе комплексных

$$f(x)=\sum_{k=1}^n a_k f_k(x).$$

Тогда

$$\bar{f}(s)=\sum_{k=1}^n a_k \int_0^\infty dx\, e^{-sx} f_k(x)=\sum_{k=1}^n a_k \bar{f}_k(s).$$

2. Свойство подобия.

Пусть $f(x) \doteq \bar{f}(s)$, тогда для любой константы $\alpha>0$ будем иметь:

$$\int_0^\infty dx e^{-sx}\, f\left(\frac{x}{\alpha}\right)=\alpha\int_0^\infty dx e^{-s\alpha x}\, f(x)=\alpha\,\bar{f}(s\alpha).$$

3. Образ производной от функции.

Пусть существует $f^{(n)}(x)$ и пусть $f(x) \doteqdot \overline{f}(s)$, тогда, интегрируя по частям, получим:

$$\int_0^\infty dx e^{-sx} f^{(n)}(x) = s^n \overline{f}(x) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \ldots - s f^{n-2}(0) - f^{n-1}(0).$$

4. Дифференцирование изображения.

Дифференцирование изображения сводится к умножению оригинала на $(-x)$, то есть

$$\overline{f}^{(n)}(s) \doteqdot (-x)^n f(x). \tag{13}$$

Данное свойство обосновывается тем, что изображение $\overline{f}(s)$ в полуплоскости $Re\, s = s_1 > s_0$ является аналитической функцией, которую можно дифференцировать по s по правилу дифференцирования интеграла, зависящего от параметра. Применяя в (10) дифференцирование под знаком интеграла n раз, получаем:

$$\overline{f}^{(n)}(s) = \int_0^\infty dx\, e^{-sx} (-x)^n f(x),$$

что и доказывает свойство.

5. Образ интеграла от функции.

Пусть $f(x) \doteqdot \overline{f}(s)$. Для целого $n > 0$ имеем:

$$\int_0^\infty dx\, e^{-sx} \int_0^x dx_0 \int_0^{x_0} dx_1 \ldots \int_0^{x_{n-2}} dx_{n-1} f(x_{n-1}) = \frac{\overline{f}(s)}{s^n}.$$

6. Интегрирование изображения.

Если интеграл $\int_s^\infty ds' \overline{f}(s')$ сходится, то он является изображением функции $f(x)/x$. Отсюда получим:

$$\int_0^\infty dx\, e^{-sx} \frac{f(x)}{x} = \int_s^\infty ds' \int_0^\infty dx e^{-s'x} f(x) = \int_s^\infty ds' \overline{f}(s').$$

7. Свойство смещения.

Для любого комплексного числа a имеем:

$$\int_0^\infty dx e^{-sx} e^{ax} f(x) = \overline{f}(s-a).$$

8. Свойство запаздывания.

Для любого $a>0$:

$$\int_0^\infty dx e^{-sx} f(x-a) = \int_a^\infty dx e^{-sx} f(x-a) = e^{-as}\overline{f}(s).$$

9. Свойство опережения.

Пусть функция $f(x)$ имеет вид $f(x+a)$ при $a>0$, тогда:

$$\int_0^\infty dx e^{-sx} f(x+a) = e^{as}\left[\overline{f}(s) - \int_0^a dx e^{-sx} f(x)\right].$$

10. Интеграл Дюамеля.

Пусть $f(x) \doteq \overline{f}(s)$ и $g(x) \doteq \overline{g}(s)$, тогда:

$$\int_0^\infty dx e^{-sx} \frac{d}{dx}\int_0^x dy\, f(x-y) g(y) = s\overline{f}(s)\overline{g}(s).$$

1.3.3. Интегральное преобразование Меллина

Множество интегралов можно решить с помощью общего и в значительной степени формализованного метода, основанного на преобразовании Меллина.

Если в формуле (5) в качестве ядра выбрать $R(x,s) = x^{s-1}$, где x меняется в пределах $0 \le x < \infty$, то преобразование Меллина будет иметь вид:

$$g(s) = \int_0^\infty dx\, x^{s-1} f(x),$$

где $s = c + id$, $c_1 < c < c_2$. При этом, $f(x)$ должна удовлетворять следующим условиям:

$$\int_0^1 dx\, x^{c_1-1}\left|f(x)\right| = \infty,$$

$$\int_1^\infty dx\, x^{c_2-1}\left|f(x)\right| = -\infty,$$

при некоторых значениях c_1 и c_2.

Если образ $g(s)$ известен, то оригинал определяется из обратного преобразования:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds\, x^{-s}\, g(s).$$

Для преобразования Меллина сверткой функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определенных при $x>0$, называется интеграл:

$$\int_0^\infty dx\, x^{s-1}\int_0^\infty \frac{dt}{t}\, f_1(t)\; f_2\left(\frac{x}{t}\right) = \overline{f}_1(x)\,\overline{f}_2(x), \qquad (14)$$

где $\overline{f}_1(x)$ и $\overline{f}_2(x)$ – изображение функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$.

Анализируя формулу свертки (14), можно увидеть, что данное преобразование является наиболее подходящим для решения интегральных уравнений вида:

$$u(x) = \int_0^\infty \frac{dy}{y} u(y)\varphi\left(\frac{x}{y}\right) + f(x)$$

1.3.4. Функция Бесселя и ее интегральные представления

Уравнение Бесселя

$$x^2 y''_{xx} + x y'_x + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0$$

возникает при решении задач математической физики для круглых и цилиндрических тел методом разделения переменных в полярных и цилиндрических координатах. Каждое нетривиальное решение уравнения Бесселя называется цилиндрической функцией [9].

Частными примерами цилиндрических функций являются функции Бесселя первого рода $J_\nu(x)$ и второго рода $Y_\nu(x)$ ($Y_\nu(x)$ так же называют функцией Неймана). Они описываются формулами

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(x/2)^{\nu+2k}}{k!\Gamma(\nu+k+1)},\ Y_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)cos\pi\nu-J_{-\nu}(x)}{sin\pi\nu}$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция Эйлера, которая в комплексной полуплоскости $Re\,z>0$ определяется формулой

$$\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-t}t^{z-1}dt$$

и обладает следующими свойствами

1. $\Gamma(1)=1,\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$
2. $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z),\ \Gamma(n+1)=n!при\ n\in\mathbb{Z}$
3. $\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}$

На рисунке 1 представлены графики функций $J_\nu(x)$ при различных значениях индекса $(\nu=0,1,2,\ldots)$.

На рисунке 2 приведен график функций Бесселя второго рода $Y_\nu(x)$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$.

Функции Бесселя удовлетворяют следующим соотношениям, справедливым при $n=0,1,2,\ldots$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^\nu J_\nu(x)\right]=x^{\nu-n}J_{\nu-n}(x)$$

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^n\left[x^{-\nu}J_\nu(x)\right]=(-1)^n x^{-\nu-n}J_{\nu+n}(x)$$

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x)$$

$$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$$

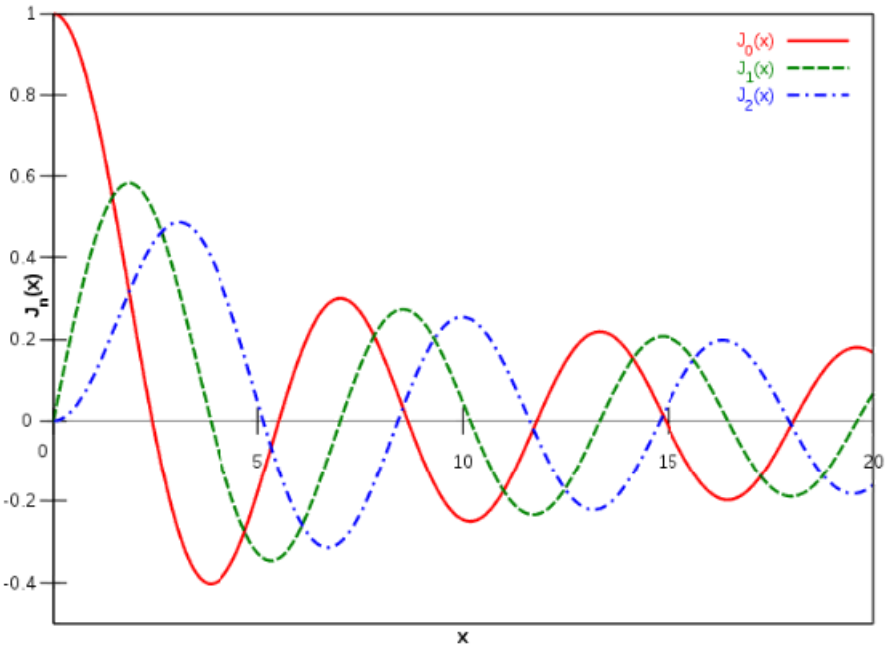


Рисунок 1 – Функции Бесселя первого рода

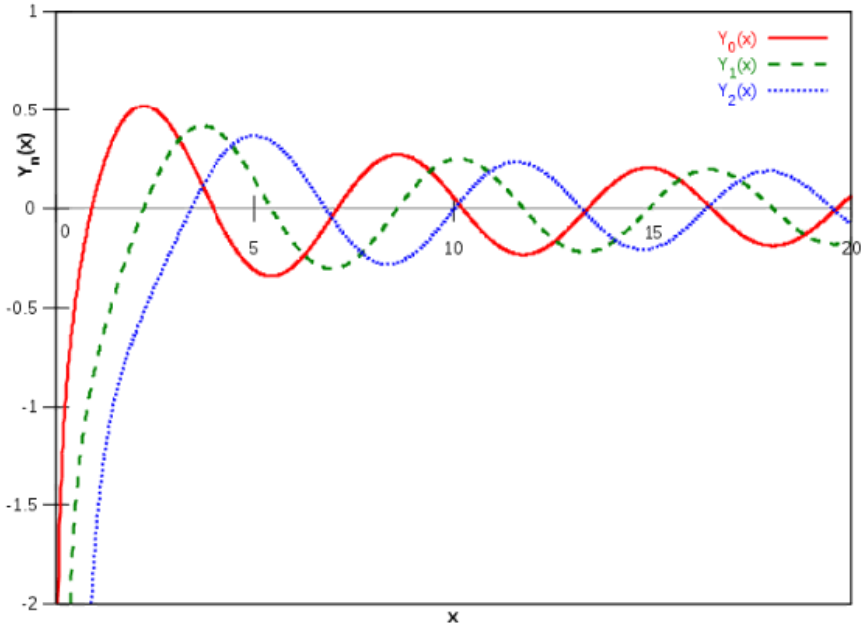


Рисунок 2 – Функции Бесселя второго рода

Отметим, что функции Бесселя с полуцелым индексом ν выражаются через элементарные функции:

$$J_{1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x, \qquad J_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x,$$

$$J_{3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(\frac{1}{x}\sin x-\cos x\right), \qquad J_{-3/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(-\frac{1}{x}\cos x-\sin x\right),$$

$$Y_{1/2}(x)=-\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x, \qquad Y_{-1/2}(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x.$$

Для функций $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ также справедливы интегральные представления, имеющие свою полезность на практике (при $x>0$)

$$\pi J_\nu(x)=\int_0^\pi \cos(x\sin\theta-\nu\theta)\,d\theta-\sin\pi\nu\int_0^\infty e^{-x\,sht-\nu t}dt,$$

$$\pi Y_\nu(x)=\int_0^\pi \sin(x\sin\theta-\nu\theta)d\theta-\int_0^\infty\left(e^{\nu t}+e^{-\nu t}\cos\pi\nu\right)e^{-x\,sht}dt.$$

При $|\nu|<\frac{1}{2}$

$$J_\nu(x)=\frac{2^{1+\nu}x^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-\nu)}\int_1^\infty\frac{\sin(xt)\,dt}{\left(t^2-1\right)^{\nu+1/2}},$$

$$Y_\nu(x)=-\frac{2^{1+\nu}x^{-\nu}}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2-\nu)}\int_1^\infty\frac{\cos(xt)\,dt}{\left(t^2-1\right)^{\nu+1/2}}.$$

При $\nu>-1/2$ получаем формулу Пуассона

$$J_\nu(x)=\frac{2(x/2)^\nu}{\sqrt{\pi}\Gamma(1/2+\nu)}\int_0^{\pi/2}\cos(x\cos t)\sin^{2\nu}t\,dt.$$

При $\nu=0$

$$J_0(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\sin(x\,cht)dt.$$

2. РЕШЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Интегральные уравнения типа свертки первого рода

Интегральное уравнение первого рода с разностным ядром на всей оси (или его еще называют уравнением типа свертки первого рода с одним ядром) выглядит следующим образом [10–12]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\,y(t)\,dt = f(x),\ -\infty < x < \infty, \tag{15}$$

где $y(t)$ – искомая функция, $K(x)$ – ядро интегрального уравнения, $f(x)$ – функция правой части.

На полуоси интегральное уравнение с разностным ядром имеет вид:

$$\int_{0}^{\infty} K(x-t)\,y(t)\,dt = f(x),\ 0 \le x < \infty. \tag{16}$$

Уравнение (16) называется интегральным уравнением Виннера-Хопфа первого рода.

Интегральное уравнение типа свертки с двумя ядрами первого рода имеет вид:

$$\int_{0}^{\infty} K_1(x-t)\,y(t)\,dt + \int_{-\infty}^{0} K_2(x-t)\,y(t)\,dt = f(x),\ -\infty < x < \infty, \tag{17}$$

где K_1 и K_2 являются ядрами интегрального уравнения (17).

Рассмотрим уравнение (15). Применим к нему интегральное преобразование Фурье. Тогда с учетом теоремы о свертке получим выражение:

$$\sqrt{2\pi}\,K(s)Y(s) = F(s).$$

Тем самым, решение уравнения (15) сведено к решению алгебраического уравнения. Решение последнего уравнения имеет форму:

$$Y(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{F(s)}{K(s)}.$$

Таким образом, изображение решения интегрального уравнения было выражено через изображения заданных функций – ядра и правой части. Само решение может быть выражено с помощью обратного преобразования:

$$y(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(s)}{K(s)}e^{isx}ds.$$

2.2. Интегральные уравнение типа свертки второго рода

Рассмотрим интегральное уравнение типа свертки второго рода с разностным ядром:

$$y(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(x-t)y(t)dt=f(x)\quad -\infty<x<\infty, \tag{18}$$

где $f(x)$ – известная функция, $K(x)$ – ядро уравнения, $y(x)$ – неизвестная функция, которую необходимо найти.

Так же, как и в случае уравнения с разностным ядром первого рода на полуоси, будем иметь

$$y(x)+\int_{0}^{\infty}K(x-t)y(t)dt=f(x),\ 0\le x<\infty.$$

Данное уравнение называется интегральным уравнением Винера-Хопфа второго рода.

Для решения уравнения (18), применим преобразование Фурье и теорему о свертке и получим соотношение:

$$Y(s)\left[1+K(s)\right]=F(s). \tag{19}$$

Из этого следует, что благодаря преобразованиям Фурье решение интегрального уравнения сводится к решению алгебраического уравнения (19) для изображения исходного решения. Если из уравнения (19) выразить $Y(s)$, то решение примет форму:

$$Y(s)=\frac{F(s)}{1+K(s)}. \tag{20}$$

Уравнение (20) выражает изображение решения интегрального уравнения через изображения заданных функций – ядра и правой части уравнения. Получим решение уравнения с помощью обратного преобразования:

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}Y(s)e^{-isx}ds=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(s)}{1+K(s)}e^{-isx}ds\,. \qquad (21)$$

Формула (21) не всегда удобна для решения, так как требует вычисления изображения для каждой $f(x)$. Поэтому чаще используют решение через резольвенту исходного решения. Сделаем преобразование формулы (20):

$$Y(s)=\left[1-R(s)\right]F(s),\;\; R(s)=\frac{K(s)}{1+K(s)}\,. \qquad (22)$$

Далее, используя обратное преобразование Фурье и теорему о свертке для изображения, получим:

$$y(x)=f(x)-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}R(x-t)\,f(t)dt\,, \qquad (23)$$

где резольвента имеет вид:

$$R(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{K(s)}{1+K(s)}e^{-isx}ds.$$

Следовательно, для определения решения уравнения (15) достаточно найти резольвенту.

В случае, когда функция $f(x)$ имеет специальный вид, резольвента является решением исходного интегрального уравнения. Из формул (19) и (20) можно сделать вывод, что при $Y(s)=R(s)$ следует равенство $F(s)=K(s)$. При условии, что $f(x)\equiv K(x)$, решением уравнения (18) является функция $y(x)\equiv R(x)$, то есть резольвента уравнения (18) удовлетворяет уравнению:

$$R(x)+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}K(x-t)R(t)dt=K(x)\quad -\infty<x<\infty\,.$$

2.3. Уравнение с ядром $K(x,t)=t^{-1}Q(x/t)$ на полуоси

Рассмотрим уравнение вида:

$$y(x)-\int_0^\infty \frac{1}{t}Q\left(\frac{x}{t}\right)y(t)dt=f(x). \tag{24}$$

Для того, чтобы решить данное уравнение, необходимо применить к нему интегральное преобразование Меллина, которое описано в пункте 1.3.3 и будет обозначаться с помощью символа $\aleph$.

Применяя преобразование Меллина и учитывая, что интеграл с таким ядром преобразуется по правилу:

$$\aleph\left\{\int_0^\infty \frac{1}{t}Q\left(\frac{x}{t}\right)y(t)dt\right\}=Q(s)Y(s).$$

приходим к уравнению для изображения искомой $Y(s)$:

$$Y(s)-Q(s)Y(s)=F(S).$$

Выразим необходимую величину $Y(s)$ и получим уравнение:

$$Y(s)=\frac{F(s)}{1-Q(s)}. \tag{25}$$

Применяя к формуле (25) обратное преобразование Меллина, то в итоге получим решение интегрального уравнения (24):

$$y(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{F(s)}{1-Q(s)}x^{-s}ds.$$

Также решение можно записать с помощью резольвенты:

$$y(x)=f(x)+\int_0^\infty \frac{1}{t}N\left(\frac{x}{t}\right)f(t)dt,$$

где

$$N(x)=\aleph^{-1}\{N(s)\},\ N(s)=\frac{Q(s)}{1-Q(s)}.$$

При использовании данного метода решения могут возникнуть трудности:

1. при получении изображения для ядра $K(x)$;
2. при нахождении оригинала решения по его изображению $y(s)$.

Для вычисления соответствующих интегралов применяют таблицы прямых и обратных преобразований Меллина. Во многих случаях сначала используют связывающие соотношения между преобразованием Меллина и преобразованиями Фурье и Лапласа, а после применяют прямые и обратные преобразования Фурье и Лапласа.

Замечание 1. Уравнение

$$y(x)-\int_0^{\infty} H\left(\frac{x}{t}\right)x^{\alpha}t^{-\alpha-1}y(t)dt = f(x)$$

можно записать в форме (21), если определить $K(z)=z^{\alpha}H(z)$.

2.4. Уравнение с ядром $K(x,t)=t^{\beta}Q(xt)$ на полуоси

Рассмотрим уравнение на полуоси:

$$y(x)-\int_0^{\infty} t^{\beta}Q(xt)y(t)dt = f(x). \qquad (26)$$

Для решения воспользуемся преобразование Меллина. Умножим обе части уравнения (26) на x^{-s} и проинтегрируем по x от нуля до бесконечности.

$$\int_0^{\infty} y(x)x^{-s}dx-\int_0^{\infty} t^{\beta}y(t)dt\int_0^{\infty} Q(xt)x^{-s}dx=\int_0^{\infty} f(x)x^{-s}dx.$$

Делая замену $z=xt$, получим:

$$Y(s)-Q(s)\int_0^{\infty} t^{\beta-s}y(t)dt = F(s). \qquad (27)$$

Учитывая равенство

$$\int_0^\infty t^{\beta-s} y(t)\,dt = Y(1+\beta-s),$$

перепишем уравнение (27) в следующем виде:

$$Y(s) - Q(s)Y(1+\beta-s) = F(s).$$

После замены $s = 1+\beta-s$, имеем :

$$Y(1+\beta-s) - Q(1+\beta-s)Y(s) = F(1+\beta-s).$$

Исключая из равенств $Y(1+\beta-s)$, выразим $Y(s)$ и получим изображение искомого решения:

$$Y(s) = \frac{F(s) + Q(s)F(1+\beta-s)}{1-Q(s)Q(1+\beta-s)}.$$

По формуле обратного преобразования Меллина получим решение интегрального уравнения (26):

$$y(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(s) + Q(s)F(1+\beta-s)}{1-Q(s)Q(1+\beta-s)} x^{-s}\,ds.$$

Замечание 2. Уравнение

$$y(x) - \int_0^\infty H(xt)x^p t^q y(t)\,dt = f(x)$$

можно записать в форме (26), если обозначить $Q(z) = z^p H(z)$, $\beta = q - p$.

2.5. Метод Карлемана для уравнения Винера – Хопфа второго рода

Рассмотрим уравнение типа свертки второго рода, которое часто встречается в приложениях [13,14]:

$$y(x) + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty K(x-t)y(t)\,dt = f(x), \qquad (28)$$

где $K(x)$ определено на всей действительной оси.

Также определим (28) на отрицательной оси. Введем односторонние функции

$$y_+(x)=\begin{cases} y(x) \, при \, x>0 \\ 0 \quad при \, x<0 \end{cases},$$

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x) \, при \, x>0 \\ 0 \quad при \, x<0 \end{cases},$$

$$y_-(x)=0 \ при \, x>0 \, .$$

В соответствии с вышеописанными дополнениями, получим уравнение

$$y_+(x)+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)y_+(x)dt = y_-(x)+ f_+(x). \qquad (29)$$

Вспомогательная односторонняя функция $y_-(x)$ введена с целью доопределения левой части уравнения (29) на отрицательной полуоси. Не трудно заметить, что эта функция является неизвестной в области $x<0$ и находится в процессе вычислений.

Применяя интегральное преобразование Фурье к (29), получим задачу Римана, которая будет иметь вид

$$Y^+(u)=\frac{Y^-(u)}{1+K(u)}+\frac{F^+(u)}{1+K(u)}.$$

Сделаем предположение о выполнении условия нормальности, т.е.

$$1+K(u)\neq 0,.$$

тогда запишем задачу Римана в ее обычной форме

$$Y^+(u)=D(u)Y^-(u)+H(u), \qquad (30)$$

где

$$D(u)=\frac{1}{1+K(u)}, H(u)=\frac{F^+(u)}{1+K(u)}.$$

Если индекс уравнения Винера-Хопфа

$$v=Ind\,\frac{1}{1+K(u)}$$

является положительным, то уравнение (28) при $f(x) \equiv 0$ имеет ν линейно независимых решений, а решение неоднородного уравнения (при невыполнении условия $f(x) \equiv 0$) зависит от ν комплексных постоянных.

Если $\nu \leq 0$, то отличных от нуля решений не существует. Неоднородное уравнение при $\nu = 0$ имеет единственное решение.

Когда решение уравнения (28) существует, оно находится по формуле

$$y(x) = y_+(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Y^+(u) e^{-iux} du /$$

2.6. Прямой квадратурный метод

Рассмотрим уравнение

$$x(t) - \lambda \int_{-\infty}^{t} h(t,s) x(s) ds = f(t), \qquad t \in [0,T], \tag{31}$$

где $h(t,s)$ – ядро интегрального уравнения, $f(t)$ – функция правой части, $x(t)$ – искомая функция.

Выделив интеграл на полуоси, получим

$$x(t) - \lambda \left(\int_{-\infty}^{0} h(t,s) \varphi(s) ds + \int_{0}^{t} h(t,s) x(s) ds \right) = f(t). \tag{32}$$

Здесь $\varphi(s)$ – известная предыстория при $t \leq 0$. С помощью замены $z = -s$ преобразуем интеграл к виду, подходящему для применения формулы Гаусса-Лагерра

$$I = \int_{0}^{\infty} h(t,-z) \varphi(-z) ds. \tag{33}$$

Для решения интеграла вида (33) необходимо воспользоваться квадратурной формулой Гаусса-Лагерра. Для его обозначения будет использоваться символ I.

Перепишем уравнение (32) с учетом всех преобразований и потребуем его выполнения в узлах сетки

$$x(t_k)-\lambda\int_0^{t_k} h(t_k,s)x(s)ds = f(t_k)+\lambda I(t_k),$$

где t_k – узлы сетки $\{t_k\}$, распределенные равномерно на промежутке $[0,T]$.

С целью упрощения изложения введем следующие обозначения

$$x(t_k)=x_k,\ f(t_k)=f_k, I(t_k)=I_k, k=0,..,N\ .$$

Для аппроксимации интеграла воспользуемся формулой средних прямоугольников. Тогда окончательно будем иметь

$$x_k-\lambda\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})h\left(t_k,\frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right)\frac{x_{i-1}+x_i}{2}=f_k+\lambda I_k.$$

Отсюда

$$x_k=\frac{f_k+\lambda I_k+\lambda\left(S+\frac{(t_k-t_{k-1})}{2}h\left(t_k,\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right)x_{k-1}\right)}{1-\frac{\lambda}{2}(t_k-t_{k-1})h\left(t_k,\frac{t_{k-1}+t_k}{2}\right)}. \qquad (34)$$

где $S=\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})h\left(t_k,\frac{t_{i-1}+t_i}{2}\right)\frac{x_{i-1}+x_i}{2}$, $k=1,2,\ldots N, x_0=\varphi(0)$.

Таким образом, определив по входным данным для конкретной сетки $\{t_k\}$ значения x_k, $k=1,2,\ldots,N$, по формуле (34) , получаем приближенное решение интегрального уравнения (31).

2.7. Итерационный метод

Построим еще один метод решения уравнения (31).

Так же как и в квадратурном методе выделим интеграл на полуоси и получим

$$x(t)-\lambda\left(\int_{-\infty}^{0} h(t,s)\varphi(s)ds+\int_0^t h(t,s)x(s)ds\right)=f(t) \qquad (35)$$

$$x(x)-\lambda\int_0^t h(t,s)x(s)ds=F(t)$$

где

$$F(t)=f(t)+\lambda\int_0^{\infty}h(t,-s)\varphi(-s)ds.$$

Приближенное решение уравнения (35) будем определять последовательно по следующей итерационной схеме

$$x_{n+1}(t)=F(t)+\lambda\int_0^t h(t,s)x_n(s)ds, n=0,1,2,\ldots,m. \qquad (36)$$

где в качестве начального приближения берется функция

$$x_0(t)=F(t).$$

Для определения приближенного решения на каждом шаге n итерационного процесса (36) разобьем отрезок $[0,T]$ на N частей точками $t_k=\frac{Tk}{N}, k=0,1,\ldots,N$. На каждом из сегментов $[t_{k-1},t_k]$ введем дополнительные узлы $t_k^j,\ j=\overline{1,r}$ по формуле

$$t_k^j=\frac{t_{k-1}+t_k}{2}+\frac{t_k-t_{k-1}}{2}\xi_j,$$

где ξ_j – нули многочлена Лежандра степени r. Такой выбор узлов обусловлен необходимостью аппроксимации интегралов на каждом сегменте $[t_{k-1},t_k]$. Для решения этой задачи применим квадратурную формулу Гаусса по узлам t_k^j. Будем определять значения приближения x_{n+1} в каждой точке построенной сетки

$$x_{n+1}\left(t_k^j\right)=F\left(t_k^j\right)+\lambda\sum_{l=1}^{k-1}\int_{t_{l-1}}^{t_l}h\left(t_k^j,s\right)x_n(s)ds+\int_{t_{k-1}}^{t_k^j}h\left(t_k^j,s\right)x_n(s)ds. \qquad (37)$$

Для вычисления последнего интеграла в (37) вводим дополнительные узлы

$$\tau_l = \frac{t_{k-1} + t_k^j}{2} + \frac{t_k^j - t_{k-1}}{2}\xi_l,$$

а в качестве значений функции x_n берутся значения интерполяционного сплайна, который представляет собой многочлен Лагранжа, построенный на каждом сегменте по введенной сетке узлов

$$L(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x),$$

где базисные полиномы $l_i(x)$ определяются по формуле

$$l_i(x) = \prod_{j=0,\, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

3. ПРАКТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

3.1. Аппроксимация интеграла

В качестве модельной задачи рассмотрим интеграл

$$\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x} dx = \frac{1}{4}. \tag{38}$$

Для его аппроксимации использовалась квадратурная формула Гаусса-Лагерра. В таблице 2 представлены погрешности $\varepsilon = \left| I(n) - I^* \right|$ приближенного вычисления интеграла (38) при различных значениях n, где $I(n)$ – приближенное значение интеграла, а I^* - точное значение.

Реализация данной задачи в среде разработки Maple 2017 представлена в приложении А.

Таблица 2 – Зависимость погрешности ε вычислений от числа n

n	ε
2	0,1053430
5	$0{,}1287 \cdot 10^{-2}$
8	$0{,}15621 \cdot 10^{-4}$
12	$0{,}13084 \cdot 10^{-7}$
15	$0{,}11102 \cdot 10^{-10}$
24	$0{,}93214 \cdot 10^{-15}$

3.2. Решение интегрального уравнения с помощью квадратурного метода

Рассмотрим интегральное уравнение

$$x(t) - \lambda \int_{-\infty}^{t} te^{2s} x(s) ds = t^2 - \frac{\lambda\left(2t^2 - 2t + 1\right)te^{2t}}{4}, \tag{39}$$

точным решением которого является функция $x^*(t) = t^2$, а известной предысторией – $\varphi(s) = s^2$.

При расчетах использовалась формула Гаусса – Лагерра по 24 узлам и прямой квадратурный метод. Результаты решения уравнения (39) представлены в таблице 3 , где N – число узлов сетки, а ε – погрешность решения.

Здесь $\varepsilon = \max\limits_{k=1,..,N} \left| x_k - x^*(t_k) \right|$, где x^* - точное решение интегрального уравнения.

Реализация задачи на языке программирования C++ представлена в приложении Б.

Таблица 3 – Зависимость погрешности ε вычислений от числа N

N	ε
100	$8,4859 \cdot 10^{-5}$
500	$3,3927 \cdot 10^{-6}$
1000	$8,4798 \cdot 10^{-7}$
5000	$3,3919 \cdot 10^{-9}$
20000	$2,1198 \cdot 10^{-12}$
50000	$3,3911 \cdot 10^{-15}$

3.3. Решение интегрального уравнения с помощью итерационного метода

Снова рассмотрим уравнение

$$x(t) - \lambda \int\limits_{-\infty}^{t} te^{2s} x(s)\,ds = t^2 - \frac{\lambda\left(2t^2 - 2t + 1\right)te^{2t}}{4}$$

с тем же точным решением и известной предысторией из предыдущей задачи.

Для его решения использовался итерационный метод, а для аппроксимации несобственного интеграла - квадратурная формула Гаусса-Лагерра по 24 узлам.

Используются следующие обозначения: N – число подобластей разбиения, m – число итераций, ε – погрешность решения. Результаты представлены в таблице 4.

Реализация задачи на языке программирования на C++ представлена в приложении В.

Таблица 4 – Зависимость погрешности ε вычислений от числа N

N	m	ε
10	10	$1{,}1337 \cdot 10^{-4}$
50	12	$4{,}3879 \cdot 10^{-6}$
80	15	$1{,}4328 \cdot 10^{-8}$
100	15	$1{,}4467 \cdot 10^{-9}$
100	18	$2{,}612 \cdot 10^{-11}$
100	20	$2{,}217 \cdot 10^{-13}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью выпускной квалификационной работы было изучение математических моделей, которые описаны интегральными уравнениями различного типа с бесконечными пределами интегрирования, в том числе рассмотрение реологической модели наследственной ползучести. С этой целью в работе предложены методы аппроксимации несобственных интегралов на полуоси, в том числе применение квадратурной формулы Гаусса – Лагерра. Также полезными являются интегральные преобразования, применяемые как для интегралов, так и для интегральных уравнений. Построены эффективные квадратурные и итерационные методы численного решения интегральных уравнений на полуоси.

На языке программирования C++ реализованы алгоритмы, позволяющие получить численное решение уравнений. Анализируя результаты решения модельных задач, можно сделать вывод о хорошей сходимости квадратурного и итерационного методов. Однако формула Гаусса – Лагерра имеет свои ограничения: для ее применения используются нули многочлена Лагерра и коэффициенты, полученные при максимальной степени $N = 24$. Далее следует отметить, что главными параметрами, отвечающими за сходимость методов, являются число разбиения области $[0, T]$ и количество итераций, при увеличении которых погрешность вычисления стремится к нулю. Зависимости погрешности методов от их параметров представлены в таблицах 2-4 в практической части работы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Born, M. The Dynamical Theory of Crystal Lattices / M. Born, K. Huang. – M. : Oxford Clarendon Press, 1954. – 231 p.

2. Малкин, А. Я. Реология: концепции, методы, приложения./ А.Я. Малкин, А.И. Исаев– СПб.: Профессия, 2007. – 560 с.

3. Тында, А. Н. Аппроксимация решений слабосингулярных интегральных уравнений Вольтерра теории наследственной ползучести / А. Н. Тында, О. А. Гурова // Математическое и компьютерное моделирование естественнонаучных и социальных проблем : сборник статей VI Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза : Приволжский Дом знаний, 2012. – С. 54–58.

4. Copson, E. T. . Asymptotic expansions./ E. T. Copson. - Cambridge at the University Press, 1965. – 157 p.

5. Ильин, А. М. Асимптотические методы в анализе / А. М. Ильин, А. Р. Данилин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 248 с.

6. Абрамовиц, М. Справочник по специальным функциям / под. ред. М. Абрамовица, И. Стигана. – М. : Наука, 1979. – 832 с.

7. Кузнецов, А. В.. Интегральные преобразования в задачах теоретической физики: учебное пособие / А. В. Кузнецов, Д. А. Румянцев; Яросл. гос. ун-т им. П. Г. Демидова – Ярославль: ЯрГУ, 2013. – 96 с.

8. Князев, П. Н. Интегральные преобразования. / П. Н. Князев, под. ред. Ф.Д. Гахова. – М.:, «Высшая школа». 1969. – 198 с.

9. Холодова, С. Е. Специальные функции в задачах математической физики / С. Е, Холодова, С. И. Перегудин. – СПб: НИУ ИТМО, 2012 – 72 с.

10. Манжиров, А. В. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения./ А. В. Манжиров, А. Д. Полянин – М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2000. – 384 с.

11. Верлань, А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы./ А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков – Киев: Наукова думка, 1986. – 544 с.

12. Бахвалов, Н. С. Численные методы в задачах и упражнениях. Учеб. пособие / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин., Е. В. Чижонков под ред. В. А. Садовничего.- М.:Высш. шк. 2000. – 190с

13. Владимиров, В.С. Уравнение математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов – М.: ФИЗМАЛИТ. – 2004. – Р.400.

14. Banas, J. On solutions of a quadratic Urysohn integral equation on an ′ unbounded interval / J. Banas, L. Olszowy // Dynamic Systems and Applications ′ – 2008.– Vol.17, №2. –255–270.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Листинг решения интеграла на полуоси

(обязательное)

Данная программа была написана в среде разработки Maple 2017. В ней реализуется алгоритм решение интеграла на полуоси с помощью квадратурной формулы Гаусса – Лагерра. На входе подается подынтегральная функция $f(x)$, нули полинома Лагерра u и веса квадратурной формулы w. Полученные приближенные значения интеграла помещаются в переменную $pribl$.

```
restart;
Digits := 50;
f := proc (x) options operator, arrow; x^2*exp(-2*x) end proc;
toch := 1/4;
n := 24;
u := [0.590198521815079770e-1, .311239146198483727, .7660969055459366,
1.425597590803613, 2.29256205863219029, 3.37077426420899722, 4.6650837034617079,
6.18153511873676541, 7.92753924717215218, 9.91209801507770602, 12.1461027117297656,
14.6427322895966743, 17.41799266465089787, 20.4914600826164247, 23.8873298481697332,
27.6359371743327174, 31.7760413523747233, 36.3584058016516217, 41.4517204848707670,
47.1531064451563230, 53.6085745446950689, 61.0585314472187616, 69.9622400351050304,
81.4982792339488854];
w := [.142811973334781851, .258774107517423903, .258806707272869802,
.183322688977778025, 0.981662726299188922e-1, 0.407324781514108646 0e-1,
0.132260194051201567e-1, 0.336934905847830355e-2, 0.672162564093547890e-3,
0.104461214659275180e-3, 0.125447219779933332e-4, 0.115131581273279 92e-5,
0.796081295913363026e-7, 0.407285898754999966e-8, 0.150700822629258492e-9,
0.391773651505845 13e-11, 0.689418105295808 56e-13, 0.781980038245944847e-15,
0.535018881301003 7e-17, 0.201051746455550 3447e-19, 0.360576586455295904e-22,
0.245181884587840269e-25, 0.408830159368065 7e-29, 0.557534578832835 6e-33];
pribl := evalf(sum(w[i]*f(u[i])*subs(x = u[i], exp(x)), i = 1 .. n)) ;
toch-pribl;
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Листинг решения интегрального уравнения с помощью квадратурного метода

(обязательное)

Данная программа была написана в среде разработки Microsoft Visual Studio 2010 на языке C++. В ней реализуется алгоритм решения модельной задачи 2 с помощью прямого квадратурного метода. На входе подается ядро интегрального уравнения $double\,h(double\,t, double\,s)$, функция правой части $double\ func(double\,t)$, известная предыстория $double\,phi(double\,t)$ и точное решение $doubletochn(double\,t)$, с которым в дальнейшем сравнивается полученное приближенное решение. Приближенное решение строится с помощью прямого квадратурного метода $Xk[k]$.

```
#include <stdio.h>
#include <conio.h>
#include <math.h>
#include <Windows.h>
#include <stdlib.h>
#include <iostream>
#include <fstream>

using namespace std;
double korni[24] = {0.0590198521815079770, 0.311239146198483727, 0.7660969055459366,
1.425597590803613, 2.29256205863219029, 3.37077426420899722, 4.6650837034617079,
6.18153511873676541, 7.92753924717215218, 9.91209801507770602, 12.1461027117297656,
14.6427322895966743, 17.41799266465089787, 20.4914600826164247, 23.8873298481697332,
27.6359371743327174, 31.7760413523747233, 36.3584058016516217, 41.4517204848707670,
47.1531064451563230, 53.6085745446950689, 61.0585314472187616, 69.9622400351050304,
81.4982792339488854};
double koef[24] = {0.142811973334781851, 0.258774107517423903, 0.258806707272869802,
0.183322688977778025, 0.0981662726299188922, 0.0407324781514108646 0,
0.0132260194051201567, 0.00336934905847830355, 0.000672162564093547890,
0.000104461214659275180, 0.0000125447219779933332, 0.00000115131581273279 92,
0.000000079608129591336302 6, 0.000000004072858987549999 66,
0.000000000150700822629258492, 0.000000000003917736515058 4513,
0.000000000000068941810529580856, 0.000000000000000781980038245944847,
0.000000000000000005350188813010037, 0.000000000000000000020105174645555034 47,
0.000000000000000000000036057658645529590 4,
0.000000000000000000000000024518188458784026 9,
0.000000000000000000000000000004088301593680657,
0.000000000000000000000000000000000055753457883283 56};
double a = 0.0;
```

```
double b = 1.0;
double lambda = 1 ;
int n = 50000;

double func(double t)
{
	return pow(t,2)-((lambda*(2*pow(t,2)-2*t+1)*t*exp(2*t))/4) ;
}
double h(double t, double s)
{
	return t*exp(2*s);
}
double phi(double t)
{
	return pow(t,2);
}
double tochn(double t)
{
	return pow(t,2);
}
double I(double t)
{
	double in=0;
	for(int i=0;i<=23;i++)
	{
		in+=koef[i]*exp(korni[i])*h(t,-korni[i])*phi(-korni[i]);
	}
	return in;
}

void main ()
{
	setlocale(LC_ALL, "Russian");

	double *Z = new double [n];//разбиение
	double *Xk = new double [n];// значения xk
	double sum;
	double step = (b-a)/n;
	for (int i=0; i<=n; i++)
	{
		Z[i]=a+step*i;
	}

	Xk[0] = phi(0);
	for(int k = 1;k <= n; k++){
		sum=0;
		for(int j = 1; j <= k-1; j++){

			sum +=(Z[j]-Z[j-1])*h(Z[k],(Z[j-1]+Z[j])/2)*((Xk[j-1]+Xk[j])/2);
}
```

```
                        Xk[k] = (func(Z[k]) + lambda*I(Z[k]) + lambda*(sum + ((Z[k]-Z[k-
1])/2)*h(Z[k],((Z[k-1]+Z[k])/2))*Xk[k-1]))/(1-(lambda/2)*(Z[k]-Z[k-1])*h(Z[k],((Z[k-
1]+Z[k])/2)));

        }

        //for(int j=1;j<=n;j++)
        //{cout<< Z[j] << "   " <<  Xk[j] << "   " << tochn(Z[j]) << endl;
        //}
        double max=0;
        for(int k=1;k<=n;k++){
                if ((abs(Xk[k]-tochn(Z[k])) > max)
                        max = abs(Xk[k]-tochn(Z[k]));
        }
        cout<<max;

        _getch();
}
```

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Листинг решения интегрального уравнения с помощью итерационного метода

(обязательное)

Данная программа была написана в среде разработки Microsoft Visual Studio 2010 на языке C++. В ней реализуется алгоритм решения модельной задачи 2 с помощью прямого итерационного метода. На входе подается ядро интегрального уравнения $double\,H(double\,t, double\,s)$, функция правой части $double\,f(double\,t)$, известная предыстория $double\,phi(double\,t)$, точное решение $double\,xe(double\,t)$, и начальное приближение $double\,x0(double\,t)$. Для вычисления обычных интегралов используется формула Гаусса, а для вычисления интегралов на полуоси – формула Гаусса-Лагерра. После получения значений $X1[k][l]$ строится интерполяционный сплайн, и в конечном итоге значения сплайна в каждом узле сетки сравнивается с соответствующим значением точного решения в тех же узлах.

```
#include <stdio.h>
#include <iostream>
#include <conio.h>
#include <math.h>
#include "LegandrX.h"

using namespace std;

#define  a     0
#define  b     1
#define  N     150    // число основных областей
#define  ms    4    // число узлов квадратурной формулы Гаусса (ms-1)
#define  m     20   // число итераций
#define  v     1  // константа для разбиения подобластей
double lambda = 1 ;

double xe(double t);
double x0(double t);
```

```
double xa(double t);
double H(double t,double s);
double I(double t);
double f(double t);
double P(int k,int n, double x);
double t[N+1];
double w[ms+1],Lx[ms+1];//Веса и узлы квадр. формулы Гаусса
double tt[N+1][ms+1]; // массив узлов для квадрат. формул
double X[N+1][ms+1]; // Значения неизв. функции в узлах
double X1[N+1][ms+1]; // Значения неизв. функции в узлах


double x0(double t)
  { return f(t); }

double phi(double t)
{ return t*t; }

double xe(double t)
  { return t*t; }

double H(double t, double s )
  { return t*exp(2*s); }

double f(double t)
  { return pow(t,2)-((lambda*(2*pow(t,2)-2*t+1)*t*exp(2*t))/4); }

void main()
{
  int i,j,l,k,it;
  double tmp,sum,tmp1,max;

  for (i=0; i<=N; i++)
    t[i]=a+(b-a)*pow(double(i)/N,v);
//----------------------------------------

  for (i=0; i<=N; i++)
    for (j=0; j<=ms; j++)
      tt[i][j]=0;

  for(i=1; i<=ms; i++)
    {
     w[i]=Leg4[i-1][1];
     Lx[i]=Leg4[i-1][0];
    }
```

```
  for (k=1; k<=N; k++)
    {
     tt[k][0]=t[k-1];
     for (j=1; j<=ms; j++)
       tt[k][j]=0.5*(t[k]+t[k-1])+0.5*(t[k]-t[k-1])*Lx[j];
    }
  for (i=1; i<=N; i++)
    for (j=0; j<=ms; j++)
      X[i][j]=x0(tt[i][j]);

for (it=1; it<=m; it++)
  {
   for (k=1; k<=N; k++)
     for (l=0; l<=ms; l++)
       {
        sum=0;
        tmp1=0;
        for (i=1; i<=k-1; i++)
          {
           tmp=0;
           for (j=1; j<=ms; j++)
             tmp+=w[j]*H(tt[k][l],tt[i][j])*X[i][j];
           tmp*=0.5*(t[i]-t[i-1]);
           sum+=tmp;
          }
        for (j=1; j<=ms; j++)
          {
           tmp=0.5*(tt[k][l]+t[k-1])+0.5*(tt[k][l]-t[k-1])*Lx[j];
           tmp1+=w[j]*H(tt[k][l],tmp)*xa(tmp);
          }
        sum+=tmp1*0.5*(tt[k][l]-t[k-1]);
        X1[k][l]=f(tt[k][l])+I(tt[k][l])+sum;
       }

     for (k=1; k<=N; k++)
       for (l=0; l<=ms; l++)
         X[k][l]=X1[k][l];
  }

  max=0;
  tmp=0;
  for (i=1; i<=N; i++)
    for (j=0; j<=ms; j++)
      {
       if (fabs(X[i][j]-xe(tt[i][j]))>max)
         {
```

```
          max=fabs(X[i][j]-xe(tt[i][j]));
          tmp=tt[i][j];
         }
       }

  cout<<"N="<<N<<endl;
  cout<<"Number of iterations: "<<m<<endl;
  cout<<"The error on the grid: "<<max<<endl;//ошибка в сетке
  cout<<"Achieved at the point t="<<tmp<<endl;//достигается в точке
//-----------------------------------------------------
  max=0;
  tmp=0;
  k=105;
  for (i=0; i<=k; i++)
    {
     tmp1=a+(b-a)*double(i)/k;
     if (fabs(xa(tmp1)-xe(tmp1))>max)
       {
        max=fabs(xa(tmp1)-xe(tmp1));
        tmp=tmp1;
       }
    }

  cout<<"The error on the whole interval: "<<max<<endl;
  cout<<"Achieved at the point t="<<tmp<<endl;

          _getch();
}

double P(int k,int n, double x)
  {
    int i;
    double F_pol;
    F_pol=1;
    for (i=0; i<=ms; i++)
      if (i!=n) F_pol*=(x-tt[k][i])/(tt[k][n]-tt[k][i]);
    return F_pol;
  }

double xa(double x)
  {
    int k,i;
    double tmp;
    k=1;
    for (i=0; i<=N-1; i++)
      if ( (x>t[i])&&(x<=t[i+1]) ) k=i+1;
```

```
   tmp=0;
   for (i=0; i<=ms; i++)
     tmp+=X[k][i]*P(k,i,x);
   return tmp;
  }
double I(double t)
{
        double korni[24] = {0.0590198521815079770, 0.311239146198483727,
0.7660969055459366, 1.425597590803613, 2.29256205863219029, 3.37077426420899722,
4.6650837034617079, 6.18153511873676541, 7.92753924717215218, 9.91209801507770602,
12.1461027117297656, 14.6427322895966743, 17.41799266465089787, 20.4914600826164247,
23.8873298481697332, 27.6359371743327174, 31.7760413523747233, 36.3584058016516217,
41.4517204848707670, 47.1531064451563230, 53.6085745446950689, 61.0585314472187616,
69.9622400351050304, 81.4982792339488854};
   double koef[24] = {0.142811973334781851, 0.258774107517423903, 0.258806707272869802,
0.183322688977778025, 0.0981662726299188922, 0.0407324781514108646 0,
0.0132260194051201567, 0.00336934905847830355, 0.000672162564093547890,
0.000104461214659275180, 0.0000125447219779933332, 0.00000115131581273279 92,
0.000000079608129591336302 6, 0.000000004072858987549999 66,
0.000000000150700822629258492, 0.000000000003917736515058451 3,
0.000000000000068941810529580856, 0.000000000000000781980038245944847,
0.000000000000000005350188813010037, 0.000000000000000000020105174645555034 47,
0.000000000000000000000360576586455295904,
0.000000000000000000000000245181884587840269,
0.000000000000000000000000000004088301593680657,
0.000000000000000000000000000000000055753457883283 56};
        double in=0;
        for(int i=0;i<=23;i++)
        {
                in+=koef[i]*exp(korni[i])*H(t,-korni[i])*phi(-korni[i]);
        }
        return in;
}
```

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Узлы и веса квадратурной формулы Гаусса

(обязательное)

Данные узлы и веса необходимы для построения квадратурной формулы Гаусса для решения определенных интегралов.

```
//----------------------------------
 double Leg1[1][2]=
  { 0.000000000000000, 2.000000000000000 };
//----------------------------------
 double Leg2[2][2]=
 {{-0.577350269189626, 1.000000000000000 },
  { 0.577350269189626, 1.000000000000000 }};

//----------------------------------
 double Leg3[3][2]=
 {{-0.774546669241483, 0.555555555555556 },
  { 0                , 0.888888888888889 },
  { 0.774546669241483, 0.555555555555556 }};

//----------------------------------
 double Leg4[4][2]=
 {{-0.861136311594053, 0.347854845137454},
  {-0.339981043584856, 0.652145154862546},
  { 0.339981043584856, 0.652145154862546},
  { 0.861136311594053, 0.347854845137454}};

//----------------------------------
 double Leg5[5][2]=
 {{-0.906179845938664, 0.236926885056189},
  {-0.538469310105683, 0.478628670499366},
  { 0                , 0.56888888888889},
  { 0.538469310105683, 0.478628670499366},
  { 0.906179845938664, 0.236926885056189}};

//----------------------------------
 double Leg6[6][2]=
 {{-0.932469514203152, 0.171324492379170},
  {-0.661209386466265, 0.360761573048139},
  {-0.238619186083197, 0.467913934572691},
  { 0.238619186083197, 0.467913934572691},
  { 0.661209386466265, 0.360761573048139},
  { 0.932469514203152, 0.171324492379170}};
```

```
//---------------------------------
 double Leg7[7][2]=
 {{-0.949107912342759, 0.129484966168870},
  {-0.741531185599394, 0.279705391489277},
  {-0.405845151377397, 0.381830050505119},
  { 0               , 0.417959183673469},
  { 0.405845151377397, 0.381830050505119},
  { 0.741531185599394, 0.279705391489277},
  { 0.949107912342759, 0.129484966168870}};

//---------------------------------
 double Leg8[8][2]=
 {{-0.960289856497536, 0.101228536290376},
  {-0.796666477413627, 0.222381034453374},
  {-0.525532409916329, 0.313706645877887},
  {-0.183434642495650, 0.362683783378362},
  { 0.183434642495650, 0.362683783378362},
  { 0.525532409916329, 0.313706645877887},
  { 0.796666477413627, 0.222381034453374},
  { 0.960289856497536, 0.101228536290376}};

//---------------------------------
 double Leg9[9][2]=
 {{-0.968160239507626, 0.081274388361574},
  {-0.836031107326636, 0.180648160694587},
  {-0.613371432700590, 0.260610696402935},
  {-0.324253423403809, 0.312347077040003},
  { 0.               , 0.330239355001260},
  { 0.324253423403809, 0.312347077040003},
  { 0.613371432700590, 0.260610696402935},
  { 0.836031107326636, 0.180648160694587},
  { 0.968160239507626, 0.081274388361574}};

//---------------------------------
 double Leg10[10][2]=
 {{-0.973906528517172, 0.066671344308688},
  {-0.865063366688985, 0.149451349150581},
  {-0.679409568299024, 0.219086362515982},
  {-0.433395394129247, 0.269266719309996},
  {-0.148874338981631, 0.295524224714753},
  { 0.148874338981631, 0.295524224714753},
  { 0.433395394129247, 0.269266719309996},
  { 0.679409568299024, 0.219086362515982},
  { 0.865063366688985, 0.149451349150581},
  { 0.973906528517172, 0.066671344308688}};
```

```
//---------------------------------
 double Leg12[12][2]=
 {{-0.981560634246719, 0.047175336386512},
  {-0.904117256370475, 0.106939325995318},
  {-0.769902674194305, 0.160078328543346},
  {-0.587317954286617, 0.203167426723066},
  {-0.367831498998180, 0.233492536538355},
  {-0.125233408511469, 0.249147045813403},
  { 0.125233408511469, 0.249147045813403},
  { 0.367831498998180, 0.233492536538355},
  { 0.587317954286617, 0.203167426723066},
  { 0.769902674194305, 0.160078328543346},
  { 0.904117256370475, 0.106939325995318},
  { 0.981560634246719, 0.047175336386512}};
//---------------------------------
```